Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии

Катерина Хаџи-Велкова Санева, Сања Атанасова,
Анета Бучковска

Збирка решени задачи од веројатност

Скопје, 2016

Автори:
Катерина Хаџи-Велкова Санева
Сања Атанасова
Анета Бучковска

Наслов:
Збирка решени задачи од веројатност

Рецензенти:
Д-р Боро Пиперевски, професор во пензија, Факултет за електротехника
и информациски технологии, Скопје

Д-р Никола Тунески, редовен професор, Машински факултет, Скопје

Со одлуката бр. 02-1436/48 од 19.08.2015 година на Наставно-научниот совет на Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје книгата е одобрена за објавување како универзитетско помагало.

ПРЕДГОВОР

Оваа збирка решени задачи е наменета за студентите од Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје, но можат да ја користат и студенти од другите технички и природно-математички факултети, како и инженери и средношколци кои имаат потреба и интерес од совладување на теоријата на веројатност преку решени задачи.

Книгата е поделена во шест глави. На почетокот на секоја глава е даден краток преглед од теоријата, како што се дефиниции, особини и познати резултати кои се потребни за успешно следење на решенијата на задачите. Покрај решените задачи, на крајот од секоја глава се дадени дополнителни нерешени задачи со конечни решенија или упатство за решавање, кои се наменети за самостојна работа на студентите и читателите. При подготовка на збирката, се обидовме задачите да ги подредиме методолошки, а нивните решенија да ги изложиме детално, што ќе овозможи секој читател да ги совлада без поголеми тешкотии. Покрај ова, со цел да се олесни изучувањето на алатките и техниките за решавање задачи од областа на веројатноста, збирката содржи и голем број слики и графици.

Во збирката се обработени оние области и поими од веројатноста кои се изучуваат во рамките на едносеместралните предмети: случајни процеси и системи, и веројатност и статистика, па поради тоа некои типови задачи се позастапени. Најголем дел од задачите во збирката се избрани испитни задачи од последните десет години од предметот веројатност и статистика.

Им благодариме на рецензентите проф. д-р Боро Пиперевски и проф. д-р Никола Тунески кои со своите добронамерни сугестии и забелешки помогнаа во подобрувањето на оваа збирка задачи.

Однапред им благодариме на сите читатели кои со свои коментари, сугестии, посочување на евентуални грешки или пофалби ќе придонесат за подобрување на ова збирка решени задачи при нејзиното преиздавање.

Скопје, февруари 2016. година Авторите

Содржина

1. ЕЛЕМЕНТИ ОД КОМБИНАТОРИКА

Го разгледуваме множеството $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ од n елементи. Сакаме да избереме k елементи од ова множество и да ги подредиме по редоследот на избирање. Секој ваков распоред се вика ***варијација без повторување*** од n елементи и класа k. Постојат n начини да се избере првиот елемент, $n-1$ начини за бирање на вториот елемент, $n-2$ начини за бирање на третиот елемент, итн. Продолжуваме со оваа постапка се до изборот на k-тиот елемент кој може да се избере на $n-k+1$ начини. Според тоа, k-те елементи може да се изберат и распоредат на $n(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)$ начини. Бидејќи

$$n(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)=\frac{n(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!},$$

следува дека бројот на варијации без повторување од n елементи и класа k е

$$V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ако $k=n$, тогаш бројот на начини на кои може да се распоредат сите елементи од множеството A е $n(n-1)\,\cdots\,(n-n+1)=n!$. Секој распоред на n различни елементи се вика ***пермутација без повторување***. Нивниот број $P(n)$ се пресметува според формулата

$$P(n)=n!.$$

Во случај кога некој од елементите во пермутацијата се повторува, таа се вика ***пермутација со повторување***. За да го добиеме бројот на пермутации со повторување, разгледуваме n елементи од кои k се различни: a_1, a_2, ..., a_k $(k\leq n)$. Нека елементот a_1 се појавува n_1 пати, елементот a_2 се појавува n_2 пати, ... , елементот a_k се појавува n_k пати. Притоа важи $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. Дадена пермутација нема да се промени ако исти елементи си ги променат местата. Според тоа, во овој случај бројот на пермутации од n елементи нема да биде $n!$, туку ќе биде намален за еден фактор кој го определуваме на следниов начин. Елементите a_1 може меѓусебно да ги пермутираме на $n_1!$ начини, а тоа да не доведе до промена на пермутацијата. Постојат $n_2!$ пермутации на елементите a_2 кои имаат ист ефект. Ако истовремено извршуваме меѓусебна размена на местата на елементите a_1 и меѓусебна размена на местата на елементите a_2, тоа може да се направи на $n_1!n_2!$ начини. Со продолжување на постапката за сите *k* елементи: a_1, a_2, ..., a_k, заклучуваме дека менувањето на местата на истите елементи во секоја од *k*-те групи од елементи, а притоа пермутацијата да не се промени, може да се направи на $n_1!n_2!\cdots n_k!$ начини. Според тоа, вкупниот број на пермутации со повторување од *n* елементи е

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(n) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Ако во варијација од *n* елементи и класа *k*, некој од елементите се повторува се добива ***варијација со повторување***. Во овој случај, при избирање и распоредување на *k* елементи од множеството *A*, секој од елементите може да се избере на *n* начини, па според тоа за бројот на варијации со повторување од *n* елементи и класа *k* се добива:

$$\overline{V}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ пати}} = n^k .$$

Секое подмножество со *k* елементи од множеството *A* се вика ***комбинација без повторување*** од *n* елементи и класа *k*. За разлика од варијациите, кај комбинациите редоследот на елементите не е битен. Поради тоа, на секоја комбинација од класа *k* и одговараат $k!$ варијации од класа *k*. Значи $V_n^k = k!C_n^k$, каде што C_n^k е бројот на сите комбинации без повторување од *n* елементи и класа *k*, од каде што ја добиваме формулата

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Ако во комбинацијата некој од елементите се повторува, таа се нарекува ***комбинација со повторување***. Бројот на сите комбинации со повторување од *n* елементи и класа *k* е

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

1. Колку деветцифрени броеви можат да се состават од две 5-ки, три 6-ки и четири 7-ци?

Решение.

Треба да формираме деветцифрени броеви од цифрите: 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, па добиваме вкупно $P_{2,3,4}(9)=\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}=1260$ броеви.

2. На колку начини може да се прикаже производот $a^3b^2c^3$ како производ од a,b и c?

Решение.

Производот $a^3b^2c^3$ се добива со пермутација на елементите:

$$a,\, a,\, a,\, b,\, b,\, c,\, c\,,c.$$

Бројот на овие пермутации е

$$P_{3,2,3}(8)=\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 3!}=560.$$

3. Колку седумцифрени броеви може да се образуваат од цифрите: 0, 0, 0, 0, 1, 2 и 3?

Решение.

Од сите пермутации образувани од цифрите: 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3 ги одземаме пермутациите кои започнуваат со цифрата 0 и добиваме:

$$P_{4,1,1,1}(7)-P_{3,1,1,1}(6)=\frac{7!}{4!}-\frac{6!}{3!}=90\,.$$

Задачата можеме да ја решиме и на следниот начин.

Бараните седумцифрени броеви може да започнуваат со 1, 2 или 3. Бројот на седумцифрени броеви образувани од цифрите 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3 кои започнуваат со 1 е $P_{4,1,1}(6)$. Исто толку се и седумцифрени броеви образувани од цифрите 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3 кои започнуваат со 2, како и оние кои започнуваат со 3. Значи, бараниот број е

$$3P_{4,1,1}(6)=3\cdot\frac{6!}{4!}=90\,.$$

4. Колку пермутации од буквите: $a, a, a, a, a, b, b, b, c$:

а) почнуваат со буквата a;

б) ја имаат буквата b на шесто место;

в) завршуваат со буквата c?

Решение.

а) Ако пермутацијата почнува со буквата a, односно има облик:

$$a \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_ ,$$

тогаш на местото на цртичките треба да се распоредат буквите: a, a, a, a, b, b, b, c, а тоа може да се направи на $P_{4,3,1}(8)=\dfrac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!}=280$ начини.

б) Бараните пермутации имаат облик:

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ b\ \_\ \_\ \_$$

и се вкупно

$$P_{5,2,1}(8)=\frac{8!}{5!\cdot 2!\cdot 1!}=168.$$

в) Пермутациите кои завршуваат со буквата c се од облик:

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ c$$

и нивниот број е

$$P_{5,3}(8)=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=56.$$

5. Колку петцифрени броеви чии збир на цифри е пет, може да се формираат од цифрите: 0, 1, 2, 3, 4 и 5?

Решение.

Збирот на цифри е пет во следниве случаи:

1) Кога бројот е формиран од цифрите: 5, 0, 0, 0, 0, тогаш постои само еден петцифрен број, тоа е бројот 50000.

2) Ако броевите се формирани од цифрите: 4, 1, 0, 0, 0, тогаш има $P_{1,3}(4)=\dfrac{4!}{3!}=4$ броеви кои почнуваат со 4. Броеви кои почнуваат со 1 се исто така $P_{1,3}(4)=\dfrac{4!}{3!}=4$. Значи, вакви броеви се вкупно 8.

3) Нека бројот е формиран од цифрите: 3, 2, 0, 0, 0. Броеви кои почну-

ваат со 3 се $P_{1,3}(4)=\frac{4!}{3!}=4$, а исто толку се и броеви кои почнуваат со 2.

4) Ако броевите се формирани од цифрите: 3, 1, 1, 0, 0, тогаш има $P_{2,2}(4)=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ броеви кои почнуваат со 3 и $P_{1,1,2}(4)=\frac{4!}{2!}=12$ броеви кои почнуваат со 1. Вакви броеви се вкупно 18.

5) Ако броевите се формирани од цифрите: 2, 2, 1, 0, 0, тогаш $P_{1,1,2}(4)=\frac{4!}{2!}=12$ броеви почнуваат со 2 и $P_{2,2}(4)=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ броеви почнуваат со 1. Значи вакви броеви се вкупно 18.

6) Аналогно на претходните случаи, постојат вкупно 16 броеви формирани од цифрите: 2, 1, 1, 1, 0, и јасно е дека постои само еден петцифрен број формиран од пет единици, тоа е бројот 11111.

Заклучуваме дека постојат вкупно 70 броеви со бараната особина.

6. Во колку деветцифрени броеви со различни цифри, образувани од цифрите: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9:

а) цифрите 2, 4 и 6 се една до друга во редоследот 2, 4, 6;

б) цифрите 2, 4 и 6 се една до друга во произволен редослед?

Решение.

а) Нека редоследот 2, 4, 6 го означиме како една цифра, односно $246 = x$. Тогаш од цифрите $1,3,5,7,8,9$ и x може да се формираат

$$P(7)=V_7^7=7!=5040 \text{ броеви.}$$

б) Цифрите 2, 4 и 6 може да се распоредат на $P(3)$ начини, па според тоа постојат $P(7)\cdot P(3)=7!\cdot 3!=5040\cdot 6=30240$ деветцифрени броеви со бараната особина.

7. На полица има 12 различни книги од кои 5 се математички, 4 се од областа на биологијата и 3 се од астрономија. На колку начини можат да се распоредат книгите на полицата ако се знае дека книгите од иста област мора да бидат една до друга?

Решение.

Трите групи книги од областите математика, биологија и астрономија може да се распоредат на $P(3)=3!=6$ начини.

Петте математички книги може меѓусебно да се распоредат на $P(5)=5!=120$ начини. Аналогно, четирите книги од областа на биологијата и трите од астрономија може да се распоредат на

$$P(4)=4!=24 \text{ и } P(3)=3!=6 \text{ начини,}$$

соодветно.

Значи, книгите може да се распоредат на

$$P(3)\cdot P(4)\cdot P(5)\cdot P(3)=3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 3!=103680 \text{ начини.}$$

8. Од n различни топчиња, две се означени со А и В. На колку начини можат да се подредат n-те топчиња така што топчињата А и В:

а) да се едно до друго;

б) да не се едно до друго?

Решение.

а) Нека топчињата А и В се најдат едно до друго и нека позицијата АВ ја означиме со X. Останатите $n-2$ топчиња заедно со X може да се распоредат на $P(n-1)$ начини. Топчињата А и В може меѓусебно да се распоредат на $P(2)$ начини, па добиваме:

$$P(n-1)\cdot P(2)=2!\cdot(n-1)!=2\cdot(n-1)!.$$

б) n-те топчиња може да се распоредат на $P(n)$ начини. Ако од овој број го одземеме бројот на распореди во кои топчињата А и В се едно до друго, го добиваме бројот на распореди во кои А и В не се едно до друго, односно

$$P(n)-P(2)\cdot P(n-1)=n!-2(n-1)!=(n-1)!(n-2).$$

9. Колку трицифрени броеви може да се формираат од цифрите: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, ако во секој број:

а) цифрите се различни;

б) може да има исти цифри?

Решение.

а) $V_9^3=\dfrac{9!}{(9-3)!}=\dfrac{9!}{6!}=504$. б) $\overline{V}_9^3=9^3=729$.

10. Колку трицифрени броеви можат да се состават од цифрите: 0, 2, 4, 6 и 8 ако цифрите може да се повторуваат?

Решение.

Броевите не може да започнуваат со 0, па затоа од сите варијации со повторување од класа 3 образувани од цифрите: 0, 2, 4, 6 и 8, ги одземаме оние варијации кои започнуваат со 0, односно варијациите од класа 2 кои се формирани од истите цифри. Така добиваме:

$$\overline{V}_5^3 - \overline{V}_5^2 = 5^3 - 5^2 = 100 \text{ броеви.}$$

11. На одделни картици се запишани цифрите: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Картиците се измешани, а потоа од нив се извлекуваат 4 картици и се подредуваат по редоследот на извлекувањето. На колку начини може да се изврши извлекувањето за да се добие парен четирицифрен број?

Решение.

Парните броеви завршуваат со 2, 4, 6 или 8. Во случај кога последната цифра е 2, претходните три цифри може да се кои било три од цифрите 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Според тоа, четирицифрени броеви кои завршуваат со 2 се вкупно V_8^3.

Аналогна дискусија важи и во случај кога последната цифра е 4, 6 или 8, па добиваме вкупно

$$4V_8^3 = 4 \cdot \frac{8!}{(8-3)!} = 1344 \text{ броеви.}$$

12. Колку броеви помеѓу 3000 и 6000 што имаат различни цифри може да се формираат од цифрите: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7?

Решение.

Ако броевите се помеѓу 3000 и 6000, тогаш тие се четирицифрени и започнуваат со 3, 4 или 5. Со цифрата 3 започнуваат V_7^3 броеви. Исто толку броеви започнуваат со 4, како и со 5. Значи може да се формираат вкупно

$$3V_7^3 = 3 \cdot \frac{7!}{(7-3)!} = 630 \text{ броеви.}$$

13. Четворица студенти се јавиле на испит по ист предмет во ист ден. Тие биле оценети со некоја од оценките 7, 8, 9 или 10.

а) На колку начини можат да се распределат дадените оценки по студенти така што сите студенти да добијат различни оценки?

б) На колку начини можат да се распределат дадените оценки по студенти, ако студентите се оценуваат само со оценките 9 и 10?

Решение.

а) Четирите оценки 7, 8, 9 и 10 може да се распределат на $P(4)=4!=24$ начини.

б) Оценките 9 и 10 може да се распределат на четворицата студенти на $\overline{V}_2^4=2^4=16$ начини.

14. На колку начини може да биде оценет еден ученик по 12 предмети ако:

а) по сите предмети може да добие оценка од 1 до 5;

б) по два предмета не може да добие оценка поголема од 3, а по три предмети не може да добие оценка помала од 4?

Решение.

а) $\overline{V}_5^{12}=5^{12}=244140625$.

б) Според барањето, ученикот по два предмета може да добие оценка 1, 2 или 3, по три предмети 4 или 5, а по останатите 7 предмети може да добие оценка од 1 до 5. Вкупно постојат

$$\overline{V}_3^2\cdot\overline{V}_2^3\cdot\overline{V}_5^7=3^2\cdot2^3\cdot5^7=5625000 \text{ начини.}$$

15. Колку зборови со должина најмногу 4, може да се формираат со помош на основните Морзеови симболи: „$\cdot$“ и „$-$“?

Решение.

Бројот на зборови составени од еден основен Морзеов симбол е 2, зборови составени од два основни симболи се вкупно $\overline{V}_2^2=2^2=4$, од три основни симболи се $\overline{V}_2^3=2^3=8$, а од четири основни симболи се $\overline{V}_2^4=2^4=16$.

Значи, може да се формираат вкупно 30 Морзеови зборови со должина најмногу 4.

16. За избор на раководство во една студентска организација се предложени 18 кандидати, од кои 7 се девојки. Потребно е да се изврши избор на 9 од предложените кандидати.

а) На колку начини може да се изврши изборот?

б) На колку начини може да се изврши изборот на раководство во кое има точно 3 девојки?

в) На колку начини може да се изврши изборот на раководство во кое има барем 3 девојки?

Решение.

а) Изборот на 9 од предложените 18 кандидати може да се изврши на

$$C_{18}^{9}=\binom{18}{9}=48620 \text{ начини.}$$

б) Изборот на 3 од 7 девојки може да се изврши на C_7^3 начини, а изборот на 6 од 11 момчиња на C_{11}^6 начини. Според тоа, добиваме:

$$C_7^3\cdot C_{11}^6=\binom{7}{3}\cdot\binom{11}{6}=16170.$$

в) Во раководството од 9 члена треба да има барем 3 девојки, односно 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9 девојки. Аналогно како во б), се добива дека изборот може да се изврши на

$$C_7^3\cdot C_{11}^6+C_7^4\cdot C_{11}^5+C_7^5\cdot C_{11}^4+C_7^6\cdot C_{11}^3+C_7^7\cdot C_{11}^2=40480 \text{ начини.}$$

17. Во едно одделение има 16 девојчиња и 20 момчиња. Треба да се избере одделенска заедница од 4 ученика во која барем едно е девојче. На колку начини може да се направи изборот?

Решение.

На сличен начин како во претходната задача се добива

$$C_{16}^1\cdot C_{20}^3+C_{16}^2\cdot C_{20}^2+C_{16}^3\cdot C_{20}^1+C_{16}^4=54060.$$

18. Во една продавница има 12 различни вида на чоколади. Еден муштерија сака да купи 3 чоколада меѓу кои може да има чоколади од ист вид. На колку начини може да ги избере чоколадата?

Решение.

$$\overline{C}_{12}^{3}=\binom{12+3-1}{3}=\binom{14}{3}=364.$$

19. Еден кошаркарски тим е составен од 5 бека, 4 центри и 3 крила. На колку начини може од нив да се состави петорка во која мора да има барем два бека и барем еден центар?

Решение.

Нека со Б означиме бек, со Ц центар и со К крило. Екипата може да го има следниов состав:

1) Б, Б, Ц, Б, Б:

Четирите бека се бираат од 5 и според тоа може да се изберат на C_5^4 начини, а едниот центар се избира од 4 центри на C_4^1 начини. Според тоа, екипа со ваков состав може да се формира на $C_5^4 \cdot C_4^1 = 5 \cdot 4 = 20$ начини.

Аналогна дискусија важи и за следниве случаи:

2) Б, Б, Ц, К, К: $C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} = 120.$

3) Б, Б, Ц, Ц, Ц: $C_5^2 \cdot C_4^3 = \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3} = 40.$

4) Б, Б, Ц, Б, К: $C_5^3 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} = 120.$

5) Б, Б, Ц, Б, Ц: $C_5^3 \cdot C_4^2 = \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2} = 60.$

6) Б, Б, Ц, К, Ц: $C_5^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 = \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} = 180.$

Заклучуваме дека, петорка со бараните особини може да се формира на вкупно 540 начини.

20. Во кутија има бело, црно и црвено топче. На колку начини може да се извлечат две топчиња ако тие се влечат:

а) одеднаш;

б) едно по едно при што првото топче не се враќа во кутијата;

в) едно по едно при што првото топче се враќа во кутијата?

Решение.

а) $C_3^2=\binom{3}{2}=3$. б) $C_3^1\cdot C_2^1=\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}=6$. в) $C_3^1\cdot C_3^1=\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{1}=9$.

Напоменуваме дека извекувањето опишано во б) се нарекува извлекување без враќање, а извекувањето во в) е познато како извлекување со враќање.

21. Од шпил со 52 карти треба да се извлечат три карти одеднаш. На колку начини може да се изврши извлекувањето така што:

а) сите три карти се со иста вредност;

б) сите три карти се со ист знак;

в) две карти се исти по вредност, а третата е единица?

Решение.

Во 52 карти има 13 различни вредности: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13 и 14. Од секоја вредност има по 4 карти со раличен знак.

а) Три единици може да се изберат на C_4^3 начини, а аналогно и три двојки, три тројки, итн. Според тоа, имаме:

$$13C_4^3=13\cdot\binom{4}{3}=52.$$

б) Аналогно како во а) добиваме:

$$4C_{13}^3=4\cdot\binom{13}{3}=1144.$$

в) Две карти кои имаат иста вредност и се различни од единица може да се изберат на $12\,C_4^2$ начини, а една единица може да се избере на C_4^1 начини. Значи, три карти од кои две се исти по вредност и различни од единица, а третата е единица, може да се изберат на $12\,C_4^2\cdot C_4^1$ начини. Сите три извлечени карти може да се единици, а тие може да се изберат на C_4^3 начини. Според тоа, извлекувањето може да се изврши на

$$12C_4^2\cdot C_4^1+C_4^3=12\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}+\binom{4}{3}=292 \text{ начини.}$$

22. Од шпил со 52 карти се извлекуваат 4 карти одеднаш. Во колку случаи меѓу извлечените карти ќе има:

а) точно една дама;

б) точно две дами;

в) барем една дама;

г) барем две дами?

Решение.

а) Една дама може да се избере на C_4^1 начини. Останатите 3 карти кои не се дами може да се изберат на C_{48}^3 начини. Според тоа, во

$$C_4^1 \cdot C_{48}^3 = \binom{4}{1} \cdot \binom{48}{3} = 69184$$

извлекувања ќе има точно една дама.

Аналогно на дискусијата во а) се добива:

б) $C_4^2 \cdot C_{48}^2 = \binom{4}{2} \cdot \binom{48}{2} = 6768$.

в) $C_4^1 \cdot C_{48}^3 + C_4^2 \cdot C_{48}^2 + C_4^3 \cdot C_{48}^1 + C_4^4 = 76145$.

г) $C_4^2 \cdot C_{48}^2 + C_4^3 \cdot C_{48}^1 + C_4^4 = 6961$.

23. На еден шаховски турнир се одиграни 45 партии. Според правилата на турнирот сите шахисти одиграле меѓусебно по една партија. Колку учесници имало на турнирот?

Решение.

Нека n е бројот на учесници во турнирот. Од условот на задачата ја добиваме равенката $C_n^2 = 45$, односно $\frac{n(n-1)}{2} = 45$, чие решение е $n = 10$.

2. ПРОСТОР ОД ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ И ВЕРОЈАТНОСТ

Во теоријата на веројатност, секој процес на набљудување се нарекува експеримент. Резултатите од набљудувањето се наречени ***исходи*** на експериментот. Еден експеримент е наречен ***случаен експеримент*** ако неговиот исход не може да се предвиди.

Множеството од сите можни исходи на еден случаен експеримент се нарекува ***простор од елементарни настани*** или ***множество вредности*** и се означува со Ω. Елементите на множеството Ω се викаат ***елементарни настани***. Елементарните настани не може да се појават истовремено.

Секое подмножество од Ω се нарекува ***настан***. Множеството Ω се нарекува ***сигурен настан***, бидејќи ги содржи сите можни исходи на даден случаен експеримент. Празното множество $\varnothing$ се смета за ***невозможен настан*** бидејќи не содржи ниту еден можен исход.

Сите релации помеѓу настаните во теоријата на веројатност може да се опишат преку множества и операции со нив. Некои искази од теоријата на множества и нивни веројатносни значења се дадени во табелата 2.1.

Теорија на множества	**Теорија на веројатност**
Простор Ω	Простор од елементарни настани, сигурен настан Ω
Празно множество $\varnothing$	Невозможен настан $\varnothing$
Елементи на Ω	Елементарни настани $\omega_1, \omega_2, \ldots$
Множества A, B, ...	Настани A, B, ...
A	Се појавил настанот A
$\overline{A}$	Не се појавил настанот A, спротивен настан на A
$A \cup B = A + B$	Се појавил барем еден од настаните A и B, унија (збир) на настаните A и B
$A \cap B = AB$	Се појавиле и двата настани A и B, пресек (производ) на настаните A и B
$A \subseteq B$	A е подностан на B (појавувањето на настанот A имплицира појавување на настанот B)
$A \cap B = \varnothing$	A и B се заемно исклучиви настани (не може да се појават истовремено) или дисјунктни настани

Табела 2.1

Дефиниции на веројатност

Класична дефиниција

Да претпоставиме дека еден случаен експеримент е повторен n пати. Ако настанот A се случил n_A пати, тогаш веројатноста на настанот A, означена со $P(A)$, е

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n},$$

каде што $\frac{n_A}{n}$ се нарекува ***релативна фреквенција*** на настанот A.

Аксиоматска дефиниција

Нека Ω е конечно множество вредности и A е настан од Ω. Тогаш, веројатноста $P(A)$ на настанот A е реален број доделен на A којшто ги задоволува следниве три аксиоми:

Аксиома 1: $P(A) \geq 0$.

Аксиома 2: $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ако $A \cap B = \varnothing$.

Ако множеството Ω не е конечно, тогаш аксиомата 3 се модифицира на следниов начин:

Аксиома 3': Ако $A_1, A_2, \ldots$ се заемно исклучиви настани од Ω, односно $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, тогаш

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Особини на веројатноста

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

2) $P(\varnothing) = 0$;

3) $P(A) \leq P(B)$ ако $A \subseteq B$;

4) $P(A) \leq 1$;

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

6) Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се случајни настани од Ω, тогаш

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) -$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Конечно множество вредности

Нека множеството вредности Ω има конечен број на елементи,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

каде што ω_i се елементарни настани и $P(\omega_i) = p_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогаш

1) $0 \le p_i \le 1$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;

3) Ако $A = \bigcup_{i \in I} \omega_i$, каде што $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, тогаш

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = \sum_{i \in I} p_i.$$

Еднакверојатни настани

Ако сите елементарни настани ω_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, се еднакверојатни, односно

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n,$$

тогаш

$$p_i = \frac{1}{n}, \; i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Веројатноста на настанот A е

$$P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

каде што $|A|$ односно $|\Omega|$, е бројот на елементи на множеството A односно Ω. Понатаму, елементите на A ги нарекуваме поволни исходи за настанот A.

Геометриска дефиниција

Ако $A \subseteq \Omega$ и Ω е ограничено подмножество од $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ или $\mathbf{R}^3$, тогаш

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

каде што $m(A)$ и $m(\Omega)$ се должината, плоштината или волуменот на A и Ω, соодветно. Должината, плоштината и волуменот на A ги означуваме со l_A, P_A и V_A, соодветно.

Независност на настани

Настаните A и B се ***независни*** ако и само ако

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Ако настаните A и B се независни, тогаш и настаните A и $\overline{B}$, настаните $\overline{A}$ и B, како и настаните $\overline{A}$ и $\overline{B}$, се независни.

Настаните A, B и C се независни ако и само ако

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

$$P(AC) = P(A)P(C),$$

$$P(BC) = P(B)P(C).$$

Настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се независни ако и само ако за секое подмножество $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ $(2 \le k \le n)$ од множеството $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ важи

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}).$$

Условна веројатност

Условна веројатност на настанот A ако се случил настанот B, означена како $P(A|B)$, се дефинира со

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\ P(B)>0,$$

каде што $P(AB)$ е веројатноста дека се случиле настаните A и B истовремено.

Слично,

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\ P(A)>0,$$

е условна веројатност на настанот B ако претходно се случил настанот A.

Од горните равенки следува

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B|A).$$

За повеќе од два настани, последното равенство ја има следнава форма:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}),$$

каде што $P(A_i)>0$ за сите $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Ако $A_1,A_2,\ldots,A_n$ се независни настани, тогаш

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i).$$

Тотална веројатност и Баесова формула

Настаните $H_1,H_2,\ldots,H_n$ од Ω претставуваат ***партиција*** на множеството Ω ако

$$\bigcup_{i=1}^{n}H_i=H_1\cup H_2\cup\cdots\cup H_n=\Omega \text{ (исцрпни настани)}$$

и

$$H_i\cap H_j=\emptyset,\ i\neq j \text{ (дисјунктни настани).}$$

Теорема за тотална веројатност

Нека настаните $H_1, H_2, \dots, H_n$ претставуваат партиција на множеството Ω. Тогаш, за произволен настан A важи

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n),$$

или во скратена форма

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i).$$

Баесова формула

Нека настаните $H_1, H_2, \dots, H_n$ формираат партиција на множеството Ω. Тогаш, за произволен настан A за кој $P(A) \neq 0$ и за секое $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ важи

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j)P(H_j)}.$$

Настаните $H_1, H_2, \dots, H_n$ се викаат ***хипотези***.

2.1. Основни поими од веројатност

1. Да се одреди просторот од елементарни настани Ω при едно фрлање на:

а) коцка за играње;

б) монета;

в) две исти коцки за играње;

г) две различни коцки за играње (на пример, бела и црна коцка).

Решение.

а) Настанот „паднал бројот *i*“ го означуваме со *i*. Тогаш просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

б) Настанот „паднало писмо“ го означуваме со П, а настанот „паднала глава“ го означуваме со Г. Тогаш $\Omega = \{П, Г\}$.

в) Настанот „паднале броевите i и j“ го означуваме со $\{i, j\}$. Просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{\{i, j\} \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

г) Настанот „на белата коцка паднал бројот i, а на црната коцка бројот j“ го означуваме со (i, j) или со ij. Просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

2. Во кутија се наоѓаат четири ливчиња на кои се запишани броевите 1, 2, 3 и 4. Одреди го просторот од елементарни настани Ω ако ливчињата случајно се извлекуваат едно по едно без враќање се додека не се извлече непарен број.

Потоа да се опишат настаните:

A: извлечен е барем еден парен број,

B: извлечен е најмногу еден парен број,

како и настанот AB.

Решение.

Ги воведуваме ознаките за следниве настани:

i : првиот извлечен број е i,

ij : првиот извлечен број е i, а вториот j,

ijk : првиот извлечен број е i, вториот j, а третиот k,

каде што $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Тогаш, просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{1, 3, 21, 23, 41, 43, 241, 243, 421, 423\}.$$

Бараните настани се подмножества од Ω:

$$A = \{21, 23, 41, 43, 241, 243, 421, 423\},$$

$$B = \{1, 3, 21, 23, 41, 43\},$$

$$AB = \{21, 23, 41, 43\}.$$

3. Да се определи просторот од елементарни настани Ω ако експериментот е фрлање на монета се додека два пати последователно не се појави глава.

Решение.

Појавувањето на писмо го означуваме со П, а појавувањето на глава со Г. Така, на пример, настанот: при две фрлања на монета, во првото фрлање се појавило писмо, а во второто глава, го означуваме со ПГ.

Нека означиме настан A_i: i пати се појавило писмо, каде што $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Тогаш,

$$A_0 = \{\text{ГГ}\}, \quad A_1 = \{\text{ПГГ, ГПГГ}\},$$

$$A_2 = \{\text{ППГГ, ПГПГГ, ГППГГ, ГПГПГГ}\}, \text{ итн.}$$

Просторот од елементарни настани е $\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

4. Стрелец гаѓа во мета се додека не ја погоди два пати или не ја промаши три пати. Да се опише просторот од елементарни настани Ω и настаните:

A: стрелецот ја погодил метата во последното гаѓање,

B: стрелецот ја промашил метата во второто гаѓање,

C: стрелецот ја промашил метата точно два пати,

D: стрелецот ја промашил метата барем два пати.

Решение.

Погодувањето на метата го означуваме со 1, а промашување со 0. Така, на пример, настанот: при три гаѓања, стрелецот ја погодил метата во првото и третото гаѓање, а во второто гаѓање ја промашил, го означуваме со 101. Тогаш, просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{11, 000, 101, 011, 1000, 0100, 0010, 0011, 0101, 1001\}.$$

Бараните настани се подмножества од Ω:

$$A = \{11, 101, 011, 0011, 0101, 1001\},$$

$$B = \{000, 101, 1000, 0010, \ 0011, 1001\},$$

$$C = \{0011, 0101, 1001\},$$

$$D = \{000, 1000, 0100, 0010, \ 0011, 0101, \ 1001\}.$$

5. Стрелец гаѓа во мета во две серии. Во првата серија гаѓа два пати, а потоа во втората серија уште толку пати колку што погодоци постигнал во првата серија. Опиши го просторот од елементарни настани Ω и настаните:

A: стрелецот ја погодил целта не помалку од три пати,

B: гаѓањето во втората серија започнало со погодок,

C: стрелецот ја погодил целта барем еднаш.

Решение:

Ги користиме ознаките како во претходната задача. Просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{00,\ 010,\ 011,\ 101,\ 100,\ 1100,\ 1101,\ 1110,\ 1111\},$$

а бараните настани се:

$$A = \{1101,\ 1110,\ 1111\},$$

$$B = \{011,\ 101,\ 1110,\ 1111\},$$

$$C = \{010,\ 011,\ 101,\ 100,\ 1100,\ 1101,\ 1110,\ 1111\}.$$

6. Во мета се гаѓа три пати. Се разгледуваат настаните A_1, A_2 и A_3 кои означуваат погодување на метата во првото, второто и третото гаѓање, соодветно. Со помош на овие настани да се опишат настаните:

B: постигнати се три погодоци,

C: метата е трипати промашена,

D: постигнат е барем еден погодок,

E: метата е промашена барем еднаш,

F: постигнати се не повеќе од два погодоци,

G: до третото гаѓање немало погодок.

Решение.

$$B = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1A_2A_3, \qquad C = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3},$$

$$D = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 + A_2 + A_3, \qquad E = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3},$$

$$F = E, \qquad G = \overline{A_1}\,\overline{A_2}.$$

7. Нека *A*, *B* и *C* се произволни настани. Да се претставaт со нивна помош настаните:

а) се појавил настанот *A*;

б) се појавиле настаните A и B;

в) се појавиле барем два настани;

г) се појавил само еден настан;

д) се појавиле не повеќе од два настани.

Решение.

а) A. б) AB. в) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$.

г) $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$.

д) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$.

Бараниот настан во д) е спротивен на настанот: се појавиле сите три настани, па може да се изрази преку настаните A, B и C на поедноставен начин:

$$\overline{ABC} = \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$$

8. Нека A, B и C се произволни настани. Да се претставаат со нивна помош настаните:

а) не се појавил ниту еден од настаните A, B и C;

б) се појавил само настанот A;

в) се појавил барем еден од настаните A, B и C;

г) се појавил настанот A и кој било од настаните B или C, но настаните B и C не се појававиле истовремено;

д) се појавиле настаните B и C, но не се појавил настанот A;

ѓ) се појавиле два или повеќе настани;

е) се појавиле сите три настани;

ж) се појавиле најмногу два настани.

Решение.

а) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. б) $A\overline{B}\,\overline{C}$. в) $A+B+C$. г) $AB\overline{C} + A\overline{B}C$.

д) $\overline{A}BC$. ѓ) $AB + AC + BC$. е) ABC. ж) $\overline{ABC}$.

9. Во една кутија има 5 сијалици од кои 2 се неисправни. Случајно се извлекува една сијалица и се проверува нејзината исправност. Извлекувањето е без враќање и продолжува се до откривање на двете неисправни сијалици. Да се опише просторот од елементарни настани

Ω. Во колку случаи извлекувањето на сијалиците ќе престане по проверката на третата сијалица?

Решение.

Нека означиме настан

$$A_i:\ i\text{-тата извлечена сијалица е исправна,}$$

каде што $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогаш просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{\overline{A_1}\,\overline{A_2},\ A_1\,\overline{A_2}\,\overline{A_3},\ \overline{A_1}\,A_2\overline{A_3},\ A_1\,A_2\,\overline{A_3}\,\overline{A_4},\ A_1\,\overline{A_2}\,A_3\overline{A_4},\ \overline{A_1}\,A_2\,A_3\overline{A_4},$$
$$A_1A_2A_3, \overline{A_1}\,A_2A_3A_4,\ A_1\,\overline{A_2}\,A_3A_4,\ A_1\,A_2\,\overline{A_3}A_4\}.$$

Извлекувањето ќе престане по проверката на третата сијалица во следниве три исходи:

$$A_1\,\overline{A_2}\,\overline{A_3},\quad \overline{A_1}\,A_2\overline{A_3}\ \text{ и }\ A_1A_2A_3.$$

10. Играчите *A* и *B* играат шах се додека еден од нив не постигне шест победи (реми не се зема во предвид, т.е. никој од играчите не добива поени). Моменталниот резултат е 5 : 3 за играчот *A*. Да се опишат настаните:

A : победил играчот *A*,

B : победил играчот *B*.

Решение:

Ги воведуваме ознаките за следниве настани:

A_i : играчот *A* победил во i-тата партија,

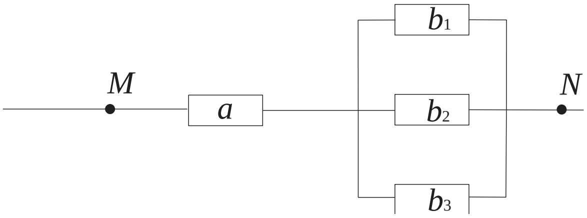
B_i : играчот *B* победил во i-тата партија,

каде што $i \in \{1, 2, 3, ...\}$.

Тогаш $A = \{A_9, B_9A_{10}, B_9B_{10}A_{11}\}$ и $B = \{B_9B_{10}B_{11}\}$.

11. Во електрично коло меѓу точките M и N се поставени елементи според шемата од сликата 2.1. Нека со *A* е означен настанот: елементот a е неисправен, а со B_i настанот: елементот b_i е неисправен, $i \in \{1, 2, 3\}$. Со помош на овие настани, да се опишат настаните:

C : колото е прекинато и $\overline{C}$: колото не е прекинато.



Слика 2.1

Решение.

$$C = A + B_1B_2B_3 = A \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3),$$

$$\overline{C} = \overline{A \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)} = \overline{A} \cap \overline{(B_1 \cap B_2 \cap B_3)} =$$
$$= \overline{A} \cap (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 \cup \overline{B}_3) = \overline{A}(\overline{B}_1 + \overline{B}_2 + \overline{B}_3).$$

12. Истовремено се фрлаат две различни коцки за играње. Опиши ги настаните A, B, C и D и утврди го нивниот однос.

A: збирот на двете коцки е парен број,

B: збирот на двете коцки е поголем од дванаесет,

C: на двете коцки се појавил ист број,

D: на секоја коцка се појавил непарен број.

Решение.

$$\Omega = \{(i, j) | \ i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},$$

$$A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4),$$
$$(4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\},$$

$$B = \varnothing,$$

$$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\},$$

$$D = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}.$$

Јасно е дека важи: $C \subset A, \ D \subset A, \ B \subset A, \ B \subset C, \ B \subset D.$

13. Настаните $A, \ B, \ C$ и D образуваат простор од елементарни настани. Ако

$$P(A) = 0.1, \ P(B) = 0.4 \text{ и } P(C) = 0.3,$$

колкава е веројатноста на настаните $D, \overline{D}$ и $A + B$?

Решение.

Од тоа што $\Omega = \{A, B, C, D\}$ добиваме:

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1.$$

Според тоа,

$$P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = 0.2 \text{ и } P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 0.8.$$

Бидејќи $A \cap B = \emptyset$ имаме:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0.5.$$

14. Една кружна цел е поделена на три концентрични зони. Веројатноста со еден куршум да се погоди првата, втората и третата зона е 0.16, 0.24 и 0.17, соодветно. Колкава е веројатноста да се промаши целта?

Решение.

Нека D е настанот: целта е погодена, A е настанот: погодена е првата зона, B: погодена е втората зона и C: погодена е третата зона. Бидејќи $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ добиваме:

$$P(D) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.57.$$

Тогаш, веројатноста на настанот $\overline{D}$: целта е промашена, е

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 0.43.$$

15. Во една кутија има 100 ливчиња на кои се запишани броевите од 1 до 100. Колкава е веројатноста при едно извлекување да се извлече ливче со број:

а) што не е помал од 5;

б) што е делив со 5;

в) што е делив со 3?

Решение.

Нека означиме настан i: извлечено е ливче со бројот i, $i \in \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Тогаш просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{1, 2, 3, ..., 100\}.$$

а) $A=\{5,6,7,...,100\},\ P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}=\dfrac{96}{100}=0.96.$

б) $B=\{5,\ 10,\ 15,...,\ 100\},\ P(B)=\dfrac{|B|}{|\Omega|}=\dfrac{20}{100}=0.2.$

в) $C=\{3,\ 6,\ 9,...,\ 99\},\ P(C)=\dfrac{|C|}{|\Omega|}=\dfrac{33}{100}=0.33.$

16. Три монети од 1, 2 и 5 денари се фрлаат истовремено и се набљудува појавувањето на глави и писма. Да се пресмета веројатноста на настаните:

A : на монетата од 1 денар паднала глава,

B : паднале точно две глави,

C : паднале не повеќе од две глави.

Решение.

Нека со Г означиме глава, а со П писмо. Притоа, елементарните настани ги опишуваме со ijk : на монетата од 1 денар паднало i, на монетата од 2 денари паднало j и на монетата од 5 денари паднало k, каде што $i,j,k\in\{П,Г\}$. Тогаш, просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{ГГГ, ГПП, ПГП, ППГ, ГГП, ГПГ, ПГГ, ППП\} \text{ и } |\Omega|=8.$$

$A=\{ГГГ, ГПП, ГГП, ГПГ\}$, $|A|=4$. Тогаш, $P(A)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

$B=\{ГГП, ГПГ, ПГГ\}$, $|B|=3$, па $P(B)=\dfrac{3}{8}$.

$C=\{ГПП, ПГП, ППГ, ГГП, ГПГ, ПГГ, ППП\}$, $|C|=7$, па $P(C)=\dfrac{7}{8}$.

17. Во една училишна наградна игра има 10000 купони, од кои 50 се со парични награди и 150 со награди-книги. Колкава е веројатноста со еден извлечен купон да се добие награда?

Решение.

Бараната веројатност е

$$\frac{C_{200}^{1}}{C_{10000}^{1}}=\frac{\binom{200}{1}}{\binom{10000}{1}}=\frac{200}{10000}=0.02.$$

18. Во една фирма од 100 вработени, 60 знаат англиски, 30 знаат француски и 15 ги знаат двата јазика. Случајно е избрано едно лице. Колкава е веројатноста на следниве настани:

A: избраното лице знае само француски јазик,

B: избраното лице знае само англиски јазик,

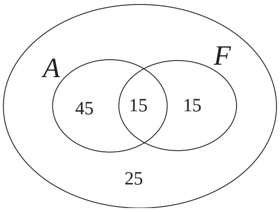
C: избраното лице не знае ниеден јазик,

D: избраното лице знае барем еден јазик,

E: избраното лице знае два јазика?

Решение.

Нека множеството луѓе кои знаат англиски го означиме со A, а множеството луѓе кои знаат француски со F. Овие множества се претставени со Венов дијаграм на сликата 2.2.



Слика 2.2

Тогаш,

$$P(A)=\frac{15}{100}=0.15,\quad P(B)=\frac{45}{100}=0.45,\quad P(C)=\frac{25}{100}=0.25,$$

$$P(D)=\frac{75}{100}=0.75,\quad P(E)=\frac{15}{100}=0.15.$$

19. Во една кутија има 8 бели, 6 црвени и 5 црни топчиња. Колкава е веројатноста од кутијата да се извлече бело или црно топче?

Решение.

Ги означуваме следниве настани:

A: извлечено е бело или црно топче,

B: извлечено е бело топче,

C: извлечено е црно топче.

Јасно е дека $B \cap C = \emptyset$, па имаме:

$$P(A) = P(B+C) = P(B) + P(C) = \frac{8}{19} + \frac{5}{19} = \frac{13}{19}.$$

Задачата може да се реши и поедноставно.

Во кутијата има вкупно 13 бели и црни топчиња, па бараната веројатност е $P(A) = \frac{13}{19}$.

20. Во една фамилија има две деца на различна возраст.

а) Колкава е веројатноста двете деца да се од различен пол?

б) Колкава е веројатноста постарото дете да е машко, а помладото женско?

Решение.

Женското дете го означуваме со ж, а машкото со м. Елементарните настани ги опишуваме како *ij*: постарото дете е *i*, а помладото *j*, каде што $i, j \in \{ж, м\}$. Тогаш просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{жж, мж, жм, мм\}.$$

а) Настанот A: двете деца се од различен пол, е $A = \{мж, жм\}$, па неговата веројатност е

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}.$$

б) Настанот B: постарото дете е машко, а помладото е женско, е $B = \{мж\}$, па неговата веројатност е

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}.$$

21. Дадени се пет отсечки со должини 2cm, 4cm, 5cm, 7cm и 9cm. Случајно се избираат три отсечки. Да се најде веројатноста на настанот A: од избраните отсечки може да се конструира триаголник.

Решение.

Просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{\{i, j, k\} \mid i, j, k \in \{2, 4, 5, 7, 9\}\}.$$

Бројот на елементи на Ω е C_5^3. Три отсечки со должини i, j и k формираат триаголник ако се исполнети условите: $i + j > k,\ i + k > j$ и $j + k > i$. Тогаш, бараниот настан е

$$A = \{\{2,4,5\}, \{4,5,7\}, \{4,7,9\}, \{5,7,9\}\},$$

па

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{C_5^3} = \frac{4}{\binom{5}{3}} = \frac{4}{10} = 0.4.$$

22. Во една кутија има 2 бели и 3 црвени топчиња. Од кутијата се извлекуваат две топчиња одеднаш. Да се најде веројатноста извлечените топчиња да се со различна боја.

Решение.

Нека означиме настан A: двете извлечени топчиња се со различна боја, односно извлечено е едно бело и едно црвено топче. Тогаш

$$P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_5^2} = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = 0.6.$$

23. Во кутија се наоѓаат 4 бели и 6 црни топчиња. Случајно се извлекуваат три топчиња одеднаш. Колкава е веројатноста меѓу извлечените топчиња да има барем едно црно топче? Да се определи бојата на топчињата со најголема веројатност на извлекување.

Решение.

Нека означиме настан

A: барем едно од извлечените топчиња е црно.

Тогаш неговиот спротивен настан е $\overline{A}$: меѓу извлечените топчиња нема црно топче, односно сите извлечени топчиња се бели.

Од тоа што

$$P\left(\overline{A}\right)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{30},$$

следува

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=\frac{29}{30}.$$

Веројатноста сите извлечени топчиња да се црни е

$$\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6},$$

веројатноста меѓу извлечените топчиња да има едно црно и две бели топчиња е

$$\frac{C_4^2\cdot C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10},$$

а веројатноста меѓу извлечените топчиња да има две црни и едно бело топче е

$$\frac{C_4^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}.$$

Според тоа, со најголема веројатност на извлекување е комбинацијата од две црни и едно бело топче.

24. Од шпил со 52 карти на случаен начин се извлекуваат четири карти одеднаш. Да се најде веројатноста на настаните:

A: меѓу извлечените карти има точно една единица,

B: меѓу извлечените карти има барем една единица,

C: сите четири карти се единици.

Решение.

Во шпил со 52 карти има 4 единици и 48 карти различни од единица. Според тоа,

$$P(A)=\frac{C_4^1\cdot C_{48}^3}{C_{52}^4}=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{3}}{\binom{52}{4}}=\frac{69184}{270725}\approx 0.256.$$

Јасно е дека $\overline{B}$ е настанот: меѓу извлечените карти нема единици. Тогаш

$$P\left(\overline{B}\right)=\frac{C_{48}^4}{C_{52}^4}=\frac{\binom{48}{4}}{\binom{52}{4}}=\frac{194580}{270725},$$

па

$$P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)\approx 0.281.$$

Веројатноста на настанот C е

$$P(C)=\frac{1}{270725}\approx 0.0000036\,.$$

25. Во 100 лоза има 5 со добивка. Играчот A извлекува 2 лоза, а играчот B извлекува 6 лоза. Да се најде веројатноста на настаните:

а) играчот A извлекол барем еден лоз со добивка, ако тој прв ги извлекува своите лозови;

б) барем еден од играчите A и B извлекол лоз со добивка, ако играчите A и B истовремено ги извлекуваат лозовите.

Решение.

а) Нека C е настанот: играчот A извлекол барем еден лоз со добивка. Неговиот спротивен настан е $\overline{C}$: играчот A не извлекол ниту еден лоз со добивка, и неговата веројатност е

$$P\left(\overline{C}\right)=\frac{C_{95}^2}{C_{100}^2}=\frac{\binom{95}{2}}{\binom{100}{2}}=\frac{4465}{4950}\approx 0.902\,.$$

Тогаш веројатноста на настанот C е $P(C)=1-P\left(\overline{C}\right)\approx 0.098$.

б) Нека D е настанот: барем еден од играчите A и B извлекол лоз со добивка. Тогаш неговиот спротивен настан е $\overline{D}$: ниеден од играчите A и B не извлекол лоз со добивка, и

$$P\left(\overline{D}\right)=\frac{C_{95}^{8}}{C_{100}^{8}}=\frac{\binom{95}{8}}{\binom{100}{8}}\approx 0.653,\ P(D)=1-P\left(\overline{D}\right)\approx 0.347\,.$$

26. Неписмено дете составува зборови од буквите: а, а, а, е, и, к, м, м, т, т. Колкава е веројатноста да го состави зборот математика?

Решение.

Бројот на сите можни исходи е $P_{3,2,2}(10)$ (10 букви меѓу кои буквата а се јавува 3 пати, буквата м се јавува 2 пати, буквата т се јавува 2 пати, а буквите: е, и, к се јавуваат по еднаш, се распоредуваат на 10 места). Бројот на поволни исходи е 1 (само зборот математика), па бараната веројатност е

$$\frac{1}{P_{3,2,2}(10)}=\frac{10\,!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\approx 0.66\cdot 10^{-5}\,.$$

27. Шест стрелци гаѓаат во 10 предмети, при што секој стрелец случајно го бира предметот во кој гаѓа. Колкава е веројатноста сите стрелци да гаѓаат во различен предмет?

Решение.

Бројот на сите можни исходи е $\overline{V}_{10}^{6}$ (10 предмети се распоредуваат на шест стрелци, а притоа може повеќе стрелци да гаѓаат во ист предмет), а бројот на поволни исходи е V_{10}^{6} (сите стрелци гаѓаат во различен предмет). Тогаш, бараната веројатност е

$$\frac{V_{10}^{6}}{\overline{V}_{10}^{6}}=\frac{\frac{10!}{4!}}{10^{6}}=0.1512.$$

28. Некое лице ги заборавило последните две цифри од телефонскиот број на својот пријател. Се сеќава само дека тие две цифри се различни меѓу себе. Колкава е веројатноста лицето да го погоди телефонскиот број?

Решение.

Можни исходи се сите парови (i, j), $i \neq j$, каде што $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, и нивниот број е V_{10}^{2}, а поволен исход е само еден од овие парови. Според тоа, бараната веројатност е

$$\frac{1}{V_{10}^{2}} = \frac{1}{90}.$$

29. Истовремено се фрлаат три различни коцки за играње. Да се најде веројатноста на следниве настани:

A: паднала барем една единица,

B: барем на две коцки паднал ист број.

Решение.

Просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Бројот на елементи на Ω е $\overline{V}_{6}^{3}$.

Спротивен настан на настанот A е $\overline{A}$: не паднала ниту една единица, па $\overline{A} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}\}$ и $\left|\overline{A}\right| = \overline{V}_{5}^{3}$. Тогаш

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{\overline{V}_{5}^{3}}{\overline{V}_{6}^{3}} = \frac{125}{216} \approx 0.579, \text{ па } P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) \approx 0.421.$$

Спротивен настан на настанот B е настанот $\overline{B}$: на трите коцки паднал различен број. Тогаш

$$P\left(\overline{B}\right) = \frac{V_{6}^{3}}{\overline{V}_{6}^{3}} = \frac{120}{216} \approx 0.556, \text{ па } P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) \approx 0.444.$$

30. Што е поверојатно, при истовремено фрлање на три различни коцки за играње, збирот да е 10 или 11?

Решение.

Просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{(i, j, k) \mid \ i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \text{ па } |\Omega| = \overline{V}_{6}^{3} = 6^{3} = 216.$$

Нека A е настанот: збирот на трите коцки е 10. Тогаш,

$$A=\{(i,j,k)\,|\,i,j,k\in\{1,2,3,4,5,6\},\ i+j+k=10\}=$$
$$=\{(1,3,6),(1,6,3),(3,1,6),(3,6,1),(6,1,3),(6,3,1),(1,4,5),(1,5,4),(4,1,5),$$
$$(4,5,1),(5,1,4),(5,4,1),(2,2,6),(2,6,2),(6,2,2),(2,3,5),(2,5,3),$$
$$(3,2,5),(3,5,2),(5,2,3),(5,3,2),(2,4,4),(4,2,4),(4,4,2),(3,3,4),$$
$$(3,4,3),(4,3,3)\}.$$

Бројот на елементи на множеството A е $|A|=27$, па

$$P(A)=\frac{27}{216}=0.125.$$

Слично, ако B е настанот: збирот на трите коцки е 11, односно

$$B=\{(i,j,k)\,|\,i,j,k\in\{1,2,3,4,5,6\},\ i+j+k=11\},$$

тогаш $|B|=27$, $P(B)=\dfrac{27}{216}=0.125$.

Заклучуваме дека при истовремено фрлање на три различни коцки за играње, еднакво веројатно е да се добие збир 10 и збир 11.

31. На девет картички се напишани цифрите од 1 до 9. Од нив случајно се извлечени 4 картички една по една и наредени од лево кон десно по редоследот на извлекување. Колкава е веројатноста да се добие:

а) парен број;

б) бројот 1234?

Решение.

Бројот на сите можни четирицифрени броеви со различни цифри, формирани од цифрите: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 е V_9^4.

а) Вројот на парните четирицифрени броеви со различни цифри ќе го определиме на следниов начин. Ако бројот завршува со 2, тогаш останатите 8 цифри се распоредуваат на 3 места, па бројот на четирицифрени броеви со различни цифри кои завршуваат со 2 е V_8^3. Аналогно, и бројот на четирицифрени броеви со различни цифри кои завршуваат со 4, како и на оние кои завршуваат со 6 односно 8 е V_8^3, па вкупниот број на овие парни четирицифрени броеви е $4V_8^3$. Бараната веројатност е

$$\frac{4V_8^3}{V_9^4} = 0.4(4)\,.$$

б) $\frac{1}{V_9^4} \approx 0.00033$.

32. Да се најде веројатноста сите цифри на случајно избран телефонски број да се различни, ако телефонските броеви се составени од 7 цифри и не може да почнуваат со 0.

Решение.

Бројот на сите можни телефонски броеви се добива ако од бројот на сите седумцифрени броеви формирани од цифрите: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 (вклучувајќи ги и броевите кои почнуваат со 0) се одземе бројот на седумцифрени броеви кои почнуваат со 0, односно $\overline{V}_{10}^{\,7} - \overline{V}_9^{\,6}$. Поволни телефонски броеви се само седумцифрените броеви со различни цифри и нивниот број е $V_{10}^7 - V_9^6$. Бараната веројатност е

$$\frac{V_{10}^7 - V_9^6}{\overline{V}_{10}^{\,7} - \overline{V}_9^{\,6}} = 0.06048.$$

33. На приземјето на зграда која има 7 спрата, во лифтот влегле три лица. Да се најде веројатноста:

а) сите тројца да излезат на првиот спрат;

б) ниеден да не излезе пред третиот спрат;

в) сите тројца да излезат на различни спратови;

г) барем еден да излезе на третиот спрат;

д) двајца да излезат на вториот, а третиот на кој било од останатите спратови.

Решение.

Седум спрата се распоредуваат по трите лица. Според тоа, просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}.$$

Бројот на елементи на Ω е $\overline{V}_7^{\,3}$ (може да се случи повеќе луѓе да излезат на исти спрат).

а) $A=\{(1,1,1)\}$, па $P(A)=\dfrac{1}{\overline{V}_7^3}\approx 0.003$.

б) $B=\{(i,j,k)\mid i,j,k\in\{3,4,5,6,7\}\}$, па $P(B)=\dfrac{\overline{V}_5^3}{\overline{V}_7^3}\approx 0.364$.

в) $C=\{(i,j,k)\mid i,j,k\in\{1,2,3,4,5,6,7\}, i\neq j, i\neq k, j\neq k\}$, па

$$P(C)=\frac{V_7^3}{\overline{V}_7^3}\approx 0.612.$$

г) Ако означиме настан D: барем еден од тројцата да излезе на третиот спрат, тогаш неговиот спротивен настан е $\overline{D}$: ниеден да не излезе на третиот спрат. Тогаш $\overline{D}=\{(i,j,k)\mid i,j,k\in\{1,2,4,5,6,7\}\}$, па

$$P(D)=1-P\left(\overline{D}\right)=1-\frac{\overline{V}_6^3}{\overline{V}_7^3}\approx 0.37.$$

д) $E=\{(2,\,2,\,k)\mid\ k\in\{1,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7\}\}\cup\{(2,\,j,\,2)\mid j\in\{1,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7\}\}\cup$

$\cup\{(i,\,2,\,2)\mid i\in\{1,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7\}\},$

па

$$P(E)=\frac{3V_6^1}{\overline{V}_7^3}\approx 0.052.$$

34. Во едно населено место е инсталирана нова телефонска централа при што како кориснички броеви се доделени сите шестцифрени броеви кои почнуваат со цифрата 3. Да се определи веројатноста дека телефонскиот број на случајно избран корисник содржи барем две нули.

Решение.

Во населеното место, телефонски броеви се сите шестцифрени броеви кои почнуваат со цифрата 3. Значи остануваат пет места на кои може да се распоредат цифрите: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Според тоа, бројот на сите можни телефонски броеви е $\overline{V}_{10}^5$.

Нека A е настанот: случајно избран телефонски број содржи барем две нули. Ги означуваме настаните:

A_2: случајно избраниот телефонски број има точно две нули,

A_3: случајно избраниот телефонски број има точно три нули,

A_4: случајно избраниот телефонски број има точно четири нули,

A_5: случајно избраниот телефонски број има точно пет нули.

Телефонски броеви кои имаат точно две нули се вкупно $C_5^2 \cdot \overline{V}_9^3$ (двете места на кои има нули може да се изберат на C_5^2 начини, а на останатите три места се распоредуваат цифрите: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 на $\overline{V}_9^3$ начини). Според тоа, $P(A_2) = \frac{C_5^2 \cdot \overline{V}_9^3}{\overline{V}_{10}^5}$.

Аналогно се определуваат веројатностите и на настаните A_3, A_4 и A_5. За веројатноста на настанот A добиваме:

$$P(A) = P(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) =$$
$$= \frac{C_5^2 \cdot \overline{V}_9^3}{\overline{V}_{10}^5} + \frac{C_5^3 \cdot \overline{V}_9^2}{\overline{V}_{10}^5} + \frac{C_5^4 \cdot \overline{V}_9^1}{\overline{V}_{10}^5} + \frac{1}{\overline{V}_{10}^5} = \frac{8146}{10^5} \approx 0.081.$$

Задачата може да се реши и со спротивен настан, определувајќи ја веројатноста на настанот $\overline{A}$: случајно избраниот број има најмногу една нула.

35. Случајно се избира природен број *N*. Да се определи веројатноста дека неговиот

а) квадрат;

б) четврти степен;

в) производ со друг природен број,

завршува со единица.

Решение.

Случајно избраниот природен број N го претставуваме во облик

$$N = A + 10B + \cdots,$$

каде што A и B се произволни цифри од 0 до 9.

а) Квадратот на N е $N^2 = A^2 + 20AB + \cdots$. Последната цифра на N^2 зависи само од A. Бидејќи $A \in \{0, 1, ..., 9\}$, заклучуваме дека A може да се избере на вкупно $n = 10$ начини, од кои само два, кога $A = 1$ и $A = 9$, се поволни избори.

Според тоа, бараната веројатност е $p=\frac{2}{10}=0.2$.

б) Четвртиот степен на N е

$$N^4=A^4+40AB+\cdots.$$

Повторно $n=10$, но сега поволни избори за A се: $A=1$, $A=3$, $A=7$ и $A=9$.

Според тоа, бараната веројатност е $p=\frac{4}{10}=0.4$.

в) Нека $N_1=A_1+10B_1+\cdots$ е природниот број со кој се множи N. Производот NN_1 е од облик:

$$NN_1=AA_1+10(AB_1+A_1B)+\cdots,$$

па според тоа, последната цифра зависи само од производот на A и A_1. Значи $n=100$. Производот NN_1 завршува со единица во случаите кога

$$A=A_1=1;\; A=3, A_1=7;\; A=7, A_1=3 \text{ или } A=A_1=9.$$

Бараната веројатност е $p=\frac{4}{100}=0.04$.

36. (Парадокс на Мере) Покажи дека поверојатно е при едно фрлање на четири различни коцки за играње да се добие барем една единица отколку при 24 фрлања на две различни коцки за играње барем еднаш да се добијат две единици.

Решение.

Елементарни настани при едно фрлање на четири различни коцки за играње се елементите на множеството

$$\Omega_1=\{(i,j,k,p)\mid i,j,k,p\in\{1,2,3,4,5,6\}\},$$

па $|\Omega_1|=\overline{V}_6^4=6^4$.

Нека го означиме бараниот настан со A_1, т.е.

A_1: се добива барем една единица.

Тогаш $\overline{A_1}$ е настанот: не се добива ниту една единица, т.е. сите добиени броеви се различни од единица. Значи

$$\overline{A_1}=\{(i,j,k,p)\,|\,i,j,k,p\in\{2,3,4,5,6\}\},\text{ па }\left|\overline{A_1}\right|=\overline{V}_5^{\,4}=5^4.$$

Веројатноста на настанот A_1 е

$$P(A_1)=1-P\left(\overline{A_1}\right)=1-\frac{5^4}{6^4}\approx 0.518.$$

Просторот од елементарни настани при 24 фрлања на две различни коцки за играње е

$$\Omega_2=\{((x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_{24},y_{24}))\,|\,x_i,y_i\in\{1,2,\ldots,6\},i\in\{1,2,3,\ldots,24\}\},$$

па $|\Omega_2|=\overline{V}_{V_6^2}^{\,24}=V_{36}^{24}=36^{24}$.

Нека означиме настан A_2: барем еднаш се добиваат две единици. Тогаш неговиот спротивен настан е $\overline{A_2}$: ниту еднаш не се добиваат две единици, и $\left|\overline{A_2}\right|=\overline{V}_{\overline{V_6^2}-1}^{\,24}=\overline{V}_{35}^{\,24}=35^{24}$, па

$$P(A_2)=1-P\left(\overline{A_2}\right)=1-\frac{35^{24}}{36^{24}}\approx 0.491.$$

37. На отсечката PQ со должина $l>0$ случајно е избрана точка M. Да се најде веројатноста точката M да биде:

а) поблиску до точката P отколку до точката Q;

б) средина на отсечката PQ;

в) поблиску до средината на PQ отколку до P;

г) поблиску до средината отколку до еден од краевите на отсечката PQ.

Решение.

а) Можни настани се елементите на множеството

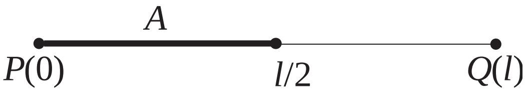
$$\Omega=\{x\,|\,0\le x\le l\}=[0,l],$$

а поволни настани се елементите на множеството

$$A=\{x\,|\,0\le x\le l,\,x<l-x\}=\left\{x\,\middle|\,0\le x<\frac{l}{2}\right\}=[0,l/2),$$

кое е означено на сликата 2.3. Бараната веројатност е

$$\frac{l_A}{l_\Omega}=\frac{l/2}{l}=\frac{1}{2}.$$



Слика 2.3

б) Нека A е настанот: точката M е средина на PQ. Тогаш

$$P(A)=\frac{l_A}{l_\Omega}=\frac{0}{l}=0.$$

в) Множеството

$$A=\left\{x\,\middle|\,0\le x\le l,\frac{l}{2}-x<x\right\}=\left\{x\,\middle|\,0\le x\le l,x>\frac{l}{4}\right\}=(l/4,l]$$

е означено на сликата 2.4.

Слика 2.4

За бараната веројатност се добива $\frac{l_A}{l_\Omega}=\frac{\frac{3}{4}l}{l}=\frac{3}{4}.$

г) $A=\left\{x\,\middle|\,0\le x\le l,\frac{l}{4}<x<\frac{3l}{4}\right\}=(l/4,3l/4).$ Бараната веројатност е

$$P(A)=\frac{l_A}{l_\Omega}=\frac{l/2}{l}=\frac{1}{2}.$$

38. На отсечката PQ со должина $L>0$ случајно и независно една од друга се избрани две точки M_1 и M_2. Да се најде веројатноста точката M_1 да биде поблиску до точката M_2 отколку до точката P.

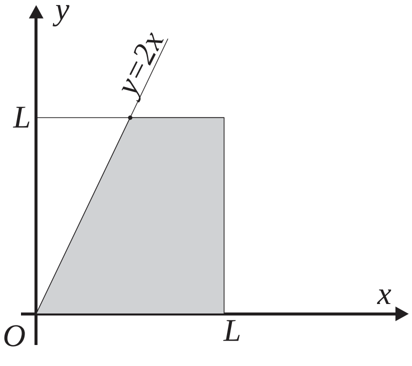
Решение.

Нека $x=\overline{PM_1}$ и $y=\overline{PM_2}$, каде што $0\le x\le L$ и $0\le y\le L$. Можни и поволни исходи се соодветно елементите на множествата:

$$\Omega=\{(x,y)|\ 0\le x\le L, 0\le y\le L\},$$
$$A=\{(x,y)|\ 0\le x\le L, 0\le y\le L, |y-x|<x\}=$$
$$=\{(x,y)|\ 0\le x\le L, 0\le y\le L,\ 0<y<2x\}.$$

Плоштината на областа Ω е L^2. A е исенчената област на сликата 2.5, па нејзината плоштина ја добиваме како разлика од плоштината на областа Ω и неисенчениот правоаголен триаголник со катети L и $\frac{L}{2}$, односно

$$P_A=L^2-\frac{1}{2}L\cdot\frac{L}{2}=\frac{3}{4}L^2.$$



Слика 2.5

Според тоа, бараната веројатност е

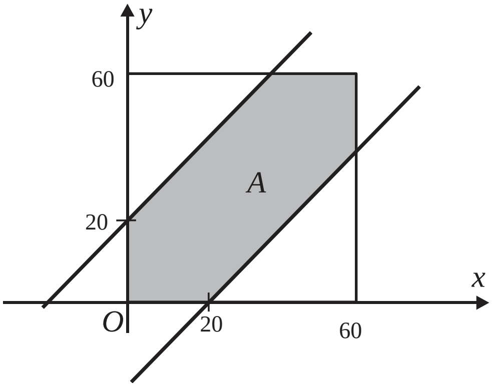
$$\frac{P_A}{P_\Omega}=\frac{3L^2/4}{L^2}=\frac{3}{4}.$$

39. Две лица A и B се договориле да се сретнат на определено место меѓу 12 и 13 часот. Лицето кое доаѓа прво на определеното место чека 20 минути, а потоа си заминува. Колкава е веројатноста двете лица да се сретнат, ако нивните пристигнувања во текот на наведениот час се независни и еднакво можни?

Решение.

Нека x е времето на пристигнување на лицето A на договореното место, а y времето на пристигнување на лицето B. Тогаш можни исходи се елементите на множеството

$$\Omega = \{(x,y) | \, 12\text{h} \le x \le 13\text{h}, \; 12\text{h} \le y \le 13\text{h}\} =$$
$$= \{(x,y) | \, 0\,\text{min} \le x \le 60\,\text{min}, \; 0\,\text{min} \le y \le 60\,\text{min}\}.$$



Слика 2.6

Нека A е настанот: двете лица се сретнале. Тогаш

$$A = \{(x,y) | \, 0 \le x \le 60, \; 0 \le y \le 60, |x-y| \le 20\} =$$
$$= \{(x,y) | \, 0 \le y \le 60, \; 0 \le y \le 60, x-20 \le y \le x+20\}.$$

Областа A е исенчениот дел на сликата 2.6. Нејзината плоштина ја наоѓаме како разлика од плоштината на Ω и двата неисенчени правоаголни рамнокраки триаголници со катета 40. Бараната веројатност е

$$\frac{P_A}{P_\Omega} = \frac{60^2 - \frac{1}{2}40^2 \cdot 2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

40. Да се најде веројатноста збирот на два случајно избрани броја од сегментот $[0,1]$ да биде помал од 1, а нивниот производ да биде помал од $\frac{2}{9}$.

Решение.

Нека со x го означиме првиот избран број, а со y вториот избран број. Можни и поволни исходи се соодветно елементите на множествата:

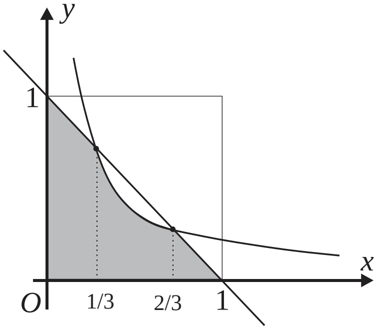
$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\},$$

$$A = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x+y<1,\ xy < \frac{2}{9}\right\}.$$

Бараме пресек на правата $x+y=1$ и хиперболата $xy=2/9$, односно го решаваме системот

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\dfrac{2}{9} \end{cases}.$$

Ако замениме $y=1-x$ во втората равенка, ја добиваме квадратната равенка $x^2-x+2/9=0$, чии решенија се $x_1=1/3$ и $x_2=2/3$. Според тоа, бараните пресечни точки се: $(1/3, 2/3)$ и $(2/3, 1/3)$.



Слика 2.7

Областа *A* е исенчениот дел на сликата 2.7, па за плоштината на *A* имаме:

$$P_A = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-x)dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{2}{9x}dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (1-x)dx =$$

$$= \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1/3} + \frac{2}{9}\ln|x|\Bigg|_{1/3}^{2/3} + \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{2/3}^{1} = \frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2.$$

Бараната веројатност е

$$\frac{P_A}{P_\Omega}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2}{1}\approx 0.49.$$

41. Случајно се избираат реални броеви a и b така што за нив важи $|a|\le 1$ и $|b|\le 4$ и се формира квадратната равенка $x^2+2ax+b=0$.

а) Колкава е веројатноста корените на добиената равенка да бидат реални?

б) Колкава е веројатноста корените на добиената равенка да бидат реални и позитивни?

Решение.

Сите можни исходи се елементите на множеството

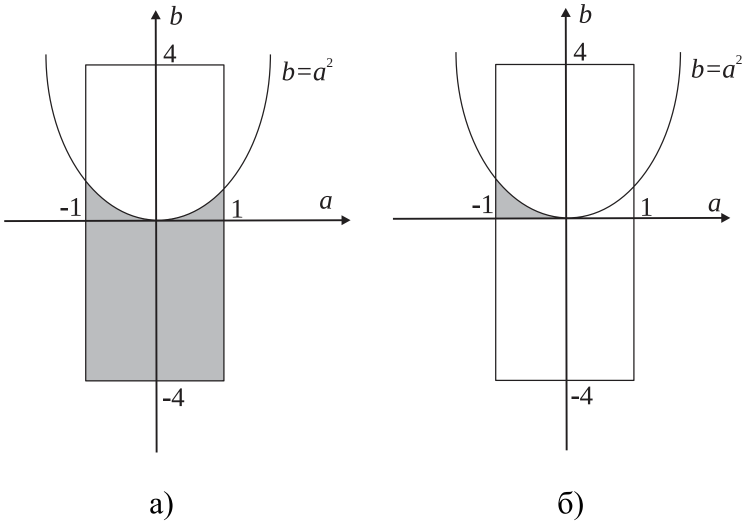
$$\Omega=\{(a,b)|\ |a|\le 1,|b|\le 4\}.$$

Тогаш $P_\Omega=2\cdot 8=16.$

а) Корените на равенката се реални ако $D=4a^2-4b\ge 0.$ Според тоа, поволни исходи се елементите на множеството

$$A=\{(a,b)|\ |a|\le 1,\ |b|\le 4,\ 4a^2-4b\ge 0\}=\{(a,b)|\ |a|\le 1,\ |b|\le 4,\ b\le a^2\}.$$

Областа A е исенчениот дел на сликата 2.8 а).



а) б)

Слика 2.8

Плоштината на областа A е $P_A = 2\int_0^1 a^2 da + 4\cdot 2 = 2\frac{a^3}{3}\Big|_0^1 + 8 = \frac{26}{3}$, па бараната веројатност е

$$\frac{P_A}{P_\Omega} = \frac{26/3}{16} = \frac{13}{24}.$$

б) За да определиме за кои a и b, корените на равенката се позитивни, ќе ги искористиме Виетовите формули: $x + y = -2a, xy = b$. Од првата равенка следува дека $a < 0$, а од втората $b > 0$. Според тоа,

$$\begin{aligned} A &= \{(a,b) \,|\, |a| \le 1,\ |b| \le 4,\ b \le a^2,\ a < 0, b > 0\} = \\ &= \{(a,b) \,|\, -1 \le a < 0, 0 < b \le 4, b \le a^2\}. \end{aligned}$$

Областа A е исенчениот дел на сликата 2.8 б) и нејзината плоштина е

$$P_A = \int_{-1}^0 a^2 da = \frac{a^3}{3}\Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3}.$$

Бараната веројатност е $\frac{P_A}{P_\Omega} = \frac{1/3}{16} = \frac{1}{48}$.

42. Од сегментот [0,1] случајно се избираат два реални броја. Да се определи веројатноста на следните настани:

A: првата цифра по децималната запирка да биде иста кај двата избрани броја;

B: првата цифра по децималната запирка кај првиот избран број да биде помала од првата цифра по децималната запирка кај вториот избран број;

C: првата цифра по децималната запирка кај едниот избран број да биде помала од првата цифра по децималната запирка кај другиот избран број.

Решение.

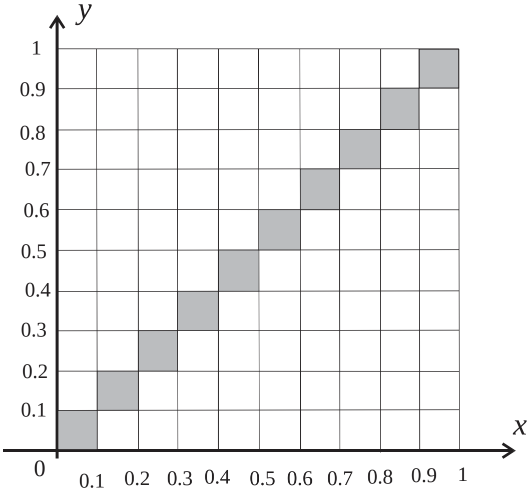
Сите можни исходи се елементите на множеството

$$\Omega = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

и неговата плоштина е 1.

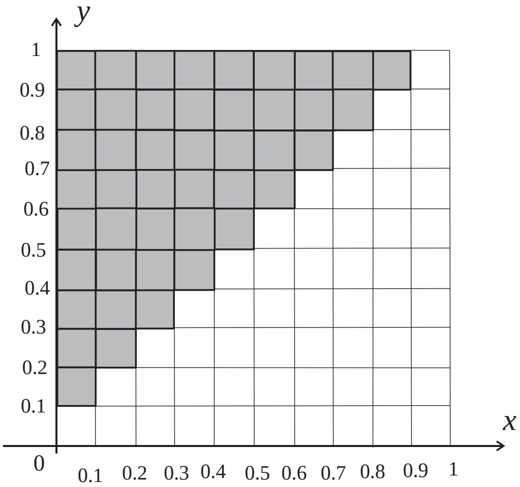
Поволни исходи за настанот A се точките од исенчаната област на сликата 2.9 (тоа се 10 квадрати со страна 0.1). Тогаш веројатност на настанот A е

$$\frac{P_A}{P_\Omega} = 0.1^2 \cdot 10 = 0.1.$$



Слика 2.9

Точките од исенчаната област на сликата 2.10 се поволни исходи за настанот B .



Слика 2.10

За веројатност на настанот B имаме:

$$\frac{P_B}{P_\Omega} = 0.1\cdot 0.9 + 0.1\cdot 0.8 + 0.1\cdot 0.7 + 0.1\cdot 0.6 + 0.1\cdot 0.5 +$$
$$+ 0.1\cdot 0.4 + 0.1\cdot 0.3 + 0.1\cdot 0.2 + 0.1\cdot 0.1 = 0.45.$$

Настанот C е спротивен на настанот A, па $P(C) = 1 - P(A) = 0.9.$

43. (Проблем на Буфон) Една рамнина е исцртана со паралелни прави кои се на растојание 4 единици една од друга. На рамнината случајно се испушта игла со должина 2 единици. Да се определи веројатноста иглата да пресече некоја од паралелните прави.

Решение.

Еден начин да се определи положбата на иглата во однос на паралелните прави е преку аголот што го зафаќа иглата со правите и растојанието од долниот крај на иглата до најблиската горна права.

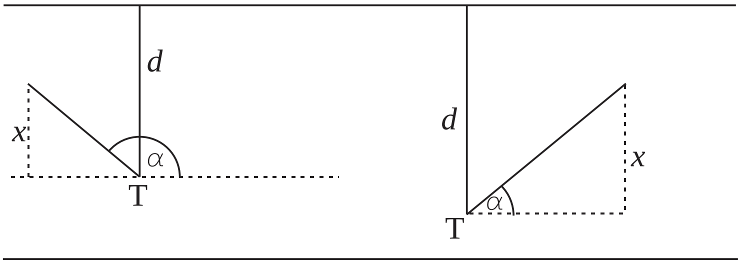
Нека растојанието од долниот крај на иглата (точката Т на сликата 2.11) до најблиската горна права го означиме со d. Јасно $d \in [0,4]$. Ако аголот што го зафаќа иглата со правите го означиме со α, тогаш $0 \le \alpha < \pi$. Според тоа, можни исходи се сите точки од множеството

$$\Omega = \{(\alpha, d) \mid 0 \le \alpha < \pi,\ 0 \le d \le 4\}.$$

Плоштината на областа Ω е $P_\Omega = 4\pi.$

Од сликата 2.11 јасно е дека $x = 2\sin\alpha$. Иглата ќе сече една од правите кога $d \le x = 2\sin\alpha$. Според тоа, поволни исходи за настанот A: иглата да пресече некоја од правите, се сите точки од множеството

$$A = \{(\alpha, d) \mid 0 \le \alpha < \pi, 0 \le d \le 4, d \le 2\sin\alpha\}.$$



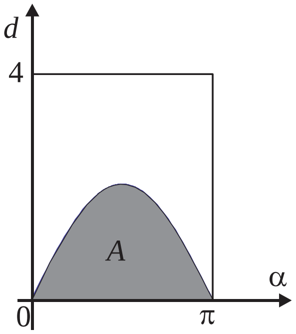
Слика 2.11

Областа A е исенчениот дел на сликата 2.12. Нејзината плоштина е

$$P_A = 2\int_0^{\pi} \sin\alpha d\alpha = -2\left(\cos\alpha\Big|_0^{\pi}\right) = -2\cdot(-1-1) = 4.$$

Од геометриската дефиниција на веројатност, добиваме дека веројатноста на настанот A е

$$P(A) = \frac{P_A}{P_\Omega} = \frac{4}{4\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318.$$



Слика 2.12

44. По автопат се движи колона автомобили, рамномерно со брзина $u > 0$. Должината на секој автомобил е $a > 0$, а ширината $b > 0$. Растојанието меѓу секои два соседни автомобили е $d > 0$. На автопатот (патеката по која се движи колоната од автомобили) стапнува желка која се движи рамномерно со брзина $v > 0$ нормално на правецот на движење на автомобилите ($ub < vd$). Да се определи веројатноста дека желката ќе стигне неповредена на спротивната страна на колоната.

Решение.

Нека со x го означиме растојанието од желката до првиот автомобил кој доаѓа кон неа во моментот кога таа стапнува на автопатот. Тогаш, можни исходи се сите точки од множеството

$$\Omega = \{x \mid 0 \le x \le a + d\}.$$

Желката нема да биде повредена ако:

1) во моментот кога стапнува на автопатот пред неа нема автомобил, односно кога $x \le d$;

2) има доволно време за да помине на спротивната страна на колоната

пред да пристигне следниот автомобил, односно кога времето кое и е потребно на желката да ја помине колоната $t_1 = \frac{b}{v}$ е помало од времето кое му е потребно на најблискиот автомобил кој доаѓа кон желката да стигне до правецот на желката $t_2 = \frac{x}{u}$. Од неравенството $\frac{b}{v} < \frac{x}{u}$ добиваме $x > \frac{ub}{v}$.

Значи, можни исходи за настанот A: желката ќе стигне неповредена на спротивната страна на колоната, се сите точки од множеството

$$A = \left\{ x \,\middle|\, \frac{ub}{v} < x \le d \right\}.$$

Според геометриската дефиниција на веројатност, следува дека бараната веројатност е

$$P(A) = \frac{d - \frac{ub}{v}}{a + d} = \frac{dv - bu}{v(a+d)}.$$

Задачата може да се реши и на следниов начин.

Времето кое му е потребно на еден автомобил да помине пат a е $t_1 = \frac{a}{u}$, времето кое му е потребно на еден автомобил да помине пат d е $t_2 = \frac{d}{u}$, а времето кое и е потребно на желката да стигне на спротивната страна од колоната е $t_3 = \frac{b}{v}$.

Момент на стапнување на желката на автопатот може да биде било која точка од сегментот $[0, t_1 + t_2]$ и тоа се сите можни исходи. Желката успешно ќе помине на спротивната страна на колоната, само ако стапне на автопатот во момент од сегментот $[0, t_2 - t_3]$, а тоа се поволни исходи. Според геометриската дефиниција на веројатност, следува дека бараната веројатност е

$$P(A) = \frac{t_2 - t_3}{t_1 + t_2} = \frac{\frac{d}{u} - \frac{b}{v}}{\frac{a+d}{u}} = \frac{dv - bu}{v(a+d)}.$$

2.2. Независни настани. Условна веројатност

45. Нека $P(A)=0.4$ и $P(A\cup B)=0.7$. Да се пресмета $P(B)$ ако:

а) A и B се независни настани;

б) A и B се заемно исклучиви (дисјунктни) настани.

Решение.

а) Од независноста на настаните A и B следува $P(AB)=P(A)P(B)$. Тогаш од равенството

$$0.7=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

добиваме $P(B)=0.5$.

б) Од дисјунктноста на настаните A и B следува $P(A\cap B)=P(\emptyset)=0.$ Тогаш од равенството

$$0.7=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)$$

имаме $P(B)=0.3.$

46. Нека A и B се настани за кои $P(A)\neq 0$ и $P(B)\neq 0.$ Да се покаже дека A и B не можат истовремено да бидат заемно исклучиви (дисјунктни) и независни настани.

Решение.

Нека A и B се заемно исклучиви настани. Тогаш

$$P(AB)=P(\emptyset)=0.$$

Од условот $P(A)\neq 0$ и $P(B)\neq 0$ следува $P(A)P(B)\neq 0.$ Заклучуваме дека

$$P(AB)\neq P(A)P(B),$$

од каде следува дека настаните A и B се зависни.

47. Нека настаните A, B и C се независни со веројатности: $P(A)=a$, $P(B)=b$ и $P(C)=c$, $a,b,c\in[0,1]$. Да се изразат преку a, b и c следните веројатности:

а) $P(AB)$; б) $P(A\cup B)$;

в) $P((A\cup B)|B)$; г) $P((A\cup B)|C)$.

Решение.

а) Од независноста на настаните A и B следува $P(AB)=P(A)P(B)=ab.$

б) $$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)=\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\\&=a+b-ab.\end{aligned}$$

в) $$P((A\cup B)|B)=\frac{P((A\cup B)\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1.$$

г) $$P((A\cup B)|C)=\frac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A\cup B)P(C)}{P(C)}=$$
$$=P(A\cup B)=a+b-ab.$$

48. Истовремено се фрлаат бела и црна коцка за играње. Да се определат веројатностите на следниве настани:

A: збирот на двете коцки е 7,

B: збирот на двете коцки е 6,

C: на белата коцка паднала четворка,

D: збирот на двете коцки е 10,

E: збирот на двете коцки е 5, а производот 4.

Потоа, да се испита дали се независни следниве настани:

а) A и C; б) B и C; в) A, B и C.

Решение.

Нека (i, j) е настанот: на белата коцка паднал бројот i, а на црната коцка бројот j, каде што $i, j\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Просторот од елементарни настани е

$$\Omega=\{(i,j)\,|\; i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}\}\text{ и }|\Omega|=\overline{V}_6^{\,2}=6^2=36.$$

Тогаш,

$$A=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}\text{, па } P(A)=\frac{6}{36},$$

$B = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$, па $P(B) = \frac{5}{36}$,

$C = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}$ па $P(C) = \frac{6}{36}$,

$D = \{(4,6), (6,4), (5,5)\}$, па $P(D) = \frac{3}{36}$,

$E = \{(4,1), (1,4)\}$, па $P(E) = \frac{2}{36}$.

а) Испитуваме дали важи равенството $P(AC) = P(A)P(C)$.

Бидејќи $A \cap C = \{(4,3)\}$, следува дека $P(AC) = \frac{1}{36}$. Значи

$$\frac{1}{36} = P(AC) = P(A)P(C) = \frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36},$$

па настаните A и C се независни.

б) Испитуваме дали важи равенството $P(BC) = P(B)P(C)$.

Од тоа што $B \cap C = \{(4,2)\}$, следува дека $P(BC) = \frac{1}{36}$. Настаните B и C се зависни бидејќи

$$\frac{1}{36} = P(BC) \neq P(B)P(C) = \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36}.$$

в) Настаните A, B и C се зависни бидејќи настаните B и C се зависни.

49. Колкава е веројатноста при истовремено фрлање на монета и коцка за играње да паднат глава и шестка?

Решение.

Нека A е настанот: на монетата паднала глава, а B е настанот: на коцката паднала шестка. Тогаш, настаните A и B се независни настани, па бараната веројатност е

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

50. Двајца војници пукаат во иста цел со по еден куршум, независно еден од друг. Веројатноста да погоди првиот војник е 0.7, а да погоди вториот е 0.9. Колкава е веројатноста целта да е погодена барем еднаш?

Решение.

Ги означуваме следниве настани:

A: првиот војник ја погодил целта,

B: вториот војник ја погодил целта.

Тогаш $P(A)=0.7$ и $P(B)=0.9$. Настаните A и B се независни настани, па бараната веројатност е

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=$$
$$=0.7+0.9-0.7\cdot 0.9=0.97.$$

51. Ако е познато дека при извлекување на една карта од шпил со 52 карти е добиена карта со црвена боја, да се најде веројатноста дека е извлечена десетка.

Решение.

Ако го означиме со A настанот: извлечената карта е црвена, а со B настанот: извлечената карта е 10, тогаш бараната веројатност е

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{52}}{\frac{26}{52}}=\frac{2}{26}=\frac{1}{13}.$$

52. Во една кутија има 8 бели и 10 црни топчиња. Се извлекуваат две топчиња едно по едно. Да се најде веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели, ако првото извлечено топче:

а) не се враќа во кутијата;

б) се враќа во кутијата.

Решение.

Нека A е настанот: првото извлечено топче е бело, а B е настанот: второто извлечено топче е бело.

а) Настаните A и B се зависни, па добиваме:

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{8}{18}\cdot\frac{7}{17}\approx 0.183.$$

б) Во овој случај, настаните A и B се независни, па

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{8}{18}\cdot\frac{8}{18}\approx 0.198\,.$$

53. Во една кутија има 100 чипа од кои 20 се неисправни. На случаен начин од кутијата се извлекуваат два чипа, еден по еден без враќање.

а) Колкава е веројатноста првиот извлечен чип да е неисправен?

б) Колкава е веројатноста вториот извлечен чип да е неисправен, ако е познато дека првиот бил неисправен?

в) Колкава е веројатноста двата чипа да се неисправни?

Решение.

Нека A_1 е настанот: првиот извлечен чип е неисправен, а A_2 е настанот: вториот извлечен чип е неисправен.

а) $P(A_1)=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}=0.2.$

б) $P(A_2|A_1)=\dfrac{19}{99}=0.0(19).$

в) $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)=0.038(38).$

54. Експеримент се состои од фрлање на две различни коцки за играње. Да се најде веројатноста дека на двете коцки паднале исти броеви, ако е познато дека нивниот збир не е поголем од 3.

Решение.

Бројот на сите можни исходи при фрлање на две различни коцки е $\overline{V}_6^2=6^2=36.$

Нека A е настанот: на двете коцки паднал ист број. Тогаш

$$A=\{(i,i)|\; i\in\{1,2,3,4,5,\,6\}\},\text{ па } P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Ако B е настанот: збирот на двете коцки не е поголем од 3, тогаш

$$B=\{(i,\,j)|\; i+j\le 3\}=\{(1,1),(1,\,2),(2,1)\},\text{ па } P(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

Од тоа што $A\cap B=\{(1,1)\}$, следува $P(AB)=\dfrac{1}{36}$. Бараната веројатност е

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{3}.$$

55. Нека веројатноста за појавување на настан A во секое повторување на даден експеримент е иста и изнесува 0.3. Експериментот се повторува се до појавување на настанот A. Да се најде веројатноста дека експериментот:

а) мора да се повтори и по четврти пат;

б) се повторил точно 4 пати.

Решение.

Нека A_i е настанот: при i-тото повторување на експериментот се појавил настанот A. Тогаш

$$P(A_i)=0.3,\; P(\overline{A_i})=1-P(A_i)=0.7,\; i\in\{1,\,2,\,3,\,\ldots\}.$$

Од независноста на настаните A_i, $i\in\{1,\,2,\,3,\,\ldots\}$ за бараните веројатности добиваме:

а) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0.7\cdot 0.7\cdot 0.7=0.343.$

б) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)=(0.7)^3\cdot 0.3=0.1029.$

56. Два различни комплета содржат по десет картички со броевите од 1 до 10. Картичките од едниот комплет се распоредуваат на маса по ред од 1 до 10. Од вториот комплет се извлекува една картичка и се става врз картичката со бројот 1 од претходно наредениот комплет, потоа се извлекува нова картичка и се става врз картичката со бројот 2. Постапката продолжува на ист начин се до покривање на картичката со бројот 10 од првиот комплет. Под поимот спарување се подразбира кога две картички ставени една врз друга се со иста бројка. Да се најде веројатноста дека настанало спојување на првите 4 позиции.

Решение.

Нека ги означиме настаните A_i: на i-тата позиција настанало спарување, $i\in\{1,\,2,\,3,\,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Тогаш, од зависноста на настаните A_i, $i\in\{1,\,2,\,3,\,4,5,6,7,8,9,10\}$, за бараната веројатност имаме:

$$P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1A_2))P(A_4|(A_1A_2A_3)).$$

A_1 е настанот: на првата позиција настанало спарување, т.е. првата извлечена картичка од вториот комплет е 1. Според тоа, $P(A_1)=\frac{1}{10}$.

$A_2|A_1$ е настанот: на втората позиција настанало спарување, под услов дека имало спарување и на првата позиција, односно втората извлечена картичка од вториот комплет е 2, ако првата извлечена картичка од овој комплет била 1. Заклучуваме дека

$$P(A_2|A_1)=\frac{1}{9}.$$

Аналогно се определуваат и останатите условни веројатности. Според тоа,

$$P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1A_2))P(A_4|(A_1A_2A_3))=$$
$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{5040}.$$

57. Од шпил со 52 карти се извлекуваат три карти. Да се пресмета веројатноста меѓу нив да нема десетка, ако картите се извлекуваат:

а) одеднаш;

б) една по една без враќање;

в) една по една со враќање.

Решение.

Нека A е настанот: трите извлечени карти не се десетки.

а) Во шпил со 52 карти има 48 карти кои не се десетки. Тогаш

$$P(A)=\frac{C_{48}^3}{C_{52}^3}=\frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}\approx 0.783.$$

Нека ги означиме настаните:

A_1: првата извлечена карта не е десетка,

A_2: втората извлечена карта не е десетка,

A_3: третата извлечена карта не е десетка.

б) Бидејќи A_1, A_2 и A_3 се зависни настани, имаме:

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1A_2)) = \frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{46}{50} \approx 0.783.$$

в) Во овој случај настаните A_1, A_2 и A_3 се независни, па добиваме:

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \left(\frac{48}{52}\right)^3 \approx 0.787.$$

58. Стрелците *A*, *B* и *C* гаѓаат по еднаш во иста цел, независно еден од друг, погодувајќи со веројатност 0.6, 0.5 и 0.4, соодветно. Утврдено е дека целта е погодена два пати. Колкава е веројатноста стрелецот *C* да ја погодил целта?

Решение.

Ги означуваме настаните:

A: стрелецот A ја погодил целта,

B: стрелецот B ја погодил целта,

C: стрелецот C ја погодил целта.

Тогаш $P(A)=0.6$, $P(B)=0.5$, $P(C)=0.4$.

Бараната веројатност е $P(C|D)=\dfrac{P(CD)}{P(D)}$, каде што D е настанот: целта е погодена два пати, и за неговата веројатност добиваме:

$$\begin{aligned}P(D) &= P(AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC) = P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC) = \\ &= P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) = \\ &= 0.6\cdot 0.5\cdot 0.6 + 0.6\cdot 0.5\cdot 0.4 + 0.4\cdot 0.5\cdot 0.4 = 0.38.\end{aligned}$$

Настанот *CD* е: стрелецот *C* ја погодил целта и целта е погодена два пати. Тогаш

$$P(CD) = P(A\overline{B}C + \overline{A}BC) = 0.2.$$

Според тоа,

$$P(C|D) = \frac{P(CD)}{P(D)} = \frac{0.2}{0.38} \approx 0.526.$$

59. Петнаесет испитни ливчиња содржат по две прашања, при што сите триесет прашања се различни. Еден студент знае да одговори точно на

25 прашања. На испитот студентот извлекол две ливчиња едно по едно без враќање. За да го положи испитот тој мора да одговори точно или на двете прашања од првото извлечено ливче, или на едно прашање од првото ливче и на првото прашање од второто ливче. Што е поверојатно, студентот да го положи или да не го положи испитот?

Решение.

На 15 ливчиња има вкупно 30 различни прашања од кои студентот знае 25.

Ги означуваме следниве настани:

A_1: студент одговорил точно на првото прашање од првото ливче,

A_2: студентот одговорил точно на второто прашање од првото ливче,

A_3: студентот одговорил точно на првото прашање од второто ливче.

Се бара веројатноста на настанот B: студентот го положил испитот.

$$\begin{aligned}P(B) &= P\left(A_1A_2+\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3\right)=P\left(A_1A_2\right)+P\left(\bar{A}_1A_2A_3\right)+P\left(A_1\bar{A}_2A_3\right)=\\ &=P(A_1)P\left(A_2|A_1\right)+P\left(\bar{A}_1\right)P\left(A_2|\bar{A}_1\right)P\left(A_3|\left(\bar{A}_1A_2\right)\right)+\\ &\quad+P(A_1)P\left(\bar{A}_2|A_1\right)P\left(A_3|\left(A_1\bar{A}_2\right)\right)=\\ &=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}\cdot\frac{24}{28}+\frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}\cdot\frac{24}{28}\approx 0.936.\end{aligned}$$

Според тоа, веројатноста на настанот $\bar{B}$: студентот не го положил испитот, е

$$P\left(\bar{B}\right)=1-P(B)\approx 0.064.$$

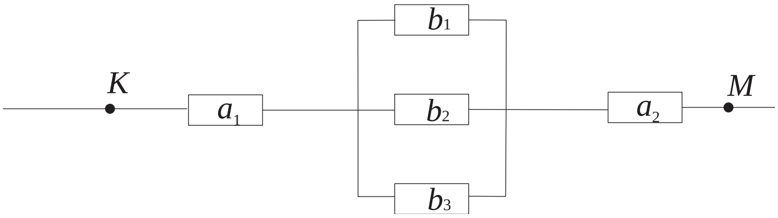
Значи поверојатно е дека студентот ќе го положи испитот.

60. На сликата 2.13 е претставено електрично коло меѓу точките K и M. Откажувањата на елементите a_1, a_2, b_1, b_2 и b_3 од колото, во временски интервал со должина t, се независни настани означени со A_1, A_2, B_1, B_2 и B_3, соодветно, чија веројатност е дадена во следнава табела:

настан	A_1	A_2	B_1	B_2	B_3
веројатност	0.6	0.5	0.4	0.7	0.9

Табела 2.2

Да се определи веројатноста за прекин на колото во временски интервал со должина t.



Слика 2.13

Решение.

Нека C е настанот: колото прекинало во временски интервал со должина t. Прво, ќе ја определиме веројатноста на настаните

$$A = A_1 + A_2 \text{ и } B = B_1B_2B_3.$$

Од независноста на настаните A_1, A_2, B_1, B_2 и B_3, имаме:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0.8,$$
$$P(B) = P(B_1B_2B_3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 0.252.$$

Бараната веројатност е

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 + A_2 + B_1B_2B_3) = P(A+B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \\ &= 0.8504. \end{aligned}$$

61. Од множеството $\{1, 2, ..., 100\}$ на случаен начин се избира еден број. Ако е познато дека избраниот број е делив со 2, да се најде веројатноста дека тој е делив со 3 или со 5.

Решение.

Ги означуваме следниве настани:

A_2 : избраниот број е делив со 2,

A_3 : избраниот број е делив со 3,

$$A_5: \text{избраниот број е делив со 5.}$$

Веројатноста избраниот број да е делив со 3 или 5, при услов тој да е делив со 2, е

$$P\left(\left(A_3 \cup A_5\right)\middle| A_2\right) = \frac{P\left(\left(A_3 \cup A_5\right) \cap A_2\right)}{P\left(A_2\right)} = \frac{P\left(\left(A_3 \cap A_2\right) \cup \left(A_5 \cap A_2\right)\right)}{P\left(A_2\right)} =$$

$$= \frac{P\left(A_3 \cap A_2\right) + P\left(A_5 \cap A_2\right) - P\left(A_2 \cap A_3 \cap A_5\right)}{P\left(A_2\right)}.$$

50 од броевите: $1, 2, ..., 100$ се делливи со 2, 16 броеви се делливи со 2 и 3, 10 се делливи со 2 и 5 и делливи со 2, 3 и 5 се само 3 броја. Значи,

$$P\left(A_2\right) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \qquad P\left(A_3 \cap A_2\right) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25},$$

$$P\left(A_5 \cap A_2\right) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \quad P\left(A_2 \cap A_3 \cap A_5\right) = \frac{3}{100}.$$

Според тоа,

$$P\left(\left(A_3 \cup A_5\right)\middle| A_2\right) = \frac{23}{50}.$$

62. Во кутија се наоѓаат *m* бели и *n* црни топчиња $(m, n > 0)$. Играчите *A* и *B* извлекуваат по едно топче, еден по еден по тој редослед. Победник е играчот кој прв ќе извлече бело топче. Да се определи веројатноста да победи играчот *A*, ако после секое извлекување топчето се враќа во кутијата.

Решение.

Ги означуваме следниве настани:

A_i : во i-то извлекување играчот *A* извлекол бело топче,

B_i : во i-то извлекување играчот *B* извлекол бело топче,

каде што $i \in \{1, 2, 3, ...\}$.

Нека *A* е настанот: победил играчот *A*. Тогаш, од независноста на настаните A_i и B_i, $i \in \{1, 2, 3, ...\}$, за веројатноста на настанот *A* имаме:

$$P(A) = P\left(A_1 + \overline{A}_1\overline{B}_2A_3 + \overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_3\overline{B}_4A_5 + ...\right) =$$

$$= P(A_1) + P(\overline{A}_1\overline{B}_2A_3) + P(\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_3\overline{B}_4A_5) + \ldots =$$

$$= P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{B}_4)P(A_5) + \ldots =$$

$$= \frac{m}{m+n} + \left(\frac{n}{n+m}\right)^2 \frac{m}{m+n} + \left(\frac{n}{n+m}\right)^4 \frac{m}{m+n} + \ldots =$$

$$= \frac{m}{m+n}\left[1 + \left(\frac{n}{n+m}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+m}\right)^4 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{m}{m+n}\frac{1}{1-\left(\frac{n}{m+n}\right)^2} = \frac{m+n}{m+2n}.$$

63. Во кутија има:

а) 5 бели и 4 црни топчиња;

б) 6 бели и 4 црни топчиња.

Играчите *A* и *B* извлекуваат по едно топче, еден по еден по тој редослед. Победник е играчот кој прв ќе извлече црно топче. Да се определи веројатноста да победи играчот *B*, ако после секое извлекување топчето не се враќа во кутијата.

Решение.

Ги означуваме следниве настани:

A_i : во i-то извлекување играчот *A* извлекол црно топче,

B_i : во i-то извлекување играчот *B* извлекол црно топче,

каде што $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Нека *B* е настанот: победил играчот *B*.

$$P(B) = P(\overline{A}_1B_2 + \overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_3B_4 + \overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_3\overline{B}_4\overline{A}_5B_6) =$$

$$= P(\overline{A}_1)P(B_2|\overline{A}_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|(\overline{A}_1\overline{B}_2))P(B_4|(\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_3)) +$$

$$+ P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|(\overline{A}_1\overline{B}_2))P(\overline{B}_4|(\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_3))P(\overline{A}_5|(\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_3\overline{B}_4))$$

$$\cdot P(B_6|(\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_3\overline{B}_4\overline{A}_5)) =$$

$$= \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} + \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4} \approx 0.365.$$

б) Резултатот е ист како во а).

64. (Задача за четворица лажговци) Една информација во вид на сигнал „да“ или „не“, се пренесува преку четири лица. Првиот ја добил информацијата, па ја соопштува на вториот, вториот на третиот, третиот на четвртиот, а четвртиот ја пренесува информацијата понатаму. Познато е дека секој од нив ја кажува вистината само во 1/3 од случаите. Ако е утврдено дека четвртиот ја кажал почетната информација (информацијата која ја добило првото лице), колкава е веројатноста дека и првиот ја кажал почетната информација?

Решение.

Ги дефинираме следниве настани:

A: првото лице ја кажало почетната информација,

B: четвртото лице ја кажало почетната информација,

C_i: i-тото лице го кажало она што го слушнало,

каде што $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Познато е дека веројатноста i-тото лице да ја каже вистината, односно да го каже она што го слушнало, е 1/3. Значи $P(C_i) = \frac{1}{3}$. Оттука следува дека веројатноста на спротивниот настан е

$$P(\overline{C_i}) = 1 - P(C_i) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Бидејќи треба да ја пресметаме веројатноста дека првото лице ја кажало почетната информација, ако е утврдено дека четвртото лице ја кажало почетната информација, ја користиме формулата за условна веројатност:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Од независноста на настаните C_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, следува

$$\begin{aligned}
P(AB) &= P\left(C_1C_2C_3C_4 + C_1\overline{C_2}\,\overline{C_3}C_4 + C_1\overline{C_2}C_3\overline{C_4} + C_1C_2\overline{C_3}\,\overline{C_4}\right) = \\
&= P(C_1C_2C_3C_4) + P\left(C_1\overline{C_2}\,\overline{C_3}C_4\right) + P\left(C_1\overline{C_2}C_3\overline{C_4}\right) + P\left(C_1C_2\overline{C_3}\,\overline{C_4}\right) = \\
&= P(C_1)P(C_2)P(C_3)P(C_4) + P(C_1)P(\overline{C_2})P(\overline{C_3})P(C_4) + \\
&\quad + P(C_1)P(\overline{C_2})P(C_3)P(\overline{C_4}) + P(C_1)P(C_2)P(\overline{C_3})P(\overline{C_4}) = \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^4} + \frac{12}{3^4} = \frac{13}{81}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(C_1C_2C_3C_4 + \overline{C_1}\,\overline{C_2}C_3C_4 + \overline{C_1}C_2\overline{C_3}C_4 + \overline{C_1}C_2C_3\overline{C_4} + \\
&\quad + C_1\overline{C_2}\,\overline{C_3}C_4 + C_1\overline{C_2}C_3\overline{C_4} + C_1C_2\overline{C_3}\,\overline{C_4} + \overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_4}) = \\
&= P(C_1C_2C_3C_4) + +P(\overline{C_1}\,\overline{C_2}C_3C_4) + P(\overline{C_1}C_2\overline{C_3}C_4) + P(\overline{C_1}C_2C_3\overline{C_4}) + \\
&\quad + P(C_1\overline{C_2}\,\overline{C_3}C_4) + P(C_1\overline{C_2}C_3\overline{C_4}) + P(C_1C_2\overline{C_3}\,\overline{C_4}) + P(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_4}) = \\
&= P(C_1)P(C_2)P(C_3)P(C_4) + P(\overline{C_1})P(\overline{C_2})P(C_3)P(C_4) + \\
&\quad + P(\overline{C_1})P(C_2)P(\overline{C_3})P(C_4) + P(\overline{C_1})P(C_2)P(C_3)P(\overline{C_4}) + \\
&\quad + P(C_1)P(\overline{C_2})P(\overline{C_3})P(C_4) + P(C_1)P(\overline{C_2})P(C_3)P(\overline{C_4}) + \\
&\quad + P(C_1)P(C_2)P(\overline{C_3})P(\overline{C_4}) + P(\overline{C_1})P(\overline{C_2})P(\overline{C_3})P(\overline{C_4}) = \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} + \frac{6\cdot 4}{81} + \frac{16}{81} = \frac{41}{81}.
\end{aligned}
$$

Според тоа, $P(A \mid B) = \dfrac{\frac{13}{81}}{\frac{41}{81}} = \dfrac{13}{41} \approx 0.317.$

65. Марија напишала n писма до n различни луѓе, ги ставила во пликови на кои на случаен начин ги испишала адресите на луѓето. Да се пресмета веројатноста дека барем едно писмо ќе стигне на точната адреса.

Решение.

Ако со A_i го означиме настанот дека на i-тото писмо е напишана точна адреса, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, тогаш бараната веројатност е

$$p = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Притоа,

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j \mid A_i) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} = \frac{(n-2)!}{n!},$$

$$P(A_iA_jA_k) = \frac{(n-3)!}{n!}, \quad ...., \quad P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{1}{n!}.$$

Користејќи ја формулата

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n),$$

добиваме:

$$p=nC_n^1-\frac{(n-2)!}{n!}C_n^2+\frac{(n-3)!}{n!}C_n^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!},$$

односно

$$p=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

Од $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ следува дека $e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$. Според тоа, за големо n важи $p\approx 1-\frac{1}{e}$.

66. Една компанија што произведува компјутери има три фабрики кои произведуваат 50%, 30% и 20% од нејзините производи, соодветно. Во секоја од овие фабрики, веројатноста дека произведен компјутер е неисправен е 0.02, 0.05 и 0.01, соодветно. Едно лице купило компјутер од таа компанија.

а) Да се определи веројатноста дека купениот компјутер е неисправен?

б) Ако купениот компјутер е неисправен, да се определи веројатноста дека тој е произведен во втората фабрика?

Решение.

Нека со B го означиме настанот: купениот компјутер е неисправен, а со H_i ги означиме хипотезите: компјутерот е произведен во i-тата фабрика, $i\in\{1, 2, 3\}$. Тогаш,

$$P(H_1)=0.5,\qquad P(H_2)=0.3,\qquad P(H_3)=0.2,$$
$$P(B|H_1)=0.02,\ P(B|H_2)=0.05,\ P(B|H_3)=0.01.$$

а) Од формулата за тотална веројатност добиваме:

$$P(B)=P(B|H_1)P(H_1)+P(B|H_2)P(H_2)+P(B|H_3)P(H_3)=0.027.$$

б) Од Баесовата формула следува дека

$$P(H_2|B)=\frac{P(B|H_2)P(H_2)}{P(B)}\approx 0.556.$$

67. Три различни кутии ја имаат следнава содржина: во првата кутија има 5 бели и 5 црни топчиња, во втората има 4 бели и 8 црни топчиња и во третата има 9 бели и 3 црни топчиња. Што е поверојатно, од втората кутија да се извелече бело топче или да се извлече бело топче од произволно избрана кутија?

Решение.

Ги воведуваме следниве хипотези:

H_i: избрана е i-тата кутија, $i\in\{1, 2, 3\}$.

Јасно е дека $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$.

Нека A е настанот: извлечено е бело топче. Веројатноста да се извлече бело топче од првата, втората и третата кутија е

$$P(A|H_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ P(A|H_2)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \text{ и } P(A|H_3)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4},$$

соодветно. Од формулата за тотална веројатност добиваме:

$$P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)+P(A|H_3)P(H_3)=\frac{19}{36}.$$

Од тоа што $P(A)>P(A|H_2)$ заклучуваме дека поверојатно е да се извлече бело топче од произволно избрана кутија.

68. Низ едноставен бинарен комуникациски канал се пренесуваат пораки со користење само на два сигнала, 0 и 1. Познато е дека 40% од времето бинарниот канал пренесува единици. Притоа, веројатноста дека точно е пренесена нула е 0.9, а веројатноста дека точно е пренесена единица е 0.95. Да се одреди веројатноста дека е примена единица на приемната страна на каналот. Потоа да се нацрта дијаграм на дрво.

Решение.

Ги означуваме следниве хипотези:

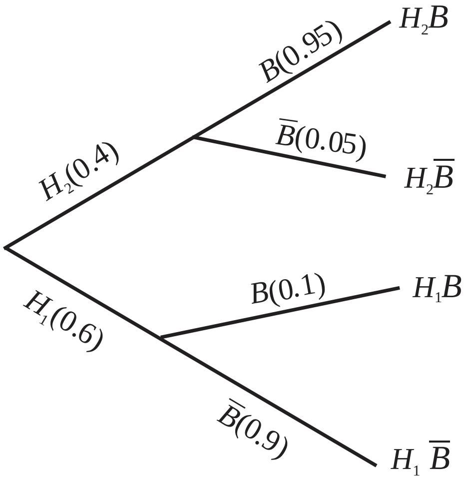
H_1: испратена е нула и H_2: испратена е единица.

Бинарниот канал пренесува единици 40% од времето, а нули 60% од времето, па според тоа

$$P(H_1)=\frac{6}{10}=0.6 \text{ и } P(H_2)=\frac{4}{10}=0.4.$$

Нека со B го означиме настанот: примена е 1 на приемната страна од каналот. Условните веројатности се:

$$P(B|H_1)=0.1 \text{ и } P(B|H_2)=0.95.$$



Слика 2.14

Од формулата за тотална веројатност следува

$$P(B)=P(B|H_1)P(H_1)+P(B|H_2)P(H_2)=0.1\cdot 0.6+0.95\cdot 0.4=0.44.$$

Бараната веројатност може да се пресмета и со користење на дијаграмот на дрво скициран на сликата 2.14.

69. Еден систем пренесува Морзеови зборови составени од основните симболи: „·“ (точка) и „–“ (црта). Познато е дека системот погрешно пренесува $2/5$ од испратените точки и $1/3$ од испратените цртички, како и тоа дека односот на испратени точки и црти е 5:3. Се испраќа еден основен симбол. Колкава е веројатноста да се прими точка? Ако е познато дека е примена точка, колкава е веројатноста дека била испратена точка?

Решение.

Ги означуваме следниве хипотези:

H_1: испратена е точка и H_2: испратена е црта.

Од тоа што односот на испратени точки и црти е 5:3 следува дека

$$P(H_1)=\frac{5}{8}, \quad P(H_2)=\frac{3}{8}.$$

Означуваме настан A: примена е точка. Тогаш

$$P(A|H_1)=\frac{3}{5} \text{ и } P(A|H_2)=\frac{1}{3}.$$

Од формулата за тотална веројатност добиваме:

$$P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{2},$$

додека од Баесова формула имаме:

$$P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}.$$

70. Лицата А и В играат тенис. За да го добие мечот победникот мора да победи во два сета. Во секој сет, веројатноста дека А ќе победи е 0.6. Да се нацрта дијаграм на дрво за овој тениски натпревар и со негова помош да се определи:

а) веројатноста дека лицето А ќе победи;

б) веројатноста дека лицето В ќе добие точно еден сет;

в) веројатноста дека лицето В ќе добие најмалку еден сет;

г) веројатноста дека А ќе го добие мечот, ако В го добие првиот сет.

Решение.

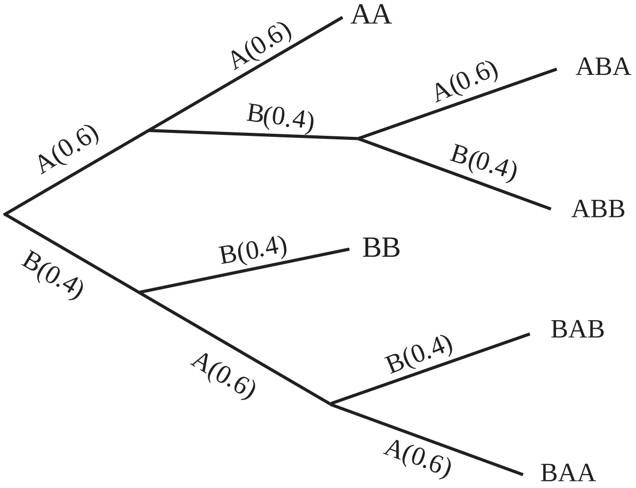
Дијаграмот на дрво за овој тениски натпревар е дадено на сликата 2.15.

а) $p_1=0.6^2+0.6\cdot0.4\cdot0.6+0.4\cdot0.6\cdot0.6=0.648.$

б) $p_2=0.6\cdot0.4\cdot0.6+0.4\cdot0.6\cdot0.6=0.288.$

в) $p_3=2\cdot0.6^2\cdot0.4+0.6\cdot0.4^2+0.4^2+0.4^2\cdot0.6=0.64.$

г) $p_4=0.4\cdot0.6^2=0.144.$



Слика 2.15

71. Дадени се две партии производи од ист вид. Првата партија се состои од 100 производи од кои 5% се неисправни, а втората од 80 производи од кои исто така 5% се неисправни. Од првата партија на случаен начин се избираат 15 производи, а од втората партија 10 производи и од нив се формира трета партија. Од третата партија на случаен начин се избира еден производ.

а) Колкава е веројатноста од третата партија да се избере исправен производ?

б) Познато е дека од третата партија е избран исправен производ. Колкава е веројатноста избраниот производ да припаѓа на првата партија производи? На која од почетните две партии производи најверојатно припаѓа избраниот производ?

Решение.

Во третата партија има 15 производи од првата партија и 10 производи од втората партија и од неа на случаен начин се избира еден производ. Ги воведуваме хипотезите:

H_1: избраниот производ е од првата партија,

H_2: избраниот производ е од втората партија,

чии веројатности се:

$$P(H_1)=\frac{15}{25}=0.6,\quad P(H_2)=\frac{10}{25}=0.4.$$

Нека со A го означиме настанот: избраниот производ е исправен. Тогаш

$$P(A|H_1)=(A|H_2)=0.95.$$

а) $P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)=0.95\cdot 0.6+0.95\cdot 0.4=0.95.$

б) $P(H_1\,|\,A)=\dfrac{P(A\,|\,H_1)P(H_1)}{P(A)}=\dfrac{0.95\cdot 0.6}{0.95}=0.6.$

Бидејќи $P(H_2\,|\,A)=1-P(H_1\,|\,A)=0.4$, заклучуваме дека поверојатно е избраниот исправен производ да припаѓа на првата партија.

72. Од броевите: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 на случаен начин се избираат два броја еден по еден без враќање. Со користење на формулата за тотална веројатност да се најде веројатноста дека вториот избран број е 5.

Решение.

Нека H_i е хипотезата: првиот избран број е i, каде што $i\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, а B е настанот: вториот избран број е 5. Тогаш

$$P(H_i)=\frac{1}{10},\ \ i\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

и

$$P(B|H_i)=\frac{1}{9},\, i\neq 5,\ \ P(B|H_5)=0.$$

Бараната веројатност е

$$P(B)=\sum_{i=1}^{10}P(B|H_i)P(H_i)=9\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10}.$$

73. Во група од 10 студенти, тројца се подготвени одлично, четворица многу добро, двајца добро и еден е слабоподготвен. Во испитните ливчиња има 20 прашања. Одлично подготвениот студент знае да одговори на сите 20 прашања, многу добро подготвениот на 16, добро подготвениот на 10 и слабо подготвениот на 5 прашања.

а) Која е веројатноста случајно избран студент да одговори на три поставени прашања?

б) Ако случајно избран студент одговорил на трите поставени прашања, која е веројатноста тој да е од групата на одлично подготвените студенти?

Решение.

Ги дефинираме следниве хипотези:

H_1: избраниот студент е одлично подготвен, $P(H_1)=\frac{3}{10}$,

H_2: избраниот студент е многу добро подготвен, $P(H_2)=\frac{4}{10}$,

H_3: избраниот студент е добро подготвен, $P(H_3)=\frac{2}{10}$,

H_4: избраниот студент е слабо подготвен, $P(H_4)=\frac{1}{10}$.

а) Нека A е настанот: избраниот студент одговорил на трите поставени прашања. Тогаш,

$$P(A|H_1)=1,\ P(A|H_2)=\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}=\frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}}\approx 0.491,$$

$$P(A|H_3)=\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}=\frac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}}\approx 0.105,\ P(A|H_4)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}}\approx 0.009.$$

Од формулата за тотална веројатност следува дека

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(A|H_i)P(H_i)=9\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10}\approx 0.518.$$

б) Од Баесовата формула имаме $P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)}\approx 0.579.$

74. Врз авион се истрелани три поединечни истрели. Веројатноста авионот да е погоден од првиот истрел е 0.4, од вториот истрел 0.5, а од третиот истрел 0.7. Во случај кога авионот е погоден од еден истрел, тој се срушува со веројатност 0.2, во случај на два погодоци со веројатност 0.6, а во случај на три погодоци авионот сигурно се срушува.

а) Колкава е веројатноста авионот да се сруши?

б) Ако се знае дека авионот е срушен, колкава е веројатноста тој да бил погоден само од последниот истрел?

в) Ако се знае дека авионот е срушен, колкава е веројатноста тој да бил погоден од последниот истрел?

Решение.

Нека со 0 означиме дека авионот е промашен, а со 1 дека е погоден. Хипотезите се претставени во табелата 2.3. Забележуваме дека H_1 е хипотезата: авионот не е погоден со ниеден истрел, H_2 е хипотезата: авионот е погоден само со првиот истрел, итн.

Хипотези	Прв истрел	Втор истрел	Трет истрел
H_1	0	0	0
H_2	1	0	0
H_3	0	1	0
H_4	0	0	1
H_5	1	0	1
H_6	1	1	0
H_7	0	1	1
H_8	1	1	1

Табела 2.3

$$P(H_1)=0.6\cdot 0.5\cdot 0.3=0.09,\qquad P(H_2)=0.4\cdot 0.5\cdot 0.3=0.06,$$
$$P(H_3)=0.6\cdot 0.5\cdot 0.3=0.09,\qquad P(H_4)=0.6\cdot 0.5\cdot 0.7=0.21,$$
$$P(H_5)=0.4\cdot 0.5\cdot 0.7=0.14,\qquad P(H_6)=0.4\cdot 0.5\cdot 0.3=0.06,$$
$$P(H_7)=0.6\cdot 0.5\cdot 0.7=0.21,\qquad P(H_8)=0.4\cdot 0.5\cdot 0.7=0.14.$$

Нека A е настанот: авионот е срушен. Тогаш

$$P(A|H_1)=0,\qquad P(A|H_2)=0.2,\qquad P(A|H_3)=0.2,$$
$$P(A|H_4)=0.2,\qquad P(A|H_5)=0.6,\qquad P(A|H_6)=0.6,$$

$$P(A|H_7)=0.6, \qquad P(A|H_8)=1.$$

а) $P(A)=\sum_{i=1}^{8} P(A|H_i)P(H_i)=0.458.$

б) $P(H_4|A)=\dfrac{P(A|H_4)P(H_4)}{P(A)}\approx 0.092.$

в) $P((H_4+H_5+H_7+H_8)|A)=P(H_4|A)+P(H_5|A)+P(H_7|A)+P(H_8|A)=$

$$=\frac{P(A\,|\,H_4)P(H_4)}{P(A)}+\frac{P(A\,|\,H_5)P(H_5)}{P(A)}+\frac{P(A\,|\,H_7)P(H_7)}{P(A)}+$$

$$+\frac{P(A\,|\,H_8)P(H_8)}{P(A)}\approx 0.856.$$

75. Се изведуваат четири независни експерименти. Во секој од нив настанот *A* се појавува со веројатност 0.3. Познато е дека настанот *B* сигурно се појавува ако настанот *A* се појавува барем двапати, настанот *B* се појавува со веројатност 0.4 ако настанот *A* се појавува еднаш и настанот *B* не се појавува ако настанот *A* не се појавува. Да се определи веројатноста за појавување на настанот *B*.

Решение.

Ги означуваме следниве хипотези:

H_i: настанот *A* се појавил i-пати при 4 изведувања на експериментот, $i\in\{0,1,2,3,4\}$ и настанот

B: се појавил настанот *B*.

Тогаш

$$P(H_0)=0.7^4\approx 0.2401,$$

$$P(H_1)=\binom{4}{1}\cdot 0.3\cdot 0.7^3=4\cdot 0.3\cdot 0.7^3\approx 0.4116,$$

$$P(H_2)=\binom{4}{2}\cdot 0.3^2\cdot 0.7^2=6\cdot 0.3^2\cdot 0.7^2\approx 0.2646,$$

$$P(H_3)=\binom{4}{3}\cdot 0.3^3\cdot 0.7=4\cdot 0.3^3\cdot 0.7\approx 0.0756,$$

$$P(H_4)=0.3^4=0.0081.$$

Притоа,

$$P(B|H_0)=0,\ P(B|H_1)=0.4,\ P(B|H_2)=P(B|H_3)=P(B|H_4)=1.$$

Од формулата за тотална веројатност добиваме:

$$P(B)=\sum_{i=0}^{4}P(B|H_i)P(H_i)\approx 0.513.$$

76. Во три кутии се наоѓаат по 6 бели и 4 црни топчиња. На случаен начин од првата кутија се извлекува едно топче и се префрла во втората кутија. Потоа од втората кутија се извлекува едно топче и се префрла во третата кутија и на крај од третата кутија се извлекува едно топче.

а) Колкава е веројатноста извлеченото топче од втората кутија да биде бело?

б) Ако од втората кутија е извлечено бело топче, колкава е веројатноста од првата во втората кутија да е префрлено црно топче?

в) Колкава е веројатноста извлеченото топче од третата кутија да биде бело?

Решение.

Ги означуваме следниве хипотези:

H_1: од првата кутија е извлечено бело топче,

H_2: од првата кутија е извлечено црно топче.

Јасно е дека $P(H_1)=\dfrac{6}{10}$ и $P(H_2)=\dfrac{4}{10}$.

а) Означуваме настан B: извлеченото топче од втората кутија е бело.

Ако од првата кутија е извлечено бело топче и тоа е префрлено во втората кутија, тогаш во втората кутија има 7 бели и 4 црни, па

$$P(B\,|\,H_1)=\frac{7}{11}.$$

Ако пак, од првата кутија е извлечено црно топче кое е префрлено во втората кутија, тогаш во втората кутија има 6 бели и 5 црни, па

$$P(B\,|\,H_2)=\frac{6}{11}.$$

Веројатноста извлеченото топче од втората кутија да е бело е

$$P(B)=P(H_1)P(B\mid H_1)+P(H_2)P(B\mid H_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{7}{11}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{11}=\frac{6}{10}.$$

б) Користејќи ја Баесовата формула добиваме:

$$P(H_2\mid B)=\frac{P(H_2)P(B\mid H_2)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{11}}{\frac{6}{10}}=\frac{4}{11}.$$

в) Воведуваме нови хипотези:

X_1: од втората кутија е извлечено бело топче,

X_2: од втората кутија е извлечено црно топче.

Нивните веројатности се:

$$P(X_1)=P(B)=0.6,\text{ а } P(X_2)=1-P(B)=0.4.$$

Нека C е настанот: извлеченото топче од третата кутија е бело. На исти начин како во а), за условните веројатности добиваме:

$$P(C\mid X_1)=\frac{7}{11}\ \text{ и }\ P(C\mid X_2)=\frac{6}{11},$$

па, од формулата за тотална веројатност имаме:

$$P(C)=P(X_1)P(C\mid X_1)+P(X_2)P(C\mid X_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{7}{11}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{11}=\frac{6}{10}.$$

77. Од кутија со 3 бели и 2 црни топчиња на случаен начин се извлекуваат две топчиња и се префрлаат во друга кутија во која веќе има 4 бели и 4 црни топчиња, а потоа од неа се извлекува едно топче.

а) Колкава е веројатноста извлеченото топче да е бело?

б) Познато е дека извлеченото топче е бело. Да се определи веројатноста од првата во втората кутија да се префрлени топчиња со различна боја? Какви топчиња најверојатно се префрлени од првата во втората кутија?

Решение.

Ги поставуваме следните хипотези:

H_1: од првата кутија се извлечени 2 бели топчиња,

H_2: од првата кутија се извлечени 1 бело и 1 црно топче,

H_3: од првата кутија се извлечени 2 црни топчиња,

чии веројатности се:

$$P(H_1)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10},\quad P(H_2)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10},\quad P(H_3)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}.$$

а) Нека A е настанот: од втората кутија е извлечено бело топче.

По префрлување на двете извлечени топчиња од првата во втората кутија, во втората кутија ќе има 10 топчиња. Ги пресметуваме бараните условни веројатности:

$$P(A|H_1)=\frac{6}{10},\quad P(A|H_2)=\frac{5}{10},\quad P(A|H_3)=\frac{4}{10}.$$

Веројатноста од втората кутија да биде извлечено бело топче е

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=$$
$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{52}{100}=0.52.$$

б) Познато е дека од втората кутија е извлечено бело топче. За да ја пресметаме веројатноста од првата во втората кутија да се префрлени топчиња со различна боја, ја користиме Баесовата формула:

$$P(H_2\mid A)=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{30}{52}\approx 0.577.$$

Најверојатно од првата во втората кутија се префрлени 1 бело и 1 црно топче бидејќи

$$P(H_1\mid A)+P(H_2\mid A)+P(H_3\mid A)=1,$$

па $P(H_i\mid A)<P(H_2\mid A),\ i\in\{1,3\}$.

78. На некој испит, тројца студенти *X*, *Y* и *Z* заборавиле да си ги потпишат своите тетратки. Професорот знае дека тројцата студенти *X*, *Y* и *Z* може да го положат испитот со веројатност 0.8, 0.7 и 0.5, соодветно. По прегледувањето на тетратките, тој утврдил дека двајца од студентите положиле, а еден не положил. Претпоставувајќи дека тројцата студенти го полагале испитот независно еден од друг, која е веројатноста студентот *Z* да не го положил испитот?

Решение.

Ги означуваме следниве настани:

X : студентот X го положил испитот,
Y : студентот Y го положил испитот,
Z : студентот Z го положил испитот,

чии веројатности се:

$$P(X)=0.8,\ P(Y)=0.7,\ P(Z)=0.5.$$

За да ја решиме оваа задача, ја употребуваме формулата за тотална веројатност и Баесовата формула. За таа цел, ги воведуваме следните хипотези:

H_1: студентот X не го положил испитот,

H_2: студентот Y не го положил испитот,

H_3: студентот Z не го положил испитот,

чии веројатности се:

$$P(H_1)=1-P(X)=0.2,\ P(H_2)=1-P(Y)=0.3,\ P(H_3)=1-P(Z)=0.5.$$

Нека B е настанот: испитот го положиле точно двајца студенти. Од независноста на настаните X, Y и Z имаме:

$$P(B|H_1)=P(YZ)=P(Y)P(Z)=0.35,$$
$$P(B|H_2)=P(XZ)=P(X)P(Z)=0.4,$$
$$P(B|H_3)=P(XY)=P(X)P(Y)=0.56.$$

Од формулата за тотална веројатност, за веројатноста на настанот B се добива

$$P(B)=P(H_1)P(B|H_1)+P(H_2)P(B|H_2)+P(H_3)P(B|H_3)=$$
$$=0.2\cdot 0.35+0.3\cdot 0.4+0.5\cdot 0.56=0.47.$$

Бараната веројатност ја добиваме од Баесовата формула,

$$P(H_3|B)=\frac{P(H_3)P(B|H_3)}{P(B)}\approx 0.596.$$

Задачата можеме да ја решиме и на следниот начин.

Користејќи ја независноста на настаните X, Y и Z, за веројатноста на настанот B имаме:

$$P(B)=P\left(\overline{X}YZ+X\overline{Y}Z+XY\overline{Z}\right)=P\left(\overline{X}YZ\right)+P\left(X\overline{Y}Z\right)+P\left(XY\overline{Z}\right)=$$
$$=P\left(\overline{X}\right)P(Y)P(Z)+P(X)P\left(\overline{Y}\right)P(Z)+P(X)P(Y)P\left(\overline{Z}\right)=0.47,$$

каде што

$$P\left(\overline{X}\right)=1-P(X)=0.2,\ P\left(\overline{Y}\right)=1-P(Y)=0.3,\ P\left(\overline{Z}\right)=1-P(Z)=0.5.$$

Бараната веројатност ќе ја определиме користејќи ја формулата за условна веројатност

$$P\left(\overline{Z}\middle|B\right)=\frac{P\left(\overline{Z}B\right)}{P(B)}.$$

Од тоа што $P\left(\overline{Z}B\right)=P\left(XY\overline{Z}\right)=P(X)P(Y)P\left(\overline{Z}\right)=0.28$ следува

$$P\left(\overline{Z}\middle|B\right)\approx 0.596.$$

79. Во кутија се наоѓаат бела, црвена и зелена коцка за играње. Белата коцка е исправна бидејќи на своите ѕидови ги има сите шест броеви: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Црвената и зелената коцка се сметаат за неисправни бидејќи броевите 1, 3 и 5 се наоѓаат на по два ѕида од црвената коцка, а на сите шест ѕида од зелената коцка се наоѓа бројот 1. На случаен начин се избира една коцка и се фрла три пати.

а) Колкава е веројатноста во сите три фрлања да паднал бројот 1?

б) Ако во сите три фрлања паднал бројот 1, колкава е веројатноста да е фрлана неисправна коцка, т.е. црвената или зелената коцка?

в) Колкава е веројатноста дека при трите фрлања паднале по еднаш броевите 1, 3 и 5?

Решение.

Ги воведуваме хипотезите:

H_1 : избрана е белата коцка,
H_2 : избрана е црвената коцка,
H_3 : избрана е зелената коцка.

Тогаш, $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\dfrac{1}{3}$.

а) Нека A е настанот: паднала единица во сите три фрлања. Веројатноста да паднала единица во сите три фрлања на белата, црвената и зелената коцка е

$$P(A\,|\,H_1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6^3},\ P(A\,|\,H_2)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{3^3}\ \text{и}\ P(A\,|\,H_3)=1,$$

соодветно.

Од формулата за тотална веројатност ја добиваме веројатноста на настанот A:

$$P(A)=P(A\,|\,H_1)P(H_1)+P(A\,|\,H_2)P(H_2)+P(A\,|\,H_3)P(H_3)=\frac{225}{648}\approx 0.347.$$

б) Бараната веројатност е

$$P((H_2+H_3)\,|\,A)=1-P(H_1\,|\,A)=1-\frac{P(A\,|\,H_1)P(H_1)}{P(A)}=1-0.0044\approx 0.996.$$

в) Нека означиме настан B: при трите фрлања паднале по еднаш броевите: 1, 3 и 5.

Поволни исходи за настаните $B\,|\,H_1$ и $B\,|\,H_2$ се: (1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3) и (5, 3, 1) и нивниот број е $P(3)=3!=6$. Според тоа, условните веројатности се:

$$P(B\,|\,H_1)=\frac{P(3)}{\overline{V}_6^3}==\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36},$$

$$P(B\,|\,H_2)=\frac{P(3)}{\overline{V}_3^3}=\frac{6}{3^3}=\frac{2}{9},$$

$$P(B\,|\,H_3)=0.$$

Веројатноста на настанот B, согласно формулата за тотална веројатност е

$$P(B)=P(B\,|\,H_1)P(H_1)+P(B\,|\,H_2)P(H_2)+P(B\,|\,H_3)P(H_3)=0.08(3).$$

80. Бинарен сигнал (бинарна низа составена од нули и единици) со должина 10 се испраќа од три места: A, B и C. Веројатноста дека сигналот е испратен од местото A, B и C е 1/2, 1/3 и 1/6, соодветно. Ако сигналот е испратен од местото A, B или C, тогаш веројатноста дека единица се наоѓа на кое било место во бинарната низа е 0.2, 0.3 и 0.4, соодветно.

а) Колкава е веројатноста на местото на прием да биде примен сигнал составен од 4 единици и 6 нули?

б) Ако е познато дека е примен сигнал составен од 4 единици и 6 нули, колкава е веројатноста дека тој сигнал е испратен од местото *A*?

Решение.

Ги дефинираме хипотезите:

H_1 : примениот сигнал е испратен од местото *A*,

H_2 : примениот сигнал е испратен од местото *B*,

H_3 : примениот сигнал е испратен од местото *C*,

со веројатности:

$$P(H_1)=\frac{1}{2},\ P(H_2)=\frac{1}{3},\ P(H_3)=\frac{1}{6}.$$

а) Означуваме настан B: примениот сигнал е составен од 4 единици и 6 нули. Условните веројатности се:

$$P(B\mid H_1)=C_{10}^4\cdot 0.2^4\cdot 0.8^6=\binom{10}{4}\cdot 0.2^4\cdot 0.8^6\approx 0.088,$$

$$P(B\mid H_2)=C_{10}^4\cdot 0.3^4\cdot 0.7^6=\binom{10}{4}\cdot 0.3^4\cdot 0.7^6\approx 0.2,$$

$$P(B\mid H_3)=C_{10}^4\cdot 0.4^4\cdot 0.6^6=\binom{10}{4}\cdot 0.4^4\cdot 0.6^6\approx 0.251.$$

Бараната веројатност ќе ја пресметаме со формулата за тотална веројатност,

$$P(B)=P(B\mid H_1)P(H_1)+P(B\mid H_2)P(H_2)+P(B\mid H_3)P(H_3)\approx 0.153.$$

б) Согласно Баесовата формула, бараната веројатност е

$$P(H_1\mid B)=\frac{P(B\mid H_1)P(H_1)}{P(B)}\approx 0.288.$$

81. Дадени се две партии производи од ист вид. Во првата партија сите производи се исправни, а во втората партија 1/4 од производите се дефектни. На случаен начин се избира една партија и од неа случајно се избира еден производ. По проверката е утврдено дека тој е исправен.

а) Да се определи веројатноста дека избраниот производ е од првата партија.

б) Ако по проверката првиот производ е вратен во својата партија, да се определи веројатноста дека вториот производ, кој што е земен од истата партија како и првиот, е дефектен.

Решение.

Ги означуваме следниве хипотези: H_i: избрана е i-та партија, $i \in \{1, 2\}$. Тогаш $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$.

а) Нека со A го означиме настанот: првиот избран производ е исправен. Притоа,

$$P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = \frac{3}{4}.$$

Веројатноста на настанот A е

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{8},$$

па од Баесовата формула, бараната веројатност е

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{4}{7}.$$

б) Нека го означиме настанот B: вториот избран производ е дефектен. Ги воведуваме хипотезите:

M_1: вториот избран производ е од првата партија,

M_2: вториот избран производ е од втората партија.

Тогаш

$$P(M_1) = P(H_1|A) = \frac{4}{7}, \quad P(M_2) = P(H_2|A) = \frac{3}{7},$$

и

$$P(B|M_1) = 0, \quad P(B|M_2) = \frac{1}{4}.$$

Според формулата за тотална веројатност, веројатноста дека вториот избран производ е дефектен е

$$P(B) = P(B|M_1)P(M_1) + P(B|M_2)P(M_2) = \frac{3}{28}.$$

82. Обележано топче може да се најде во кутија A со веројатност 2/3 или во кутија B со веројатност 1/3. Веројатноста да се извлече обележаното топче од кутијата во која се наоѓа е 0.1. Топчињата се извлекуваат едно по едно и се враќаат во својата кутија.

а) Се извлекуваат 5 топчиња од кутијата A и 15 топчиња од кутијата B. Колкава е веројатноста да не се извлече обележаното топче?

б) Колку пати треба да се извлекува топче од кутијата A од вкупно 20 извлекувања од двете кутии, за да веројатноста барем еднаш да се извлече обележаното топче биде максимална?

Решение.

Ги дефинираме следните хипотези:

H_1: обележаното топче се наоѓа во кутијата A,

H_2: обележаното топче се наоѓа во кутијата B.

Веројатностите на овие хипотези се:

$$P(H_1)=\frac{2}{3},\ P(H_2)=\frac{1}{3}.$$

а) Нека B е настанот: обележеното топче не е извлечено при 5 извлекувања од кутијата A и 15 извлекувања од кутијата B.

Веројатноста да не се извлече обележаното топче при i-тото извлекување е $P(B_i)=0.9$, $i\in\{1,2,\dots,20\}$. Од независноста на настаните B_i, $i\in\{1,2,3,4,5\}$, за веројатноста да не се извлече обележаното топче при 5 извлекувања од кутијата A се добива

$$P(B\,|\,H_1)=P(B_1B_2B_3B_4B_5)=P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(B_4)P(B_5)=0.9^5.$$

Слично, за веројатноста да не се извлече обележаното топче при 15 извлекувања од кутијата B имаме $P(B\,|\,H_2)=0.9^{15}$. Според тоа,

$$P(B)=P(H_1)P(B\,|\,H_1)+P(H_2)P(B\,|\,H_2)\approx 0.462.$$

б) Нека со n го означиме бројот на извлекувања од кутијата A. Тогаш бројот на извлекувања од кутијата B е $20-n$. На сличен начин како во а), за веројатноста на настанот C: обележеното топче е извлечено барем еднаш при n извлекувања од кутијата A и $20-n$ извлекувања од кутијата B, добиваме:

$$P(C)=\frac{2}{3}(1-0.9^n)+\frac{1}{3}(1-0.9^{20-n})=f(n).$$

За да се определи n така што веројатноста на настанот C биде максимална, наоѓаме за кое n функцијата $f(n)$ достигнува максимум. Со решавање на равенката

$$f'(n) = -\frac{2\cdot 0.9^n \cdot \ln 0.9}{3} + \frac{0.9^{20-n}\cdot \ln 0.9}{3} = 0,$$

односно равенката $-2\cdot 0.9^n + 0.9^{20-n} = 0$, се добива стационарната точка $n \approx 13.29$. Се проверува дека $f''(13.29) < 0$, па според тоа, функцијата $f(n)$ достигнува максимум во точката $n \approx 13.29$.

Заклучуваме дека веројатноста барем еднаш да се извлече обележаното топче ќе биде најголема ако се извлечат 13 топчиња од кутијата A и 7 топчиња од кутијата B.

83. а) Во три различни кутии има по 10 топчиња. Во првата кутија има 3 бели и 7 црни топчиња, во втората кутија има 4 бели и 6 црни топчиња, а во третата кутија има 5 бели и 5 црни топчиња. На случаен начин се избира една кутија и од неа се извлекуваат 2 топчиња одеднаш. Колкава е веројатноста двете извлечени топчиња да бидат бели? Ако е утврдено дека двете извлечени топчиња се бели, колкава е веројатноста тие да се извлечени од втората кутија?

б) Во три различни кутии има вкупно 12 бели и 18 црни топчиња така што во секоја кутија има по 10 топчиња. На случаен начин се избира една кутија и од неа се извлекуваат 2 топчиња одеднаш. Како треба да бидат распределени топчињата по кутиите, за да веројатноста двете извлечени топчиња бидат бели е максимална.

Решение.

Нека ги означиме следниве настани:

A: двете извлечени топчиња се бели,

H_i: избрана е i-та кутија, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Тогаш $P(H_i) = \frac{1}{3}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

а) $P(A|H_1) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$,

$$P(A|H_2) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{2}{15},$$

$$P(A|H_3)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}.$$

Од формулата за тотална веројатност следува дека

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=\frac{19}{135}\approx 0.141.$$

Ја користиме Баесовата формула за да ја пресметаме веројатноста двете топчиња да се извлечени од втората кутија, ако е утврдено дека тие се бели,

$$P(H_2\mid A)=\frac{P(A\mid H_2)P(H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{19}{135}}=\frac{18}{57}\approx 0.316.$$

б) Во трите кутии има по 10 топчиња. Нека во првата кутија има b_1 бели и $10-b_1$ црни топчиња, во втората кутија b_2 бели и $10-b_2$ црни топчиња и во третата кутија $b_3=12-b_1-b_2$ бели и $10-b_3$ црни топчиња. Од формулата за тотална веројатност, слично како во а), добиваме:

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{1}{3}\left[\frac{b_1(b_1-1)}{90}+\frac{b_2(b_2-1)}{90}+\frac{b_3(b_3-1)}{90}\right]=\\&=\frac{1}{270}\left[b_1^{\ 2}-b_1+b_2^{\ 2}-b_2+(12-b_1-b_2)^2-12+b_1+b_2\right]=\\&=\frac{1}{270}\left(2b_1^{\ 2}+2b_2^{\ 2}-24b_1-24b_2+2b_1b_2+132\right)=f(b_1,b_2).\end{aligned}$$

Бараме за кои вредности на променливите b_1 и b_2, функцијата $f(b_1,b_2)$ достигнува максимум. Со решавање на системот од две равенки со две непознати:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial b_1}=\dfrac{1}{270}(4b_1-24+2b_2)=0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial b_2}=\dfrac{1}{270}(4b_2-24+2b_1)=0\end{cases},$$

односно

$$\begin{cases} 2b_1 + b_2 - 12 = 0 \\ 2b_2 + b_1 - 12 = 0 \end{cases},$$

се добива $b_1 = b_2 = 4$, па $b_3 = 4$.

Од овде заклучуваме дека, ако во секоја кутија има по 4 бели и 6 црни топчиња, тогаш веројатноста двете извлечени топчиња да бидат бели е максимална.

Дополнителни задачи

84. Стрелец гаѓа во мета четири пати. Да се опише просторот од елементарни настани Ω и настаните:

A : гаѓањето е започнато со погодок,

B : резултатот во четирите гаѓања е исти,

C : метата е погодена точно два пати,

D : метата е погодена барем два пати.

[$\Omega = \{000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111\}$,

$$A = \{1000, 1100, 1010, 1001, 1110, 1101, 1011, 1111\},$$

$$B = \{0000, 1111\},$$

$$C = \{1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011\},$$

$$D = \{1100,\ 1010,\ 1001,\ 0110,\ 0101,\ 0011, 1110,\ 1101, 1011, 0111, 1111\}.$$]

85. Една коцка со обоени ѕидови е поделена на 1000 мали коцки со иста големина. Добиените коцки се мешаат и од нив, на случаен начин се избира една. Колкава е веројатноста избраната коцка да има два обоени ѕида?

[0.096.]

86. Во една кутија има 20 компјутерски делови, од кои 5 се неисправни. На случаен начин од кутијата се избираат два дела одеднаш. Која е веројатноста:

а) двата избрани дела да се исправни;

б) двата избрани дела да се неисправни;

в) точно еден од избраните делови да е исправен?

[а) 0.553, б) 0.053, в) 0.395.]

87. Од шпил со 52 карти, на случаен начин се влечат шест карти.

а) Колкава е веројатноста дека дамата каро е меѓу извлечените карти?

б) Колкава е веројатноста дека меѓу извлечените карти се застапени сите четири знаци?

[а) 0.1154, б) 0.0328.]

88. Две радарски единици скенираат регион во кој се движи некоја цел, за време t. За тоа време, првиот радар прави $2n$ круга, а вториот $2m$ круга. Во секој круг, веројатноста дека првиот радар ќе ја открие целта е 0.9, а вториот 0.8. Да се најде веројатноста на следниве настани:

A: целта е откриена, за време t, од барем еден радар,

B: целта е откриена во втората половина од времето t.

[$P(A)=1-0.1^{2n}\cdot 0.2^{2m}$,

$P(B)=0.1^{n}\cdot 0.2^{m}(1-0.1^{n}\cdot 0.2^{m})$.]

89. Колкава е веројатноста дека последните две цифри на третиот степен на произволно избран цел број N, се единици?

[0.01.]

90. Случајно е избрана точка во внатрешноста на круг со радиус 1. Да се пресмета веројатноста дека растојанието на избраната точка до центарот на кругот е:

а) помало од 0;

б) 1/4;

в) помеѓу 0 и 1/4;

г) помеѓу 1/4 и 1/2.

[а) 0, б) 0, в) 1/16, г) 3/16.]

91. Два брода треба да пристигнат на исто пристаниште. Пристигнувањата на бродовите во текот на еден ден се независни и еднакво можни. Да се определи веројатноста дека еден од бродовите ќе треба да чека да се ослободи пристаништето, ако едниот брод се задржува на пристаништето 1 час, а другиот 2 часа.

[0.121.]

92. Во квадрат со темиња (0,0), (0,1), (1,1) и (1,0) случајно се избира точка $M(m,n)$. Нека за x, y и z важи $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ и $0 \le z \le 1$. Најди ги веројатностите:

а) $P(m \le x, n \le y)$;

б) $P(mn \le z)$;

в) $P(\min\{m,n\} \le z)$;

г) $P\left(\frac{1}{2}(m+n) \le z\right)$.

[а) $P(m \le x, n \le y) = xy$,

б) $P(mn \le z) = \begin{cases} z(1-\ln z), & 0 < z \le 1 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$,

в) $P(\min\{m,n\} \le z) = 1-(1-z)^2$,

г) $P\left(\frac{1}{2}(m+n) \le z\right) = \begin{cases} 2z^2, & z \in (0, 1/2] \\ -2z^2+4z-1, & z \in (1/2, 1] \end{cases}$.]

93. Нека $P(A \cup B) = 0.75$ и $P(AB) = 0.25$. Дали може да се одредат $P(A)$ и $P(B)$? Дали е можно да се одредат $P(A)$ и $P(B)$ ако се знае дека:

а) A и B се независни настани;

б) A и B се дисјунктни настани?

[Не може. а) $P(A) = P(B) = 0.5$, б) Не е можно.]

94. Настаните A и B се дисјунктни, а C е произволен настан. Да се одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) $P(A|B) = P(A)$;

б) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$;

в) $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$;

г) $P(AB) = P(A)P(B)$.

Кои од горните искази се вистинити ако настаните A и B се независни?

[Ако настаните A и B се дисјунктни, тогаш е вистинит само исказот во б).
Ако настаните A и B се независни, тогаш се вистинити исказите во а) и г).]

95. На една раскрсница помеѓу главна и споредна улица, е увидено дека од 100 можни растојанија помеѓу две возила од главната улица, 65 се доволно големи за возило кое пристигнува од споредната улица да може да ја помине раскрсницата. Едно возило пристигнува на раскрсницата од споредната улица.

а) Да се определи веројатноста дека растојанието помеѓу првите две возила од главната улица не е доволно големо.

б) Да се определи веројатноста дека првите две растојанија не се доволно големи.

в) Ако првото возило кое пристигнало од споредната улица ја преминало раскрсницата, да се определи веројатноста дека растојанието помеѓу следните две возила е доволно големо за да второто возило од споредната улица ја премине раскрсницата.

[а) 0.35, б) 0.1225, в) 0.65.]

96. Еден систем за кочење на автомобил се состои од три подсистеми: електронски систем, хидрауличен систем и механички активатор. За да работи целиот систем мора да работи секој од овие подсистеми. При процесот на кочење, веројатностите да работи секој од овие три подсистеми се: 0.96, 0.95 и 0.95, соодветно. Ако сите подсистеми работат независно, да се пресмета веројатноста да работи целиот систем.

[0.8664.]

97. Кај едно електрично коло, при зголемување на напонот, може да прекине да работи некој од неговите три сериски поврзани елементи. Прекинот на трите елементи е со веројатност 0.3, 0.4 и 0.6, соодветно. Да се определи веројатноста дека нема да дојде до прекин на електричното коло. За колку ќе се промени оваа веројатност ако првиот елемент се отстрани од колото?

[0.168, 0.24.]

98. Еден систем има 1000 компоненти кои се поврзани сериски. Ако веројатноста системот да не работи е 0.1 и ако сите компоненти функционираат независно и со иста веројатност, која е веројатноста да работи секоја од компонентите посебно?

[0.0009.]

99. Автомобилите се опремени со редундантни запирачки кола кои функционираат независно. Нивните запирачки не работат само во случај кога сите запирачки кола се неисправни. Даден автомобил има две редундантни кола при што веројатноста да работи секое од нив е 0.95. Да се пресмета веројатноста запирачките на автомобилот да работат. Колкава е веројатноста запирачките на автомобилот да работат, ако тој има три запирачки кола?

$[0.9975, \quad 0.999875.]$

100. Еден инженерски систем се состои од две компоненти. Дефинирани се следниве настани:

A: првата компонента е исправна,

B: втората компонента е исправна.

а) Преку настаните A, $\overline{A}$, B и $\overline{B}$, да се опишат следниве настани:

M : барем една од компонентите е исправна,

N : една од компонентите е исправна и една е неисправна.

б) Ако е познато дека $P(A)=0.8$, $P(B|A)=0.85$ и $P(B|\overline{A})=0.75$, да се пресметаат веројатностите на следниве настани:

C: втората компонента е исправна,

D: барем една од компонентите е исправна,

E: првата компонента е исправна, ако се знае дека втората е неисправна.

F: првата компонента е исправна, ако се знае дека најмногу една компонента е исправна.

в) Дали настаните A и B се независни? Дали настаните A и B се дисјунктни?

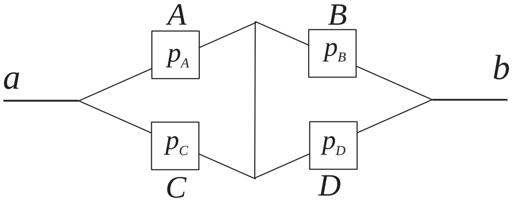
[а) $M = A + B, N = A\bar{B} + \bar{A}B,$

б) $P(C) = P(B) = 0.83$, $P(D) = P(A + B) = 0.95$,

$P(E) = P(A|\bar{B}) = 0.71$, $P(F) = P(A|\overline{AB}) = P(A|(\bar{A} + \bar{B})) = 0.53$,

в) A и B се зависни; A и B не се дисјунктни настани.]

101. Систем се состои од четири сериски и паралелно поврзани компоненти A, B, C и D како што е прикажано на блок дијаграмот на сликата 2.16. Веројатностите да работат компонентите A, B, C и D се p_A, p_B, p_C и p_D, соодветно. Да се одреди веројатноста системот да работи, ако сите компоненти работат независно.



Слика 2.16

[$(1-(1-p_A)(1-p_C))(1-(1-p_B)(1-p_D))$ или

$(p_A + p_C - p_A p_C)(p_B + p_D - p_B p_D)$.]

102. Панел за контрола на квалитет на чипови ги дал резултатите кои се прикажани во табелата 2.4, класифицирани по производител и квалитет. Случајно се избира еден чип. Која е веројатноста избраниот чип:

а) да биде со прифатлив квалитет, ако се знае дека е произведен од производителот C;

б) да е произведен од производителот A и истиот да има прифатлив квалитет;

в) да е произведен од производителот B, ако се знае дека има маргинален квалитет?

Производител	Квалитет			
	Прифатлив	Маргинален	Неприфатлив	Вкупно
A	128	10	2	140
B	97	5	3	105
C	110	5	5	120

Табела 2.4

[а) 0.917, б) 0.351, в) 0.25.]

103. Тројца играчи *A*, *B* и *C* фрлаат коцка, еден по еден по тој редослед. Победник е играчот кој прв ќе фрли шестка. Колкава е веројатноста да победи играчот *A*?

$$[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3}}\approx 0.396.]$$

104. Двајца играчи M и N наизменично фрлаат коцка за играње се додека M не добие тројка или N не добие двојка или шестка. Прв почнува играчот M. Најди ја веројатноста дека играчот M последен ќе ја фрли коцката.

[3/8.]

105. На некоја полица се наоѓаат n пара чевли. На случаен начин се земаат $2r$ чевли $(2r < n)$. Колкава е веројатноста меѓу избраните чевли:

а) да нема ниту еден пар чевли;

б) да има точно еден пар чевли.

$$[\text{а) } \frac{2^{2r}\cdot C_n^r}{C_{2n}^{2r}}, \quad \text{б) } \frac{n\cdot 2^{2r-2}\cdot C_{n-1}^{r-2}}{C_{2n}^{2r}}.]$$

106. Во едно кино има n машки и n женски лица. Тие ги зафатиле местата во киното по случаен избор. Да се пресмета веројатноста дека две лица од ист пол не седат едно до друго.

$$[\frac{2(n!)^2}{(2n)!}.]$$

107. После еден избор меѓу двајца кандидати, во гласачката кутија имало n гласачки ливчиња за првиот кандидат и m за вториот кандидат, при што $n > m$. При пребројувањето на гласачките ливчиња, извлекувањето се врши едно по едно. Колкава е веројатноста дека бројот на гласови за првиот кандидат цело време во текот на пребројувањето, ќе биде поголем од бројот на гласови за вториот кандидат?

$$[\frac{n-m}{n+m}.]$$

108. Лед диода може да припаѓа на три различни серии S_1, S_2 и S_3 со веројатност 0.25, 0.5 и 0.25, соодветно. Веројатноста дека диодата од првата серија ќе трае n часови е 0.1, од втората серија 0.2 и од третата серија 0.4.

а) Да се определи веројатноста дека случајно избрана диода ќе трае n часови.

б) Ако е познато дека случајно избраната диода трае n часови, да се најде веројатноста дека таа припаѓа на третата серија.

[а) 0.225, б) 0.0(4).]

109. Во една фабрика 40% од вработените се мажи. Меѓу вработените жени, 5% се со висока стручна подготовка (ВСП), а меѓу вработените мажи, 10% се со ВСП. Случајно се избира едно лице од вработените.

а) Која е веројатноста избраното лице да има ВСП? Да се нацрта дрво за овој проблем.

б) Ако случајно избраното лице има ВСП, која е веројатноста тоа да е жена?

[а) 0.07, б) 0.43.]

110. Познато е дека од три различни монети, првата и третата се неисправни, а втората е исправна. Веројатноста за појавување на глава на првата, втората и третата монета е 0.4, 0.5 и 0.6, соодветно. На случаен начин се избира една монета и се фрла осум пати. Забележано е дека три пати се појавила глава. Да се најде веројатноста дека избраната монета е исправна.

[0.353.]

111. Во една студија за синхронизирани семафори, се разгледува едноставен систем составен од 4 семафори. Нека секој од семафорите свети црвено 30 секунди во циклус со траење од 50 секунди и нека претпоставиме дека

$$P\left(S_{j+1} \middle| S_j\right) = 0.15 \text{ и } P\left(S_{j+1} \middle| \overline{S_j}\right) = 0.15,$$

за $j \in \{1, 2, 3\}$, каде што S_j е настанот: возачот е застанат од j-тиот семафор. Претпоставуваме дека системот има меморија „еден семафор“. Со помош на дијаграм во форма на дрво, да се одреди веројатноста возачот:

а) да биде стопиран од сите четири семафори,

б) да не биде стопиран од ниеден од четирите семафори,

в) да биде стопиран најмногу од еден семафор.

[а) 0.002, б) 0.086, в) 0.4904.]

112. Еден авион ќе биде срушен од граната која експлодира непосредно во негова близина, само ако парчиња од гранатата ги оштетат двата мотора или ја оштетат пилотската кабина. Веројатноста да се оштетат двата мотора е 0.2, а веројатноста да се оштети пилотската кабина е 0.3. Да се пресмета веројатноста дека авионот ќе биде срушен.

[0.328.]

113. Онлајн компјутерски систем има 5 комуникациски линии на кои пристигнуваат пораки. Во табелата 2.5 се дадени нивните карактеристики:

Линија	Веројатноста пораката да пристигне на линијата	Веројатноста пристигнатата порака да е без грешка
1	0.3	0.998
2	0.3	0.999
3	0.1	0.997
4	0.2	0.992
5	0.1	0.990

Табела 2.5

а) Која е веројатноста дека произволно примена порака е без грешка?

б) Ако се знае дека примената порака има грешка, која е веројатноста дека била примена на првата или на втората комуникациска линија?

[а) 0.9962, б) 0.0009.]

114. Еден сателит може неуспешно да се лансира поради повеќе причини, меѓу кои се: компјутерска грешка и грешка на моторот. За дадена мисија познато е дека веројатноста за грешка на моторот е 0.008, а веројатноста за компјутерска грешка е 0.001. Ако постои грешка на моторот, веројатноста за неуспешно лансирање на сателитот е 0.98, ако постои компјутерска грешка веројатноста за неуспешно лансирање на сателитот е 0.45, а ако постојат било какви други грешки на компонентите, веројатноста за неуспешно лансирање на сателитот е 0.

а) Да се одреди веројатноста сателитот да биде неуспешно лансиран.

б) Да се одреди веројатноста сателитот да биде неуспешно лансиран поради грешка на моторот.

в) Ако се знае дека сателитот бил неуспешно лансиран, да се пресмета веројатноста тоа да е поради грешка на моторот.

г) Ако се знае дека сателитот бил неуспешно лансиран поради грешка на моторот, која е веројатноста дека друг сателит ќе биде неуспешно лансиран?

[а) 0.00829, б) 0.00784, в) 0.94572, г) 0.00829.]

3. СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Нека Ω е просторот од елементарни настани на еден случаен експеримент и нека на секој елемент $\omega \in \Omega$ му доделиме точно еден реален број $X(\omega)$. Пресликувањето $X : \Omega \to \mathbf{R}$ се вика ***случајна променлива***. Множеството на слики го означуваме со R_X .

Нека x е реален број. Настанот $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ го означуваме со $(X = x)$, а неговата веројатност е

$$P(X = x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}.$$

Аналогно се дефинираат и други настани и нивни веројатности.

Функција на распределба

Нека е дадена случајна променлива X. Функцијата дефинирана со

$$F_X(x) = P(X \le x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\},\ x \in \mathbf{R},$$

се вика (***кумулативна***) ***функција на распределба*** на веројатноста на случајната променлива X.

Особини:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0.$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1.$

3) Функцијата на распределба е монотоно неопаѓачка функција, односно ако $x_1 < x_2$, тогаш $F(x_1) \le F(x_2)$.

4) Функцијата на распределба е непрекината од десно, односно

$$F(a+0) = \lim_{x \to a+0} F(x) = F(a), \text{ за секое } a \in \mathbf{R}.$$

5) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$, за секои $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

Дискретни случајни променливи

Случајната променлива X е ***дискретна случајна променлива*** ако R_X е конечно или бесконечно преброиво множество.

Нека $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$. Со $p(x_i)$ или $p_X(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, се означува веројатноста $P(X = x_i)$.

Притоа важи $\sum_i P(X = x_i) = P(\Omega) = 1$.

Множеството вредности на дискретната случајна променлива $\{x_1, x_2, \ldots\}$, заедно со соодветните веројатности $p(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, го претставува ***законот на распределба*** на веројатноста на случајната променлива X. Најчесто законот на распределба ќе го претставуваме шематски

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_i) & \cdots \end{pmatrix}.$$

Врската помеѓу законот на распределба и функцијата на распределба на случајната променлива X е дадена со

$$F_X(x) = \sum_{i : x_i \le x} p(x_i).$$

Непрекинати случајни променливи, густина на распределба

Нека X е случајна променлива со функција на распределба $F_X(x)$. Ако $F_X(x)$ е непрекината функција, тогаш велиме дека X е променлива од ***непрекинат тип***.

Ако X е непрекината случајна променлива, тогаш R_X е бесконечно непреброиво.

Функцијата $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$, за секое $x \in \mathbf{R}$ за кое постои $\dfrac{dF_X(x)}{dx}$, се вика ***густина на распределба*** на веројатноста на случајната променлива X. Во точките $x \in \mathbf{R}$, во кои не постои $\dfrac{dF_X(x)}{dx}$, оваа функција можеме да ја додефинираме со $f_X(x) = a$, каде што $a \ge 0$ е произволен реален број.

Особини:

1) $f_X(x) \ge 0$, за секое $x \in \mathbf{R}$.

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$

3) $P(X = a) = 0$, за секое $a \in \mathbf{R}$.

4) $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a) = \int\limits_a^b f_X(x)dx$.

Врската помеѓу функцијата и густината на распределба на случајната променлива X е дадена со

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \text{ за секое } x \in \mathbf{R}.$$

Бројни карактеристики на случајните променливи

Бројот со ознака $E(X)$ или m_X, дефиниран со

$$m_X = E(X) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i p_X(x_i), & \text{ако } X \text{ е дискретна случајна променлива} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx, & \text{ако } X \text{ е непрекината случајна променлива} \end{cases}$$

се вика ***математичко очекување*** на случајната променлива X .

Бројот со ознака σ_X^2 или $D(X)$, дефиниран со

$$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right),$$

се вика ***дисперзија*** или ***варијанса*** на случајната променлива X .

Особини:

Нека X и Y се случајни променливи, $a, b \in \mathbf{R}$, а c е константа.

1) Ако $X = c$, тогаш $E(c) = c$.

2) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

3) $E(cX) = cE(X)$.

4) Ако $a \le X \le b$, тогаш $a \le E(X) \le b$.

5) $D(X) \ge 0$.

6) $D(X) = 0$ ако и само ако $X = c$.

7) $D(cX) = c^2 D(X)$, $D(X + c) = D(X)$.

8) $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Бројот $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{D(X)}$ се нарекува ***стандардна девијација*** на случајната променлива X.

Медијана на случајната променлива X е бројот $x_m \in R_X$ за кој важи

$$P(X \le x_m) = P(X \ge x_m).$$

Во непрекинат случај последното равенство се сведува на $F(x_m) = \frac{1}{2}$.

Мода на дискретната случајна променлива е вредноста на променливата што има најголема веројатност. Мода на непрекината случајна променлива е вредноста во која густината на распределба достигнува максимум. Терминот ***унимодална распределба*** се однесува на распределба на веројатноста која што има единствена мода.

Почетен момент од n-ти ред на случајната променлива X, со ознака m_n, $n \in \mathbf{N}$, се дефинира со

$$m_n = E(X^n) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^n p_X(x_i), & \text{ако } X \text{ е дискретна случајна променлива} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx, & \text{ако } X \text{ е непрекината случајна променлива} \end{cases}.$$

Некои поважни распределби од дискретен тип

Бернулиева распределба

Случајната променлива X има *Бернулиева распределба* со параметар p, $0 < p < 1$, ако нејзиниот закон на распределба е

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \; q = 1 - p.$$

За математичкото очекување и дисперзијата важи:

$$E(X) = p \text{ и } D(X) = pq.$$

Биномна распределба $\mathcal{B}(n,p)$

Случајната променлива X има *биномна распределба* со параметри n и p, $n\in\mathbf{N}$, $0<p<1$, ако нејзиното множество на вредности е $R_X=\{0,1,2,...,n\}$, а соодветните веројатности се:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, q=1-p,\ k\in\{0,1,2,\dots,n\}.$$

Математичкото очекување и дисперзијата се:

$$E(X)=np \text{ и } D(X)=npq\,.$$

Геометриска распределба $\mathcal{G}(p)$

Множеството вредности на случајната променлива X со *геометриска распределба* со параметар p, $0<p<1$, е $R_X=\{1,2,\dots\}$, а соодветните веројатности се:

$$P(X=k)=pq^{k-1},\ q=1-p,\ k\in\{1,2,\dots\}.$$

Математичкото очекување и дисперзијата се:

$$E(X)=\frac{1}{p} \text{ и } D(X)=\frac{q}{p^2}.$$

Пуасонова распределба $\mathcal{P}(\lambda)$

Случајната променлива X има *Пуасонова распределба* со параметар λ, $\lambda>0$, ако нејзиното множество на вредности е $R_X=\{0,1,2,\dots\}$, а соодветните веројатности се:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k\in\{0,1,2,\dots\}.$$

Математичкото очекување и дисперзијата се:

$$E(X)=\lambda \text{ и } D(X)=\lambda.$$

Во случај кога n е многу големо, а p е многу мало, биномната распределба може да се апроксимира со Пуасонова со параметар $\lambda=np=const$, односно важи

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k\in\{0,1,2,\dots\}.$$

Некои поважни распределби од непрекинат тип

Рамномерна (униформна) распределба $\mathcal{U}(a,b)$

Случајната променлива X има *рамномерна распределба* на интервалот (a,b), $a<b$ ако нејзината густина на распределба е

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}.$$

Нејзиното математичко очекување и дисперзија се:

$$E(X)=\frac{1}{2}(a+b) \text{ и } D(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2.$$

Нормална (Гаусова) распределба $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$

Случајната променлива X има *нормална (Гаусова) распределба* со параметри μ и σ, $\mu\in\mathbf{R}$, $\sigma>0$, ако нејзината густина на распределба е

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

За математичкото очекување и дисперзијата важи:

$$E(X)=\mu \text{ и } D(X)=\sigma^2.$$

Ако X е случајна променлива со распределба $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, тогаш случајната променлива $Z=(X-\mu)/\sigma$ има распределба $\mathcal{N}(0,1)$. Велиме дека Z има *стандардизирана нормална распределба* и нејзиното математичкото очекување и дисперзијата се:

$$E(Z)=0 \text{ и } D(Z)=1.$$

Гама распределба

Случајната променлива X има *гама распределба* со параметри α и λ, $\alpha>0, \lambda>0$, ако нејзината густина на распределба е

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

каде што $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ е гама функцијата.

За гама функцијата важат следните особини:

1) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\ \alpha>0$.

2) $\Gamma(1)=1$.

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

4) $\Gamma(n+1)=n!,\ n\in\mathbf{N}$.

Математичкото очекување и дисперзијата на случајна променлива со гама распределба се:

$$E(X)=\frac{\alpha}{\lambda} \text{ и } D(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Експоненцијална распределба $\mathcal{E}(\lambda)$

Случајната променлива X има *експоненцијална распределба* со параметар $\lambda,\ \lambda>0$, ако нејзината густина на распределба е

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

Математичкото очекување и дисперзијата се:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda} \text{ и } D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Фундаментална теорема

Нека е X случајна променлива од непрекинат тип и g е диференцијабилна функција освен во конечен број точки. Густината на распределба на случајната променлива $Y=g(X)$ е

$$f_Y(y)=\sum_k \frac{f_X(x)}{|g'(x_k)|},\quad g'(x_k)\ne 0,$$

каде што $x_k, k=1,2,\dots$, се реалните корени на равенката $y=g(x)$. Ако равенката $y=g(x)$ нема реални решенија, тогаш $f_Y(y)=0$.

3.1. Случајни променливи од дискретен тип

1. Законот на распределба на дискретната случајна променлива X е

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ a/2 & a/3 & a/3 & a/2 & a/3 \end{pmatrix}.$$

Да се определи константата $a>0$, а потоа и функцијата на распределба на случајната променлива X.

Решение.

Константата $a>0$ ја наоѓаме од условот $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=1$, од каде што $a=\frac{1}{2}$. Функцијата на распределба на случајната променлива X е

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 1/4, & 1\le x<2 \\ 5/12, & 2\le x<3 \\ 7/12, & 3\le x<5 \\ 5/6, & 5\le x<7 \\ 1, & x\ge 7 \end{cases}.$$

2. Функцијата на распределба на дискретната случајна променлива X е

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ 0.4, & 2\le x<3 \\ 0.7, & 3\le x<8 \\ 0.9, & 8\le x<9 \\ 1, & x\ge 9 \end{cases}.$$

Да се определи законот на распределба на случајната променлива X.

Решение.

За законот на распределба добиваме:

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 9 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

3. Еден извор на информации случајно генерира еден од симболите: *a*, *b*, *c* и *d*, со веројатност 1/2, 1/4, 1/8 и 1/8, соодветно. Овие симболи според одредена шема се кодираат во бинарни кодови на следниов начин: $a \to 0$, $b \to 10$, $c \to 101$ и $d \to 111$. Нека случајната променлива X ја означува должината на кодот (бројот на битови).
Да се најде законот на распределба на случајната променлива *X*. Да се определи и скицира функцијата на распределба на случајната променлива *X*. Потоа, да се пресмета математичкото очекување $E(X)$ и дисперзијата $D(X)$.

Колкава е веројатноста должината на случајно избран код да не е помала од 2, а колкава веројатноста неговата должина да е поголема од 1?

Решение.

Нека *X* е случајната променлива која претставува должина на кодот (бројот на битови). Множеството вредности на *X* е $R_X = \{1, 2, 3\}$. Веројатноста *X* да има вредност 1 е веројатноста да се генерира симболот *a*, да има вредност 2 е да се генерира симболот *b*, а веројатноста *X* да има вредност 3 е веројатноста да се генерира симболот *c* или *d*, односно

$$P(X=1)=1/2, \quad P(X=2)=1/4,$$
$$P(X=3)=1-P(X=1)-P(X=2)=1/4 \cdot$$

Тогаш, законот на распределба на *X* е

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Функцијата на распределба е

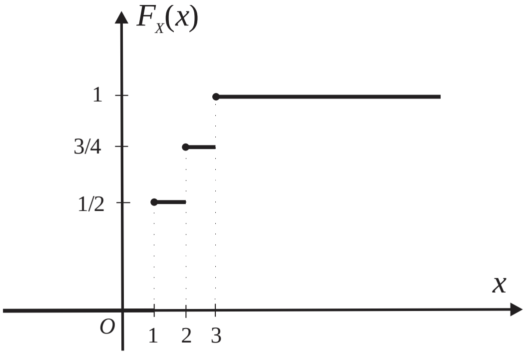
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/2, & 1 \le x < 2 \\ 3/4, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

и нејзиниот график е даден на сликата 3.1.

Од законот на распределба може да се определат математичкото очекување и дисперзијата:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \quad E\left(X^2\right) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{4},$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{15}{4}-\frac{49}{16}=\frac{11}{16}.$$



Слика 3.1

Веројатноста должината на избраниот код да не е помала од 2 е

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=1/2.$$

Оваа веројатност е еднаква со веројатноста должината на кодот да е поголема од 1, односно $P(X>1)=1/2$.

4. Стрелец изведува серија независни гаѓања. Веројатноста да ја погоди целта е 0.4. Тој гаѓа во целта се додека не погоди два пати или додека не промаши три пати. Да се најдат законот и функцијата на распределба на случајните променливи X и Y, каде што X е бројот на гаѓања, а Y е бројот на погодоци. Колкава е веројатноста стрелецот:

а) да гаѓа најмногу три пати;

б) да погоди барем еднаш?

Решение.

Нека со 0 означиме дека при едно гаѓање целта е промашена, а со 1 дека целта е погодена. Тогаш, просторот од елементарни настани е

$$\Omega=\{11,\ 000,\ 101,\ 1001,\ 011,\ 0011,\ 0101,\ 0100,\ 0010,\ 1000\}.$$

Случајната променлива X : број на гаѓања, ги прима вредностите од множеството $R_X=\{2,3,4\}$ со следниве веројатности:

$$P(X=2)=P\{11\}=0.4^2=0.16,$$

$$P(X=3)=P\{000+101+011\}=0.6^3+2\cdot 0.6\cdot 0.4^2=0.408,$$

$$P(X=4)=P\{0011+0101+1001+1000+0100+0010\}=$$
$$=3\cdot 0.6^2\cdot 0.4^2+3\cdot 0.6^3\cdot 0.4=0.432.$$

Според тоа, нејзиниот закон и функција на распределба се:

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0.16 & 0.408 & 0.432 \end{pmatrix},\ F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ 0.16, & 2\le x<3 \\ 0.568, & 3\le x<4 \\ 1, & x\ge 4 \end{cases}.$$

За случајната променлива Y која го означува бројот на погодоци, $R_Y=\{0,1,2\}$ и

$$P(Y=0)=P\{000\}=0.6^3=0.216,$$
$$P(Y=1)=P\{0010+1000+0100\}=3\cdot 0.6^3\cdot 0.4=0.2592,$$
$$P(Y=2)=P\{11+101+011+1001+0011+0101\}=$$
$$=0.4^2+2\cdot 0.6\cdot 0.4^2+3\cdot 0.6^2\cdot 0.4^2=0.5248.$$

Законот и функцијата на распределба на Y се:

$$Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.216 & 0.2592 & 0.5248 \end{pmatrix},\ F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0 \\ 0.216, & 0\le y<1 \\ 0.4752, & 1\le y<2 \\ 1, & y\ge 2 \end{cases}.$$

а) Веројатноста стрелецот да гаѓа најмногу три пати е

$$P(X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)=0.568.$$

б) Веројатноста стрелецот да погоди барем еднаш е

$$P(Y\ge 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-0.216=0.784.$$

5. Марко игра три независни игри, а потоа игра уште онолку игри колку што победи остварил во првиот циклус од три игри. Веројатноста да победи во секоја игра е p $(0<p<1)$.

а) Да се најде законот на распределба на случајната променлива X која претставува број на победи.

б) Колкава е веројатноста Марко да победи барем еднаш, а колкава веројатноста да победи најмногу два пати?

Решение.

а) Ако p е веројатноста Марко да победи, тогаш $q=1-p$ е веројатноста тој да изгуби. Нека со 0 означиме пораз во една игра, а со 1 победа.

За просторот од елементарни настани се добива:

$$\Omega=\{000,1000,1001,0100,0101,0010,0011,11000,11001,11010,11011,\\ 10100,\ 10101,\ 10110,\ 10111,\ 01100,\ 01101,\ 01110,\ 01111,\ 111000,\\ 111001,11010,\ 111100,111110,111101,111011,111111\}.$$

Нека X е случајната променлива која претставува број на победи. Тогаш множеството вредности на X е $R_X=\{0,1,2,3,4,5,6\}$, а соодветните веројатности се:

$$P(X=0)=P\{000\}=(1-p)^3=q^3,$$

$$P(X=1)=P\{1000,\ 0100,\ 0010\}=3pq^3,$$

$$P(X=2)=P\{1001,0101,\ 0011,\ 11000,\ 10100,\ 01100\}=$$

$$=3p^2q^2+3p^2q^3,$$

$$P(X=3)=P\{11001,\ 11010,\ 10101,\ 10110,\ 01101,\ 01110,\ 111000\}=$$

$$=6p^3q^2+p^3q^3,$$

$$P(X=4)=P\{11011,\ 10111,\ 01111,\ 111001,\ 111010,\ 111100\}=$$

$$=3p^4q+3p^4q^2,$$

$$P(X=5)=P\{111110,\ 111101,\ 111011\}=3p^5q,$$

$$P(X=6)=P\{111111\}=p^6.$$

Законот на распределба на случајната променлива X е

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ q^3 & 3pq^3 & 3p^2q^2+3p^2q^3 & 6p^3q^2+p^3q^3 & 3p^4q+3p^4q^2 & 3p^5q & p^6 \end{pmatrix}.$$

б) Веројатноста Марко да победи барем еднаш е

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-q^3,$$

а веројатноста да победи најмногу два пати е

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=q^3+3pq^3+3p^2q^2+3p^2q^3=$$

$$=q^2(q+3pq+3p^2+3p^2q).$$

6. Коцка за играње се фрла два пати. Нека случајната променлива X е максимумот, а случајната променлива Y е минимумот на добиените броеви од двете фрлања. Да се одредат законите на распределба на случајните променливи X и Y.
Колкава е веројатноста максимумот на добиените броеви да не е 6, а колкава веројатноста минимумот на добиените броеви да е барем 2?

Решение.

Просторот од елементарни настани е

$$\Omega=\left\{ij \mid i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}\right\}.$$

Нека X е случајната променлива која го претставува максимумот на добиените броеви од двете фрлања. Тогаш множеството вредности на X е $R_X=\{1,2,3,4,5,6\}$ и

$$P(X=1)=P\{11\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36},$$

$$P(X=2)=P\{12+21+22\}=\frac{3}{36},$$

$$P(X=3)=P\{13+31+23+32+33\}=\frac{5}{36}\cdot$$

Аналогно се добиваат и веројатностите:

$$P(X=4)=\frac{7}{36},\ P(X=5)=\frac{9}{36},\ P(X=6)=\frac{11}{36}\cdot$$

Според тоа, законот на распределба на X е

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1/36 & 3/36 & 5/36 & 7/36 & 9/36 & 11/36\end{pmatrix}.$$

Аналогно, за законот на распределба на случајната променлива Y се добива:

$$Y:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 11/36 & 9/36 & 7/36 & 5/36 & 3/36 & 1/36\end{pmatrix}.$$

Веројатноста максимумот на добиените броеви да не е 6 е

$$P(X\neq 6)=1-P(X=6)=\frac{25}{36},$$

а веројатноста минимумот на добиените броеви да е барем 2 е

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y = 1) = \frac{25}{36}.$$

7. На патот на движење на еден автомобил се наоѓаат пет семафори. Веројатноста автомобилот да застане на првиот семафор (на првиот семафор да има црвено светло) е 0.4, на вториот 0.6, на третиот 0.5, на четвртиот 0.7 и на петтиот 0.4. Да се определат законот и функцијата на распределба на случајната променлива X која означува број на семафори покрај кои поминал автомобилот до првото застанување. Потоа, да се пресметаат нејзиното математичко очекување и дисперзија. Колкава е медијаната и модата на случајната променлива X ?

Решение.

Нека X е случајната променлива која претставува број на семафори покрај кои поминал автомобилот до првото застанување. Тогаш множеството вредности на X е $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

X има вредност 0 кога автомобилот застанал на првиот семафор, односно $P(X = 0) = 0.4$. X има вредност 1 кога автомобилот поминал на првиот и застанал на вториот семафор, односно

$$P(X = 1) = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36.$$

Аналогно се добиваат и останатите веројатности:

$$P(X = 2) = 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.5 = 0.12,$$
$$P(X = 3) = 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.084,$$
$$P(X = 4) = 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.0144,$$
$$P(X = 5) = 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.6 = 0.0216.$$

Според тоа, законот на распределба на X е

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.4 & 0.36 & 0.12 & 0.084 & 0.0144 & 0.0216 \end{pmatrix},$$

а функцијата на распределба е

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.4, & 0 \leq x < 1 \\ 0.76, & 1 \leq x < 2 \\ 0.88, & 2 \leq x < 3 \\ 0.964, & 3 \leq x < 4 \\ 0.9784, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}.$$

За математичкото очекување на X имаме:

$$E(X)=0\cdot 0.4+1\cdot 0.36+2\cdot 0.12+3\cdot 0.084+4\cdot 0.0144+5\cdot 0.0216=$$
$$=1.0176.$$

Бидејќи

$$E\left(X^2\right)=1^2\cdot 0.36+2^2\cdot 0.12+3^2\cdot 0.084+4^2\cdot 0.0144+5^2\cdot 0.0216=2.3664,$$

дисперзијата на X е

$$D(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2\approx 1.33.$$

Случајната променлива X нема медијана, бидејќи не постои број $x_m\in R_X$ таков што $P(X\le x_m)=P(X\ge x_m)$.

Случајната променлива X прима вредност 0 со најголема веројатност, па нејзината мода е 0.

8. Четири стрелци *A*, *B*, *C* и *D* гаѓаат по еднаш во иста цел, независно еден од друг. Веројатностите стрелците *A*, *B*, *C* и *D* да ја погодат целта се: 0.8, 0.85, 0.9 и 0.95, соодветно.

а) Да се напишат законот и функцијата на распределба на случајната променлива X која го означува вкупниот број на погодоци на целта. Потоа, да се определат математичкото очекување, дисперзијата, медијаната и модата на случајната променлива X .

б) Ако целта е двапати погодена, колкава е веројатноста да ја погодиле стрелците A и B?

Решение.

а) Множеството вредности на случајната променлива X е

$$R_X=\{0,1,2,3,4\}.$$

Ги означуваме следниве настани:

A: стрелецот A ја погодил целта,
B: стрелецот B ја погодил целта,
C: стрелецот C ја погодил целта,
D: стрелецот D ја погодил целта.

Од независноста на овие настани добиваме:

$$P(X=0)=P\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)P\left(\overline{C}\right)P\left(\overline{D}\right)=$$
$$=0.2\cdot 0.15\cdot 0.1\cdot 0.05=0.00015,$$

$$P(X=1)=P(A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D)=$$

$$=0.8\cdot 0.15\cdot 0.1\cdot 0.05+0.2\cdot 0.85\cdot 0.1\cdot 0.05+0.2\cdot 0.15\cdot 0.9\cdot 0.05+$$

$$+0.2\cdot 0.15\cdot 0.1\cdot 0.95=0.00565,$$

$$P(X=2)=P(\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D+$$

$$+A\overline{B}C\overline{D}+AB\overline{C}\,\overline{D})=$$

$$=0.2\cdot 0.15\cdot 0.9\cdot 0.95+0.2\cdot 0.85\cdot 0.1\cdot 0.95+0.2\cdot 0.85\cdot 0.9\cdot 0.05+$$

$$+0.8\cdot 0.15\cdot 0.1\cdot 0.95+0.8\cdot 0.15\cdot 0.9\cdot 0.05+$$

$$+0.8\cdot 0.85\cdot 0.1\cdot 0.05=0.06965,$$

$$P(X=3)=P\left(\overline{A}BCD+A\overline{B}CD+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}\right)=$$

$$=0.2\cdot 0.85\cdot 0.9\cdot 0.95+0.8\cdot 0.15\cdot 0.9\cdot 0.95+0.8\cdot .085\cdot 0.1\cdot 0.95+$$

$$+0.8\cdot 0.85\cdot 0.9\cdot 0.05=0.34315,$$

$$P(X=4)=P(ABCD)=0.8\cdot 0.85\cdot 0.9\cdot 0.95=0.5814.$$

Според тоа, законот и функцијата на распределба на случајната променлива X се:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.00015 & 0.00565 & 0.06965 & 0.34315 & 0.5814 \end{pmatrix},$$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.00015, & 0\le x<1 \\ 0.0058, & 1\le x<2 \\ 0.07545, & 2\le x<3 \\ 0.4186, & 3\le x<4 \\ 1, & x\ge 4 \end{cases}.$$

$$E(X)=0\cdot 0.00015+1\cdot 0.00565+2\cdot 0.06965+3\cdot 0.34315+4\cdot 0.5814=3.5,$$

$$E\left(X^2\right)=0\cdot 0.00015+1\cdot 0.00565+4\cdot 0.06965+9\cdot 0.34315+16\cdot 0.5814=$$

$$=12.675,$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=12.675-12.25=0.425.$$

Случајната променлива X нема медијана, а нејзината мода е 4 бидејќи веројатноста $P(X=4)$ е најголема.

б) Бараната условна веројатност е

$$P(AB \mid X=2)=\frac{P(A\cap B\cap (X=2))}{P(X=2)}=\frac{P(AB\overline{C}\,\overline{D})}{P(X=2)}=$$

$$=\frac{P(A)P(B)P(\overline{C})P(\overline{D})}{0.06965}=\frac{0.8\cdot 0.85\cdot 0.1\cdot 0.05}{0.06965}\approx 0.049.$$

9. Монета се фрла три пати. Ако случајната променлива *X* го означува бројот на паднати писма, да се најдат законот и функцијата на распределба на *X*. Потоа, да се определи модата и медијаната на *X* и да се пресмета веројатноста:

а) да паднат најмногу две писма;

б) да падне барем едно писмо.

Решение.

Нека со Г го означиме паѓањето на глава, а со П паѓањето на писмо. Тогаш, просторот од елементарни настани е

$$\Omega=\{\text{ГГГ, ГГП, ГПГ, ПГГ, ГПП, ПГП, ППГ, ППП}\}.$$

Ако случајната променлива *X* е бројот на појавени писма, тогаш $R_X=\{0,1,2,3\}$. Веројатноста да се појави писмо при едно фрлање на монетата е $1/2$, па случајната променлива *X* има биномна распределба со параметри $n=3$ и $p=\frac{1}{2}$, т.е. $X:\mathscr{B}\left(3,\frac{1}{2}\right)$. Тогаш законот на распределба на *X* е

$$P(X=k)=\binom{3}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}=\binom{3}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3},\ k\in\{0,1,2,3\},$$

односно

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix},$$

а функцијата на распределба е

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/8, & 0\le x<1 \\ 1/2, & 1\le x<2 \\ 7/8, & 2\le x<3 \\ 1, & x>3 \end{cases}.$$

Случајната променлива X има две моди 1 и 2, а нема медијана.

а) Веројатноста да се појават најмногу две писма е

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

б) Веројатноста да се падне барем едно писмо е

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

10. Во кутија се наоѓаат 14 бели и 6 црни топчиња. Се извлекуваат шест топчиња, едно по едно со враќање во кутијата. Нека случајната променлива X е бројот на бели топчиња меѓу шесте извлечени топчиња. Каква распределба има случајната променлива X ? Да се определат математичкото очекување и дисперзијата на X . Потоа, да се пресмета веројатноста:

а) меѓу извлечените топчиња да има барем две бели топчиња;

б) меѓу извлечените топчиња да нема повеќе од 5 и помалку од 2 бели топчиња.

Решение.

Нека X е случајната променлива која претставува број на бели топчиња меѓу шесте извлечени топчиња. Веројатноста да се извлече бело топче при извлекување на едно топче од кутијата е $14/20$. Тогаш X има биномна распределба со параметри $n = 6$ и $p = 14/20$, односно $X : \mathscr{B}\left(6, \frac{14}{20}\right)$, па

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{14}{20}\right)^k \cdot \left(\frac{6}{20}\right)^{6-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

За математичкото очекување и дисперзијата се добива:

$$E(X) = np = \frac{21}{5} \text{ и } D(X) = npq = \frac{63}{50}.$$

а) Веројатноста меѓу извлечените топчиња да има барем две бели топчиња е

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$= 1 - \left(\frac{6}{20}\right)^6 - 6 \cdot \frac{14}{20} \cdot \left(\frac{6}{20}\right)^5 \approx 0.989.$$

б) Веројатноста меѓу извлечените топчиња да нема повеќе од 5 и помалку од 2 бели топчиња е

$$P(2 \le X \le 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \approx 0.871 .$$

11. Точките M , N и P се средини на страните во триаголникот ABC .

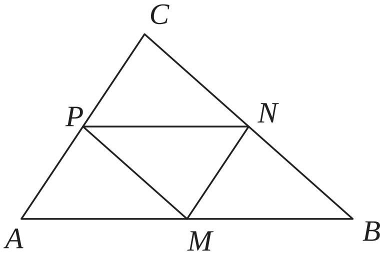
а) Ако на случаен начин се избере една точка во триаголникот ABC , колкава е веројатноста избраната точка да припаѓа во триаголникот MNP ?

б) Нека на случаен начин се изберат пет точки во триаголникот ABC Случајната променлива X го означува бројот на точки кои припаѓаат во триаголникот MNP . Каква распределба има случајната променлива X ? Да се напише законот на распределба на X и да се пресмета веројатноста барем една од петте избрани точки да припаѓа во триаголникот MNP .

Решение.

а) Означуваме настан A: избраната точка припаѓа во триаголникот MNP. Од тоа што плоштината P_{ABC} на триаголникот ABC е 4 пати поголема од плоштината P_{MNP} на триаголникот MNP (слика 3.2) и од геометриската дефиниција на веројатност, следува дека бараната веројатност е

$$P(A) = \frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} = \frac{P_{MNP}}{4P_{MNP}} = \frac{1}{4}.$$



Слика 3.2

б) Случајната променлива X има биномна распределба со параметри $n = 5$ и $p = 1/4$, па нејзиниот закон на распределба е

$$P(X=k) = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}, \qquad k \in \{0,1,2,3,4,5\},$$

односно

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \\ \frac{243}{1024} & \frac{405}{1024} & \frac{270}{1024} & \frac{90}{1024} & \frac{15}{1024} & \frac{1}{1024} \end{pmatrix}.$$

Веројатноста барем една од петте избрани точки да припаѓа во триаголникот *MNP* е

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.237 \approx 0.763.$$

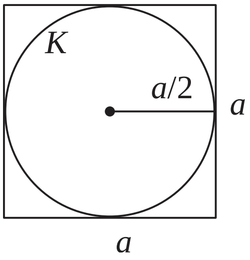
12. а) Во квадрат со страна a, $a > 0$ е впишана кружница. На случаен начин се избира една точка од квадратот. Колкава е веројатноста избраната точка да припаѓа во впишаниот круг K во квадратот?

б) Нека на случаен начин се избира една точка од квадратот и ако не припаѓа во кругот K, постапката се повторува. Избирањето на точка продолжува се додека не се избере точка од K. Случајната променлива X го означува бројот на обиди се додека не се избере точка од K. Каква распределба има случајната променлива *X*? Да се пресметаат математичкото очекување и дисперзијата на *X*. Колкава е веројатноста бројот на обиди да биде барем 3?

Решение.

а) Плоштината на квадрат со страна a е $P_{\text{квадрат}} = a^2$, додека плоштината на впишаниот круг K (слика 3.3) е

$$P_{\text{круг}} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2\pi}{4}.$$



Слика 3.3

Од геометриската дефиниција на веројатноста, следува дека веројатноста избраната точка да е во кругот *K* е

$$\frac{P_{\text{круг}}}{P_{\text{квадрат}}}=\frac{a^2\pi}{4a^2}=\frac{\pi}{4}.$$

б) Случајната променлива X: број на обиди се додека не се избере точка од K има геометриска распределба со параметар $p=\frac{\pi}{4}$, т.е. $X:\mathcal{G}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, па

$$P(X=k)=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{\pi}{4},\ k\in\{1,2,3,\ldots\}.$$

Математичкото очекување е

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}\approx 1.274,$$

а дисперзијата е

$$D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{\frac{4-\pi}{4}}{\frac{\pi^2}{4^2}}=\frac{4(4-\pi)}{\pi^2}\approx 0.349.$$

Веројатноста бројот на обиди да биде барем 3 е

$$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-P(X=1)-P(X=2)=$$

$$=1-\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^2\approx 0.046.$$

13. Експеримент се состои од случаен избор на два реални броја x и y од сегментот $[-1,1]$.

а) Колкава е веројатноста збирот од квадратите на случајно избраните броеви x и y да е поголем од 1, а колкава да е еднаков на 1?

б) Ако не е исполнет условот $x^2+y^2\leq 1$ постапката се повторува. Изборот продолжува се додека не се изберат реални броја x и y за кои важи $x^2+y^2\leq 1$. Случајната променлива X го означува бројот на обиди се додека не се изберат реални броја x и y за кои важи $x^2+y^2\leq 1$. Каква распределба има случајната променлива X?

Решение.

а) Просторот од елементарни настани е

$$\Omega = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Плоштината на областа Ω е $P_\Omega = 4$.

Нека со *A* го означиме настанот: избрани се броеви *x* и *y* за кои важи $x^2 + y^2 > 1$, односно

$$A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Плоштината на областа *A* е $P_A = 4 - r^2\pi = 4 - \pi$.

Ако со *B* го означиме настанот: избрани се броеви *x* и *y* за кои важи $x^2 + y^2 = 1$, односно

$$B = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ x^2 + y^2 = 1\},$$

тогаш плоштината на областа *B* е 0.

Од геометриската дефиниција на веројатност следува

$$P(A) = \frac{4 - \pi}{4} \approx 0.215 \text{ и } P(B) = \frac{0}{4} = 0.$$

б) Нека *X* е случајната променлива: број на обиди се додека не се изберат реални броја *x* и *y* за кои важи $x^2 + y^2 \leq 1$. Настанот кој треба да се реализира е всушност спротивен настан на *A*, па неговата веројатност е

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \approx 0.785.$$

Случајната променлива *X* има геометриска распределба со параметар $p = 0.785$, односно $X : \mathcal{G}(0{,}785)$.

14. Од шпил со 52 карти се извлекува една карта и ако картата не е поп се враќа во шпилот. Извлекувањето продолжува се додека не се извлече поп. Нека случајната променлива *X* е бројот на извлекувања се додека не се извлече поп. Каква распределба има случајната променлива *X*? Колкава е веројатноста:

а) барем три пати да се извлекува карта;

б) најмногу два пати да се извлекува карта?

Решение.

Нека *X* е случајната променлива која го претставува бројот на извлекувања се додека не се извлече поп. Веројатноста да се извлече поп при извлекување на една карта е $\frac{C_4^1}{C_{52}^1}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. Тогаш X има геометриска распределба со параметар $p=\frac{1}{13}$, т.е. $X:\mathcal{G}(1/13)$, па

$$P(X=k)=\left(\frac{12}{13}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{13},\ k\in\{1,2,3,\ldots\}.$$

а) $P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-P(X=1)-P(X=2)=$

$$=1-\frac{1}{13}-\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{13}=\frac{144}{169}.$$

б) $P(X\leq 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{25}{169}$.

15. Бројот на компоненти на еден компјутер кои откажуваат во текот на една година е случајна променлива X со Пуасонова распределба со параметар 5. Колкава е веројатноста:

а) во случајно избрана година да откажат најмногу две компоненти;

б) да откажат барем две компоненти во текот на еден месец?

Решение.

Од тоа што $X:\mathcal{P}(5)$ следува $P(X=k)=\frac{5^k}{k!}e^{-5},\ k\in\{0,1,2,\ \ldots\}$.

а) Веројатноста дека ќе откажат најмногу две компоненти во случајно избрана година е

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=\frac{5^0}{0!}e^{-5}+\frac{5^1}{1!}e^{-5}+\frac{5^2}{2!}e^{-5}\approx 0.125.$$

б) Бидејќи случајната променлива X има Пуасонова распределба со параметар $\lambda=5$, следува дека средниот број на компоненти кои откажуваат во текот на едена година е $E(X)=\lambda=5$. Бројот на компоненти кои откажуваат во тек на еден месец е случајна променлива Y со Пуасонова распределба со параметар $\lambda_1=5\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$. Нејзиниот закон на распределба е

$$P(Y=k)=\frac{\left(\frac{5}{12}\right)^k}{k!}e^{-\frac{5}{12}},\ k\in\{0,1,2,\ \dots\}.$$

Тогаш, веројатноста дека ќе откажат барем две компоненти во еден месец е

$$P(Y\geq 2)=1-P(Y<2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=$$

$$=1-\frac{\left(\frac{5}{12}\right)^0}{0!}e^{-\frac{5}{12}}-\frac{\left(\frac{5}{12}\right)^1}{1!}e^{-\frac{5}{12}}\approx 0.615.$$

16. Средниот број на телефонски повици што ги добива еден брокер на берза во една секунда е 0.1. Колкаво е средното време помеѓу два повика?
Да се пресмета веројатноста дека брокерот ќе добие точно еден повик во интервал со должина од 100 секунди. Колкава е веројатноста дека брокерот нема да добие ниту еден повик во интервал со должина од 100 секунди? Колкава е веројатноста дека брокерот ќе добие најмалку 2 повика во интервал со должина од 3 секунди?

Решение.

Од условот на задачата следува дека бројот на телефонски повици што ги добива брокерот во една секунда има Пуасонова распределба со параметар $\lambda=0.1$. Тогаш, времето (изразено во секунди) помеѓу два повика е случајна променлива T која има експоненцијална распределба со параметар $\lambda=0.1$, односно $T:\mathcal{E}(0.1)$. Значи средното време меѓу два повика е $E(T)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0.1}=10$ секунди.

Нека X е случајна променлива која го претставува бројот на повици во интервал со должина од 100 секунди. Тогаш X има Пуасонова распределба со параметар $\lambda_1=0.1\cdot 100=10$, односно $X:\mathcal{P}(10)$, па

$$P(X=k)=\frac{10^k}{k!}e^{-10},\ k\in\{0,1,2,\ ...\}.$$

Веројатноста дека брокерот ќе добие точно еден повик во интервал со должина од 100 секунди е

$$P(X=1)=10e^{-10}\approx 0.45\cdot 10^{-3},$$

а веројатноста дека брокерот нема да добие ниту еден повик во интервал со должина од 100 секунди е

$$P(X=0)=10^0 e^{-10}=e^{-10}\approx 0.45\cdot 10^{-4}.$$

Нека Y е случајна променлива која го претставува бројот на повици во интервал со должина од 3 секунди. Тогаш Y има Пуасонова распределба со параметар $\lambda_2=0.1\cdot 3=0.3$, т.е. $Y:\mathcal{P}(0.3)$, па

$$P(Y=k)=\frac{0.3^k}{k!}e^{-0.3},\ k\in\{0,1,2,\ \ldots\}.$$

` Веројатноста дека брокерот ќе добие најмалку 2 повика во интервал од 3 секунди е

$$P(Y\geq 2)=1-P(Y<2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=$$

$$=1-\frac{0.3^0}{0!}e^{-0.3}-\frac{0.3}{1!}e^{-0.3}\approx 0.037.$$

17. При дизајн на еден сообраќаен систем, многу важно е да се предвиди сообраќајното оптеретување. Возилата случајно пристигнуваат во дадена точка на системот. Разгледувајќи го проблемот само од временски аспект, се набљудувале фреквенциите (бројот на појавувања) на 0, 1, 2, ... возила во интервали од по 30 секунди и се добиле податоците дадени во следната табела:

Број на возила во интервал од 30 секунда	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9	Вк.
Фреквенција	18	32	28	20	13	7	0	1	1	0	120

Табела 3.1

Да претпоставиме дека нивото на критично сообраќајно оптеретување е 10 возила во минута. Да се определи веројатноста дека ова критично ниво е достигнато или надминато.

Решение.

Нека X е случајната променлива: број на возила во минута, кои поминуваат во набљудуваната точка од сообраќајниот систем. Забележуваме дека оваа случајна променлива има Пуасонова распределба.

Од податоците во табелата 3.1 можеме да го пресметаме средниот број на возила во интервал од 30 секунди и тој е

$$\nu = \frac{0\cdot 18 + 1\cdot 32 + 2\cdot 28 + 3\cdot 20 + 4\cdot 13 + 5\cdot 7 + 6\cdot 0 + 7\cdot 1 + 8\cdot 1}{120} \approx 2.08.$$

Тогаш, средниот број на возила во една минута е

$$\lambda = 2.08\cdot 2 = 4.16.$$

Значи $X : \mathscr{P}(4.16)$, па

$$P(X = k) = \frac{4.16^k}{k!}e^{-4.16},\ k \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Бараната веројатност е

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} P(X = k) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{4.16^k e^{-4.16}}{k!} \approx 1 - 0.992 = 0.008.$$

18. (проблем на Фелер) Живеете во јужен Лондон за време на втората светска војна. Тој дел од градот може да се подели на 100 делови со еднакви плоштини. Ако при едно бомбардирање се исфрлени 500 бомби над јужен Лондон, колкава е веројатноста дека делот во кој живеете нема да биде погоден? Кој е најверојатниот број на бомби кои ќе го погодат делот во кој живеете?

Решение.

Нека X е случајната променлива: број на паднати бомби во делот во кој живеете. Веројатноста една бомба да го погоди делот во кој живеете е $p = \frac{1}{100}$. Тогаш X има биномна распределба со параметри $n = 500$ и $p = \frac{1}{100}$, односно $X : \mathscr{B}\left(500, \frac{1}{100}\right)$.

Бараната веројатност е

$$P(X = 0) = \binom{500}{0}\cdot\left(\frac{99}{100}\right)^{500} = \left(\frac{99}{100}\right)^{500}.$$

Оваа веројатност може да се пресмета приближно користејќи дека биномната распределба може да се апроксимира со Пуасонова распределба со параметар $\lambda = np = 5$. Па според тоа,

$$P(X = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-5} \approx 0.0067.$$

Најверојатниот број на бомби кои ќе го погодат делот во кој живеете е математичкото очекување на случајната променлива X, односно $E(X) = np = \lambda = 5$.

3.2. Случајни променливи од непрекинат тип

19. Густината на распределба на случајната променлива X е

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax^2e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

а) Да се одреди константата $A > 0$.

б) Да се најде функцијата на распределба $F_X(x)$.

в) Да се пресмета $P(0 < X < 1)$.

г) Да се пресмета $P\left(X < \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{3} \leq X < \frac{2}{3}\right)$.

Решение.

а) Константата $A > 0$ ја определуваме од условот $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$, од каде се добива $A\int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 1$, т.е. $A \cdot \Gamma(3) = 1$. Според тоа, $A = \frac{1}{2}$.

б) Бидејќи $f_X(x) = 0$ за $x < 0$, за функцијата на распределба во овој случај добиваме:

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Во случај кога $x \geq 0$, имаме:

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{x} t^2e^{-t}dt=\begin{Bmatrix} u=t^2 & \Rightarrow & du=2tdt \\ dv=e^{-t}dt & \Rightarrow & v=-e^{-t} \end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-t^2e^{-t}\Big|_0^x+2\int_0^x te^{-t}dt\right]=\begin{Bmatrix} u=t & \Rightarrow & du=dt \\ dv=e^{-t}dt & \Rightarrow & v=-e^{-t} \end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-x^2e^{-x}+2(-te^{-t}\Big|_0^x+\int_0^x e^{-t}dt)\right]=$$

$$=-\frac{x^2e^{-x}}{2}-xe^{-x}-e^{-t}\Big|_0^x=-\frac{x^2e^{-x}}{2}-xe^{-x}-e^{-x}+1.$$

Значи,

$$F_X(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2e^{-x}}{2}-xe^{-x}-e^{-x}+1, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}.$$

в) $P(0<X<1)=F_X(1)-F_X(0)=1-\dfrac{5}{2e}\approx 0.08$.

г) $$P\left(X<\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{3}\leq X<\frac{2}{3}\right)=\frac{P(X<1/2,\ 1/3\leq X<2/3)}{P(1/3\leq X<2/3)}=$$

$$=\frac{P(1/3\leq X<1/2)}{P(1/3\leq X<2/3)}=\frac{F_X(1/2)-F_X(1/3)}{F_X(2/3)-F_X(1/3)}=$$

$$=\frac{0.014-0.005}{0.030-0.005}\approx 0.36.$$

20. Нека случајната променлива *X* има густина на распределба

$$f_X(x)=\begin{cases} a-x, & x\in(0,a) \\ 0, & x\notin(0,a) \end{cases}.$$

а) Да се определи константата $a>0$.

б) Да се најде функцијата на распределба $F_X(x)$.

в) Да се пресметаат математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива *X*.

г) Да се пресмета веројатноста $P\left(\dfrac{a}{2}<X<a\right)$.

Решение.

а) Од условот $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ имаме:

$$1 = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{a}(a-x)dx + \int_{a}^{\infty} 0dx = \left(ax - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Решенија на последната равенка се $a = \pm\sqrt{2}$, но бидејќи $a > 0$, следува $a = \sqrt{2}$.

Густината на распределба е $f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2} - x, & x \in \left(0, \sqrt{2}\right) \\ 0, & x \notin \left(0, \sqrt{2}\right) \end{cases}.$

б) За да ја најдеме функцијата на распределба, ги разгледуваме интервалите: $(-\infty, 0]$, $(0, \sqrt{2})$, $[\sqrt{2}, \infty)$.

1) За $x \le 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$

2) За $0 < x < \sqrt{2}$, добиваме $F_X(x) = \int_{0}^{x}\left(\sqrt{2} - t\right)dt = \left(\sqrt{2}t - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^x = \sqrt{2}x - \frac{x^2}{2}.$

3) За $x \ge \sqrt{2}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} - t\right)dt + \int_{\sqrt{2}}^{x} 0dt = 1.$

Според тоа, функцијата на распределба е

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sqrt{2}x - \frac{x^2}{2}, & 0 < x < \sqrt{2} \\ 1, & x \ge \sqrt{2} \end{cases}.$$

в) Математичкото очекување е

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{0}^{\sqrt{2}} x\left(\sqrt{2} - x\right)dx = \left(\frac{\sqrt{2}x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Бидејќи

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_X(x)dx=\int_0^{\sqrt{2}}x^2\left(\sqrt{2}-x\right)dx=\left(\frac{\sqrt{2}x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3},$$

за дисперзијата добиваме $D(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$.

г) Бараната веројатност е

$$P\left(\frac{a}{2}<X<a\right)=P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}<X<\sqrt{2}\right)=F_X\left(\sqrt{2}\right)-F_X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

21. Случајната променлива X има функција на распределба

$$F_X(x)=\begin{cases}1, & x\geq a\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}, & |x|<a\\ 0, & x\leq -a\end{cases}, \quad a-\text{const. } a>0\,.$$

Да се определи:

а) $P(-a/2<X\leq a/2)$;

б) густината на распределба $f_X(x)$;

в) модата и медијаната на случајната променлива X .

Решение.

а) $P(-a/2<X\leq a/2)=F_X(a/2)-F_X(-a/2)=$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\frac{a}{2}}{a}-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{-\frac{a}{2}}{a}\right]=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}.$$

б) Од тоа што

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$$

следува

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\notin(-a,a)\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & x\in(-a,a)\end{cases}.$$

в) Бидејќи случајната променлива X е непрекината, медијаната x_m ја наоѓаме како решение на равенката $F_X(x_m)=\frac{1}{2}$, односно на равенката

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x_m}{a}=\frac{1}{2}.$$

Решенија на последната равенка се $x_m=ak\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. Од тоа што $x_m\in(-a,a)$ се добива $x_m=0$.

Модата на случајната променлива X е вредноста во која густината на распределба $f_X(x)$ достигнува максимална вредност. Со решавање на равенката

$$f'_X(x)=\frac{x}{\pi(a^2-x^2)^{3/2}}=0,$$

се добива дека функцијата $f_X(x)$ има една стационарна точка $x=0$. Бидејќи $f'_X(x)<0$ за $x\in(-a,0)$ и $f'_X(x)>0$ за $x\in(0,a)$, следува дека во точката $x=0$ функцијата $f_X(x)$ има минимум.

Според тоа, случајната променлива X нема мода.

22. Една мета се состои од три концентрични круга со радиуси $3^{-1/2}$, 1 и $3^{1/2}$ метри. За погодок во внатрешниот круг се освојуваат 4 поени, во средишниот круг 3 поени и во надворешниот круг 2 поена. Во случај на промашување не се освојуваат поени. Нека R е случајна променлива која го опишува растојанието од центарот на метата до местото на погодокот, со густина на распределба

$$f_R(r)=\begin{cases}0, & r\le 0\\ \dfrac{2}{\pi\left(1+r^2\right)}, & r>0\end{cases}.$$

Да се пресмета очекуваниот број на добиени поени за едно гаѓање.

Решение.

Функцијата на распределба на случајната променлива R е

$$F_R(r)=\begin{cases}0, & r\le 0\\ \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} r, & r>0\end{cases}.$$

Нека случајната променлива X е бројот на добиени поени при едно гаѓање. Тогаш множеството вредности на X е $R_X=\{0,2,3,4\}$ и

$$P(X=4)=P(R\le 3^{-1/2})=F_R(3^{-1/2})=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3},$$

$$P(X=3)=P(3^{-1/2}<R\le 1)=F_R(1)-F_R(3^{-1/2})=$$

$$=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=2)=P(1<R\le 3^{1/2})=F_R(3^{1/2})-F_R(1)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}1=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)=\frac{1}{3}\cdot$$

Законот на распределба на случајната променлива X е

$$X:\begin{pmatrix}0 & 2 & 3 & 4\\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3\end{pmatrix},$$

а очекуваниот број на добиени поени при едно гаѓање е $E(X)=13/6$.

23. Времетраењето на паузата помеѓу две последователни операции кај една машина, изразено во секунди, е случајна променлива со рамномерна распределба на интервалот (0.5, 2.5). Да се определи веројатноста паузата да биде:

а) поголема од 1 секунда;

б) поголема од 0.5 секунди;

в) помеѓу 0.5 и 1.5 секунди.

Решение.

Од тоа што $X:\mathcal{U}(0.5,\,2.5)$ следува

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0.5,2.5)\\ \frac{1}{2}, & x\in(0.5,2.5)\end{cases} \quad \text{и} \quad F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0.5\\ \frac{x-0.5}{2}, & 0.5<x\le 2.5\\ 1, & x\ge 2.5\end{cases}.$$

а) $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F_X(1)=1-\frac{1-0.5}{2}=0.75.$

б) $P(X>0.5)=1-P(X\le 0.5)=1-F_X(0.5)=1-0=1.$

в) $P(0.5<X<1.5)=F_X(1.5)-F_X(0.5)=\frac{1}{2}-0=0.5.$

24. Скалата на еден мерен инструмент е поделена со цртички кои се на растојание од 0.2. При читање на вредноста на физичката величина, заокружувањето се врши на најблиската цртичка. Случајната променлива X: грешка што се прави при заокружувањето, има рамномерна распределба. Колкава е веројатноста да се направи грешка поголема од 0.05, а колкава веројатноста грешката да е точно 0.05?

Каква распределба има случајната променлива Y која ја претставува апсолутната грешка што се прави при заокружувањето?

Решение.

Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $(-0.1, 0.1)$. Според тоа, функцијата и густината на распределба на случајната променлива X се:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -0.1\\ \frac{x+0.1}{0.2}, & -0.1<x<0.1,\\ 1, & x\ge 0.1\end{cases} \quad f_X(x)=\begin{cases}5, & x\in(-0.1,\ 0.1)\\ 0, & x\notin(-0.1,\ 0.1)\end{cases}.$$

Веројатноста да се направи грешка поголема од 0.05 е

$$P(X>0.05)=1-P(X\le 0.05)=1-F_X(0.05)=1-\frac{0.05+0.1}{0.2}=0.25,$$

додека веројатноста да се направи грешка еднаква на 0.05 е

$$P(X=0.05)=0.$$

Случајната променлива $Y = |X|$ има рамномерна распределба на интервалот $\left(-0, 0.1\right)$, т.е. $Y : \mathcal{U}(0, 0.1)$.

25. Поради непредвидливиот сообраќаен метеж, времето потребно еден студент да стигне од дома до факултетот е рамномерно распределено помеѓу 22 и 30 минути. Ако студентот тргне од дома точно во 7:35 часот, која е веројатноста дека нема да задоцни на часот кој почнува точно во 8 часот?

Решение.

Нека случајната променлива X е времето што му е потребно на студентот да стигне од дома до факултетот, изразено во минути. Таа е рамномерно распределена со функција и густина на распределба:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 22 \\ \dfrac{x-22}{8}, & 22 < x < 30 \\ 1, & x \ge 30 \end{cases} \quad \text{и} \quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}, & x \in \left(22, 30\right) \\ 0, & x \notin \left(22, 30\right) \end{cases},$$

соодветно. Бараната веројатност е $P\left(X \le 25\right) = F_X(25) = \dfrac{3}{8}$.

26. Нека времето на услужување на еден шалтер во банка, изразено во минути, има експоненцијална распределба со параметар $\lambda = 1/10$. Да се најде просечното време на услужување на шалтерот. Ако шалтерот е зафатен, а вие сте следен клиент, да се најде веројатноста дека ќе чекате:

а) помалку од 5 минути;

б) помеѓу 5 и 10 минути.

Решение.

Нека случајната променлива X е времето на услужување на шалтерот. Бидејќи таа има експоненцијална распределба со параметар $\lambda = 1/10$, просечното време на услужување на шалтерот е нејзиното математичко очекување, односно $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 10$ минути. Густината и функцијата на распределба на X се:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{10}}, & x > 0 \end{cases}.$$

а) $P(X<5)=F_X(5)=1-e^{-\frac{1}{2}}\approx 0.393.$

б) $P(5<X<10)=F_X(10)-F_X(5)=1-e^{-1}-\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)\approx 0.239.$

27. Поправката на автомобил во еден автосервис во просек трае 2 часа.

а) Каква распределба има времето потребно за поправка на еден автомобил?

б) Да се определи веројатноста дека поправката на еден автомобил ќе трае помалку од 4 часа.

в) Да се определи веројатноста дека поправката на даден автомобил ќе трае помалку од 4 часа, ако таа веќе трае 2 часа.

г) Каква распределба има случајната променлива Y : број на автомобили кои се поправаат во текот на еден ден? Колку е средниот број на автомобили кои се поправаат во текот на еден ден?

Решение.

а) Бидејќи просечното време за поправка на автомобил е 2 часа, случајната променлива X : времето (изразено во часови) потребно за поправка, има експоненцијална распределба со параметар $\lambda=\frac{1}{2}$. Тогаш

$$f_X(x)=\begin{cases}0{,}5\cdot e^{-0{,}5x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases},\quad F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-0{,}5x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

б) Веројатноста дека поправката на еден автомобил ќе трае помалку од 4 часа е

$$P(X<4)=F_X(4)=1-e^{-0.5\cdot 4}=1-e^{-2}\approx 0.865\,.$$

в) Бараната веројатност е

$$P(X<4\,|\,X>2)=\frac{P(X<4,X>2)}{P(X>2)}=\frac{P(2<X<4)}{1-P(X\leq 2)}=\frac{F_X(4)-F_X(2)}{1-F_X(2)}=$$

$$=\frac{\left(1-e^{-0.5\cdot 4}\right)-\left(1-e^{-0.5\cdot 2}\right)}{1-\left(1-e^{-0.5\cdot 2}\right)}=\frac{0.865-0.632}{0.368}\approx 0.633.$$

г) Ако еден автомобил просечно се поправа за 2 часа, тогаш средниот број автомобили кои се поправаат во текот на еден ден е 12. Значи случајната променлива Y: број на автомобили кои се поправаат во текот на еден ден има Пуасонова распределба со параметар 12.

28. а) Нека случајната променлива X претставува време на работа на еден систем, пуштен во работа во почетен момент $x_0 = 0$ и нека $F(x)$ и $f(x)$ се функцијата и густината на распределба на случајната променлива X, соодветно. Да се покаже дека за дадено $t \geq 0$ важи:

$$F(x \mid X \geq t) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(t)}{1 - F(t)}, & x \geq t \\ 0, & x < t \end{cases}, \quad f(x \mid X \geq t) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{1 - F(t)}, & x \geq t \\ 0, & x < t \end{cases},$$

каде што $F(x \mid X \geq t)$ и $f(x \mid X \geq t)$ се соодветно условната функција и условната густина на распределба на случајната променлива X за даден настан $(X \geq t)$.

б) Познато е дека просечното време на работа на еден систем е 100 дена. Ако се знае дека системот работи не помалку од 10 дена, колкава е веројатноста дека тој ќе работи најмногу 50 дена?

Решение.

а) За $x \geq t$ добиваме:

$$F(x \mid X \geq t) = P(X \leq x \mid X \geq t) = \frac{P(X \leq x, X \geq t)}{P(X \geq t)} =$$

$$= \frac{P(t \leq X \leq x)}{1 - P(X < t)} = \frac{F(x) - F(t)}{1 - F(t)}.$$

За $0 \leq x < t$, имаме:

$$F(x \mid X \geq t) = P(X \leq x \mid X \geq t) = \frac{P(X \leq x, X \geq t)}{P(X \geq t)} = \frac{P(\varnothing)}{1 - P(X \leq t)} = 0.$$

Според тоа,

$$F(x \mid X \geq t) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(t)}{1 - F(t)}, & x \geq t \\ 0, & x < t \end{cases}$$

и

$$f\left(x \mid X \geq t\right)=F'\left(x \mid X \geq t\right)=\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{F(x)-F(t)}{1-F(t)}\right), & x \geq t\\ 0, & x < t\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{F'(x)}{1-F(t)}, & x \geq t\\ 0, & x < t\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{1-F(t)}, & x \geq t\\ 0, & x < t\end{cases}.$$

б) Од условот на задачата следува дека $X : \mathcal{E}(1/100)$, каде што X е случајната променлива: време на работа на системот изразено во денови.

Според тоа,

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x < 0\\ 1-e^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 0\end{cases}.$$

Се бара веројатноста $P(X \leq 50 | X \geq 10) = F(50 \mid X \geq 10)$. Користејќи го резултатот во а) добиваме:

$$P(X < 50 | X \geq 10)=\frac{F(50)-F(10)}{1-F(10)}.$$

Бидејќи $F(50)=1-e^{-1/2}$ и $F(10)=1-e^{-1/10}$ следува

$$P(X < 50 | X \geq 10)==\frac{F(50)-F(10)}{1-F(10)}=\frac{1-e^{-1/2}-1+e^{-1/10}}{1-1+e^{-1/10}}\approx 0.33.$$

29. Нека случајната променлива X има стандардизирана нормална распределба, односно $X : \mathcal{N}(0,1)$. Користејќи ја таблицата за нормална распределба, да се пресмета:

а) $P(X < 2.47)$; б) $P(X \geq 2.47)$; в) $P(X > 4)$; г) $P(X \leq -2.47)$.

Решение.

а) $P(X < 2.47)=\Phi(2.47)\approx 0.9932.$

б) $P(X \geq 2.47)=1-P(X < 2.47)=1-\Phi(2.47)\approx 1-0.9932=0.0068.$

в) $P(X > 4)=1-P(X < 4)=1-\Phi(4)\approx 1-1=0.$

г) $P(X \leq -2.47)=\Phi(-2.47)=1-\Phi(2.47)\approx 0.0068.$

30. Случајната променлива X има нормална распределба со параметри $\mu = 200$ и $\sigma = 100$, односно $X : \mathcal{N}(200, 100)$. Да се најде веројатноста X да прима вредности:

а) помеѓу 125 и 275;

б) поголеми од 175.

Решение.

Познато е дека, ако $X : \mathcal{N}(200, 100)$, тогаш случајната променлива $Z = \dfrac{X - 200}{100} : \mathcal{N}(0,1)$.

$$\text{а) } P(125 < X < 275) = P\left(\frac{125-200}{100} < Z < \frac{275-200}{100}\right) =$$

$$= P(-0.75 < Z < 0.75) = \Phi(0.75) - \Phi(-0.75) =$$

$$= \Phi(0.75) - (1 - \Phi(0.75)) =$$

$$= 2\Phi(0.75) - 1 \approx$$

$$\approx 2 \cdot 0.7734 - 1 = 0.5468.$$

$$\text{б) } P(X > 175) = 1 - P(X \le 175) = 1 - P\left(Z \le \frac{175-200}{100}\right) =$$

$$= 1 - P(Z \le -0.25) = 1 - \Phi(-0.25) =$$

$$= 1 - (1 - \Phi(0.25)) = \Phi(0.25) \approx 0.5987.$$

31. Еден производител нуди лежишта чиј дијаметар е случајна променлива X со нормална распределба со параметри $\mu = 1\text{cm}$ и $\sigma = 0.002\,\text{cm}$, односно $X : \mathcal{N}(1, 0.002)$. Купувачот бара лежишта со дијаметар $(1 \pm 0.003)\text{cm}$.

а) Колкав процент од лежиштата го задоволуваат барањето на купувачот?

б) Производителот може да го подобри производството намалувајќи ја вредноста на параметарот $\sigma > 0$. За која вредност на σ, 99% од лежиштата ќе го задоволуваат барањето на купувачот?

Решение.

а) Ако $X : \mathcal{N}(1, 0.002)$, тогаш случајната променлива $Z = \dfrac{X - 1}{0.002} : \mathcal{N}(0,1)$.

Веројатноста случајно избрано лежиште да го задоволува барањето на купувачот е

$$\begin{aligned} P(1-0.003 \le X \le 1+0.003) &= P(0.997 \le X \le 1.003) = \\ &= P\left(\frac{0.997-1}{0.002} \le Z \le \frac{1.003-1}{0.002}\right) = \\ &= P(-1.5 \le Z \le 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = \\ &= 2\Phi(1.5) - 1 \approx 2 \cdot 0.9332 - 1 = 0.8664. \end{aligned}$$

Заклучуваме дека 86.64% од лежиштата го задоволуваат барањето на купувачот.

б) Нека Y е случајна променлива со нормална распределба со параметри $\mu = 1\text{cm}$ и $\sigma > 0$, кој е непознат параметар. Тогаш случајната променлива $Z = \frac{Y-1}{\sigma} : \mathcal{N}(0,1)$. Од условот на задачата ја добиваме равенката

$$\begin{aligned} 0.99 = P(1-0.003 \le Y \le 1+0.003) &= P\left(\frac{0.997-1}{\sigma} \le Z \le \frac{1.003-1}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{0.003}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{0.003}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.003}{\sigma}\right) - 1, \end{aligned}$$

од која се добива $\Phi\left(\frac{0.003}{\sigma}\right) = 0.995$. Од таблицата за нормална распределба добиваме $\frac{0.003}{\sigma} \approx 2.575$, од каде што $\sigma \approx 0.00117\text{cm}$.

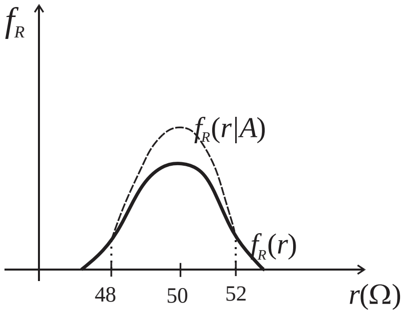
Значи, за $\sigma \approx 0.00117\text{cm}$, 99% од лежиштата ќе го задоволуваат барањето на купувачот.

32. Отпорници се дизајнирани така што имаат отпорност R од $(50 \pm 2)\Omega$. Поради непрецизности во процесот на производство, густината на распределба на веројатноста на R е прикажана со кривата на сликата 3.4. Да се најде густината на распределба на R и средната отпорност на отпорниците по процесот на проверка (процес кога сите отпорници чија отпорност е во опсег од 48Ω до 52Ω се отфрлаат).

Решение.

Нѐ интересира условната густина на распределба, $f_R(r|A)$, каде што A е настанот $(48 \le R \le 52)$. Прво, ќе ја определиме условната функција на распределба

$$F_R(r|A) = P(R \le r | 48 \le R \le 52) = \frac{P(R \le r, 48 \le R \le 52)}{P(48 \le R \le 52)}.$$



Слика 3.4

Од тоа што

$$(R \le r | 48 \le R \le 52) = \begin{cases} \varnothing, & r < 48 \\ 48 \le R \le r, & 48 \le r \le 52 \\ 48 \le R \le 52, & r > 52 \end{cases}$$

имаме

$$F_R(r\,|\,A) = \begin{cases} 0, & r < 48 \\ \dfrac{P(48 \le R \le r)}{P(48 \le R \le 52)} = \dfrac{\int\limits_{48}^{r} f_R(t)dt}{c}, & 48 \le r \le 52 \\ 1, & r > 52 \end{cases},$$

каде што $c = \int\limits_{48}^{52} f_R(r)dr$ е константа.

Тогаш, бараната условна густина $f_R(r|A)$ се добива со диференцирање на горниот израз,

$$f_R(r|A) = \frac{dF_R(r|A)}{dr} = \begin{cases} \dfrac{f_R(r)}{c}, & 48 \le r \le 52 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

Оваа функција графички е прикажана со испрекината линија на сликата 3.4, од каде што се гледа дека ефектот на проверка на отпорниците, всушност е скратување на „опашките“ на графикот на функцијата $f_R(r)$ надвор од дозволените граници. Ова е придружено со прилагодување, во рамки на границите, преку мултипликативен фактор $1/c$ така што плоштината под кривата повторно е еднаква на 1.

Средната вредност што се бара е условното математичко очекување на R, ако се случил настанот A,

$$E(R|A)=\int_{48}^{52} r\,f_R(r|A)dr=\int_{48}^{52}\frac{rf_R(r)}{c}dr.$$

Овој интеграл може да се пресмета ако е позната густината $f_R(r)$.

33. Еден контролор ги раздвоил производите во две кутии на следниот начин: во едната кутија се производите чие отстапување од пропишаните димензии има нормална распределба $\mathcal{N}(0,1)$, а во другата се производите чие отстапување од пропишаните димензии има нормална распределба $\mathcal{N}(2,2)$. Односот меѓу бројот на производите во првата и втората кутија е 2:3. Но, некој ги измешал производите, така што ги ставил во една кутија. Од таа кутија случајно се избира еден производ. Да се најде математичкото очекување и стандардната девијација на отстапувањето на димензиите на избраниот производ од пропишаните димензии.

Решение:

Ги означуваме следниве хипотези:

H_1: избраниот производ припаѓа на првата кутија,

H_2: избраниот производ припаѓа на втората кутија.

Веројатностите на овие хипотези се:

$$P(H_1)=\frac{2}{5},\qquad P(H_2)=\frac{3}{5}.$$

Нека X е случајната променлива: отстапување на димензиите на избраниот производ од пропишаните димензии. Од условот на задачата следува дека случајните променливи $X\,|\,H_1$ и $X\,|\,H_2$ имаат нормална распределба $\mathcal{N}(0,1)$ и $\mathcal{N}(2,2)$, соодветно, од каде имаме:

$$E(X\,|\,H_1)=0,\ E(X\,|\,H_2)=2,\ D(X\,|\,H_1)=1,\ D(X\,|\,H_2)=4.$$

Од формулата за тотална веројатност, за функцијата на распределба на случајната променлива *X* добиваме:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x|H_1)P(H_1) + P(X \le x|H_2)P(H_2) =$$
$$= F_X(x \mid H_1)P(H_1) + F_X(x \mid H_2)P(H_2),$$

од каде за густината на распределба имаме:

$$f_X(x) = f_X(x \mid H_1)P(H_1) + f_X(x \mid H_2)P(H_2) =$$
$$= \frac{2}{5} f_X(x \mid H_1) + \frac{3}{5} f_X(x \mid H_2).$$

Бараното математичкото очекување е

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{2}{5} f_X(x \mid H_1) + \frac{3}{5} f_X(x \mid H_2)\right)dx =$$
$$= \frac{2}{5}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x \mid H_1)dx + \frac{3}{5}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x \mid H_2)dx =$$
$$= \frac{2}{5}E(X \mid H_1) + \frac{3}{5}E(X \mid H_2) =$$
$$= \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{6}{5}.$$

Аналогно,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \frac{2}{5}E(X^2 \mid H_1) + \frac{3}{5}E(X^2 \mid H_2).$$

Од дефиницијата на дисперзија на случајна променлива имаме:

$$E(X^2 \mid H_1) = D(X \mid H_1) + (E(X \mid H_1))^2 = 1 + 0^2 = 1$$

и

$$E(X^2 \mid H_2) = D(X \mid H_2) + (E(X \mid H_2))^2 = 4 + 2^2 = 8,$$

па $E(X^2) = \frac{2}{5}E(X^2 \mid H_1) + \frac{3}{5}E(X^2 \mid H_2) = \frac{2}{5}\cdot 1 + \frac{3}{5}\cdot 8 = \frac{26}{5}.$

За дисперзијата на случајната променлива *X* добиваме:

$$D(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{26}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{94}{25}.$$

Според тоа, стандардната девијација на X е

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{94}}{25}.$$

34. Меѓународен телефонски разговор до три минути е по една тарифа, а над три минути по друга, поскапа тарифа. Притоа, функцијата на распределба на случајната променлива X : времетраење (во минути) на меѓународните телефонски разговори, ја има следнава форма:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x/3}, & 0\le x<3\\ 1-\dfrac{1}{2}\,e^{-x/3}, & x\ge 3\end{cases}.$$

Да се определи веројатноста дека произволен меѓународен телефонски разговор трае:

а) повеќе од две минути;

б) помеѓу две и шест минути.

Потоа да се најдат густината на распределба и законот на распределба на случајната променлива X и со нивна помош да се пресметаат претходно бараните веројатности.

Решение:

Функцијата на распределба на случајната променлива X е скицирана на сликата 3.5, од каде што можеме да забележиме дека таа има прекин во точката $x=3$, но не е скалеста функција. Во тој случај велиме дека случајната променлива X е од мешан тип.

Бараните веројатности ќе ги најдеме преку функцијата на распределба.

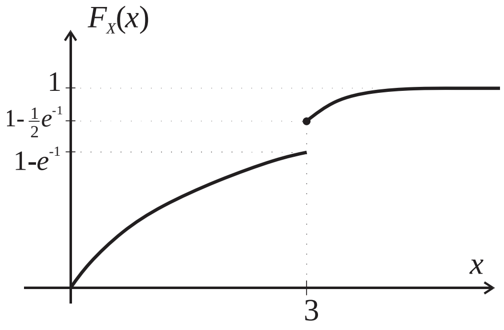
а) $P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F_X(2)=1-\left(1-e^{-2/3}\right)=e^{-2/3}.$

б) $P(2<X\le 6)=F_X(6)-F_X(2)=e^{-2/3}-\dfrac{e^{-2}}{2}.$

За да го најдеме законот на распределба за дискретниот дел, ја пресметуваме веројатноста $P(X=3)$:

$$P(X=3)=P(X\le 3)-P(0\le X<3)=F_X(3)-F_X(3-0)=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2e}\right)-\left(1-e^{-1}\right)=\frac{1}{2e}.$$

Во горното равенство $F_X(3-0)=\lim\limits_{x\to 3^-}F_X(x)$.



Слика 3.5

Според тоа, за законот на распределба добиваме:

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2e}, & x=3\\ 0, & x\ne 3\end{cases}.$$

Густината на распределба е

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{3}e^{-x/3}, & 0\le x<3.\\ \dfrac{1}{6}e^{-x/3}, & x\ge 3\end{cases}$$

На сликата 3.6 е прикажан законот на распределба за дискретниот дел и густината на распределба за непрекинатиот дел на случајната променлива X. Да забележиме дека плоштината под кривата $f_X(x)$ не е единица, туку

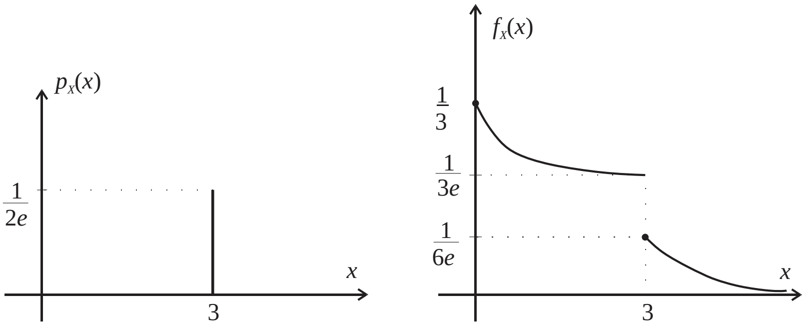
$$1-p_X(3)=1-P(X=3)=1-\frac{1}{2e}.$$

За да ги пресметаме бараните веројатности, ги користиме и непрекинатите и дискретните делови, па добиваме:

а) $P(X>2)=\int_2^{\infty} f_X(x)dx+p_X(3)=\frac{1}{3}\int_2^3 e^{-x/3}dx+\frac{1}{6}\int_3^{\infty} e^{-x/3}dx+\frac{1}{2e}=e^{-2/3}$,

б) $P(2<X\leq 6)=\int_2^6 f_X(x)dx+p_X(3)=\frac{1}{3}\int_2^3 e^{-x/3}dx+\frac{1}{6}\int_3^6 e^{-x/3}dx+\frac{1}{2e}=e^{-2/3}-\frac{1}{2e^2}$.

Очигледно, овие резултати се совпаѓаат со резултатите добиени претходно, во кои беше искористена само функцијата на распределба на случајната променлива од мешан тип.



Слика 3.6

3.3. Трансформација на случајна променлива

35. Даден е законот на распределба на дискретна случајна променлива

$$X:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3\end{pmatrix}.$$

Да се определат законот на распределба на случајната променлива Y, $E(Y)$ и $D(Y)$ ако:

а) $Y=X^4$; б) $Y=X^3$; в) $Y=X+2$; г) $Y=2^X$.

Решение.

а) Множеството вредности на X е $R_X=\{-1,0,1,2\}$, од каде се добива дека множеството вредности на $Y=X^4$ е $R_Y=\{0,1,16\}$. Притоа,

$$P(Y=0)=P\left(X^4=0\right)=P(X=0)=0.1,$$

$$P(Y=1)=P\left(X^4=1\right)=P(X=1)+P(X=-1)=0.2+0.4=0.6,$$

$$P(Y=16)=P\left(X^4=16\right)=P(X=2)=0.3,$$

па, законот на распределба на случајната променлива $Y=X^4$ е

$$Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 16 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Од законот на распределба се добива дека

$$E(Y)=5.4, \quad D(Y)=48.24.$$

Аналогно се добиваат законите на распределба и на останатите случајни променливи.

б) $Y:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 8 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}, \; E(Y)=2.6, \quad D(Y)=13.04.$

в) $Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}, \; E(Y)=2.8, \quad D(Y)=1.16.$

г) $Y:\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 & 4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}, \; E(Y)=2.2, \quad D(Y)=1.71.$

36. Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $(0,1)$. Да се најдат функцијата и густината на распределба на случајните променливи:

а) $Y=-\ln X$; б) $Y=\left(\frac{1}{2}\right)^X$; в) $Y=aX+b, \; a,b\in\mathbf{R}, \; a\neq 0.$

Решение.

Функцијата и густината на распределба на случајната променлива X се:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x, & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad f_X(x)=\begin{cases} 1, & x\in(0,1) \\ 0, & x\notin(0,1) \end{cases}.$$

а) За функцијата и густината на распределба на случајната променлива $Y=-\ln X$ имаме:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\ln X\le y)=P(\ln X\ge -y)=$$
$$=1-P(\ln X<-y)=1-P\left(X<e^{-y}\right)=1-F_X(e^{-y})=$$
$$=1-\begin{cases}0, & e^{-y}\le 0\\ e^{-y}, & 0<e^{-y}<1\\ 1, & e^{-y}\ge 1\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases},$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}.$$

б) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\left(\frac{1}{2}\right)^X\le y\right)=P\left(X\ge \log_{1/2}y\right)=$

$$=1-P\left(X<\log_{1/2}y\right)=1-F_X\left(\log_{1/2}y\right)=$$
$$=1-\begin{cases}0, & \log_{1/2}y\le 0\\ \log_{1/2}y, & 0<\log_{1/2}y<1=\\ 1, & \log_{1/2}y\ge 1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, & y\ge 1\\ 1-\log_{1/2}y, & 1/2<y<1,\\ 0, & y\le 1/2\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y\ln 2}, & y\in(1/2,1)\\ 0, & y\notin(1/2,1)\end{cases}.$$

в) Ќе разгледаме два случаи:

1) За $a>0$ добиваме:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=P\left(X\le\frac{y-b}{a}\right)=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)=$$
$$=\begin{cases}0, & \dfrac{y-b}{a}\le 0\\ \dfrac{y-b}{a}, & 0<\dfrac{y-b}{a}<1=\\ 1, & \dfrac{y-b}{a}\ge 1\end{cases}\begin{cases}0, & y\le b\\ \dfrac{y-b}{a}, & b<y<a+b,\\ 1, & y\ge a+b\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & y\in(b,a+b)\\ 0, & y\notin(b,a+b)\end{cases}.$$

2) За $a<0$ имаме:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=P\left(X\ge\frac{y-b}{a}\right)=$$

$$=1-P\left(X<\frac{y-b}{a}\right)=1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)=$$

$$=1-\begin{cases}0, & \dfrac{y-b}{a}\le 0\\ \dfrac{y-b}{a}, & 0<\dfrac{y-b}{a}<1\\ 1, & \dfrac{y-b}{a}\ge 1\end{cases}=\begin{cases}1, & y\ge b\\ 1-\dfrac{y-b}{a}, & a+b<y<b,\\ 0, & y\le a+b\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{a}, & y\in(a+b,b)\\ 0, & y\notin(a+b,b)\end{cases}.$$

37. Дневната потрошувачка на пакети хартија во една фирма е случајна променлива X која има експоненцијална распределба со параметар 1/5. Еден пакет хартија чини 2000 денари. Да се определат функцијата и густината на распределба на случајната променлива Y која претставува дневна потрошувачка на фирмата, ако се знае дека покрај дневните трошоци за хартија, фирмата има дополнителни дневни трошоци од 700 денари за други потреби. Колку е веројатноста дека дневните трошоци на фирмата ќе бидат поголеми од 1700 денари?

Решение.

Случајната променлива X е експоненцијално распределена со параметар $a=1/5$, па

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x\ge 0\end{cases}\quad \text{и}\quad F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\frac{x}{5}}, & x\ge 0\end{cases}.$$

Од условот на задачата заклучуваме дека $Y=2000X+700$. За функцијата и густината на распределба на случајната променлива Y добиваме:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(2000X + 700 \le y) = \\
&= P\left(X \le \frac{y-700}{2000} \right) = F_X\left(\frac{y-700}{2000} \right) = \\
&= \begin{cases} 0, & \dfrac{y-700}{2000} < 0 \\ 1 - e^{-\frac{y-700}{10000}}, & \dfrac{y-700}{2000} \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 700 \\ 1 - e^{-\frac{y-700}{10000}}, & y \ge 700 \end{cases},
\end{aligned}
$$

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 700 \\ \dfrac{1}{10000} e^{-\frac{y-700}{10000}}, & y \ge 700 \end{cases}.
$$

Веројатноста дека дневните трошоци на фирмата ќе бидат поголеми од 1700 денари е

$$
P(Y > 1700) = 1 - P(Y \le 1700) = 1 - F_Y(1700) = e^{-0.1} \approx 0.9.
$$

38. Да се најдат функцијата и густината на распределба на случајната променлива $Y = e^X$, ако случајната променлива X има функција на распределба

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sqrt{2}x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x < \sqrt{2}. \\ 1, & x \ge \sqrt{2} \end{cases}
$$

Решение.

$$
F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^X \le y) = P(X \le \ln y) = F_X(\ln y) =
$$

$$
= \begin{cases} 0, & \ln y < 0 \\ \sqrt{2}\ln y - \dfrac{\ln^2 y}{2}, & 0 \le \ln y < \sqrt{2} \\ 1, & \ln y \ge \sqrt{2} \end{cases} =
$$

$$
= \begin{cases} 0, & 0 < y < 1 \\ \sqrt{2}\ln y - \dfrac{\ln^2 y}{2}, & 1 \le y < e^{\sqrt{2}}. \\ 1, & y \ge e^{\sqrt{2}} \end{cases}
$$

За густината на случајната променлива $Y = e^X$ се добива

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2} - \ln y}{y}, & y \in (1, e^{\sqrt{2}}) \\ 0, & y \notin (1, e^{\sqrt{2}}) \end{cases}.$$

39. Нека $Y = \dfrac{1}{X}$ ($X > 0$). Да се изрази густината на распределба на случајната променлива *Y* преку густината на случајната променлива *X*.

Решение.

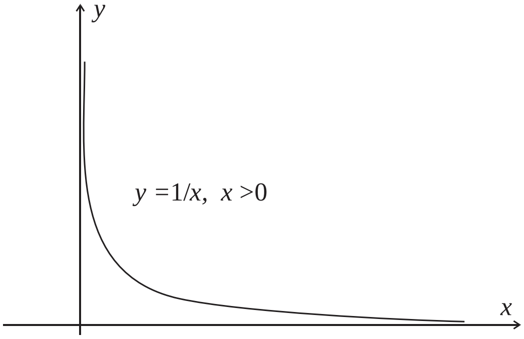
Од тоа што $R_X = (0, \infty)$ следува дека $R_Y = (0, \infty)$ (слика 3.7). Според тоа, за $y < 0$, $F_Y(y) = 0$.

За $y > 0$ се добива

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(\frac{1}{X} \le y\right) = P\left(X \ge \frac{1}{y}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right).$$

За функцијата на распределба на случајната променлива *Y* добиваме:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - F_X\left(\dfrac{1}{y}\right), & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}.$$



Слика 3.7

Од тоа што

$$\left(1-F_X\left(\frac{1}{y}\right)\right)' = -f_X\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}\right)' = \frac{f_X\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}$$

следува дека густината на распределба на Y е

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} f_X\left(\frac{1}{y}\right), & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}.$$

40. Случајната променлива X има густина на распределба

$$f_X(x) = \frac{\alpha/\pi}{x^2+\alpha^2}, \alpha > 0$$

(Кошиева распределба со параметар α). Користејќи ја фундаменталната теорема да се покаже дека случајната променлива $Y = \frac{1}{X}$ има густина $f_Y(y) = \frac{1/\alpha\pi}{y^2+1/\alpha^2}$ (Кошиева распределба со параметар $1/\alpha$).

Решение.

Решение на равенката $y = \frac{1}{x}$ е $x_1 = \frac{1}{y}$. Првиот извод на функцијата $g(x) = \frac{1}{x}$ е $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, па $g'(x_1) = -\frac{1}{x_1^2} = -y^2$.

Од фундаменталната теорема следува

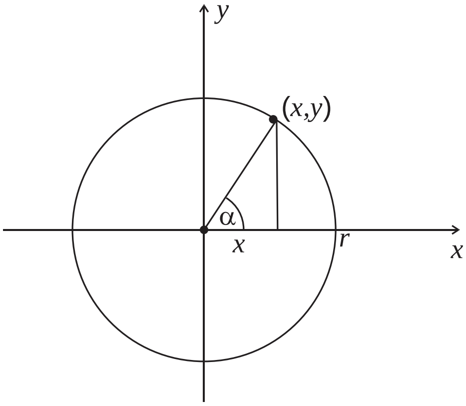
$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{f_X\left(\frac{1}{y}\right)}{|-y^2|} = \frac{\frac{\alpha/\pi}{(1/y)^2+\alpha^2}}{y^2} = \frac{\alpha\pi}{\alpha^2 y^2+1} = \frac{1/(\alpha\pi)}{y^2+1/\alpha^2}.$$

41. Во xOy рамнината дадена е кружницата $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$. На горната полукружница случајно се избира една точка со координати (x,y). Случајната променлива α, која ја претставува големината на поларниот агол на избраната точка, има рамномерна распределба на интервалот $(0,\pi)$. Да се определат функцијата и густината на распределба на случајната променлива X која ја претставува апцисата на избраната точка.

Решение.

Од тоа што $\alpha : \mathcal{U}(0,\pi)$ следува

$$F_\alpha(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \le 0 \\ \dfrac{\alpha}{\pi}, & 0 < \alpha < \pi. \\ 1, & \alpha \ge \pi \end{cases}$$



Слика 3.8

Бидејќи $X = r\cos\alpha$ (слика 3.8) добиваме:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(r\cos\alpha \le x) = P\left(\cos\alpha \le \frac{x}{r}\right) = P\left(\alpha \ge \arccos\frac{x}{r}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\alpha < \arccos\frac{x}{r}\right) = 1 - F_\alpha\left(\arccos\frac{x}{r}\right) =$$

$$= 1 - \begin{cases} 0, & \arccos\dfrac{x}{r} \le 0 \\ \dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{x}{r}, & 0 < \arccos\dfrac{x}{r} < \pi = \\ 1, & \arccos\dfrac{x}{r} \ge \pi \end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & \dfrac{x}{r}\geq 1\\ 1-\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{x}{r}, & -1<\dfrac{x}{r}<1\\ 0, & \dfrac{x}{r}\leq -1\end{cases} =$$

$$=\begin{cases}0, & x\leq -r\\ 1-\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{x}{r}, & -r<x<r.\\ 1, & x\geq r\end{cases}$$

Од тоа што

$$\left(1-\frac{\arccos\frac{x}{r}}{\pi}\right)'=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}$$

следува дека густината на распределба на случајната променлива *X* е

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}, & x\in(-r,r)\\ 0, & x\notin(-r,r)\end{cases}.$$

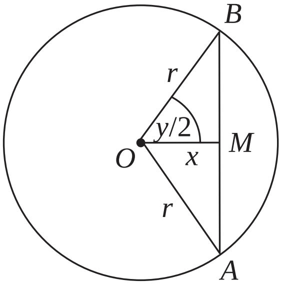
42. На кружница со центар во точката *O* и радиус r ($r>0$) случајно се избираат две точки *A* и *B*. Случајната променлива *Y* претставува големина на централниот агол на тетивата *AB*, односно аголот меѓу отсечките *OA* и *OB*, и прима вредности од интервалот $(0,\pi)$. Да се определат функцијата и густината на распределба на случајната променлива X која ја претставува должината на отсечката *OM*, каде што *M* е средина на тетивата *AB*. Потоа, да се пресмета веројатноста должината на отсечката *OM* да биде поголема од $r/2$.

Решение.

Случајната променлива *Y*, што ја претставува големината на централниот агол на тетивата *AB*, има рамномерна распределба на интервалот $(0,\pi)$, т.е. $Y:\mathcal{U}(0,\pi)$. Според тоа,

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{y}{\pi}, & 0\le y<\pi.\\ 1, & y\ge\pi\end{cases}$$

Од сликата 3.9 заклучуваме дека $\cos\frac{Y}{2}=\frac{X}{r}$, од каде $X=r\cos\frac{Y}{2}$.



Слика 3.9

На сличен начин како во претходната задача, за функцијата и густината на распределба на случајната променлива X добиваме:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-\dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{x}{r}, & 0<x\le r\\ 1, & x>r\end{cases},$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{r^2-x^2}}, & x\in(0,r)\\ 0, & x\notin(0,r)\end{cases}.$$

Баранате веројатност е

$$P\left(X>\frac{r}{2}\right)=1-P\left(X\le\frac{r}{2}\right)=1-F_X\left(\frac{r}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\arccos\frac{\frac{r}{2}}{r}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}.$$

43. Нека случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $(0,1)$ и $Y=G^{-1}(X)$, каде што функцијата G ги задоволува особините на функција на распределба на случајна променлива. Да се покаже дека G е функција на распределба на случајната променлива Y.

Решение.

Од тоа што случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $(0,1)$ следува

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}.$$

Користејќи дека G е монотоно неопаѓачка функција, за функцијата на распределба на случајната променлива $Y=G^{-1}(X)$ имаме:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(G^{-1}(X)\le y)=P\big(X\le G(y)\big)=$$

$$=F_X(G(y))=\begin{cases}0, & G(y)<0\\ G(y), & 0\le G(y)<1.\\ 1, & G(y)\ge 1\end{cases}$$

Бидејќи за секој y важи $0\le G(y)\le 1,$ следува дека $F_Y(y)=G(y)$.

44. а) Да се изразат функцијата и густината на распределба на случајната променлива $Y=X^2$ преку функцијата и густината на распределба на случајната променлива X.

б) Да се реши задачата во а) со користење на фундаменталната теорема.

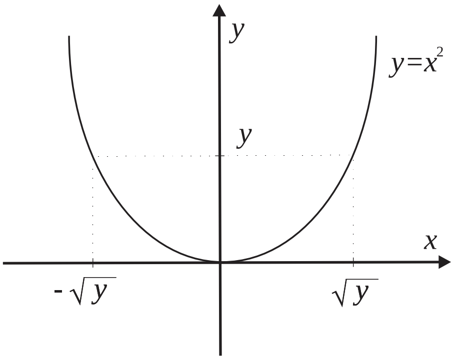
в) Користејќи го добиениот резултат во а), да се покаже дека ако $X:\mathcal{N}(0,1)$, тогаш случајната променлива $Y=X^2$ има χ^2 распределба со еден степен на слобода, односно има густина на распределба

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}.$$

Решение.

а) Бидејќи $Y=X^2$, следува дека случајната променлива Y прима само позитивни вредности. Тогаш, за $y\le 0$, $F_Y(y)=0$. За $y>0$ добиваме:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\big(X^2\le y\big)=P\big(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\big)=F_X\big(\sqrt{y}\big)-F_X\big(-\sqrt{y}\big)$$



Слика 3.10

Значи функцијата на распределба е

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right), & y>0\end{cases}.$$

Од тоа што

$$\left(F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right)\right)' = F_X^{'}\left(\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}\right)' - F_X^{'}\left(-\sqrt{y}\right)\left(-\sqrt{y}\right)' =$$
$$= f_X\left(\sqrt{y}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right),$$

следува

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right), & y>0\end{cases}.$$

б) Решенија на равенката $y=x^2$ се $x_1=-\sqrt{y}$ и $x_2=\sqrt{y}$. За функцијата $g(x)=x^2$ добиваме $g'(x)=2x$, па

$$g'(x_1)=2x_1=-2\sqrt{y} \quad \text{и} \quad g'(x_2)=2x_2=2\sqrt{y}\,.$$

Од фундаменталната теорема се добива

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}+\dfrac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}, & y>0\end{cases}=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right), & y>0\end{cases}.$$

б) Густината на случајната променлива $X:\mathcal{N}(0,1)$ е $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Според тоа,

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right), & y>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(-\sqrt{y}\right)^2}{2}}\right), & y>0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\end{cases}.$$

45. Случајната променлива *X* има густина на распределба

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, & x\in[-1,1]\\ 0, & x\notin[-1,1]\end{cases}.$$

Да се определи функцијата на распределба на *X*. Потоа да се определат функцијата и густината на распределба на случајната променлива $Y=1-X^2$ и веројатноста $P(1/2\le Y\le 3/4)$.

Решение.

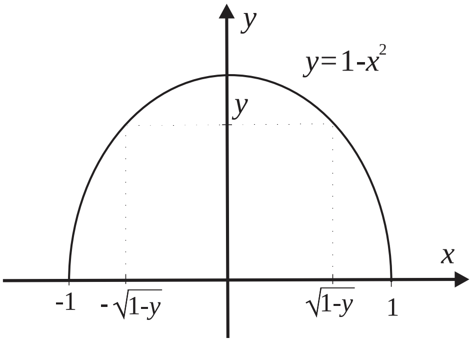
Бидејќи $f_X(x)=F_X'(x)$, заклучуваме дека за $x\notin[-1,1]$, $F_X(x)=C$, каде што C е константа. Од особините на функција на распределба знаеме дека $F_X(-\infty)=0$ и $F_X(\infty)=1$. Според тоа, за $x<-1$, $F_X(x)=0$, а за $x>1$, $F_X(x)=1$.

Нека $-1\le x\le 1$. Тогаш

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}(t+1)dt=\frac{1}{2}\frac{(t+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{x}=\frac{(x+1)^2}{4}.$$

Значи,

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{(x+1)^2}{4}, & -1\le x\le 1.\\ 1, & x>1\end{cases}$$



Слика 3.11

За да ја најдеме функцијата на распределба на случајната променлива $Y=1-X^2$, прво ќе го определиме нејзиното множество вредности.

Корени на равенката $y=1-x^2$ се $x_{1/2}=\pm\sqrt{1-y}$ (слика 3.11). Кога $x\in[-1,1]$ се добива дека $\pm\sqrt{1-y}\in[-1,1]$, односно $y\in[0,1]$.

Според тоа, ги разгледуваме следниве случаи:

1) За $y<0$, $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\varnothing)=0$.

2) За $y\in[0,1]$ добиваме:

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\le y)=P\left(1-X^2\le y\right)=P\left(X^2\ge 1-y\right)=P\left(|X|\ge\sqrt{1-y}\right)=\\&=P\left(X\le-\sqrt{1-y}\right)+P\left(X\ge\sqrt{1-y}\right)=\\&=F_X\left(-\sqrt{1-y}\right)+1-F_X\left(\sqrt{1-y}\right)=1-\sqrt{1-y}.\end{aligned}$$

3) За $y>1$, $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-1\le X\le 1)=1$.

Значи, $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-\sqrt{1-y}, & 0\le y\le 1\\ 1, & y>1\end{cases}$, па за густината на Y добиваме:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}}, & y\in(0,1)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}.$$

Бараната веројатност е

$$\begin{aligned}P(1/2\le Y\le 3/4)&=F_Y(3/4)-F_Y(1/2)=\\ &=\left(1-\sqrt{1-3/4}\right)-\left(1-\sqrt{1-1/2}\right)\approx 0.207.\end{aligned}$$

46. На отсечката AB со должина $d>0$ на случаен начин се избира точка C. Да се најдат функцијата и густината на распределба на случајната променлива Y која претставува плоштина на триаголникот со основа $\overline{AC}$ и висина $\overline{CB}$.

Решение.

Нека случајната променлива X е должината на отсечката $\overline{AC}$. Тогаш X има рамномерна распределба на интервалот $(0, d)$, па

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{d}, & 0<x<d\\ 1, & x\ge d\end{cases}.$$

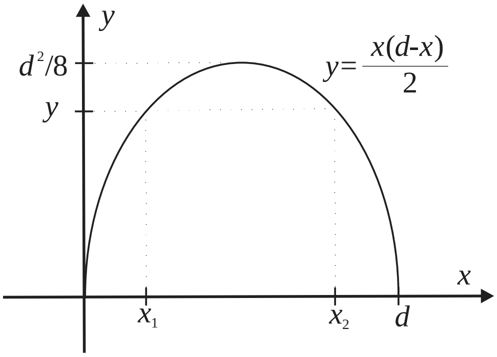
Случајната променлива Y е

$$Y=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{CB}}{2}=\frac{X(d-X)}{2}.$$

Со трансформација на равенката $y=\dfrac{x(d-x)}{2}$ се добива квадратната равенка $x^2-dx+2y=0$. Нејзини решенија се:

$$x_{1/2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 8y}}{2}.$$

Кога $x \in (0, d)$ се добива дека $y \in \left(0, \frac{d^2}{8}\right)$ (слика 3.12). Според тоа, за да ја определиме функцијата на распределба на случајната променлива $Y = \frac{X(d-X)}{2}$ ги разгледуваме следниве случаи:



Слика 3.12

1) За $y \le 0$ добиваме $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\varnothing) = 0$.

2) За $0 < y < \frac{d^2}{8}$ имаме:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(X \le x_1) + P(X \ge x_2) = \\ &= P(X \le x_1) + 1 - P(X < x_2) = F_X(x_1) + 1 - F_X(x_2) \\ &= \frac{d - \sqrt{d^2 - 8y}}{2d} + 1 - \frac{d + \sqrt{d^2 - 8y}}{2d} = 1 - \frac{\sqrt{d^2 - 8y}}{d}. \end{aligned}$$

3) За $y \ge \frac{d^2}{8}$ добиваме $F_Y(y) = 1$.

Заклучуваме дека

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 1-\dfrac{\sqrt{d^2-8y}}{d}, & 0<y<\dfrac{d^2}{8}.\\ 1, & y\ge\dfrac{d^2}{8}\end{cases}$$

За густината на случајната променлива Y се добива

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{4}{d\sqrt{d^2-8y}}, & y\in(0,d^2/8)\\ 0, & y\notin(0,d^2/8)\end{cases}.$$

47. На отсечката $OA\left[O(0,0);A(4,0)\right]$ случајно се избира една точка X. Низ таа точка се повлекува тетива на кружницата $x^2+y^2=4^2$ паралелна со y-оската. Должината на тетивата е случајна променлива Y. Да се определат функцијата и густината на распределба на случајната променлива Y.

Решение.

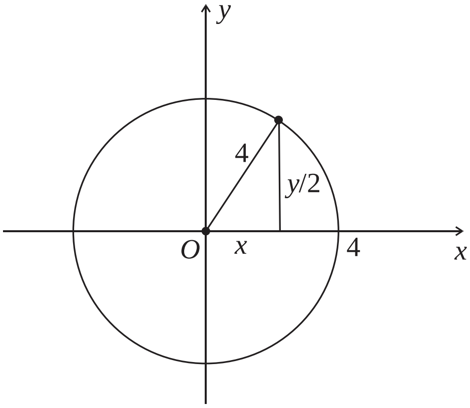
Случајната променлива X која ја претставува апцисата на точката X, има рамномерна распределба на интервалот $(0,4)$. Нејзината функција на распределба е

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x<4.\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$$

Од Питагорината теорема (слика 3.13) следува $\left(\dfrac{Y}{2}\right)^2=4^2-X^2$, од каде што

$$Y=2\sqrt{16-X^2}.$$

Од равенката $\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=4^2-x^2$ добиваме $x_{1/2}=\pm\sqrt{16-\dfrac{y^2}{4}}$. Бидејќи $0<x<4$, за y се добива дека $0<y<8$.



Слика 3.13

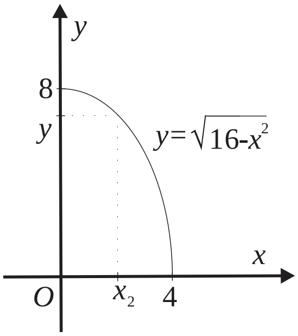
Тогаш, функцијата на распределба на случајната променлива Y е

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 1 - \frac{1}{8}\sqrt{64 - y^2}, & 0 < y < 8, \\ 1, & y \ge 8 \end{cases}$$

каде што $F_Y(y)$, во случај кога $0 < y < 8$ (слика 3.14), се добива на следниов начин:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(x_2 \le X \le 4) = P\left(\sqrt{16 - \frac{y^2}{4}} \le X \le 4\right) =$$

$$= F_X(4) - F_X\left(\sqrt{16 - \frac{y^2}{4}}\right) = 1 - \frac{\sqrt{16 - \frac{y^2}{4}}}{4} = 1 - \frac{1}{8}\sqrt{64 - y^2}.$$



Слика 3.14

Густината на распределбата е

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{8\sqrt{64-y^2}}, & y\in(0,8)\\ 0, & y\notin(0,8)\end{cases}.$$

48. Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $(-4,3)$, т.е. $X:\mathcal{U}(-4,3)$. Да се најдат функцијата и густината на распределба на случајната променлива

$$Y=\begin{cases}-2X-8, & X\le -3\\ X+1, & X>-3\end{cases}$$

и веројатноста $P(-1\le Y\le 3)$.

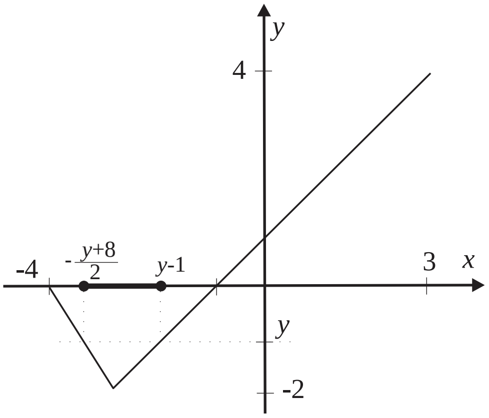
Решение.

Бидејќи $X:\mathcal{U}(-4,3)$, функцијата и густината на распределба се:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-4\\ \dfrac{x+4}{7}, & -4\le x<3,\\ 1, & x\ge 3\end{cases}\qquad f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{7}, & x\in(-4,3)\\ 0, & x\notin(-4,3)\end{cases}.$$

За да ја определиме функцијата на распределба на Y ги разгледуваме следните случаи:

1) Ако $y<-2$, тогаш $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\varnothing)=0$.

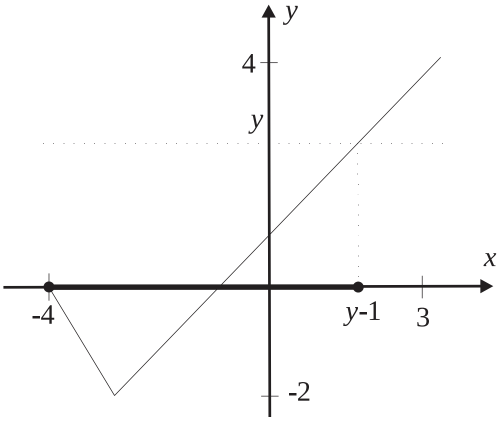


Слика 3.15

2) Според сликата 3.15, за $-2 \le y < 0$ добиваме:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(-\frac{y+8}{2} \le X \le y-1\right) = \int_{-\frac{y+8}{2}}^{y-1} f_X(x)dx = \int_{-\frac{y+8}{2}}^{y-1} \frac{1}{7}dx =$$

$$= \frac{1}{7}x\Big|_{-\frac{y+8}{2}}^{y-1} = \frac{1}{7}\left(y-1+\frac{y+8}{2}\right) = \frac{3}{14}y+\frac{3}{7}.$$



Слика 3.16

3) Во случај кога $0 \le y < 4$, од сликата 3.16 имаме:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-4 \le X \le y-1) = \int_{-4}^{y-1} f_X(x)dx =$$

$$= \int_{-4}^{y-1} \frac{1}{7}dx = \frac{1}{7}x\Big|_{-4}^{y-1} = \frac{1}{7}(y-1+4) = \frac{1}{7}y+\frac{3}{7}.$$

4) За $y \ge 4$, $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-4 \le X \le 3) = 1.$

Според тоа,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -2 \\ \frac{3}{14}y+\frac{3}{7}, & -2 \le y < 0 \\ \frac{1}{7}y+\frac{3}{7}, & 0 \le y < 4 \\ 1, & y \ge 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{14}, & y \in (-2,0) \\ \frac{1}{7}, & y \in (0,4) \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

Бараната веројатност е

$$P(-1 \le Y \le 3) = F_Y(3) - F_Y(-1) = \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{3}{7} - \left(\frac{3}{14} \cdot (-1) + \frac{3}{7} \right) = \frac{9}{14}.$$

49. Нека μ_X и μ_Y се математичките очекувања, а σ_X и σ_Y се стандардните девијации на случајните променливи X и Y, соодветно.

а) Покажи дека ако $Y = aX + b,\ a, b \in \mathbf{R},\ a \ne 0$, тогаш $\sigma_Y = |a|\sigma_X$.

б) Да се определат μ_Y и σ_Y на случајната променлива $Y = \dfrac{X - \mu_X}{\sigma_X}$.

Решение.

а) Дисперзијата на случајната променлива $Y = aX + b$ е

$$D(Y) = D(aX + b) = D(aX) = a^2 D(X),$$

од каде што следува $\sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{a^2 D(X)} = |a|\sqrt{D(X)} = |a|\sigma_X$.

б) Користејќи ги особините на математичкото очекување, добиваме:

$$\mu_Y = E(Y) = E\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right) = \frac{1}{\sigma_X} E(X) - E\left(\frac{\mu_X}{\sigma_X} \right) =$$

$$= \frac{\mu_X}{\sigma_X} - \frac{\mu_X}{\sigma_X} = 0.$$

Согласно резултатот во а) и од тоа што $\sigma_X > 0$ имаме:

$$\sigma_Y = |a|\sigma_X = \left| \frac{1}{\sigma_X} \right| \sigma_X = 1.$$

Дополнителни задачи

50. Законот на распределба на дискретната случајна променлива X е

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Да се определи функцијата на распределба на случајната променлива X и да се скицира нејзиниот график. Потоа, да се пресмета веројатноста $P(2<X<4)$.

$$[\,F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.2, & 1\le x<2\\ 0.8, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases},$$

$$P(2<X<4)=0.2.]$$

51. Да се одреди реалната константа a така што дадената функција да биде функција на распределба на дискретна случајна променлива. Потоа да се определат законот на распределба, математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива и да се пресметаат веројатностите $P(X\le 6)$ и $P(1/2<X\le 7)$.

а) $F(x)=\begin{cases}0, & x<5\\ a, & x\ge 5\end{cases}$; б) $F(x)=\begin{cases}0, & x<5\\ 1/3, & 5\le x<7\\ a, & x\ge 7\end{cases}$.

$$[\text{а) } a=1, X:\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}, E(X)=5, D(X)=0,$$

$$P(X\le 6)=1 \text{ и } P(1/2<X\le 7)=1,$$

$$\text{б) } a=1, X:\begin{pmatrix}5 & 7\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}, E(X)=19/3, D(X)=8/9,$$

$$P(X\le 6)=1/3 \text{ и } P(1/2<X\le 7)=1.]$$

52. Во една кутија се наоѓаат 2 бели, 1 црно и 1 жолто топче. Топчињата се извлекуваат едно по едно и не се враќаат во кутијата. Извлекувањето продолжува се додека не се извлечат двете бели топчиња. Нека X е случајната променлива која означува број на потребни извлекувања за да се извлечат двете бели топчиња. Да се определат законот и функцијата на распределба на случајната променлива X, а потоа и нејзиното математичко очекување и дисперзија.

$$[X:\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1/6 & 1/3 & 1/2\end{pmatrix},$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ 1/6, & 2\le x<3\\ 1/2, & 3\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}.]$$

53. Во една кутија се наоѓаат четири топчиња нумерирани со броевите 1, 2, 3 и 4. На случаен начин се извлекува по едно топче без враќање се додека не се извлече топче со непарен број. Да се определат законите на распределба на случајните променливи X : број на извлекувања и Y : збир на извлечените броеви.

$$[X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1/6\end{pmatrix},$$

$$Y:\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1/4 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/12\end{pmatrix}.]$$

54. Пикадо табла се состои од три области означени со 1, 2 и 3. Ако се погоди областа 1 се добиваат 10 поени, а ако се погоди областа 2 односно 3, се добиваат 5 односно 1 поен. Веројатноста да се погоди областа 1 е 0.5, а веројатноста да се погоди областа 2 е 0.3. Колкава е веројатноста да се погоди областа 3, ако се знае дека при секое фрлање се погодува таблата? Да се најде распределбата на случајната променлива X која го означува вкупниот број освоени поени при три фрлања.

[0.2,

$$X:\begin{pmatrix}3 & 7 & 11 & 12 & 15 & 16 & 20 & 21 & 25 & 30\\ 0{,}008 & 0{,}036 & 0{,}054 & 0{,}06 & 0{,}027 & 0{,}18 & 0{,}135 & 0{,}15 & 0{,}225 & 0{,}125\end{pmatrix}.]$$

55. Да се определи распределбата на случајната променлива X која претставува сума на цифрите на случајно избран двоцифрен број.

$$[X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\ 1/90 & 2/90 & 3/90 & 4/90 & 5/90 & 6/90 & 7/90 & 8/90 & 9/90 & 9/90 & 8/90 & 7/90\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18\\ 6/90 & 5/90 & 4/90 & 3/90 & 2/90 & 1/90\end{pmatrix}.]$$

56. Ако 2% од производите изработени во една фабрика се неисправни, да се определи веројатноста во случајно избран примерок од 100 производи да има три неисправни производи.

[0.182]

57. Колкава е веројатноста во три последователни фрлања на две различни коцки, барем во едно фрлање да се падне парен број на двете коцки?

[37/24.]

58. Ако при истовремено фрлање на шест исти коцки, единица се падне барем на пет коцки, се вели дека е добиен рачен јамб од единици.

а) Каква распределба има случајната променлива X : број на добиени рачни јамбови од единици при 1000 независни фрлања на шесте коцки?

б) Да се определи веројатноста при 1000 независни фрлања на шесте коцки, барем еднаш да се добие рачен јамб од единици.

[а) $X : \mathcal{B}\left(1000, \frac{1}{6^5}\right)$,

б) $P(X \geq 1) \approx 0.00013.$]

59. Колкава е веројатноста при десет фрлања на монета, глава да се појави не помалку од четири и не повеќе од шест пати?

[0.656.]

60. Со пушка се пука во одредена мета при што веројатноста за погодок при еден истрел изнесува 0.9. Под претпоставка дека сите истрели се независни, да се пресмета веројатноста дека за постигнување на погодок:

а) се потребни повеќе од два истрели;

б) се потребни помеѓу 4 и 6 истрели (вклучувајќи го и 6).

[а) 0.01, б) 0.000099.]

61. Возач забележува празно место за паркирање подолу на улицата. Има пет возила пред него, при што секое од нив може да го зафати паркинг местото со веројатност 0.2. Колкава е веројатноста дека возилото што се наоѓа веднаш пред возачот (петтото возило) ќе се паркира на слободното паркинг место?

[0.082.]

62. Познато е дека веројатноста за појава на поплава од голем размер во дадена година е 0.01. Под претпоставка дека појавувањата на поплавите се независни настани, да се определи средниот број на години помеѓу две поплави од голем размер.

[100 години.]

63. Средниот број на недостатоци во 50 метри оптички кабел е 1.2.

а) Да се пресмета веројатноста дека постојат точно три недостатоци во 150 метри кабел.

б) Да се пресмета веројатноста дека постојат барем два недостатоци во 100 метри кабел.

в) Која е веројатноста дека постои точно еден недостаток во првите 50 метри и точно еден недостаток во последните 50 метри од произволен кабел?

[а) 0.212, б) 0.692, в) 0.692.]

64. Дадена е густината на распределба на случајната променлива X . Да се определи нејзината функција на распределба и да се пресметаат нејзиното математичко очекување и дисперзија.

а) $f_X(x) = \begin{cases} 0.1, & 90 \le x < 100 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}$;

б) $f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}$;

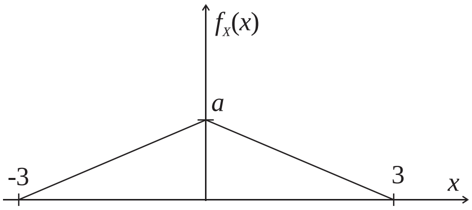
в) $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbf{R}$.

[а) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 90 \\ 0.1x - 9, & 90 \le x < 100 \\ 1, & x \ge 100 \end{cases}$,

б) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x - x^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$,

в) $F_X(x) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.]

65. Графикот на густината на распределба на случајната променлива X е даден на сликата 3.17.



Слика 3.17

а) Да се одреди реалниот параметар a.

б) Да се пресмета веројатноста $P(X \geq 2)$.

в) Да се пресмета веројатноста $P(X \geq 2 | X \geq 1)$.

[а) $a = 1/3$, б) $P(X \geq 2) = 1/18$,

в) $P(X \geq 2 | X \geq 1) = 1/4$.]

66. Дали за дадената функција може да се одреди реалната константа a така што таа да биде функција на распределба на непрекината случајна променлива? Во потврден случај, да се определат густината на распределба, математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива и да се пресметаат $P(X \leq 6)$ и $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 7\right)$.

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-ax}, & x > 0 \end{cases}$;   б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^a, & 0 \leq x < 1. \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

[а) $a > 0$, $f_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $E(X) = \frac{1}{a}$, $D(X) = \frac{1}{a^2}$,

$P(X \leq 6) = 1 - e^{-6a}$,

$P\left(\frac{1}{2} < X \leq 7\right) = e^{-\frac{a}{2}} - e^{-7a}$.

$$\text{б) } a>0, \quad f_X(x)=\begin{cases} ax^{a-1}, & 0\le x\le 1 \\ 0\ , & \text{инаку} \end{cases},$$

$$E(X)=\frac{a}{a+1},\ D(X)=\frac{a}{(a+1)^2(a+2)},$$

$$P(X\le 6)=1 \quad \text{и } P\left(\frac{1}{2}<X\le 7\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^a.]$$

67. Нека случајната променлива X е животниот век (изразен во часови) на една електронска компонента. Нејзината густина на распределба е

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{100}{x^2}, & x\ge 100 \\ 0, & x<100 \end{cases}.$$

Да се пресмета веројатноста дека компонентата ќе функционира најмногу 150 часа.

[$P(X\le 150)=1/3$.]

68. Густината на распределба на случајната променлива X е

$$f_X(x)=\begin{cases} 3x^2, & -1<x\le 0 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

Да се пресмета веројатноста $P(X>b\,|\,X<b/2)$ за $-1<b<0$.

$$[P(X>b\,|\,X<b/2)=-\frac{7b^3}{b^3+8}.]$$

69. Нека случајната променлива T го означува животниот век (изразен во месеци) на една сијалица. Нејзината густина е

$$f_T(t)=\begin{cases} \frac{1}{15}-\frac{t}{450}, & 0\le t\le 30 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

а) Да се нацрта графикот на функцијата $f_T(t)$.

б) Да се определи функцијата на распределба $F_T(t)$ и да се нацрта нејзиниот график.

в) Со користење на $f_T(t)$ да се пресмета веројатноста дека сијалицата ќе работи најмалку 15 месеци.

г) Веројатноста во в) да се пресмета со користење на $F_T(t)$.

д) Познато е дека сијалицата работи 15 месеци. Колкава е веројатноста дека ќе работи уште еден месец?

$$[\text{а)}\ F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{15}t - \frac{1}{900}t^2, & 0 \le t < 30, \\ 1, & t \ge 30 \end{cases}$$

в), г) $P(T \ge 15) = 0.25$,

д) $P(T \le 16 \mid T \ge 15) = 0.13.$]

70. Дадена е функцијата

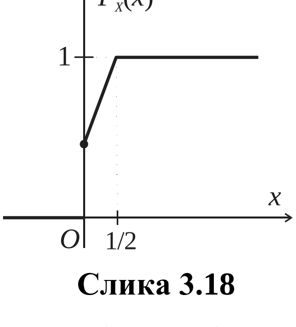
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x + \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1/2 . \\ 1, & x \ge 1/2 \end{cases}$$

а) Да се скицира графикот на дадената функција и да се покаже дека таа е функција на распределба на некоја случајна променлива X. Од кој тип е случајната променлива X?

б) Да се пресметаат следниве веројатности:

$$P(X \le 1/4),\quad P(X = 1/4),\quad P(X < 1/4),$$
$$P(0 < X \le 1/4),\quad P(0 \le X \le 1/4) \text{ и } P(X = 0).$$

[а) Случајна променлива X е од мешан тип,



Слика 3.18

б) $P(X \le 1/4) = 3/4$, $P(X = 1/4) = 0$,

$P(X<1/4)=3/4$, $P(0<X\le 1/4)=1/4$,

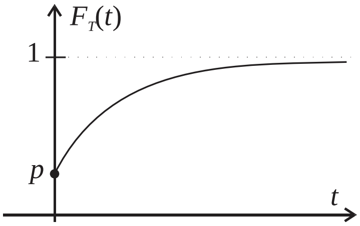
$P(0\le X\le 1/4)=1/4$ и $P(X=0)=1/2$.]

71. Времето на чекање на клиент на шалтер за издавање на авионски карти е случајна променлива T од мешан тип, со функција на распределба

$$F_T(t)=\begin{cases} p+(1-p)(1-e^{-\lambda t}), & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}.$$

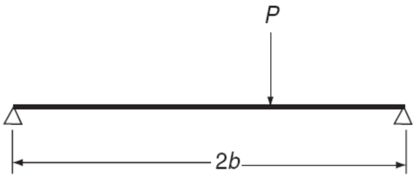
каде што $p,\lambda>0$. Да се скицира графикот на функцијата $F_T(t)$ и да се определи просечното време на чекање на клиент пред шалтерот за авионски карти.

$[E(T)=\dfrac{1-p}{\lambda}.]$



Слика 3.19

72. При конструирање на мост, инженерот треба да води сметка за силите кои дејствуваат врз крајните држачи, а случајно се предизвикани од концентриран товар P (слика 3.20). Нека должината на мостот е $2b$ $(b>0)$. Каква распределба има случајната променлива X која го претставува растојанието помеѓу товарот и поблискиот краен држач? Да се определат функцијата и густината на распределба на случајната променлива X и да се скицираат нивните графици.



Слика 3.20

$$[X:\mathcal{U}(0,b),\quad f_X(x)=\begin{cases} 1/b, & 0<x<b \\ 0, & \text{инаку} \end{cases},$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{b}, & 0<x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}.]$$

73. Работниот век на еден вид апарати е случајна променлива X со експоненцијална распределба со параметар $a=1/T$ ($T>0$). Да се определат и скицираат функцијата и густината на распределба на случајната променлива X. Да се определи веројатноста дека апарат од овој вид нема да откаже до моментот T. Колку е просечниот работен век на овој вид апарати?

$$[\ f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{T}e^{-\frac{x}{T}}, & x\ge 0\end{cases},$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\frac{x}{T}}, & x\ge 0\end{cases},$$

$$P(0\le X\le T)=1-\frac{1}{e}\approx 0.632\,.$$

Просечниот работен век е $E(X)=1/a=T$.]

74. Времето на чекање (изразено во минути) на клиент пред еден шалтер е случајна променлива X со густина на распределба

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2e^{-2x}, & x\ge 0\end{cases}.$$

Да се определат средното време на чекање на клиентот и дисперзијата на случајната променлива X.

[$E(X)=0.5$ мин., $D(X)=1/4$.]

75. Концентрацијата на загаденост причинета од еден извор на загадување може да се моделира според следнава густина на распределба

$$f_R(r)=\begin{cases}0, & r<0\\ ae^{-ax}, & r\ge 0\end{cases},$$

каде што $a > 0$, а r е растојанието од изворот на загадувањето. Да се одреди радиусот R на кружната област околу изворот во која е концентрирана 95% од загаденоста.

[$R = 3/a$.]

76. Ако случајната променлива X има експоненцијална распределба со параметар $a > 0$, да се покаже особината за отсуство на меморија, т.е. равенството

$$P(X > s+t \,|\, X > s) = P(X > t), \ \forall s, t \geq 0 .$$

Упатство. $P(X > s+t \mid X > s) = \dfrac{P(X > s+t, X > s)}{P(X > s)}$.

77. Нека A е произволен случаен настан и X е случајна променлива, дефинирани за ист експеримент. Покажи дека за условната функција на распределба $F_X(x \mid A)$ важи равенството

$$F_X(x \mid A) = \frac{P(A \mid X \leq x) F_X(x)}{P(A)}.$$

Упатство. $F_X(x \mid A) = \dfrac{P(X \leq x, A)}{P(A)}$ и $P(A \mid X \leq x) = \dfrac{P(X \leq x, A)}{P(X \leq x)}$.

78. Монета се фрла три пати. Со X се означува бројот на појавувања на глава. Нека Y е апсолутната вредност од бројот на паднати глави, намален за бројот на паднати писма. Да се најде $E(Y)$ на следниов начин:

а) претставувајќи го Y како функција од X,

б) прво да се определи законот на распределба на Y, а потоа директно да се пресмета $E(Y)$.

[$E(Y) = 1.5$.]

79. Нека $Y = aX + b, \ a, b \in \mathbf{R}, \ a \neq 0$. Да се изрази густината на распределба на случајната променлива Y преку густината на случајната променлива X. Користејќи го добиениот резултат да се покаже дека ако случајната променлива $X : \mathcal{N}(0,1)$, тогаш случајната променлива

$Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, $\mu \in \mathbf{R}$ и $\sigma > 0$ има нормална распределба со параметри $\mu \in \mathbf{R}$ и $\sigma > 0$.

$$[\ f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).]$$

80. Случајната променлива X има експоненцијална распределба со параметар $a = 1/2$. Да се определат математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива $Y = \dfrac{X}{2} - 1$.

$$[E(X) = 0 \text{ и } D(X) = 1.]$$

81. Дијаметарот на еден вид електронски кабли е случајна променлива X со густина на распределба

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

а) Колкава е средната вредност на дијаметарот?

б) Колкава е средната вредност на плоштината на пресекот на кабелот, $Y = \dfrac{\pi}{4} X^2$?

$$[\text{а) } E(X) = 1/2, \text{ б) } E(Y) = 3\pi/40.]$$

82. Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот (0,1), т.е. $X : \mathcal{U}(0,1)$. Да се определи функцијата на распределба на случајните променливи:

а) $Y = \operatorname{sgn} X$; б) $Y = \begin{cases} 0, & X \le \dfrac{1}{2} \\ X - \dfrac{1}{2}, & X > \dfrac{1}{2} \end{cases}$; в) $Y = \begin{cases} X + c, & X \ge 0 \\ X - c, & X < 0 \end{cases}$, $c - const.$

Од кој тип е случајната променлива Y?

[а) Y е од дискретен тип со закон на распределба $Y : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases},$$

б) $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y+1/2, & 0\le y<1/2\\ 1, & y\ge 1/2\end{cases}$, Y е од мешан тип,

в) $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<c\\ y-c, & c\le y<1+c\\ 1, & y\ge 1+c\end{cases}$, Y е од непрекинат тип.]

83. Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот (0,1), т.е. $X:\mathcal{U}(0,1)$. Да се најде функцијата на распределба на случајната променлива $Y=\left|X-\frac{1}{3}\right|$.

$$[\,F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 2y, & 0\le y<1/3\\ 1/3+y, & 1/3\le y<2/3\\ 1, & y\ge 2/3\end{cases}.]$$

84. Случајната променлива X има двострана експоненцијална распределба, односно густина на распределба

$$f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Да се скицира графикот на густината $f_X(x)$. Потоа, да се определи функцијата на распределба на случајната променлива

$$Y=\begin{cases}-X-2, & X<-1\\ X, & -1\le X<1.\\ 1, & X\ge 1\end{cases}$$

Од кој тип е случајната променлива Y?

$$[\,F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1\\ \frac{1}{2}\left(e^{y}-e^{-y-2}\right), & -1\le y<0\\ 1-\frac{1}{2}\left(e^{-y}+e^{-y-2}\right), & 0\le y<1\\ 1-\frac{1}{2}e^{-y-2}, & y\ge 1\end{cases},$$

Y е од мешан тип.]

85. Непрекинатата случајната променлива X има функција на распределба $F_X(x)$. Да се определи функцијата на распределба на случајната променлива $Y = F_X(x)$. Каква распределба има случајната променлива Y?

$$[\,F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \le y < 1, \\ 1, & y \ge 1 \end{cases} \quad Y : \mathcal{U}(0,1).\,]$$

86. Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $(0, 2\pi)$, т.е. $X : \mathcal{U}(0, 2\pi)$. Користејќи ја фундаменталната теорема да се најде густината на случајната променлива $Y = \sin X$.

$$[\; f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1,1) \\ 0, & y \notin (-1,1) \end{cases} .]$$

87. Покажи дека ако случајната променлива X има функција на распределба $F_X(x)$ и $Y = X^2$ тогаш важи

$$f_Y\left(y \middle| X \ge 0\right) = \begin{cases} \dfrac{f_X\left(\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}\left(1 - F_X(0)\right)}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases} .$$

4. СЛУЧАЈНИ ВЕКТОРИ

Нека Ω е множество од елементарни настани и нека се дадени две случајни променливи $X:\Omega\to\mathbf{R}$ и $Y:\Omega\to\mathbf{R}$. Подредениот пар (X,Y) се вика ***дводимензионален случаен вектор***.

Множеството вредности на случајниот вектор (X,Y) е

$$R_{XY}=\{(x,y):\omega\in\Omega,\ X(\omega)=x, Y(\omega)=y\}.$$

Заедничка (кумулативна) функција на распределба на веројатноста на случајниот вектор (X,Y) се дефинира со

$$F_{XY}(x,y)=P(X\le x, Y\le y),\ x,y\in\mathbf{R}.$$

Особини:

1) $F_{XY}(x,y)$ е монотоно неопаѓачка функција.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} F_{XY}(x,y)=F_{XY}(\infty,\infty)=1$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{XY}(x,y)=F_{XY}(-\infty,y)=0$,

$\lim\limits_{y\to-\infty} F_{XY}(x,y)=F_{XY}(x,-\infty)=0$.

4) $F_{XY}(x,y)$ е непрекината од десно.

Маргинални функции на распределба на веројатноста на случајните променливи X и Y се:

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F_{XY}(x,y)=F_{XY}(x,\infty),$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F_{XY}(x,y)=F_{XY}(\infty,y),$$

соодветно.

Случајни вектори од дискретен тип

Ако $R_X=\{x_1,x_2,...\}$ и $R_Y=\{y_1,y_2,...\}$ се множествата вредности на дискретните случајни променливи X и Y, соодветно, тогаш (X,Y) е ***дискретен случаен вектор*** и

$$R_{XY}=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),\ldots,(x_2,y_1),\ldots\}=\{(x_i,y_j):x_i\in R_X,y_j\in R_Y\}\subset\mathbf{R}^2$$

е неговото множество вредности.

Множеството вредности R_{XY} заедно со соодветните веројатности

$$p(x_i,y_j)=P(X=x_i,Y=y_j),\ i=1,2,\ldots \text{ и } j=1,2,\ldots$$

го претставува ***заедничкиот закон на распределба*** на веројатноста на дискретниот случаен вектор (X,Y). Тој се запишува или аналитички,

$$p_{XY}(x,y)=P(X=x,Y=y),\ (x,y)\in R_{XY},$$

или шематски на следниов начин:

$Y\setminus X$	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	$p_Y(y_j)$
y_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_2,y_1)$	$\ldots$	$p(x_i,y_1)$	$\ldots$	$p_Y(y_1)$
y_2	$p(x_1,y_2)$	$p(x_2,y_2)$	$\ldots$	$p(x_i,y_2)$	$\ldots$	$p_Y(y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_j	$p(x_1,y_j)$	$p(x_2,y_j)$	$\ldots$	$p(x_i,y_j)$		$p_Y(y_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_X(x_i)$	$p_X(x_1)$	$p_X(x_2)$	$\ldots$	$p_X(x_i)$	$\ldots$	1

Маргинални закони на распределба на веројатноста на случајните променливи X и Y се:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_X(x_1) & p_X(x_2) & \cdots & p_X(x_i) & \cdots \end{pmatrix},$$

$$Y:\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_j & \cdots \\ p_Y(y_1) & p_Y(y_2) & \cdots & p_Y(y_j) & \cdots \end{pmatrix},$$

соодветно.

Важи равенството:

$$\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)=\sum_i p_X(x_i)=\sum_j p_Y(y_j)=1.$$

Веројатностите $p_X(x_i)=\sum_j p(x_i,y_j)$ и $p_Y(y_j)=\sum_i p(x_i,y_j)$ се нарекуват ***маргинални веројатности***.

Заедничката функција на распределба на дводимензионалниот дискретен случаен вектор се добива од законот на распределба на следниот начин:

$$F_{XY}(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{i:x_i\le x}\sum_{j:y_j\le y}p(x_i,y_j).$$

Случајни вектори од непрекинат тип

Нека (X,Y) е случаен вектор со заедничка функција на распределба $F_{XY}(x,y)$. Ако $F_{XY}(x,y)$ е непрекината функција, тогаш велиме дека (X,Y) е **случаен вектор од *непрекинат тип***.

Функцијата

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y},$$

за секое $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ за кое постои $\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y}$, се вика ***заедничка густина на распределба*** на веројатноста на случајните променливи X и Y. Во точките $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ во кои не постои $\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y}$, оваа функција можеме да ја додефинираме со $f_{XY}(x,y)=a$, каде што $a\ge 0$ е произволен реален број.

Особини:

1) $f_{XY}(x,y)\ge 0$, за секој $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)dxdy=1.$

3) $P((X,Y)\in D)=\iint\limits_{D}f_{XY}(x,y)dxdy$, $D\subseteq\mathbf{R}^2$.

Врската помеѓу заедничката функција и заедничката густина на распределба на случајниот вектор (X,Y) е дадена со

$$F_{XY}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f_{XY}(t,u)dtdu.$$

Функциите $f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$ и $f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$ се ***маргинални густини на распределба*** на веројатноста на случајните променливи X и Y.

Независност на случајни променливи

X и Y се ***независни случајни променливи*** ако и само ако

$$F_{XY}(x,y)=F_X(x)F_Y(y) \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

Дискретните случајни променливи X и Y се независни ако и само ако

$$p(x_i,y_j)=p(x_i)p(y_j) \text{ за секои } i,\ j=1,2,\dots.$$

Непрекинатите случајни променливи X и Y се независни ако и само ако

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

Условни распределби на случајни вектори

Дискретен случај

Нека (X,Y) е дискретен случаен вектор со множество вредности

$$R_{XY}=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),\dots,(x_2,y_1),\dots\}\subset\mathbf{R}^2$$

и веројатности $p_{XY}(x_i,y_j)=P(X=x_i,Y=y_j)$, за $i,j=1,2,\dots$.

Условна веројатност на случајната променлива Y ако $X=x_i$, $i=1,2,\dots$, се дефинира со

$$p_Y(y_j|x_i)=P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(Y=y_j,X=x_i)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{XY}(x_i,y_j)}{p_X(x_i)}$$

за секое $j=1,2,\dots$, и аналогно условна веројатност на случајната променлива X, ако $Y=y_j$, $j=1,2,\dots$, се дефинира со

$$p_X(x_i|y_j)=\frac{p_{XY}(x_i,y_j)}{p_Y(y_j)}$$

за секое $i=1,2,\dots$.

За секое фиксирано x_i, $i=1,2,\ldots$, имаме ***условен закон на распределба*** на веројатноста:

$$Y\big|X=x_i:\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ p_Y\left(y_1\big|x_i\right) & p_Y\left(y_2\big|x_i\right) & \cdots \end{pmatrix},$$

и за секое фиксирано y_j, $j=1,2,\ldots$, добиваме условен закон на распределба

$$X\big|Y=y_j:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_X\left(x_1\big|y_j\right) & p_X\left(x_2\big|y_j\right) & \cdots \end{pmatrix}.$$

Нека (X,Y) е дискретен случаен вектор. ***Условно математичко очекување*** на случајната променлива Y при услов $X=x_i$, $i=1,2,\ldots$, се дефинира со

$$E\left(Y\big|X=x_i\right)=\sum_j y_j p_Y\left(y_j\big|x_i\right).$$

Аналогно се дефинира и условното математичко очекување $E\left(X\big|Y=y_j\right)$, $j=1,2,\ldots$.

Непрекинат случај

Нека (X,Y) е непрекинат случаен вектор со заедничка густина на распределба $f_{XY}(x,y)$. Функцијата

$$f_Y(y\,|\,x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)},\quad f_X(x)>0,$$

се нарекува ***условна густина на распределба*** на случајната променлива Y, ако $X=x$, $x\in\mathbf{R}$.

Аналогно,

$$f_X(x\,|\,y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)},\quad f_Y(y)>0.$$

Нека (X,Y) е непрекинат случаен вектор. ***Условно математичко очекување*** на случајната променлива Y при услов $X=x$, се дефинира со

$$E\left(Y\big|X=x\right)=\int_{-\infty}^{\infty} y\; f_Y\left(y\big|x\right)dy.$$

Да забележиме дека условното математичко очекување $E(Y\,|\,X=x)$ е функција од x.

Аналогно се дефинира и условното математичко очекување

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x|y)dx.$$

Коваријанса и коефициент на корелација

Нека (X,Y) е случаен вектор. ***Заеднички момент*** од ред (k,n), $k,n\in\mathbf{N}$, на случајните променливи X и Y, се дефинира со

$$m_{kn}=E(X^kY^n)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j x_i^k y_j^n p_{XY}(x_i,y_j), & \text{ако } (X,Y) \text{ е дискретен вектор}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^n f_{XY}(x,y)dxdy, & \text{ако } (X,Y) \text{ е непрекинат вектор}\end{cases}.$$

Ако X и Y се независни, тогаш

$$E(XY)=E(X)E(Y) \text{ и } D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Коваријанса на X и Y, со ознака $\operatorname{cov}(X,Y)$, се дефинира со

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)))$$

или

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

Ако $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ тогаш велиме дека случајните променливи X и Y се ***некорелирани***, и притоа важи $E(XY)=E(X)E(Y)$.

Коефициент на корелација на случајните променливи X и Y кои имаат ненулти стандарни девијации, со ознака $\rho(X,Y)$ или ρ_{XY}, се дефинира со

$$\rho(X,Y)=\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Особини:

1) Ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш $\rho_{XY}=0$.

2) $|\rho_{XY}|\le 1$.

3) $|\rho_{XY}|=1$ ако и само ако $Y=aX+b$, за $a,b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$.

Некои видови распределби на случајни вектори

Дводимензионална рамномерна распределба

Случајниот вектор (X,Y) има дводимензионална рамномерна распределба на областа $D \subseteq \mathbf{R}^2$ ако неговата заедничка густина на распределба е

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{P_D}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases},$$

каде што P_D е плоштината на областа D.

Дводимензионална нормална распределба $\mathcal{N}(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$

Случајните променливи X и Y се заеднички нормално распределени со параметри μ_X, μ_Y, σ_X, σ_Y и ρ ($\mu_X, \mu_Y \in \mathbf{R}, \sigma_X \geq 0, \sigma_Y \geq 0$, $|\rho| \leq 1$) ако нивната заедничка густина на распределба е

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\left(1-\rho^2\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}.$$

Трансформација на случаен вектор

Една функција од две случајни променливи

Нека X и Y се случајни променливи и g е реална функција од две реални променливи. Со $Z = g(X,Y)$ се дефинира нова случајна променлива.

Ако X и Y се непрекинати случајни променливи со заедничка густина на распределба $f_{XY}(x,y)$, тогаш

$$F_Z(z) = \iint\limits_{D_Z} f_{XY}(x,y)dxdy,$$

каде што $D_Z = \{(x,y) \in R_{XY} : g(x,y) \leq z\}$.

Две функции од две случајни променливи

Нека X и Y се случајни променливи и g и h се реални функции од две реални променливи. Со $Z = g(X,Y)$ и $W = h(X,Y)$ се дефинираат нови случајни променливи Z и W.

Ако X и Y се непрекинати случајни променливи со заедничка функција на распределба $f_{XY}(x,y)$, тогаш

$$F_{ZW}(z,w) = \iint_{D_{ZW}} f_{XY}(x,y)dxdy,$$

каде што $D_{ZW} = \{(x,y) \in R_{XY} : g(x,y) \le z, h(x,y) \le w\}$.

Ако функциите g и h и нивните инверзни функции имаат непрекинати парцијални изводи, тогаш заедничката густина на распределба на случајните променливи Z и W е дадена со

$$f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(x,y) \cdot \left|J(x,y)\right|^{-1},$$

каде што

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} \ne 0$$

е Јакобијанот на трансформацијата $z = g(x,y)$, $w = h(x,y)$.

4.1. Случајни вектори од дискретен тип

1. Нека X и Y се дискретни случајни променливи чии заеднички закон на распределба е

$Y \setminus X$	-1	0	1
-1	a	b	a
0	b	0	b
1	a	b	a

каде што $a + b = \frac{1}{4}$. Да се покаже дека $\rho_{XY} = 0$, но X и Y не се независни.

Решение.

Маргиналните закони на распределба на случајните променливи X и Y се:

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2a+b & 2b & 2a+b \end{pmatrix}, \quad Y:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2a+b & 2b & 2a+b \end{pmatrix}.$$

Бидејќи $E(X)=E(Y)=0$ и $E(XY)=0$, за коефициентот на корелација добиваме:

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0.$$

Од заедничкиот закон на распределба и маргиналните закони на распределба можеме да заклучиме дека не е исполнет условот за независност, т.е. не важи равенството

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j), \forall i,j.$$

На пример,

$$P(X=-1,Y=-1)=a\neq(2a+b)^2=P(X=-1)P(Y=-1),$$

од каде следува дека X и Y се зависни случајни променливи.

2. Една монета се фрла три пати. Нека X е случајната променлива: број на паднати писма, а Y е случајната променлива: број на промени (писмо се паднало после глава или обратно). Да се определат заедничкиот закон на распределба и маргиналните закони на распределба на случајниот вектор (X,Y).

Решение.

Просторот од елементарни настани при три фрлања на монета е

$$\Omega=\{\text{ППП},\text{ППГ},\text{ПГП},\text{ГПП},\text{ГГП},\text{ГПГ},\text{ПГГ},\text{ГГГ}\}.$$

Тогаш, $R_X=\{0,1,2,3\}$, $R_Y=\{0,1,2\}$ и

$$P(X=0,Y=0)=P(\text{ГГГ})=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},$$

$$P(X=0,Y=1)=P(\varnothing)=0,$$

$$P(X=1,Y=1)=P(\text{ГГП}+\text{ПГГ})=2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}.$$

Слично се добиваат и останатите веројатности, па заедничкиот закон на распределба е

$Y \setminus X$	0	1	2	3	$p_Y(y_j)$
0	1/8	0	0	1/8	1/4
1	0	1/4	1/4	0	1/2
2	0	1/8	1/8	0	1/4
$p_X(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

За маргиналните закони на распределба имаме:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

3. Да се пресмета коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y ако X ги прима вредностите: $-2,\ -1,\ 1,\ 2$, со веројатност $1/4$, а $Y = X^2$.

Решение.

Јасно е дека $R_Y = \{1, 4\}$ и притоа

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P(X^2=1) = P\big((X=-1)+(X=1)\big) = \\ &= P(X=-1)+P(X=1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ P(Y=4) &= P(X^2=4) = P\big((X=-2)+(X=2)\big) = \\ &= P(X=-2)+P(X=2) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

За заедничките веројатности добиваме:

$$P(X=-2, Y=1) = P(\varnothing) = 0, \quad P(X=-2, Y=4) = P(X=-2) = \frac{1}{4}.$$

Останатите веројатности се добиваат на сличен начин. Заедничкиот закон на распределба на векторот (X,Y) е

$Y \setminus X$	-2	-1	1	2	$p_Y(y_j)$
1	0	1/4	1/4	0	1/2
4	1/4	0	0	1/4	1/2
$p_X(x_i)$	1/4	1/4	1/4	1/4	1

За математичките очекувања на X и Y имаме:

$$E(X)=\frac{1}{4}(-2-1+1+2)=0,\quad E(Y)=\frac{1}{2}(1+4)=2.5,$$

$$E(XY)=\frac{1}{4}(-1\cdot 1+1\cdot 1-2\cdot 4+2\cdot 4)=0.$$

Бидејќи $E(XY)-E(X)E(Y)=0$, следува дека $\rho_{XY}=0$, т.е. X и Y се некорелирани случајни променливи.

Ова е едноставен пример кој покажува дека иако X и Y се некорелирани случајни променливи, тие се зависни една од друга на нелинеарен начин.

4. При една игра на среќа, во кутијата останале уште пет ливчиња. Од нив две се без добивка, а три се со добивка од по 100 денари. На случаен начин се влечат едно по едно ливче без да се враќаат во кутијата, се додека не се извлече ливче без добивка.

а) Да се определи заедничкиот закон на распределба на случајниот вектор (X,Y), каде што X е бројот на извлечени ливчиња, а Y е износот на добивката. Потоа, да се определат маргиналните закони на распределба на случајните променливи X и Y и условниот закон на распределба на X ако $Y=200$.

б) Колкав е коефициентот на корелација ρ_{XY}? Ако случајните променливи X и Y се зависни, да се изрази Y како функција од X.

Решение.

а) Множествата вредности на X и Y се:

$$R_X=\{1,2,3,4\} \text{ и } R_Y=\{0,100,200,300\},$$

соодветно.

Притоа, веројатноста во првото извлекување да биде извлечено ливче без добивка е $P(X=1,Y=0)=\dfrac{2}{5}$.

Веројатноста во првото извлекување да биде извлечено ливче со 100 денари, а во второто ливче без добивка е

$$P(X=2,Y=100)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}.$$

Слично се добиваат и веројатностите:

$$P(X=3,Y=200)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{5},\quad P(X=4,Y=300)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{10},$$

а останатите заеднички веројатности се 0.

За заедничкиот закон на распределба на случајниот вектор (X,Y) добиваме:

$Y \setminus X$	1	2	3	4	$p_Y(y_j)$
0	2/5	0	0	0	2/5
100	0	3/10	0	0	3/10
200	0	0	1/5	0	3/10
300	0	0	0	1/10	1/10
$p_X(x_i)$	2/5	3/10	3/10	1/10	1

За маргиналните закони имаме:

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad Y:\begin{pmatrix} 0 & 100 & 200 & 300 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

За да го определиме условниот закон на распределба на случајната променлива $X|Y=200$, прво ќе ги пресметаме условните веројатности.

$$P(X=1|Y=200)=\frac{P(X=1,Y=200)}{P(Y=200)}=\frac{0}{0.2}=0,$$

$$P(X=2|Y=200)=\frac{P(X=2,Y=200)}{P(Y=200)}=\frac{0}{0.2}=0,$$

$$P(X=3|Y=200)=\frac{P(X=3,Y=200)}{P(Y=200)}=\frac{0.2}{0.2}=1,$$

$$P(X=4|Y=200)=\frac{P(X=4,Y=200)}{P(Y=200)}=\frac{0}{0.2}=0.$$

Следува дека бараниот условен закон на распределба е

$$X|Y=200:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Од маргиналните закони на распределба добиваме:

$$E(X)=2,\ E(Y)=100,$$

$$E\left(X^2\right)=5,\ E\left(Y^2\right)=20000,$$

$$D(X)=1,\;\; D(Y)=10000,$$

а од заедничкиот закон имаме $E(XY)=300$. Тогаш

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{300-200}{\sqrt{10000}}=1.$$

Бидејќи $\rho_{XY}\neq 0$ заклучуваме дека случајните променливи X и Y се зависни. Од тоа што $\rho_{XY}=1$ следува дека X и Y се линеарно зависни, односно постојат реални броеви a ($a>0$) и b, така што $Y=aX+b$. За да ги определиме a и b, доволно е да замениме две соодветни вредности за X и Y,

$$\begin{cases}0=a\cdot 1+b\\ 100=a\cdot 2+b\end{cases}.$$

Решение на овој систем е $a=100$ и $b=-100$, па $Y=100\,X-100$.

5. На шаховска табла 8×8 на случаен начин се избира едно поле. Нека X е случајната променлива: број на соседни бели полиња на избраното поле, а Y е случајната променлива: број на соседни црни полиња на избраното поле (за соседни полиња се сметаат полињата кои имаат барем една заедничка точка).

а) Да се најдат заедничката распределба на случајниот вектор (X,Y), маргиналните закони на распределба на X и Y и условниот закон на распределба $X\,|\,Y=2$.

б) Да се пресмета условното очекување $E(X|\,Y=2)$.

в) Да се пресметаат веројатностите

$$P(X\le 2, Y<2)\ \text{и}\ P(X\le 2\,|\,Y<2).$$

г) Колкава е веројатноста збирот на соседни бели и црни полиња на избраното поле да биде најмногу 2?

д) Дали X и Y се независни случајни променливи?

ѓ) Колкав е коефициентот на корелација ρ_{XY}?

Решение.

а) За заедничката распределбата на случајниот вектор (X,Y) добиваме:

$Y \setminus X$	1	2	3	4	$p_Y(y_j)$
1	0	2/64	0	0	2/64
2	2/64	0	12/64	0	14/64
3	0	12/64	0	0	12/64
4	0	0	0	36/64	36/64
$p_X(x_i)$	2/64	14/64	12/64	36/64	1

Маргиналните закони на распределба се:

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2/64 & 14/64 & 12/64 & 36/64 \end{pmatrix}$$

и

$$Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2/64 & 14/64 & 12/64 & 36/64 \end{pmatrix}.$$

За условниот закон на распределба имаме:

$$X|Y=2:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/7 & 0 & 6/7 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) $E(X|\,Y=2)=1\cdot\frac{1}{7}+2\cdot 0+3\cdot\frac{6}{7}+4\cdot 0=\frac{19}{7}$.

в) $P(X\le 2, Y<2)=P(X=1,Y=1)=0.$

$$P(X\le 2|Y\le 2)=\frac{P(X\le 2, Y\le 2)}{P(Y\le 2)}=$$

$$=\frac{P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)}{P(Y=1)+P(Y=2)}=$$

$$=\frac{4/64}{16/64}=\frac{1}{4}.$$

г) $P(X+Y\le 2)=P(X=1,Y=1)=0$.

д) X и Y се зависни случајни променливи бидејќи

$$P(X=2,Y=3)=\frac{12}{64}\ne\frac{14}{64}\cdot\frac{12}{64}=P(X=2)P(Y=3).$$

ѓ) Од тоа што $E(X)=E(Y)=\frac{210}{64}$ и $E(X^2)=E(Y^2)=\frac{742}{64}$ добиваме:

$$D(Y)=D(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{3388}{4096}.$$

$E(XY)=\dfrac{728}{64}$, па за коефициентот на корелација имаме:

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}\approx 0.736.$$

Зависноста на случајните променливи може да се утврди и од тоа што $\rho_{XY}\neq 0$.

6. Во секоја од четири кутии, означени со 1, 2, 3 и 4, има по 5 бели и 4 црни топчиња. Од првата кутија, односно од кутијата означена со 1, на случаен начин се извлекува едно топче. Ако извлеченото топче е бело, експериментот е завршен, а ако е црно се извлекува топче од втората кутија. Извлекувањето продолжува на исти начин се до четвртата кутија. Со извлекување на топче од четвртата кутија експериментот завршува независно од исходот. Нека случајната променлива X е бројот на кутии од кои е извршено извлекување, а случајната променлива Y е бројот на извлечени црни топчиња.
Да се определат заедничкиот закон на распределба на случајниот вектор (X,Y), маргиналните закони на распределба на случајните променливи X и Y и условниот закон на распределба $Y\mid X=2$.

Решение.

Множествата вредности на случајните променливи X и Y се:

$$R_X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}\ \text{и}\ R_Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

Веројатноста од првата кутија да се извлече бело топче, со што експериметот ќе заврши, е $\dfrac{5}{9}$, т.е.

$$P(X=1,Y=0)=\frac{5}{9}.$$

Веројатноста од првата кутија да се извлече црно топче, а од втората кутија бело топче, со што експериметот ќе заврши, е $\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{5}{9}$, т.е.

$$P(X=2,Y=1)=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{20}{81}.$$

Аналогно се добиваат и следниве заеднички веројатности:

$$P(X=2,Y=1)=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{20}{81},\qquad P(X=3,Y=2)=\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\frac{5}{9}=\frac{80}{729},$$

$$P(X=4,Y=3)=\left(\frac{4}{9}\right)^3\cdot\frac{5}{9}=\frac{320}{6561},\qquad P(X=4,Y=4)=\left(\frac{4}{9}\right)^4=\frac{256}{6561}.$$

Останатите заеднички веројатности се нула, па заедничкиот закон на распределба е:

$Y \setminus X$	1	2	3	4	$p_Y(y_j)$
0	5/9	0	0	0	5/9
1	0	20/81	0	0	20/81
2	0	0	80/729	0	80/729
3	0	0	0	320/6561	320/6561
4	0	0	0	256/6561	256/6561
$p_X(x_i)$	5/9	20/81	80/729	576/6561	1

`

Маргиналните закони на распределба се:

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{5}{9} & \frac{20}{81} & \frac{80}{729} & \frac{576}{6561}\end{pmatrix}\ \text{и}\ Y:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{5}{9} & \frac{20}{81} & \frac{80}{729} & \frac{320}{6561} & \frac{256}{6561}\end{pmatrix}.$$

За условните веројатности добиваме:

$$P(Y=0\,|\,X=2)=\frac{P(X=2,\,Y=0)}{P(X=2)}=\frac{0}{20/81}=0,$$

$$P(Y=1\,|\,X=2)=\frac{P(X=2,\,Y=1)}{P(X=2)}=\frac{20/81}{20/81}=1,$$

$$P(Y=2\,|\,X=2)=\frac{P(X=2,\,Y=2)}{P(X=2)}=\frac{0}{20/81}=0,$$

$$P(Y=3\,|\,X=2)=\frac{P(X=2,\,Y=3)}{P(X=2)}=\frac{0}{20/81}=0,$$

$$P(Y=4\,|\,X=2)=\frac{P(X=2,\,Y=4)}{P(X=2)}=\frac{0}{20/81}=0.$$

Според тоа, условниот закон на распределба $Y\,|\,X=2$ е

$$Y\,|\,X=2:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

7. Честичка се движи во една рамнина, со чекори од една единица, стартувајќи од координатниот почеток. Честичката се движи само во позитивната насока на координатните оски и тоа, со веројатност p по *x*-оската и со веројатност q по *y*-оската $(p+q=1)$. Ако се претпостави дека сите чекори се независни меѓу себе, да се најде законот на распределба на позицијата (X,Y) на оваа честичка по изведување на пет чекори. Потоа да се определат маргиналните закони на распределба на X и Y и да се пресмета $P(X>Y)$.

Решение.

Треба да го најдеме законот на распределба на случајниот вектор (X,Y), каде што случајната променлива X ја опишува *x* координатата, а Y ја опишува *y* координатата на позицијата на честичката по изведените пет чекори. Притоа, $R_X = R_Y = \{0,1,2,3,4,5\}$.

Сите заеднички веројатности на случајниот вектор (X,Y) се нула, освен веројатностите $P(X=i, Y=j)$ за кои важи условот $i+j=5$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Случајните променливи X и Y се независни, па веројатноста честичката да се најде на позицијата $(5,0)$ по петте изведени чекори е производ од веројатностите за изминување на пет последователни чекори во позитивната насока на *x*-оската. Според тоа,

$$P(X=5, Y=0) = p^5.$$

Постојат пет различни начини да се дојде до позицијата $(4,1)$ преку пет чекори: 4 чекори во насока на *x*-оската и 1 чекор по *y* -оската; 3 по *x*-оската, 1 по *y*-оската и 1 по *x*-оската; итн. Секој од нив има веројатност p^4q. Според тоа, $P(X=4, Y=1) = 5p^4q$. На сличен начин се определуваат и останатите заеднички веројатности, па заедничкиот зконот на распределба е

$Y \setminus X$	0	1	2	3	4	5	$p_Y(y_j)$
0	0	0	0	0	0	p^5	p^5
1	0	0	0	0	$5p^4q$	0	$5p^4q$
2	0	0	0	$10p^3q^2$	0	0	$10p^3q^2$
3	0	0	$10p^2q^3$	0	0	0	$10p^2q^3$
4	0	$5pq^4$	0	0	0	0	$5pq^4$
5	q^5	0	0	0	0	0	q^5
$p_X(x_i)$	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5	1

Лесно се покажува дека сумата на сите заеднички веројатности е 1, односно

$$p^5+5p^4q+10p^3q^2+10p^2q^3+5pq^4+q^5=(p+q)^5=1^5=1.$$

За маргиналните закони на распределба добиваме:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ q^5 & 5p^4q & 10p^2q^3 & 10p^3q^2 & 5pq^4 & p^5 \end{pmatrix},$$

$$Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p^5 & 5pq^4 & 10p^3q^2 & 10p^2q^3 & 5p^4q & q^5 \end{pmatrix}.$$

Бараната веројатност е

$$P(X>Y)=P(X=5,Y=0)+P(X=4,Y=1)+P(X=3,Y=2)=$$
$$=p^5+5p^4q+10p^3q^2.$$

8. Коцка за играње се фрла се додека не падне број помал од 5. Нека случајната променлива X е бројот на изведени фрлања, а Y е бројот добиен во последното фрлање.

а) Да се определат заедничкиот закон на распределба на случајниот вектор (X,Y), маргиналните закони на распределба на случајните променливи X и Y и условниот закон на распределба $Y\,|\,X=2$.

б) Дали X и Y се независни случајни променливи? Колкав е коефициентот на корелација ρ_{XY}?

в) Колкава е веројатноста бројот на изведени фрлања да е помал од 2, ако бројот добиен во последното фрлање е помал од 3?

Решение.

а) Експериментот се состои во фрлање на коцка за играње се додека не падне број помал од 5, односно се додека не падне 1, 2, 3 или 4. Јасно е дека

$$R_X=\{1,2,\ldots,k,\ldots\},\quad R_Y=\{1,2,3,4\}.$$

Веројатноста уште во првото фрлање да падне 1 со што експериментот завршува е 1/6, т.е. $P(X=1,Y=1)=1/6$.

Аналогно,

$$P(X=1,Y=2)=P(X=1,Y=3)=P(X=1,Y=4)=\frac{1}{6}.$$

Настанот $(X=2)$ значи дека во првото фрлање паднала 5 или 6, а во второто фрлање 1, 2, 3 или 4. Притоа, веројатноста во првото фрлање да падне 5 или 6, а во второто фрлање 1 е $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}$, т.е.

$$P(X=2,Y=1)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}.$$

Аналогно,

$$P(X=2,Y=2)=P(X=2,Y=3)=P(X=2,Y=4)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}.$$

Слично, ако се изведени k фрлања, $k\in\{1,2,3,\ldots\}$, тогаш во првите $k-1$ фрлања паднала 5 или 6, а во k –тото фрлање 1, 2, 3 или 4,

$$P(X=k,Y=1)=P(X=k,Y=2)=P(X=k,Y=3)=$$
$$=P(X=k,Y=4)=\left(\frac{2}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}.$$

Според тоа, заедничкиот закон на распределба е

$Y\setminus X$	1	2	3	4	$\ldots$	k	$\ldots$	$p_Y(y_j)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{6}$	...	$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$	...	$1/4$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{6}$	...	$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$	...	$1/4$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{6}$	...	$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$	...	$1/4$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{6}$	...	$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$	...	$1/4$
$p_X(x_i)$	$\frac{4}{6}$	$4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$	$4\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$	$4\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{6}$	...	$4\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$	...	1

Сумата на елементите од секоја редица е иста, односно за секое $j\in\{1,2,3,4\}$ важи

$$p_Y(y_j)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}+\cdots\right)=\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}.$$

Според тоа, маргиналните закони на распределба на случајните променливи X и Y се:

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & k & \cdots \\ 4\cdot\frac{1}{6} & 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} & 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\frac{1}{6} & 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot\frac{1}{6} & \cdots & 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6} & \cdots \end{pmatrix},$$

$$Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

За условните веројатности добиваме:

$$P(Y=1|X=2)=\frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=2)}=\frac{1/3\cdot 1/6}{4\cdot 1/3\cdot 1/6}=1/4,$$

$$P(Y=2|X=2)=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(X=2)}=\frac{1/3\cdot 1/6}{4\cdot 1/3\cdot 1/6}=1/4,$$

$$P(Y=3|X=2)=\frac{P(X=2,Y=3)}{P(X=2)}=\frac{1/3\cdot 1/6}{4\cdot 1/3\cdot 1/6}=1/4,$$

$$P(Y=4|X=2)=\frac{P(X=2,Y=4)}{P(X=2)}=\frac{1/3\cdot 1/6}{4\cdot 1/3\cdot 1/6}=1/4.$$

Бараниот условен закон на распределба е

$$Y|X=2:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

б) Бидејќи $\forall i\in\{1,2,3,...\}, \forall j\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ важи

$$P(X=i,Y=j)=\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{6}=4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=$$
$$=P(X=i)\cdot P(Y=j),$$

заклучуваме дека случајните променливи X и Y се независни, од каде следува дека $\rho_{XY}=0$.

в) Бараната веројатност е

$$P(X<2\,|\,Y<3)=\frac{P(X<2,Y<3)}{P(Y<3)}=\frac{P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)}{P(Y=1)+P(Y=2)}=$$

$$=\frac{1/6+1/6}{1/4+1/4}=\frac{2/6}{1/2}=\frac{2}{3}.$$

9. Нека законот на распределба на дискретниот случаен вектор (X,Y) е даден со $P(X=i,Y=j)=\frac{1}{e^2}\frac{1}{i!\,j!}$, $i,j\in\{0,1,2,\ldots\}$. Да се покаже дека случајните променливи X и Y се независни.

Решение.

Од $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$ следува дека $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}=e$, па за маргиналните веројатности се добива:

$$P(X=i)=\sum_{j=0}^{\infty}P(X=i,Y=j)=\frac{1}{e^2}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}=\frac{1}{e^2}\frac{1}{i!}\cdot e=\frac{1}{e\cdot i!},\quad i\in\{0,1,2,\ldots\},$$

$$P(Y=j)=\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i,Y=j)=\frac{1}{e^2}\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}=\frac{1}{e^2}\frac{1}{j!}\cdot e=\frac{1}{e\cdot j!},\quad j\in\{0,1,2,\ldots\}.$$

Според тоа, за секои $i,j\in\{0,1,2,\ldots\}$ важи

$$P(X=i)P(Y=j)=\frac{1}{e\cdot i!}\cdot\frac{1}{e\cdot j!}=\frac{1}{e^2}\frac{1}{i!\,j!}=P(X=i,Y=j),$$

од каде заклучуваме дека случајните променливи X и Y се независни.

10. Нека веројатноста еден инсект да снесе точно r јајца е $\lambda^r e^{-\lambda}/r!$, $r=0,1,\ldots$, а веројатноста за развој на јајце во инсект е p. При претпоставка дека индивидуалните развојни процеси на јајцата се независни, да се покаже дека веројатноста да се развијат вкупно k инсекти е $(p\lambda)^k e^{-p\lambda}/k!$, $k=0,1,2,\ldots$.

Решение.

Нека X е бројот на јајца снесени од инсектот, а Y е бројот на јајца кои ќе се развијат во инсект. Тогаш, при услов $(X=r)$, распределбата на Y е биномна со параметри r и p, односно

$$P(Y=k|X=r)=\binom{r}{k}p^k(1-p)^{r-k}, \quad k=0,1,\dots,r.$$

Користејќи ја теоремата за тотална веројатност, имаме:

$$P(Y=k)=\sum_{r=k}^{\infty}P(Y=k|X=r)P(X=r)=\sum_{r=k}^{\infty}\binom{r}{k}\frac{p^k(1-p)^{r-k}\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}.$$

Ако во последното равенство замениме $r-k=n$, добиваме:

$$P(Y=k)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{p^k(1-p)^n\lambda^{n+k}e^{-\lambda}}{(n+k)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{k!n!}\frac{p^k(1-p)^n\lambda^{n+k}e^{-\lambda}}{(n+k)!}=$$

$$=\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-p)^n\lambda^n}{n!}=$$

$$=\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}e^{(1-p)\lambda}}{k!}=$$

$$=\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots.$$

11. Преживувањето на еден возач на моторна санка, кој е зафатен од снежна бура, зависи од изборот на една од трите патеки. Првата патека води кон безбедна локација по едночасовно патување, втората патека води кон безбедна локација по тричасовно патување, а третата ќе го донесе повторно на почетната локација по двочасовно патување во круг. Да се одреди средното време што му е потребно на возачот да дојде до безбедна локација, ако тој ги избира патеките со еднаква веројатност.

Решение.

Нека $(Y=i), i=1,2,3$, го претставува настанот дека возачот ја избрал првата, втората и третата патека, соодветно. Тогаш

$$P(Y=i)=1/3 \text{ за } i=1,2,3.$$

Нека X е времето што му е потребно на возачот да дојде до безбедна локација, мерено во часови. За нејзиното математичко очекување имаме:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}E(X\,|\,Y=i)P(Y=i)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}E(X\,|\,Y=i).$$

Притоа,

$$E(X\,|\,Y=1)=1,\quad E(X\,|\,Y=2)=3.$$

Кога возачот ја избира третата патека, му требаат два часа за да открие дека стигнал до почетната локација, а очекуваното дополнително време кое ќе го донесе до безбедната локација е $E(X)$, па

$$E(X\,|\,Y=3)=2+E(X).$$

Според тоа,

$$E(X)=\frac{1}{3}(1+3+2+E(X)),$$

од каде се добива дека $E(X)=3$ часа.

4.2. Случајни вектори од непрекинат тип

12. Дадена е заедничката густина на распределба на случајниот вектор (X,Y):

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}Ce^{-\lambda(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{инаку}\end{cases},$$

каде што $\lambda>0$.

а) Да се најде реалната константа $C>0$.

б) Да се најде функцијата на распределба $F_{XY}(x,y)$.

в) Да се определат маргиналните густини $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

г) Каква распределба имаат случајните променливи X и Y?

д) Колкав е коефициентот на корелација ρ_{XY}?

Решение.

а) Константата C ја наоѓаме од условот $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)dxdy=1$, од каде следува

$$1 = C\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda(x+y)}dxdy = C\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\int_0^\infty e^{-\lambda y}dy =$$

$$= C\left(\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-\lambda x}dx\right)\left(\lim_{B\to\infty}\int_0^B e^{-\lambda y}dy\right) =$$

$$= C\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^A\right)\lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda y}\Big|_0^B\right) =$$

$$= \frac{C}{\lambda^2}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-\lambda A}-1\right)\lim_{B\to\infty}\left(e^{-\lambda B}-1\right) = \frac{C}{\lambda^2}.$$

Оттука добиваме $C = \lambda^2$.

б) За да ја определиме функцијата на распределба, ја користиме формулата $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(t,u)dtdu$.

За $x \le 0$ или $y \le 0$, $f_{XY}(x,y) = 0$, па $F_{XY}(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0dtdu = 0.$

Во случај кога $x > 0$ и $y > 0$ добиваме:

$$F_{XY}(x,y) = \lambda^2\int_0^x\int_0^y e^{-\lambda(t+u)}dtdu = \lambda^2\int_0^x e^{-\lambda t}dt\int_0^y e^{-\lambda u}du =$$

$$= \lambda^2\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^x\right)\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda u}\Big|_0^y\right) = (e^{-\lambda x}-1)(e^{-\lambda y}-1) =$$

$$= e^{-\lambda(x+y)} - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y} + 1.$$

Значи, $F_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-\lambda(x+y)} - e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y} + 1, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$

в) За да ја определиме маргиналната густина $f_X(x)$ ја користиме формулата $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$.

За $x \le 0$, $f_{XY}(x,y) = 0$, па добиваме $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0dy = 0$.

За $x > 0$ имаме:

$$f_X(x) = \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda(x+y)} dy = \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} dy = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Според тоа, $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}.$

Аналогно се добива, $f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}.$

г) Од маргиналните густини $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ заклучуваме дека случајните променливи X и Y имаат експоненцијални распределби со параметар λ, односно, $X : \mathcal{E}(\lambda)$ и $Y : \mathcal{E}(\lambda)$.

д) Од заедничката и маргиналните густини на распределба, забележуваме дека важи равенството $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, $\forall x, y$. Значи, X и Y се независни случајни променливи, од каде директно следува дека $\rho_{XY} = 0$.

13. Заедничката густина на распределба на случајниот вектор (X, Y) е

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C\left(r - \sqrt{x^2 + y^2}\right), & x^2 + y^2 \le r^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > r^2 \end{cases},$$

каде што $r > 0$. Да се најде реалната константа $C > 0$.

Решение.

Константата C ја наоѓаме од условот

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dxdy = C \iint_D \left(r - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy = 1,$$

каде што областа D е кругот $x^2 + y^2 \le r^2$. Преминуваме во поларни координати

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi, \quad \text{при што } \rho \in (0, r), \varphi \in (0, 2\pi), \\ J = \rho \end{cases}$$

и добиваме:

$$1 = C\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r (r-\rho)\rho d\rho = 2\pi C\left(\frac{r\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^r = \frac{C\pi r^3}{3}.$$

Константата C се добива оп горното равенство, $C = \dfrac{3}{\pi r^3}$.

14. Да се определи заедничката густина на распределба на случајниот вектор (X,Y) ако заедничката функција на распределба е

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} \sin x \cos y, & 0 \le x \le \pi/2, -\pi/2 \le y \le 0 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

Решение.

Густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) ја наоѓаме од формулата

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

За $0 \le x \le \pi/2, -\pi/2 \le y \le 0$ добиваме:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\sin x \cos y) = \frac{\partial}{\partial x}(-\sin x \sin y) = -\cos x \sin y.$$

Заклучуваме дека

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} -\cos x \sin y, & 0 \le x \le \pi/2, -\pi/2 \le y \le 0 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

15. При проучување на работата на еден систем, отпорноста Y на еден негов елемент и силата X која дејствува врз тој елемент се сметаат за случајни променливи. Претпоставиме дека заедничката густина на распределба на X и Y е

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} abe^{-(ax+by)}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases},$$

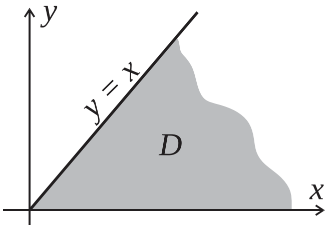
каде што a и b се познати позитивни константи. Да се одреди веројатноста за пад на системот дефинирана со $p_f = P(Y \le X)$.

Решение.

Бараната веројатност се одредува со формулата

$$p_f = \iint_D f_{XY}(x,y)dxdy,$$

каде што D го претставува делот од рамнината за кој е исполнето неравенството $y \leq x$. Бидејќи X и Y добиваат само позитивни вредности, областа D изгледа како на сликата 4.1.



Слика 4.1

Според тоа,

$$p_f = ab\int_0^\infty e^{-by}dy\int_y^\infty e^{-ax}dx = \frac{b}{a+b}.$$

16. Заедничката густина на распределба на случајниот вектор (X,Y) е

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

а) Да се определи условната густина $f_Y(y|x)$.

б) Да се пресмета условната веројатност $P(Y<1|X<1)$.

Решение.

а) На исти начин како во задачата 12 в), за маргиналната густина на случајната променлива X добиваме:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Условната густина е

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} e^{-y}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

Аналогно за маргиналната густина на случајната променлива Y се добива

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}.$$

Може да се забележи дека $f_Y(y|x)=f_Y(y)$. Овој резултат може директно да се добие од независноста на случајните променливи X и Y која следува од равенството $f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, $\forall x,y$.

б) Бараната условна веројатност ја пресметуваме според формулата

$$P(Y<1\,|\,X<1)=\frac{P(Y<1,X<1)}{P(X<1)}.$$

Притоа,

$$P(Y<1,X<1)=\int_0^1\int_0^1 f_{XY}(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 e^{-x}e^{-y}dxdy=$$

$$=\left(-e^{-x}\Big|_0^1\right)\cdot\left(-e^{-y}\Big|_0^1\right)=(e^{-1}-1)^2,$$

$$P(X<1)=\int_0^1 f_X(x)dx=\int_0^1 e^{-x}dx=\left(-e^{-x}\Big|_0^1\right)=-(e^{-1}-1),$$

па $P(Y<1\,|\,X<1)=\dfrac{(e^{-1}-1)^2}{-(e^{-1}-1)}=1-\dfrac{1}{e}.$

Нагласуваме дека поради независноста на случајните променливи $X:\mathcal{E}(1)$ и $Y:\mathcal{E}(1)$, бараната веројатност може да се пресмета директно,

$$P(Y<1\,|\,X<1)=P(Y<1)=F_Y(1)=1-e^{-1}.$$

17. Случајниот вектор (X,Y) има густина на распределба

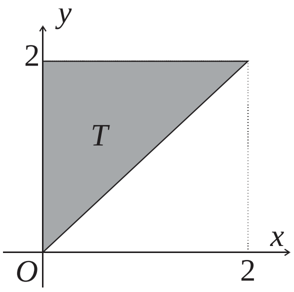
$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{4}(x+y), & (x,y)\in T \\ 0, & \text{инаку} \end{cases},$$

каде што T е триаголникот со темиња A(0,0), B(2,2) и C(0,2). Да се определат маргиналната густина на распределба $f_Y(y)$, условната густина на распределба $f_X(x|y)$ и условното очекување $E(X\,|\,Y=y)$.

Решение.

За да ја определиме маргиналната густина $f_Y(y)$ ја користиме формулата

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx\,.$$



Слика 4.2

За $y\le 0$ или $y\ge 2$, $f_{XY}(x,y)=0$, па добиваме $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}0dx=0$.

Нека $0<y<2$. Тогаш од сликата 4.2 следува дека

$$f_Y(y)=\frac{1}{4}\int_0^y (x+y)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^y+yx\big|_0^y\right)=\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{4}y^2=\frac{3}{8}y^2.$$

Според тоа, $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8}y^2, & y\in(0,2)\\ 0, & y\notin(0,2)\end{cases}.$

За бараната условна густина имаме:

$$f_X\left(x\middle|y\right)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{4}(x+y)}{\frac{3}{8}y^2}, & (x,y)\in T\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2(x+y)}{3y^2}, & (x,y)\in T\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

За $y\in(0,2)$, $E\left(X\mid Y=y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_X\left(x\middle|y\right)dx=\dfrac{2}{3y^2}\int_0^y x(x+y)dx=$

$$=\frac{2}{3y^2}\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^y+y\frac{x^2}{2}\bigg|_0^y\right)=\frac{2}{3y^2}\cdot\frac{5y^3}{6}=\frac{5y}{9}.$$

За $y \notin (0,2)$, $E\left(X \mid Y = y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f_X\left(x \middle| y\right) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0 dx = 0.$

Според тоа, $E\left(X \mid Y = y\right) = \begin{cases} \dfrac{5y}{9}, & y \in (0,2) \\ 0, & y \notin (0,2) \end{cases}.$

18. Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $(0,1)$, а случајната променлива $Y \mid X = x$ има рамномерна распределба на интервалот $\left(\dfrac{x}{2}, x\right)$.

а) Да се определат маргиналната густина $f_Y(y)$ и маргиналната функција на распределба $F_Y(y)$.

б) Да се определи условното очекување $E(Y \mid X = x)$.

в) Да се пресмета веројатноста $P\left(Y > \dfrac{1}{4} \middle| X < \dfrac{1}{2}\right)$.

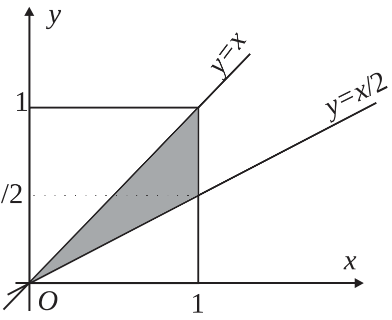
Решение.

а) Од условот на задачата следува дека

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases} \quad \text{и} \quad f_Y(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}, & y \in (x/2, x) \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

За заедничката густина на распределба добиваме:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}, & x \in (0,1), y \in (x/2, x) \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$



Слика 4.3

Бидејќи $f_{XY}(x,y) \neq 0$ во сите точки од триаголникот прикажан на сликата 4.3, за маргиналната густина $f_Y(y)$ добиваме:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx = \begin{cases} 0, \;\; y \notin (0,1) \\ \int_y^{2y} \frac{2}{x}dx, \; y \in (0,1/2) \\ \int_y^{1} \frac{2}{x}dx, \; y \in [1/2,1) \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \notin (0,1) \\ 2\ln 2, & y \in (0,1/2). \\ -2\ln y, & y \in [1/2,1) \end{cases}$$

Маргиналната функција на распределба $F_Y(y)$ е

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)du = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 2\ln 2\int_0^y du, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ 2\ln 2\int_0^{1/2} du - 2\int_{1/2}^{y} \ln u du, & \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 2y\ln 2, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ -2y(\ln y - 1) - 1, & \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}.$$

б) За $x \in (0,1)$, условното очекување $E(Y \mid X = x)$ изнесува

$$E(Y \mid X = x) = \int_{x/2}^{x} y \; f_Y(y \mid x)dy = \int_{x/2}^{x} y \cdot \frac{2}{x} dy = \frac{2}{x}\left(\left. \frac{y^2}{2} \right|_{x/2}^{x} \right) =$$

$$= \frac{2}{x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} \right) = \frac{2}{x} \cdot \frac{3x^2}{8} = \frac{3x}{4},$$

а $E(Y \mid X = x) = 0,$ ако $x \notin (0,1).$ Според тоа,

$$E(Y \mid X = x) = \begin{cases} \frac{3x}{4}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}.$$

в) $P\left(Y > \frac{1}{4} \middle| X < \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(Y > \frac{1}{4}, X < \frac{1}{2}\right)}{P\left(X < \frac{1}{2}\right)}$, каде што

$$P\left(Y > \frac{1}{4}, X < \frac{1}{2}\right) = \int_{1/4}^{1/2}\int_{1/4}^{x} \frac{2}{x} dxdy = \int_{1/4}^{1/2}\left(\int_{1/4}^{x} dy\right)dx = \int_{1/4}^{1/2}\left(2 - \frac{1}{2x}\right)dx = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

и

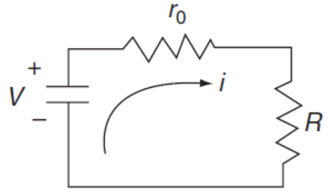
$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_{0}^{1/2} f_X(x)dx = \int_{0}^{1/2} dx = \frac{1}{2}.$$

Според тоа, $P\left(Y > \frac{1}{4} \middle| X < \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}(1 - \ln 2)}{\frac{1}{2}} = 1 - \ln 2.$

19. Во колото прикажано на сликата 4.4, отпорноста R е рамномерно распределена случајна променлива помеѓу 900Ω и 1100Ω. Струјата $i = 0.01A$ и отпорноста $r_0 = 1000\Omega$ се константи.

а) Да се одредат математичкото очекување и дисперзијата на напонот V, кој е даден со $V = (R + r_0)i.$

б) Да се пресмета коефициентот на корелација на R и V.



Слика 4.4

Решение.

а) Од тоа што случајната променлива R има рамномерна распределба на интервалот ($900\,\Omega$, $1100\,\Omega$) следува дека

$$E(R)=\frac{900+1100}{2}=1000 \text{ и } D(R)=\frac{(1100-900)^2}{12}=\frac{10000}{3}.$$

За математичкото очекување и дисперзијата на напонот V добиваме:

$$E(V)=E(Ri+r_0i)=iE(R)+ir_0=20$$

и

$$D(V)=D(Ri+r_0i)=i^2D(R)=\frac{1}{3}.$$

б) За да го пресметаме коефициентот на корелација според формулата $\rho_{RV}=\dfrac{E(RV)-E(R)E(V)}{\sqrt{D(R)D(V)}}$, прво ќе го пресметаме заедничкиот момент од ред (1,1):

$$E(RV)=E(R(Ri+r_0i))=iE(R^2)+ir_0E(R).$$

Густината на случајната променлива R е

$$f_R(r)=\begin{cases}0, & r\notin(900,1100)\\ \dfrac{1}{200}, & r\in(900,1100)\end{cases},$$

па

$$E(R^2)=\int_{-\infty}^{\infty}r^2f_R(r)dr=\frac{1}{200}\int_{900}^{1100}r^2dr=\frac{1}{200}\left(\left.\frac{r^3}{3}\right|_{900}^{1100}\right)=\frac{3010000}{3}.$$

Според тоа,

$$E(RV)=iE(R^2)+ir_0E(R)=\frac{60100}{3}.$$

За коефициентот на корелација добиваме:

$$\rho_{RV}=\frac{E(RV)-E(R)E(V)}{\sqrt{D(R)D(V)}}=1.$$

Овој резултат можеше директно да го определиме и од линеарната зависност на R и V, т.е. од тоа што $V = Ri + r_0 i,\ i > 0$.

20. Да се докаже дека ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш важи

$$E(X \mid Y = y) = E(X).$$

Решение.

Ако X и Y се независни дискретни случајни променливи, тогаш

$$E(X \mid Y = y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i \mid Y = y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{P(X = x_i, Y = y)}{P(Y = y)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{P(X = x_i) P(Y = y)}{P(Y = y)} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = E(X).$$

Ако пак, X и Y се независни непрекинати случајни променливи, тогаш

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x \mid y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) dx = E(X).$$

4.3. Трансформација на случаен вектор

21. Случајните променливи X и Y се независни и нивните закони на распределба се:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Да се најде законот на распределба на случајната променлива:

а) $Z = X - Y$; б) $Z = \dfrac{Y}{X}$; в) $Z = \min\{X, Y\}$.

Решение.

а) Множеството вредности на променливата $Z = X - Y$ е

$$R_Z = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Од независноста на променливите X и Y добиваме:

$$P(Z=-1) = P(X-Y=-1) = P(X=-1, Y=0) = \\ = P(X=-1)\cdot P(Y=0) = 0.4\cdot 0.5 = 0.2,$$

$$P(Z=-2) = P(X-Y=-2) = P(X=-1, Y=1) = \\ = P(X=-1)\cdot P(Y=1) = 0.4\cdot 0.5 = 0.2,$$

$$P(Z=1) = P(X-Y=1) = P(X=2, Y=1) = \\ = P(X=2)\cdot P(Y=1) = 0.6\cdot 0.5 = 0.3,$$

$$P(Z=2) = P(X-Y=2) = P(X=2, Y=0) = \\ = P(X=2)\cdot P(Y=0) = 0.6\cdot 0.5 = 0.3,$$

па, законот на распределба на случајната променлива $Z = X - Y$ е

$$Z : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

б) Множеството вредности на променливата $Z = \frac{Y}{X}$ е $R_Z = \left\{0, -1, \frac{1}{2}\right\}$. Од независноста на променливите X и Y имаме:

$$P(Z=0) = P\left(\frac{Y}{X}=0\right) = P(X=-1, Y=0) + P(X=2, Y=0) = \\ = P(X=-1)\cdot P(Y=0) + P(X=2)\cdot P(Y=0) = 0.2 + 0.3 = 0.5,$$

$$P(Z=-1) = P\left(\frac{Y}{X}=-1\right) = P(X=-1, Y=1) = \\ = P(X=-1)\cdot P(Y=1) = 0.4\cdot 0.5 = 0.2,$$

$$P\left(Z=\frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{Y}{X}=\frac{1}{2}\right) = P(X=2, Y=1) = \\ = P(X=2)\cdot P(Y=1) = 0.6\cdot 0.5 = 0.3,$$

од што следува

$$Z : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

в) Множеството вредности на променливата $Z = \min\{X, Y\}$ е

$$R_Z = \{-1, 0, 1\}.$$

За веројатностите добиваме:

$$\begin{aligned} P(Z=-1) &= P(\min\{X,Y\}=-1) = P(X=-1, Y=0) + P(X=-1, Y=1) = \\ &= P(X=-1)\cdot P(Y=0) + P(X=-1)\cdot P(Y=1) = \\ &= 0.4\cdot 0.5 + 0.4\cdot 0.5 = 0.4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P(\min\{X,Y\}=0) = P(X=2, Y=0) = \\ &= P(X=2)\cdot P(Y=0) = 0.6\cdot 0.5 = 0.3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z=1) &= P(\min\{X,Y\}=1) = P(X=2, Y=1) = \\ &= P(X=2)\cdot P(Y=1) = 0.6\cdot 0.5 = 0.3. \end{aligned}$$

Според тоа, законот на распределба на случајната променлива $Z = \min\{X,Y\}$ е

$$Z : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

22. Коцка за играње се фрла два пати. Нека случајната променлива X го означува бројот што се паѓа во првото фрлање, а случајната променлива Y го означува бројот што се паѓа во второто фрлање. Да се определи законот на распределба на случајната променлива $Z = X + Y$. Колкава е веројатноста добиениот збир при двете фрлања да е барем 8?

Решение.

Јасно е дека $R_X = R_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, па множеството вредности на променливата $Z = X + Y$ е $R_Z = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Од независноста на променливите X и Y добиваме:

$$P(Z=2) = P(X+Y=2) = P(X=1, Y=1) = P(X=1)\cdot P(Y=1) = \frac{1}{6^2},$$

$$\begin{aligned} P(Z=3) &= P(X+Y=3) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) = \\ &= P(X=1)\cdot P(Y=2) + P(X=2)\cdot P(Y=1) = \frac{2}{6^2}. \end{aligned}$$

На сличен начин ги определуваме и останатите веројатности, па законот на распределба на случајната променлива Z е

$$Z:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1/36 & 2/36 & 3/36 & 4/36 & 5/36 & 6/36 & 5/36 & 4/36 & 3/36 & 2/36 & 1/36 \end{pmatrix}$$

Бараната веројатност е

$$P(Z \geq 8) = P(Z=8) + P(Z=9) + P(Z=10) + P(Z=11) + P(Z=12) = \frac{15}{36}.$$

23. Нека X_1, X_2 и X_3 се независни случајни променливи и секоја од нив може да добие вредност 1 или -1 со веројатност 1/2. Случајните променливи Y_1, Y_2 и Y_3 се дефинирани на следниов начин:

$$Y_1 = X_1 X_2, \quad Y_2 = X_1 X_3, \quad Y_3 = X_2 X_3.$$

Да се покаже дека кои било две од случајните променливи Y_1, Y_2 и Y_3 се независни, но Y_1, Y_2 и Y_3 не се независни.

Решение.

Од тоа што $X_i:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, i \in \{1, 2, 3\}$, следува дека случајните променливи Y_i, $i = 1, 2, 3$, го имаат следниов закон на распределба:

$$Y_i:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, i \in \{1, 2, 3\}.$$

На пример,

$$P(Y_1 = 1) = P(X_1 X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = -1, X_2 = -1) =$$
$$= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = -1) = \frac{1}{2},$$
$$P(Y_1 = -1) = P(X_1 X_2 = -1) = P(X_1 = -1, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = -1) =$$
$$= P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

За заедничките веројатности имаме:

$$P(Y_1 = -1, Y_2 = -1) = P(X_1 X_2 = -1, X_1 X_3 = -1) =$$
$$= P(X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1) +$$
$$+ P(X_1 = -1, X_2 = 1, X_3 = -1) =$$
$$= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1)P(X_3 = 1) +$$
$$+ P(X_1 = -1)P(X_2 = 1)P(X_3 = -1) =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Аналогно се добиваат и останатите заеднички веројатности. Според тоа, за секои $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, важи следниот заеднички закон на распределба:

$Y_i \setminus Y_j$	-1	1
-1	1/4	1/4
1	1/4	1/4

Бидејќи, за секои $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, важи

$$P(Y_i = \pm 1, Y_j = \pm 1) = P(Y_i = \pm 1)P(Y_j = \pm 1)$$

и

$$P(Y_i = \mp 1, Y_j = \pm 1) = P(Y_i = \mp 1)P(Y_j = \pm 1)$$

заклучуваме дека кои било две од случајните променливи Y_1, Y_2 и Y_3 се независни.

За да покажеме дека Y_1, Y_2 и Y_3 не се независни, доволно е да забележиме дека

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1) \neq P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 1).$$

Навистина,

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) +$$

$$+ P(X_1 = -1, X_2 = -1, X_3 = -1) =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$

но, $P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

24. Независните случајни променливи X и Y имаат геометриска распределба со параметар p, $0 < p < 1$, т.е.

$$P(X = k) = P(Y = k) = pq^k,\ k = 0,1,\ldots,\ p + q = 1.$$

Да се определи законот на распределба на случајната променлива:

а) $Z = X + Y$; б) $Z = \max\{X, Y\}$.

Решение.

а) Множеството вредности на променливата $Z = X + Y$ е

$$R_Z = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Бидејќи X и Y се независни добиваме:

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{k} P(X = j, Y = k - j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P(X = j) P(Y = k - j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (pq^{j})(pq^{k-j}) =$$

$$= p^2 q^k \sum_{j=0}^{k} 1 = p^2 q^k (k+1).$$

б) Множеството вредности на променливата $Z = \max\{X, Y\}$ е

$$R_Z = \{0, 1, 2, \ \ldots\}.$$

$$P(Z = k) = P(\max\{X, Y\} = k) =$$

$$= P(X = k, Y < k) + P(X < k, Y = k) + P(X = k, Y = k) =$$

$$= P(X = k)P(Y < k) + P(X < k)P(Y = k) + P(X = k)P(Y = k) =$$

$$= P(X = k)P(Y \in \{0,1,2,\ldots,k-1\}) + P(X \in \{0,1,2,\ldots,k-1\})P(Y = k) +$$

$$+ P(X = k)P(Y = k) =$$

$$= pq^k \sum_{j=0}^{k-1} pq^j + pq^k \sum_{j=0}^{k-1} pq^j + pq^k pq^k = 2p^2 q^k \sum_{j=0}^{k-1} q^j + p^2 q^{2k} =$$

$$= 2p^2 q^k \frac{1-q^k}{1-q} + p^2 q^{2k} = pq^k (2 - 2q^k + pq^k).$$

25. Независните случајни променливи X и Y имаат експоненцијална распределба со параметар $a = 1$. Да се најдат функцијата и густината на распределба на случајната променлива $Z = X - Y$.

Решение.

Од тоа што случајните променливи X и Y имаат експоненцијална распределба со параметар $a = 1$ следува

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-x}, & x\geq 0\end{cases} \quad \text{и} \quad f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ e^{-y}, & y\geq 0\end{cases}.$$

Бидејќи X и Y се независни случајни променливи, заклучуваме дека

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x\geq 0, y\geq 0\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

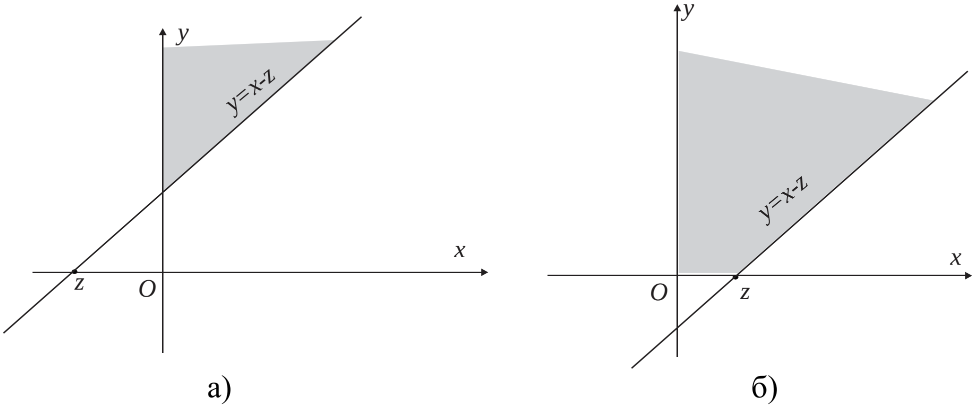
За функцијата на распределба на случајната променлива $Z=X-Y$ добиваме:

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X-Y\leq z)=P(Y\geq X-z)=\iint\limits_{D:\,y\geq x-z} f_{XY}(x,y)dxdy.$$

Областа $D: y\geq x-z$ е делот од рамнината над правата $y=x-z$ и се менува во зависност од вредноста на z. Бидејќи $f_{XY}(x,y)\neq 0$ само во првиот квадрант, областа на интеграција се сведува на делот од областа D кој се наоѓа во првиот квадрант (слика 4.5).

1) За $z<0$, областа на интеграција е исенчаниот дел на сликата 4.5 а), од каде што имаме:

$$F_Z(z)=\int_0^\infty e^{-x}\left(\int_{x-z}^\infty e^{-y}dy\right)dx=\int_0^\infty e^{-x}e^{-x+z}dx=e^z\int_0^\infty e^{-2x}dx=\frac{e^z}{2}.$$



а) б)

Слика 4.5

2) За $z\geq 0$, областа на интеграција е исенчаниот дел на сликата 4.5 б), од каде што добиваме:

$$F_Z(z)=\int_0^{\infty}e^{-y}\left(\int_0^{y+z}e^{-x}dx\right)dy=\int_0^{\infty}e^{-y}(1-e^{-y-z})dy=1-\frac{e^{-z}}{2}.$$

Според тоа,

$$F_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{e^{z}}{2}, & z<0\\ 1-\dfrac{e^{-z}}{2}, & z\geq 0\end{cases} \quad \text{и} \quad f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{e^{z}}{2}, & z<0\\ \dfrac{e^{-z}}{2}, & z\geq 0\end{cases}=\frac{e^{-|z|}}{2}.$$

26. Случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба над областа T, каде што T е внатрешноста на триаголникот со темиња (0,0), (2,0) и (1,1).

а) Да се определат маргиналната густина $f_X(x)$ и условната густина $f_Y(y\,|x)$.

б) Да се најде функцијата на распределба на случајната променлива $Z=X+Y$.

в) Да се пресмета веројатноста $P(X+Y<1)$.

Решение.

а) Заедничката густина на распределба на случајниот вектор (X,Y) е

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin T\\ \dfrac{1}{P_T}, & (x,y)\in T\end{cases},$$

каде што триаголникот T е даден на сликата 4.6, па неговата плоштина е $P_T=\dfrac{ah}{2}=\dfrac{2\cdot 1}{2}=1.$ Според тоа,

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin T\\ 1, & (x,y)\in T\end{cases}.$$

За да ја определиме маргиналната густина на случајната променлива X ги разгледуваме следниве случаи:

1) $x\in(-\infty,0]\cup[2,\infty),\qquad f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}0dy=0.$

$$2) \quad x \in (0,1], \quad f_X(x) = \int_0^x f_{XY}(x,y)dy = \int_0^x dy = y\,|_0^x = x.$$

$$3) \quad x \in (1,2), \quad f_X(x) = \int_0^{2-x} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^{2-x} dy = y\,|_0^{2-x} = 2-x.$$

Значи

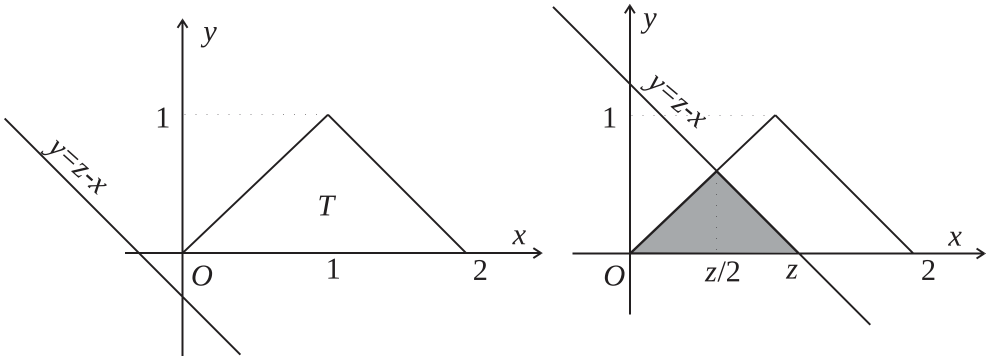
$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2. \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}$$

За условната густина ја користиме формулата $f_Y\left(y\,|x\right) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$ и добиваме:

$$f_Y\left(y\,|x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1,\ 0 < y < x \\ \dfrac{1}{2-x}, & 1 < x < 2,\ 0 < y < 2-x. \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}$$

б) За функцијата на распределба на случајната променлива $Z = X + Y$ имаме:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z) = P(Y \le z - X) = \iint\limits_{D:\, y \le z-x} f_{XY}(x,y)dxdy\,.$$



а) б)

Слика 4.6

Областа $D: y \leq z - x$ е делот од рамнината под правата $y = z - x$ и се менува во зависност од вредноста на z. Бидејќи $f_{XY}(x, y) \neq 0$ само во триаголникот T, ни преостанува да интегрираме само по област која е пресек на D и T.

За $z < 0$, пресекот на областа D и триаголникот T е празно множество (слика 4.6. а)). Според тоа, $F_Z(z) = \iint\limits_{D: y \leq z-x} 0 dxdy = 0.$

За $0 \leq z < 2$, областа на интеграција е исенчениот дел на сликата 4.6 б). Пресекот на правите $y = z - x$ и $y = x$ е точката со координати $x = y = \frac{z}{2}$, па имаме:

$$F_Z(z) = \int_0^{z/2} \int_y^{z-y} dxdy = \int_0^{z/2} \left(x\,|_y^{z-y}\right) dy = \int_0^{z/2} (z - 2y) dy =$$

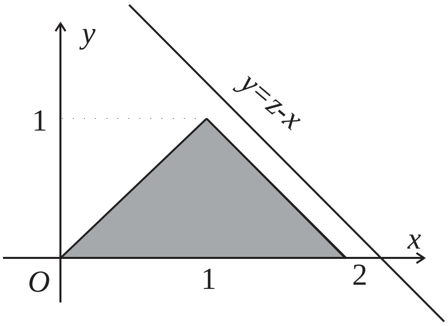
$$= zy\Big|_0^{z/2} - y^2\Big|_0^{z/2} = \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{4} = \frac{z^2}{4}.$$

Ако $z \geq 2$, областа на интеграција е целиот триаголник T (слика 4.7), па добиваме:

$$F_Z(z) = \int_0^1 \int_y^{2-y} dxdy = \int_0^1 \left(x\,|_y^{2-y}\right) dy = \int_0^1 (2 - 2y) dy = 2y\Big|_0^1 - y^2\Big|_0^1 = 1.$$

Според тоа,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{z^2}{4}, & 0 \leq z < 2. \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}$$



Слика 4.7

в) Бараната веројатност е $P(X+Y<1)=P(Z<1)=F_Z(1)=\frac{1}{4}$.

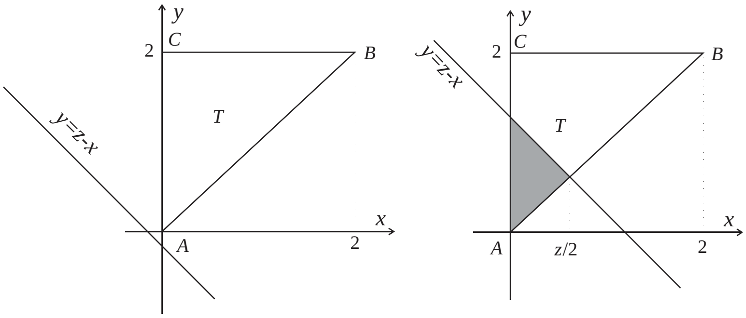
27. Случајниот вектор $\left(X,Y\right)$ има густина на распределба

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(x+y), & (x,y)\in T\\ 0, & \text{инаку}\end{cases},$$

каде што T е триаголникот со темиња $A(0,0)$, $B(2,2)$ и $C(0,2)$. Да се определат функцијата и густината на распределба на случајната променлива $Z=X+Y$.

Решение.

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=P(Y\le z-X)=\iint\limits_{y\le z-x} f_{XY}(x,y)dxdy.$$



а) б)

Слика 4.8

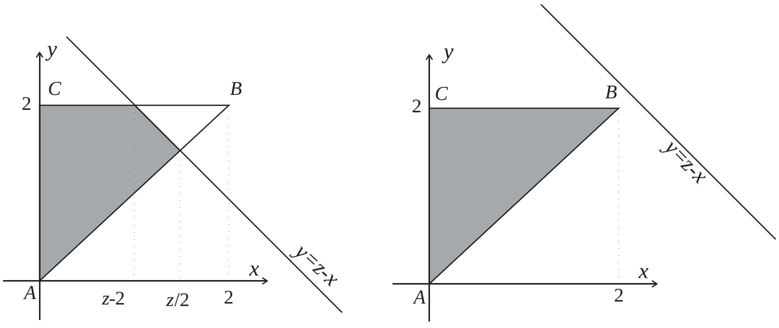
Слично како во претходната задача ги разгледуваме следниве случаи:

1) $z<0$, (слика 4.8 а)), $F_Z(z)=0$.

2) $0\le z<2$, (слика 4.8 б)), $F_Z(z)=\frac{1}{4}\int\limits_0^{z/2}\int\limits_x^{z-x}(x+y)dydx=\frac{z^3}{24}$.

3) $2\le z<4$, (слика 4.9 а)),

$$F_Z(z)=\frac{1}{4}\int_0^{z-2}\int_x^{2}(x+y)dydx+\frac{1}{4}\int_{z-2}^{z/2}\int_x^{z-x}(x+y)dydx=-\frac{z^3}{24}+\frac{z^2}{4}-\frac{1}{3}.$$



а) б)

Слика 4.9

4) $z\geq 4$, (слика 4.9 б)), $F_Z(z)=\frac{1}{4}\int_0^2\int_x^2(x+y)dydx=1$.

Според тоа, функцијата и густината на распределба на случајната променлива $Z=X+Y$ се:

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{z^3}{24}, & 0\leq z<2\\ -\frac{z^3}{24}+\frac{z^2}{4}-\frac{1}{3}, & 2\leq z<4\\ 1, & z\geq 4\end{cases},\quad f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z^2}{8}, & 0\leq z<2\\ -\frac{z^2}{8}+\frac{z}{2}, & 2\leq z<4\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

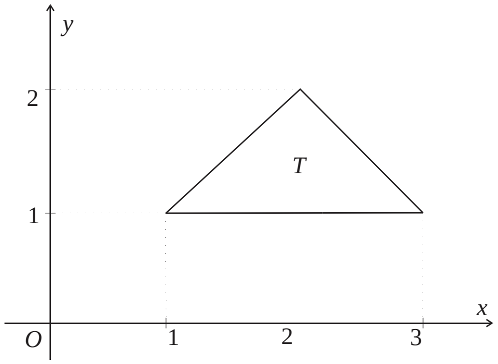
28. Нека случајниот вектор (X,Y) има густина на распределба

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}A(x+y), & (x,y)\in T\\ 0, & \text{инаку}\end{cases},$$

каде триаголникот T е даден на сликата 4.10.

а) Да се определи реалниот параметар $A>0$.

б) Да се определи густината на распределба на случајната променлива $Z=X+Y$, а потоа и веројатноста $P(2<X+Y\leq 3)$.



Слика 4.10

Решение.

а) Од условот $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy=1$ имаме:

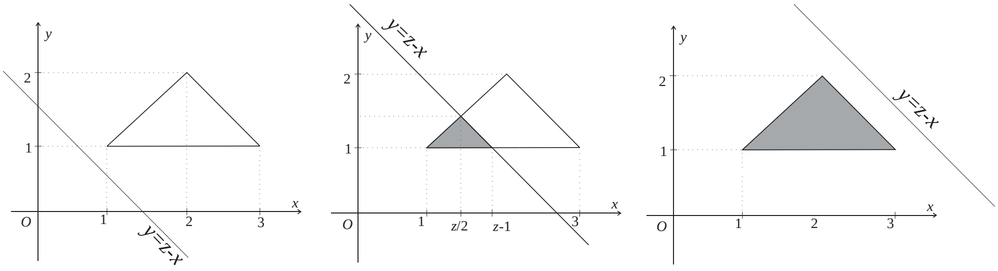
$$1=\int\limits_1^2\int\limits_y^{4-y} A(x+y)dxdy=A\int\limits_1^2\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^{4-y}+yx\Big|_y^{4-y}\right)dy=$$

$$=A\int\limits_1^2\left(\frac{(4-y)^2}{2}-\frac{y^2}{2}+y(4-y-y)\right)dy=A\int\limits_1^2(8-4y+4y-2y^2)dy=$$

$$=A\left(8y-\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_1^2=\frac{10}{3}A.$$

Според тоа, $A=\frac{3}{10}$.

б) $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le Z)=P(Y\le Z-X)=\iint\limits_{y\le z-x} f_{XY}(x,y)dxdy.$



а) б) в)

Слика 4.11

Постапувајќи како во претходните задачи добиваме:

1) $z < 2,$ (слика 4.11 а)) $F_Z(z) = 0.$

2) $2 \le z < 4,$ (слика 4.11 б)),

$$F_Z(z) = \frac{3}{10}\int_1^{\frac{z}{2}}\int_y^{z-y}(x+y)dxdy = \frac{3}{10}\int_1^{\frac{z}{2}}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_y^{z-y} dy = \frac{3}{10}\int_1^{\frac{z}{2}}\left(\frac{z^2}{2}-2y^2\right)dy =$$

$$= \frac{3}{10}\left(\frac{z^2}{2}y\Bigg|_1^{z/2} - 2\frac{y^3}{3}\Bigg|_1^{z/2}\right) = \frac{z^3}{20} - \frac{3z^2}{20} + \frac{1}{5}.$$

3) $z \ge 4,$ (слика 4.11 в)), $F_Z(z) = \dfrac{3}{10}\displaystyle\int_1^2\int_y^{4-y}(x+y)dxdy = 1.$

За функцијата на распределба добиваме:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 2 \\ \dfrac{z^3}{20} - \dfrac{3z^2}{20} + \dfrac{1}{5}, & 2 \le z < 4 \\ 1, & z \ge 4 \end{cases}.$$

Бараната веројатност е

$$P(2 < X + Y \le 3) = P(2 < Z \le 3) = F_Z(3) - F_Z(2) =$$

$$= \left(\frac{3^3}{20} - \frac{3\cdot 3^2}{20} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2^3}{20} - \frac{3\cdot 2^2}{20} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}.$$

29. Заедничката густина на случајниот вектор (X, Y) е

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{8}{9}xy, & 1 < x < 2,\ 1 < y < x \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

а) Да се определат маргиналните густини $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Дали X и Y се независни случајни променливи?

б) Да се определи функцијата на распределба на случајната променлива $Z = Y - X$.

в) Да се пресмета веројатноста $P\left(Y - X > \dfrac{1}{2}\right).$

Решение.

а) За маргиналните густини добиваме:

$$f_X(x)=\frac{8}{9}x\int_1^x ydy=\frac{8}{9}x\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^x\right)=\frac{4}{9}x^3-\frac{4}{9}x,\, x\in(1,2).$$

$$f_Y(y)=\frac{8}{9}y\int_y^2 xdx=\frac{8}{9}y\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^2\right)=\frac{16}{9}y-\frac{4}{9}y^3,\, y\in(1,2).$$

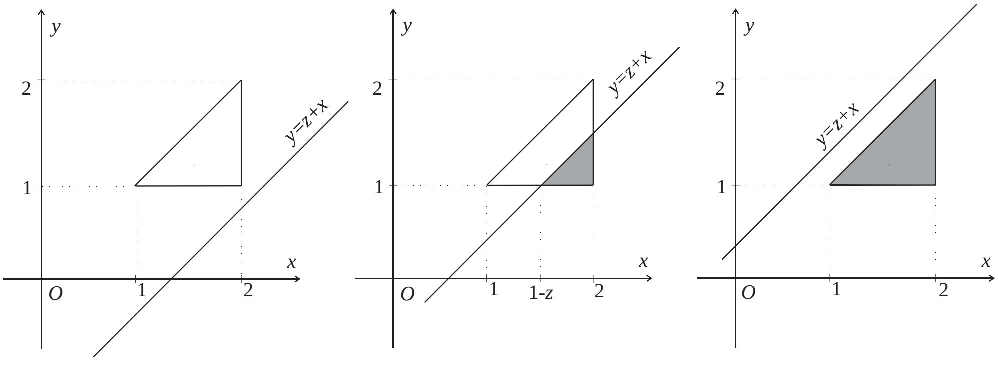
Според тоа,

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{4}{9}x^3-\frac{4}{9}x, & x\in(1{,}2)\\ 0, & x\notin(1{,}2)\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{16}{9}y-\frac{4}{9}y^3, & y\in(1{,}2)\\ 0, & y\notin(1{,}2)\end{cases}.$$

Бидејќи равенството

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

не важи за $\forall x,y\in(1,2)$, заклучуваме дека X и Y се зависни случајни променливи.



а) б) в)

Слика 4.12

б) $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(Y-X\le z)=P(Y\le z+X)=\iint\limits_{y\le x+z} f_{XY}(x,y)dxdy.$

Ги разгледуваме следните случаи:

1) $z<-1$ (слика 4.12 а)), $F_Z(z)=0.$

2) $-1 \le z < 0$ (слика 4.12 б)),

$$F_Z(z) = \frac{8}{9}\int_{1-z}^{2} x\left(\int_{1}^{z+x} y dy\right)dx = \frac{8}{9}\int_{1-z}^{2} x\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{1}^{z+x}\right)dx =$$

$$= \frac{4}{9}\int_{1-z}^{2}(xz^2 + 2zx^2 + x^3 - x)dx =$$

$$= 1 + \frac{64z}{27} + \frac{10z^2}{9} - \frac{z^4}{27}.$$

3) $z \ge 0$ (слика 4.12 в)), $F_Z(z) = 1$.

Според тоа, функцијата на распределба на Z е

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -1 \\ 1 + \frac{64z}{27} + \frac{10z^2}{9} - \frac{z^4}{27}, & -1 \le z < 0 \\ 1, & z \ge 0 \end{cases}.$$

в) $P\left(Y - X > \frac{1}{2}\right) = P\left(Z > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{1}{2}\right) = 1 - F_Z\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0.$

30. Случајниот вектор (X, Y) има рамномерна распределба на единечниот круг (круг со центар во точката $(0, 0)$ и радиус $r = 1$). Да се најде функцијата на распределба на случајната променлива $Z = \frac{Y}{X}$.

Решение.

Бидејќи (X, Y) има рамномерна распределба на единечниот круг K, а плоштината на K е π, следува дека

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \le 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}.$$

За функцијата на распределба на случајната променлива $Z = \frac{Y}{X}$ важи

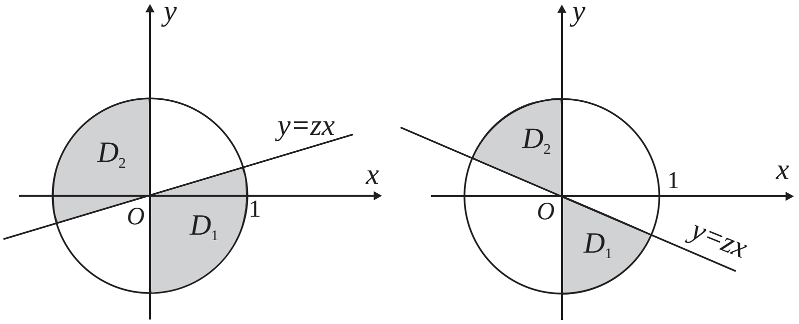
$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\frac{Y}{X}\le z\right)=P(Y\le zX,\ X>0)+P(Y\ge zX,\ X<0)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_1:\,y\le zx,\,x>0}dxdy+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_2:\,y\ge zx,\,x<0}dxdy.$$

За $z\ge 0$, областите на интеграција D_1 и D_2 се исенчаните делови на сликата 4.13 а). Бидејќи D_1 и D_2 имаат иста плоштина следува

$$F_Z(z)=\frac{2}{\pi}\iint\limits_{y\le zx,\,x>0}dxdy=\left\{\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ J=\rho\end{array}\right\}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\text{arctg}z}d\varphi\int\limits_{0}^{1}\rho d\rho=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\text{arctg}z}\left(\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^1\right)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\text{arctg}z}d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(\text{arctg}\,z+\frac{\pi}{2}\right).$$



а) б)

Слика 4.13

За $z<0$, D_1 и D_2 се исенчаните делови на сликата 4.13 б) и аналогно се добива $F_Z(z)=\dfrac{1}{\pi}\left(\text{arctg}z+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Според тоа, $F_Z(z)=\dfrac{1}{\pi}\left(\text{arctg}\,z+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $z\in\mathbf{R}$.

31. Случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба на квадратот

$$D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}.$$

Да се определи функцијата на распределба на случајната променлива $Z = XY$.

Решение.

Од тоа што (X,Y) има рамномерна распределба на квадратот

$$D = \{(x, y) \,|\, 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\},$$

чија плоштина е 1 (слика 4.14), следува дека

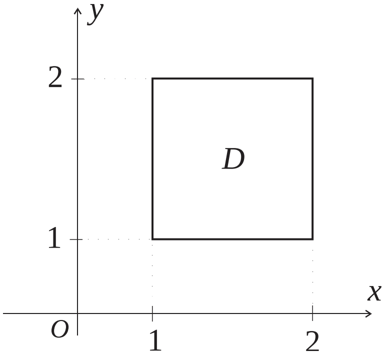
$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}.$$

За функцијата на распределба на случајната променлива $Z = XY$ важи:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(XY \le z) = \iint\limits_{xy \le z} f_{XY}(x, y)dxdy\,,$$

и ги разгледуваме следниве случаи:

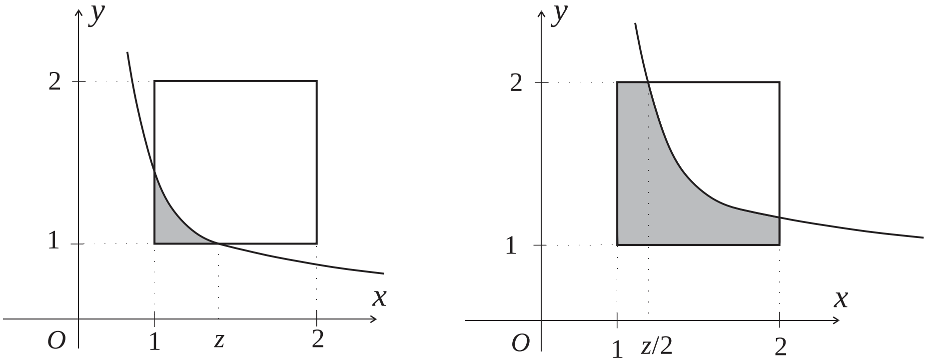
1) За $z < 1$ имаме $F_Z(z) = \iint\limits_{xy \le z} 0dxdy = 0.$



Слика 4.14

2) За $1 \le z < 2$ (слика 4.15 а)) важи

$$F_Z(z) = \int_1^z dx \int_1^{z/x} dy = \int_1^z \left(y\big|_1^{z/x} \right) dx = \int_1^z \left(\frac{z}{x} - 1 \right) dx = \left(z \ln|x| - x \right)\Big|_1^z = z \ln z - z + 1.$$



а) б)

Слика 4.15

3) За $2 \le z < 4$ (слика 4.15 б)) добиваме:

$$F_Z(z)=\int_1^{z/2}dx\int_1^2 dy+\int_{z/2}^2 dx\int_1^{z/x}dy=\int_1^{z/2}\left(y\Big|_1^2\right)dx+\int_{z/2}^2\left(y\Big|_1^{z/x}\right)dx=$$

$$=\int_1^{z/2}dx+\int_{z/2}^2\left(\frac{z}{x}-1\right)dx=\left(x\Big|_1^{z/2}\right)+\left(z\ln|x|-x\right)\Big|_{z/2}^2=$$

$$=z-3+2z\ln z-z\ln z.$$

4) За $z \ge 4$ имаме $F_Z(z)=\int_1^2 dx\int_1^2 dy=1.$

Според тоа,

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1\\ \ln z-z+1, & 1\le z<2\\ z-3+2z\ln 2-z\ln z, & 2\le z<4\\ 1, & z\ge 4\end{cases}.$$

32. Да се изразат функцијата и густината на распределба на случајната променлива:

а) $Z=\max\{X,Y\}$, б) $U=\min\{X,Y\}$,

преку маргиналните функции и густини на распределба на независните непрекинати случајни променливи *X* и *Y*.

Решение.

а) $$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\max\{X,Y\}\le z)=P(X\le z,Y\le z)=$$
$$=P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z),$$
$$f_Z(z)=F_Z'(z)=(F_X(z)F_Y(z))'=F_X'(z)F_Y(z)+F_Y'(z)F_X(z)=$$
$$=f_X(z)F_Y(z)+f_Y(z)F_X(z).$$

б) $$F_U(u)=P(U\le u)=P(\min\{X,Y\}\le u)=1-P(\min\{X,Y\}>u)=$$
$$=1-P(X>u,Y>u)=1-P(X>u)P(Y>u)=$$
$$=1-(1-P(X\le u))(1-P(Y\le u))=1-(1-F_X(u))(1-F_Y(u)),$$
$$f_U(u)=F_U'(u)=[1-(1-F_X(u))(1-F_Y(u))]'=$$
$$=-(1-F_X(u))'(1-F_Y(u))-(1-F_X(u))(1-F_Y(u))'=$$
$$=f_X(u)(1-F_Y(u))+f_Y(u)(1-F_X(u)).$$

33. Нека заедничката густина на распределба на случајните променливи X и Y е

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} xy, & 0<x<1,\,0<y<2\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

Да се пресмета очекувањето на случајната променлива $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$.

Решение.

Очекувањето на случајната променлива $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ може директно да се определи користејќи ја формулата

$$E\big(g(X,Y)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f_{XY}(x,y)dxdy,$$

според која добиваме:

$$E(Z)=\int_0^1\int_0^2 xy\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^1 x\left(\int_0^2 y\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)dx=$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^1 x\left(-x^3+\sqrt{4+x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\left(-\frac{33}{5}+5\sqrt{5}\right)\approx 1.53.$$

34. Случајниот вектор (X,Y) има заедничка густина на распределба

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y}, & x>0, y\ge 0\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

Да се определи густината на распределба на случајниот вектор (U,V) ако

$$U=\sqrt{X^2+Y^2} \quad \text{и} \quad V=\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}.$$

Решение.

Од равенките $u=\sqrt{x^2+y^2}$ и $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ согледуваме дека (u,v) се поларни координати на точката (x,y), од каде што следува дека $x=u\cos v,\quad y=u\sin v$. Јакобијанот на трансформацијата е

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos v & \sin v\\ -u\sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u,$$

па за заедничката густината на случајниот вектор (U,V) добиваме:

$$f_{UV}(u,v)=f_{XY}(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|=f_{XY}(u\cos v,\ u\sin v)\left|J(u,v)\right|=$$

$$=\begin{cases}ue^{-u(\cos v+\sin v)}, & 0<v\le\pi/2,\ u>0\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

35. Воведувајќи нова помошна променлива $W=X$ да се определи густината на распределба на случајната променлива $Z=XY$ ако е позната заедничката густина на распределба $f_{XY}(x,y)$ на случајниот вектор (X,Y).

Решение.

Јакобијанот на трансформацијата $z=xy, w=x$ е

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & x\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-x,$$

па за заедничката густина на случајниот вектор (Z,W) имаме:

$$f_{ZW}(z,w)=\frac{f_{XY}(x,y)}{\left|J(x,y)\right|}=\frac{1}{|w|}f_{XY}\left(w,\frac{z}{w}\right).$$

Маргиналната густина на распределба на случајната променлива Z е

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{ZW}(z,w)dw=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|w|}f_{XY}\left(w,\frac{z}{w}\right)dw.$$

Ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|w|}f_X(w)f_Y\left(\frac{z}{w}\right)dw.$$

Дополнителни задачи

36. Нека заедничкиот закон на распределба на случајниот вектор (X,Y) е

$Y \setminus X$	1	2
1	0.5	0.1
2	0.1	0.3

а) Да се одредат маргиналните закони на распределба на случајните променливи X и Y.

б) Дали случајните променливи X и Y се независни?

в) Да се пресмета $P(2X \le Y)$.

[а) $X:\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$, $Y:\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$,

б) X и Y се зависни случајни променливи,

в) $P(2X \le Y)=0.5$.]

37. Истовремено се фрлаат две различни коцки за играње. Нека случајната променлива X го означува бројот на коцки на кои паднал парен број, а случајната променлива Y ја означува апсолутната вредност од разликата на паднатите броеви на двете коцки. Да се најде заедничката распределба на случајниот вектор (X,Y), маргиналните распределби на X и Y и условниот закон на распределба $X\,|\,Y=4$. Колкав е коефициентот на корелација ρ_{XY}?

$Y\setminus X$	0	1	2	$p_Y(y_j)$
0	3/36	0	3/36	6/36
1	0	10/36	0	10/36
2	4/36	0	4/36	8/36
3	0	6/36	0	6/36
4	2/36	0	2/36	4/36
5	0	2/36	0	2/36
$p_X(x_i)$	9/36	18/36	9/36	1

$$X\,|\,Y=4:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{XY}=0.$$

38. Се фрлаат две различно обоени коцки за играње. Ако збирот на добиените броеви е помал од 4, тогаш два пати се фрла монета. Нека случајната променлива X го означува збирот на двете коцки, а случајната променлива Y го означува бројот на паднати писма на монетата при двете фрлања. Да се определи заедничкиот закон на распределба на случајниот вектор (X,Y), маргиналните закони на распределба на X и Y и условниот закон на распределба $Y\,|\,X=6$. Дали X и Y се независни случајни променливи?

Y\X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	p_Y
0	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{135}{144}$
1	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{6}{144}$
2	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{72}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{144}$
p_X	$\frac{4}{144}$	$\frac{8}{144}$	$\frac{12}{144}$	$\frac{16}{144}$	$\frac{20}{144}$	$\frac{24}{144}$	$\frac{20}{144}$	$\frac{16}{144}$	$\frac{12}{144}$	$\frac{8}{144}$	$\frac{4}{144}$	1

$$Y \mid X = 6 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

X и Y се зависни случајни променливи.

39. Нека случајната променлива X има Пуасонова распределба со параметар $a > 0$ и случајната променлива $Y|X = n$ е биномно распределена со параметри $n \in \mathbf{N}$ и $p > 0$. Да се определи заедничкиот закон на распределба на случајниот вектор (X,Y), маргиналниот закон на распределба на случајната променлива Y и условниот закон на распределба $X|Y = k,\ k \in \mathbf{N}_0$. Каква распределба има случајната променлива Y?

Упатство. Се користи равенството $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(aq)^i}{i!} = e^{aq}$, $q = 1 - p$.

$$[\ P(X = n, Y = k) = P(X = n) \cdot P(Y = k | X = n) = \frac{p^k (1-p)^{n-k} a^n e^{-a}}{k!(n-k)!},$$

$$Y : \mathscr{P}(ap)\ .]$$

40. Случајниот вектор (X,Y) има густина на распределба

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 4y(x-y)e^{-(x+y)}, & 0 < x < \infty, 0 < y \le x \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

а) Да се одредат маргиналните густини на распределба на случајните променливи X и Y.

б) Дали случајните променливи X и Y се независни?

$$[\ \text{а)}\ f_X(x) = \begin{cases} e^{-2x}(4x+8) + (4x-8)e^{-x}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{инаку} \end{cases},$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4ye^{-2y}, & 0 < y < \infty \\ 0, & \text{инаку} \end{cases},$$

б) X и Y се зависни.]

41. Случајниот вектор (X,Y) е рамномерно распределен во внатрешноста на квадратот K со темиња

$$A(1,1),\ B(-1,1),\ C(-1,-1) \text{ и } D(1,-1).$$

а) Да се одреди заедничката густина на распределба $f_{XY}(x,y)$.

б) Да се најдат маргиналните густини $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

в) Да се определи условната густина $f_X(x\,|\,y)$.

г) Дали X и Y се независни случајни променливи?

д) Колкав е коефициент на корелација ρ_{XY}?

[а) $f_{XY}(x,y)=\begin{cases}1/4, & (x,y)\in K\\ 0\ , & (x,y)\notin K\end{cases}$,

б) $f_X(x)=\begin{cases}1/2, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}1/2, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}$,

в) $f_X(x\,|\,y)=\begin{cases}1/2, & -1\le x\le 1, -1\le y\le 1\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}$,

г), д) X и Y се независни случајни променливи, па $\rho_{XY}=0$.]

42. Два апарати произведени во две различни фабрики имаат експоненцијално распределен век на траење. Едниот апарат има очекуван век на траење од 5 години, а другиот 8 години. Под претпоставка дека апаратите работат независно, колкава е веројатноста дека апаратот што има подолго очекувано време на траење, ќе трае двапати подолго од другиот?

[0.09.]

43. Густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) е

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+y)}, & 0\le x<y\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

Да се определи условното очекување $E(Y|X=x)$.

$$[\,E(Y|X=x)=\begin{cases} x+1, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}.]$$

44. Растојанието X (мерено во километри) на епицентарот на потенцијалните земјотреси од една нуклеарна централа, во радиус од 50 километри, е случајна променлива со следнава густина на распределба:

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{2500}, & 0\le x\le 50 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

Јачината Y на потенцијалните земјотреси, која може да варира од 5 до 9 мерни единици, е случајна променлива со следнава густина на распределба:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{3(9-y)^2}{64}, & 5\le y\le 9 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

Претпоставуваме дека X и Y се независни случајни променливи. Да се определи веројатноста дека следниот ќе има епицентар на растојание најмногу 25 километри од нуклеарната централа и ќе биде со јачина поголема од 8 мерни единици.

$$[\,P(X\le 25, Y>8)\approx 0.0039.]$$

45. При маневрирање во процесот на слетување, поради различни видови грешки, вселенските летала ја промашуваат целта на слетување. Ако целта на слетување се смета за координатен почеток, тогаш координатите на местото на слетување се случајни променливи X и Y со маргинални густини на распределба:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad -\infty<x<\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2\sigma^2}, \quad -\infty<y<\infty.$$

Да се пресмета веројатноста за слетување во круг со радиус $a>0$ и центар во координатниот почеток, ако случајните променливи X и Y се независни.

$$[\,P(X^2+Y^2\le a)=1-e^{-a^2/2\sigma^2}.]$$

46. Нека $F_{XY}(x,y)$ и $f_{XY}(x,y)$ се заедничката функција и густина на распределба на случајниот вектор (X,Y), соодветно, а $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ се маргиналните функции на распределба на случајните променливи X и Y, соодветно. Да се покаже дека важи:

$$F_{XY}\left(x,y \middle| x_1 < X \le x_2\right)=\begin{cases} \dfrac{F_{XY}(x_2,y)-F_{XY}(x_1,y)}{F_X(x_2)-F_X(x_1)}, & x > x_2 \\ \dfrac{F_{XY}(x,y)-F_{XY}(x_1,y)}{F_X(x_2)-F_X(x_1)}, & x_1 < x \le x_2 \\ 0, & x \le x_1 \end{cases},$$

$$f_{XY}\left(x,y \middle| x_1 < X \le x_2\right)=\begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x,y)}{F_X(x_2)-F_X(x_1)}, & x_1 < x \le x_2 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases},$$

каде што $F_{XY}\left(x,y \middle| x_1 < X \le x_2\right)$ и $f_{XY}\left(x,y \middle| x_1 < X \le x_2\right)$ се соодветно условната функција и условната густина на распределба на случајниот вектор (X,Y) под услов $\left(x_1 < X \le x_2\right)$.

47. Нека случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба на единечниот круг. Да се покаже дека случајните променливи X и Y се некорелирани (т.е. важи $\operatorname{cov}(X,Y)=0$), но не се независни.

48. Нека $X = X_1 + X_2$ и $Y = X_2 + X_3$, каде што X_1, X_2 и X_3 се случајни променливи. Да се изрази коефициентот на корелација ρ_{XY} преку стандардните девијации σ_{X_1}, σ_{X_2} и σ_{X_3} во случај кога X_1, X_2 и X_3 се некорелирани.

$$[\rho_{XY} = \sigma_{X_2}^2 \left[\left(\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2\right)\left(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_{X_3}^2\right)\right]^{-1/2}.]$$

49. Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се независни случајни променливи со Бернулиева распределба со параметар p, $0 < p < 1$. Да се покаже дека случајната променлива $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ има биномна распределба $\mathcal{B}(n, p)$.

50. Случајните променливи X и Y го претставуваат векот на траење на два апарати мерен во часови, при што заедничката густина на распределба на X и Y е

$$f_{XY}(x,y)=0.02e^{-0.1x-0.2y}.$$

а) Да се определат маргиналните густини на распределба $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

б) Дали X и Y се независни случајни променливи?

в) Да се најде веројатноста дека сумата од времетраењата на двата апарати е поголема од 10 часа.

[а) $f_X(x)=\begin{cases}0.1e^{-0.1x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}0.2e^{-0.1y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$,

б) X и Y се независни,

в) $P(X+Y>10)=0.6.$]

51. Густината на случајниот вектор (X,Y) е

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & -1\le x\le 1, -1\le y\le 1\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

Да се определат функцијата и густината на распределба на случајната променлива $Z=X+Y$.

[$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le -2\\ \dfrac{z^4}{96}+\dfrac{z}{3}+\dfrac{1}{2}, & -2\le z<0\\ -\dfrac{z^4}{96}+\dfrac{z}{3}+\dfrac{1}{2}, & 0\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$,

$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\notin[-2,2]\\ \dfrac{z^3}{24}+\dfrac{1}{3}, & z\in(-2,0).\\ -\dfrac{z^3}{24}+\dfrac{1}{3}, & z\in[0,2)\end{cases}$]

52. Случајната променлива X има рамномерна распределба $\mathcal{U}(0,1)$, а случајната променлива $Y\,|\,X=x$ има рамномерна распределба $\mathcal{U}\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2}\right)$.

а) Да се определат заедничката густина на распределба $f_{XY}(x,y)$ и маргиналната густина $f_Y(y)$.

б) Да се определи условното очекување $E(Y\,|\,X=x)$.

в) Да се најдат функцијата и густината на распределба на случајната променлива $Z=Y-\frac{X}{2}$.

$$[\text{а})\ f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{1-x}, & x\in(0,1),\ y\in\left(\dfrac{x}{2},\dfrac{1}{2}\right)\\ 0, & \text{инаку}\end{cases},$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}-2\ln(1-2y), & y\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\\ 0, & y\notin\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\end{cases},$$

$$\text{б})\ E(Y\,|\,X=x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{4}, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases},$$

$$\text{в})\ F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 2z(1-\ln 2z), & 0\le z<\dfrac{1}{2}\\ 1, & z\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}.]$$

53. Нека случајниот вектор (X,Y) има дводимензионална нормална распределба $\mathcal{N}(0,0,\sigma,\sigma,0)$, $\sigma>0$.

а) Да се определи функцијата на распределба на случајната променлива $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$.

б) Да се покаже дека густината на распределба на $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ е

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}.$$

Упатство. а) За решавање на добиениот двоен интеграл се користат поларни координати: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ J=\rho$.

54. Нека независните случајни променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ имаат иста распределба со функција на распределба $F(x)$. Да се покаже дека важи

$$P(\min(X_1, X_2, ..., X_n)\le z)=1-(1-F(z))^n,$$

$$P(\max(X_1, X_2, ..., X_n)\le z)=(F(z))^n.$$

55. Нека независните случајни променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ имаат густина на распределба

$$f_{X_j}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\quad j\in\{1, 2, ..., n\},$$

т.е. $X_j : \mathcal{N}(0,1),\ j\in\{1, 2, ..., n\}$. Да се одредат математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива $Y=\sum_{j=1}^{n}X_j^2$.

$[E(Y)=n, D(Y)=2n.]$

56. Нека случајниот вектор (X,Y) има дводимензионална нормална распределба $\mathcal{N}(0,0,\sigma,\sigma,0)$, $\sigma>0$. Ако $U=\sqrt{X^2+Y^2}$ и $V=\dfrac{X}{Y}$, да се определи густината на распределба на случајниот вектор (U,V). Дали U и V се независни случајни променливи?

Упатство. $f_{XY}(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$, $X=\pm\dfrac{UV}{\sqrt{1+V^2}}$ и $Y=\pm\dfrac{U}{\sqrt{1+V^2}}$.

$[\ f_{UV}(u,v)=\dfrac{1}{\pi\sigma^2}\cdot\dfrac{u}{1+v^2}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$,

U и V се независни променливи бидејќи важи

$f_{UV}(u,v)=f_U(u)f_V(v), \forall u,v.]$

5. МОМЕНТ ГЕНЕРИРАЧКА И КАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЈА НА СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЛИВА

Момент генерирачка функција

Момент генерирачка функција (МГФ) на случајната променлива X се дефинира со

$$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\begin{cases}\sum\limits_i e^{tx_i}p_X(x_i), & \text{ако } X \text{ е дискретна променлива}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx, & \text{ако } X \text{ е непрекината променлива}\end{cases},$$

каде што t е реална променлива.

Момент генерирачката функција и почетните моменти се поврзани со формулата:

$$m_n=E\left(X^n\right)=M_X^{(n)}(0),\ n=1,2,\dots.$$

Карактеристична функција

Нека X е случајна променлива. Комплексната функција дефинирана со

$$\Phi_X(t)=E\left(e^{jtX}\right)=\begin{cases}\sum\limits_i e^{jtx_i}p_X(x_i), & \text{ако } X \text{ е дискретна променлива}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} f_X(x)dx, & \text{ако } X \text{ е непрекината променлива}\end{cases}$$

се вика ***карактеристична функција*** на случајната променлива X, каде што t е реална променлива и j е имагинарната единица.

Забележуваме дека, $\Phi_X(t)=M_X(jt)$, од каде следува дека

$$m_n = E\left(X^n\right)=\frac{1}{j^n}\Phi_X^{(n)}(0),\ n=1,2,\dots.$$

Инверзна формула

За непрекината случајна променлива X важи

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-jtx}\Phi_X(t)dt\,,$$

а за дискретна случајна променлива X

$$p_X(x) = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{2u}\int_{-u}^{u} e^{-jtx}\Phi_X(t)dt\,.$$

Карактеристичната функција на сума од независни случајни променливи $X_1, X_2,..., X_n$ е еднаква на производот од карактеристичните функции на случајните променливи $X_1, X_2,..., X_n$.

1. Да се определат момент генерирачката и карактеристичната функција на дискретната случајна променлива $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$, а потоа преку момент генерирачката функција да се пресметаат првите два почетни моменти и $D(X)$.

Решение.

Момент генерирачката функција $M_X(t)$ и карактеристичната функција $\Phi_X(t)$ се:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) = \sum_k e^{tx_k} P(X = x_k) = \\ &= e^{-t}P(X=-1) + e^{t\cdot 0}P(X=0) + e^{2t}P(X=2) = \\ &= 0.2e^{-t} + 0.1 + 0.7e^{2t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= E\left(e^{jtX}\right) = \sum_k e^{jtx_k} P(X = x_k) = \\ &= e^{-jt}P(X=-1) + e^{jt\cdot 0}P(X=0) + e^{2jt}P(X=2) = \\ &= 0.2e^{-jt} + 0.1 + 0.7e^{2jt}. \end{aligned}$$

Карактеристичната функција може да се определи и од момент генерирачката функција, користејќи ја врската

$$\Phi_X(t) = M_X(jt) = 0.2e^{-jt} + 0.1 + 0.7e^{2jt}.$$

Од тоа што $M'_X(t) = -0.2e^{-t} + 1.4e^{2t}$ и $M''_X(t) = 0.2e^{-t} + 2.8e^{2t}$ имаме:

$$m_1 = E(X) = M'_X(0) = -0.2 + 1.4 = 1.2,$$

$$m_2 = E\left(X^2\right) = M''_X(0) = 0.2 + 2.8 = 3$$

и $D(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 = 3 - 1.2^2 = 1.56$.

2. Да се најдат момент генерирачката и карактеристичната функција на случајната променлива X, ако таа има:

а) Бернулиева распределба со параметар p $(0 < p < 1)$;

б) биномна распределба со параметри n и p $(n \in \mathbf{N},\ 0 < p < 1)$;

в) Пуасонова распределба со параметар λ $(\lambda > 0)$;

г) експоненцијална распределба со параметар a $(a > 0)$;

д) стандардизирана нормална распределба.

Потоа, со помош на момент генерирачката функција да се определи $E(X)$.

Решение.

а) Од законот на распределба $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ следува дека

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = e^{t\cdot 0}P(X=0) + e^t P(X=1) = 1 - p + pe^t.$$

Од тоа што $M'_X(t) = pe^t$ имаме $m_1 = E(X) = M'_X(0) = p$.

За карактеристичната функција добиваме:

$$\Phi_X(t) = M_X(jt) = 1 - p + pe^{jt}.$$

б) Од тоа што $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k \in \{0, 1, 2, ..., n\},\ q = 1 - p$ следува

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{k=0}^{n} e^{tx_k} P(X = x_k) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k q^{n-k}.$$

Од биномната формула следува дека $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k q^{n-k} = (pe^t + q)^n$, па според тоа

$$M_X(t)=(pe^t+q)^n.$$

Првот извод на функцијата $M_X(t)$ е $M'_X(t)=npe^t(pe^t+q)^{n-1}$. Тогаш

$$m_1=E(X)=M'_X(0)=np(p+q)^{n-1}=np.$$

Карактеристичната функција е

$$\Phi_X(t)=M_X(jt)=(pe^{jt}+q)^n.$$

в) $M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$, $\Phi_X(t)=M_X(jt)=e^{\lambda(e^{jt}-1)}$, $E(X)=\lambda.$

г) $M_X(t)=\dfrac{a}{a-t}$, $t<a$, $\Phi_X(t)=M_X(jt)=\dfrac{a}{a-jt}$, $E(X)=\dfrac{1}{a}.$

д) Густината на распределба на случајната променлива $X\colon \mathcal{N}(0,1)$ е $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Од тоа што $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_X(t)dt=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$, за момент генерирачката функција добиваме:

$$M_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f_X(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2-2xt+t^2-t^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}e^{\frac{t^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}dx=e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Првиот извод на момент генерирачката функција е $M'_X(t)=te^{\frac{t^2}{2}}$, па имаме $m_1=E(X)=M'_X(0)=0$.

Карактеристичната функција е $\Phi_X(t)=M_X(jt)=e^{-\frac{t^2}{2}}$.

3. Да се определи законот на распределба на дискретната случајна променлива X која има карактеристична функција $\Phi_X(t)=\dfrac{3+\cos t}{4}$.

Решение.

Од тоа што $\cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2$ имаме:

$$\Phi_X(t) = \frac{3}{4} + \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{8} = \frac{3}{4} e^{j\cdot 0} + \frac{1}{8} e^{jt} + \frac{1}{8} e^{-jt}.$$

Од дефиницијата на карактеристична функција следува

$$\Phi_X(t) = \sum_i e^{jtx_i} p_X(x_i),$$

па законот на распределба на *X* е

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

4. Нека $M_X(t)$ е момент генерирачка функција на случајната променлива X. Да се покаже дека момент генерирачката функција на случајната променлива $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, е $M_Y(t) = e^{tb} M_X(at)$.

Добиениот резултат, заедно со резултатот од задача 2 д) да се искористи за наоѓање на момент генерирачката функција на случајната променлива *Y* која има нормална распределба со параметри μ и σ $(\mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0)$. Потоа, да се определи карактеристичната функција на случајната променлива *Y*.

Решение.

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(aX+b)}\right) = E\left(e^{taX} \cdot e^{tb}\right) = e^{tb} E\left(e^{taX}\right) = e^{tb} M_X(at).$$

Познато е дека, ако $X : \mathcal{N}(0,1)$ тогаш $Y = \sigma X + \mu : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Од задача 2 д), $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, па добиваме:

$$M_Y(t) = e^{t\mu} M_X(\sigma t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

За карактеристичната функција на Y имаме:

$$\Phi_Y(t) = M_Y(jt) = e^{\mu jt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

5. Со помош на карактеристична функција да се определи густината на случајната променлива $Y = X^2$, ако X има нормална распределба $\mathcal{N}(0,\sigma)$, $\sigma > 0$.

Решение.

Бидејќи $X\colon \mathcal{N}(0,\sigma)$, густината на случајната променлива X е

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

$$\Phi_Y(t) = E\left(e^{jtY}\right) = E\left(e^{jtX^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx^2} f_X(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{jtx^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{\begin{aligned} & x^2 = y \\ & dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{jty} \frac{e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}}{\sqrt{y}} dy.$$

Од дефиницијата на карактеристична функција имаме:

$$\Phi_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jty} f_Y(y)dy.$$

Со споредување на последните две равенства се добива

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\, y}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}.$$

6. Користејќи карактеристични функции да се покаже дека ако независните случајни променливи X и Y имаат Пуасонова распределба со параметар $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, соодветно, тогаш случајната променлива $Z = X + Y$ има Пуасонова распределба со параметар $\lambda_1 + \lambda_2$.

Решение.

Карактеристични функции на случајните променливи X: $\mathcal{P}(\lambda_1)$ и Y: $\mathcal{P}(\lambda_2)$ се:

$$\Phi_X(t) = e^{\lambda_1(e^{jt}-1)} \quad \text{и} \quad \Phi_X(t) = e^{\lambda_2(e^{jt}-1)},$$

соодветно. Тие се независни случајни променливи, па

$$\Phi_Z(t) = E\left(e^{jtZ}\right) = E\left(e^{jt(X+Y)}\right) = E\left(e^{jtX} e^{jtY}\right) =$$
$$= E\left(e^{jtX}\right)E\left(e^{jtY}\right) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

Значи $\Phi_Z(t) = e^{\lambda_1(e^{jt}-1)}e^{\lambda_2(e^{jt}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{jt}-1)}$, што претставува карактеристична функција на Пуасоново распределена случајна променлива со параметар $\lambda_1 + \lambda_2$, т.е. $Z : \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

7. Да се определи карактеристичната функција на случајната променлива $Z = X + Y$ ако X и Y се независни случајни променливи кои имаат експоненцијална распределба со параметар a $(a > 0)$.

Решение.

Од тоа што $X : \mathcal{E}(a)$ и $Y : \mathcal{E}(a)$ следува дека нивните карактеристични функции се $\Phi_X(t) = \Phi_Y(t) = \dfrac{a}{a - jt}$.

Од независноста на случајните променливи X и Y добиваме дека карактеристичната функција на Z е

$$\Phi_Z(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) = \frac{a^2}{(a - jt)^2}.$$

8. Користејќи карактеристични функции, да се покаже дека ако независните случајни променливи X_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, имаат нормална распределба $\mathcal{N}(0, 1)$, тогаш случајната променлива

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$$

има нормална распределба $\mathcal{N}(0, 1)$.

Решение.

Од тоа што $X_i : \mathcal{N}(0, 1)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, следува

$$\Phi_{X_i}(t) = e^{-t^2/2}, \ i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

За карактеристичната функција на случајната променлива

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$$

добиваме:

$$\Phi_Y(t)=E\left(e^{jtY}\right)=E\left(e^{jt\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}}\right)=E\left(e^{\frac{jtX_1}{\sqrt{n}}}e^{\frac{jtX_2}{\sqrt{n}}}\cdots e^{\frac{jtX_n}{\sqrt{n}}}\right).$$

Од независноста на случајните променливи $X_i, i\in\{0,1,\ldots,n\}$, следува

$$\Phi_Y(t)=E\left(e^{\frac{jtX_1}{\sqrt{n}}}\right)E\left(e^{\frac{jtX_2}{\sqrt{n}}}\right)\cdots E\left(e^{\frac{jtX_n}{\sqrt{n}}}\right)=$$

$$=\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\Phi_{X_2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\cdots\Phi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=e^{-\frac{t^2}{2n}}\cdots e^{-\frac{t^2}{2n}}=\left(e^{-\frac{t^2}{2n}}\right)^n=e^{-\frac{t^2}{2}},$$

од каде следува дека Y има нормална распределба $\mathcal{N}(0,1)$.

9. Честичка се движи по права линија со еднакви независни чекори со должина од една единица. Честичката се движи на десно со веројатност p или на лево со веројатност q ($p+q=1$). Чекорите се позитивни ако честичката се движи на десно, а негативни ако се движи на лево. Да се одредат законот на распределба и карактеристичната функција на случајната променлива Y која ја опишува позицијата на честичката по изминати n чекори.

Решение.

Позитивниот чекор го означуваме со 1, а негативниот со -1. Воведуваме случајна променлива X_i која го претставува исходот од $i-$тиот чекор, $i\in\{1,2,...,n\}$. Тогаш, X_i има Бернулиева распределба со параметар $p, 0<p<1$, т.е.

$$X_i:\begin{pmatrix}-1 & 1\\ q & p\end{pmatrix},\quad i\in\{1,2,...,n\}.$$

Случајната променлива Y, дефинирана со

$$Y=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

ја опишува позицијата на честичката по n изминати чекори. Множеството вредности на Y е $R_Y=\{-n,-n+1,...,-1,0,1,...,n-1,n\}$. За да ги одредиме веројатностите $P(Y=k), k \in R_Y$, прво ќе ја најдеме карактеристичната функција на Y.

Карактеристичната функција на случајната променлива X_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, е

$$\Phi_{X_i}(t) = E\left(e^{jtX_i}\right) = pe^{jt} + qe^{-jt}.$$

Тогаш, поради независноста на $X_i, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, имаме:

$$\Phi_Y(t) = \Phi_{X_1}(t)\Phi_{X_2}(t)...\Phi_{X_n}(t) = (pe^{jt} + qe^{-jt})^n.$$

Функцијата $\Phi_Y(t)$ ја запишуваме на следниов начин:

$$\Phi_Y(t) = e^{-jnt}(pe^{2jt} + q)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} e^{j(2i-n)t}.$$

Заменуваме $k = 2i - n$ и добиваме:

$$\Phi_Y(t) = \sum_{k=-n}^{n} \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2} e^{jkt}.$$

Од тоа што $\Phi_Y(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega} P(Y=k)$, законот на распределба на Y е

$$P(Y=k) = \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}, \; k \in \{-n, -(n-1), ..., n-1, n\}.$$

Може да забележиме дека ако n е парен број, тогаш и k е парен број, а ако n е непарен број, тогаш и k е непарен број.

Дополнителни задачи

10. Во серија од n производи има m неисправни. Поради проверка на квалитетот на производите се избира примерок од r прозводи $(m < r < n - m)$. Да се определи карактеристичната функција на случајната променлива X : број на неисправни производи во примерокот.

[X има биномна распределба со параметри $p=\frac{m}{n}$ и r,

$$\Phi_X(t)=\left(1+\frac{m}{n}\left(e^{jt}-1\right)\right)^r.]$$

11. Да се најде карактеристичната функција на случајната променлива X, ако таа има:

а) Кошиева распределба, односно има густина на распределба

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2};$$

б) двострана експоненцијална распределба, односно има густина на распределба $f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

[а) $\Phi_X(t)=e^{-|t|}$, б) $\Phi_X(t)=\frac{1}{1+t^2}$.]

12. Да се определи законот на распределба на дискретната случајна променлива X која има карактеристична функција $\Phi_X(t)=\cos^2 t$.

$$[\,X:\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}.]$$

13. Да се определи густината на распределба на непрекинатата случајна променлива X, ако таа има карактеристична функција $\Phi_X(t)=\frac{1}{1+t^2}$.

[$f_X(x)=0.5e^{-x}, x\in\mathbf{R}$.]

14. Со помош на карактеристична функција да се определи густината на распределба на случајната променлива $Y=\sin X$, ако X има рамномерна распределба на интервалот $\left(-\pi/2,\pi/2\right)$.

$$[\,f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & |y|<1\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.]$$

6. ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ

Неравенство на Чебишев

Ако X е ненегативна случајна променлива за која постои $E\left(X^2\right)$, тогаш за секое $k > 0$ важи:

$$P(X \geq k) \leq \frac{E\left(X^2\right)}{k^2}.$$

Ако се познати математичкото очекување m_X и дисперзијата σ_X на случајната променлива X, тогаш ова неравенство се среќава во еден од следните облици:

$$P\left(|X - m_X| \geq k\sigma_X\right) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{или} \quad P\left(|X - m_X| \geq k\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{k^2}.$$

Централна гранична теорема

Нека $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ е низа од независни, еднакво распределени случајни променливи дефинирани над ист простор, со математичко очекување m и дисперзија σ^2. Дефинираме нова случајна променлива:

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Распределбата на Z_n тежи кон стандардизирана нормална распределба, кога $n \to \infty$, односно важи

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z),$$

каде што $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Теорема на Моавр–Лаплас

Ако во биномната распределба $\mathscr{B}(n, p)$, $n \to \infty$, тогаш а) $P(X=k)\approx\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $q=1-p$, рамномерно по x во секој конечен интервал.

б) $P\left(a<\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}\le b\right)\to\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, $(-\infty\le a,b\le\infty)$.

1. Дадена е низата $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ од независни случајни променливи кои имаат иста распределба $X_k:\begin{pmatrix}-10 & 10\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $k\in\mathbf{N}$.

а) Да се определи распределбата на случајната променлива

$$\overline{X}_5=\frac{1}{5}(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5).$$

б) Да се најде веројатноста $P\left(\dfrac{1}{100}\sum\limits_{k=1}^{100}X_k=0\right)$.

в) Да се оцени веројатноста $P\left(\left|\dfrac{1}{100}\sum\limits_{k=1}^{100}X_k\right|\ge 1\right)$ со примена на неравенството на Чебишев.

г) Со примена на централната гранична теорема, приближно да се пресмета веројатноста

$$P\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}X_k\right|\le 1\right).$$

Решение.

а) Множеството вредности на случајната променлива $\overline{X}_5$ е

$$R_{\overline{X}_5}=\{-10,-6,-2,\ 2,\ 6,\ 10\}.$$

Случајната променлива $\overline{X}_5$ има вредност -10, ако променливите X_1,X_2,X_3,X_4 и X_5 се -10. Од независноста на случајните променливи X_k имаме:

$$P\left(\overline{X}_5=-10\right)=P(X_1=X_2=X_3=X_4=X_5=-10)=$$
$$=P(X_1=-10)P(X_2=-10)P(X_3=-10)$$
$$\cdot P(X_4=-10)P(X_5=-10)=\left(\frac{1}{2}\right)^5,$$

Случајната променлива $\overline{X}_5$ добива вредност -6 ако една од променливите X_1, X_2, X_3, X_4 или X_5 е 10, а останатите четири се -10, односно

$$P\left(\overline{X}_5=-6\right)=5\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4=5\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

$\overline{X}_5$ добива вредност -2 ако две од променливите X_1, X_2, X_3, X_4 или X_5 се 10, а останатите се -10, односно

$$P\left(\overline{X}_5=-2\right)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Аналогно се добиваат и останатите веројатности, па законот на распределба на $\overline{X}_5$ е

$$\overline{X}_5:\begin{pmatrix}-10 & -6 & -2 & 2 & 6 & 10\\ 2^{-5} & 5\cdot 2^{-5} & 10\cdot 2^{-5} & 10\cdot 2^{-5} & 5\cdot 2^{-5} & 2^{-5}\end{pmatrix}.$$

б) Збирот $\overline{X}_{100}=\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}X_k$ добива вредност 0, кога 50 собироци се -10, а 50 собироци 10, односно

$$P\left(\overline{X}_{100}=0\right)=\binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\approx 0.07979.$$

в) Од тоа што за секое $i=1,2,\ldots,100$,

$$E(X_i)=-10\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{1}{2}=0 \text{ и } E\left(X_i^2\right)=100\cdot\frac{1}{2}+100\cdot\frac{1}{2}=100$$

добиваме:

$$D(X_i)=E\left(X_i^2\right)-\left(E(X_i)\right)^2=100,$$

па

$$E(\overline{X}_{100}) = E\left(\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} X_k\right) = \frac{1}{100}\left(\sum_{k=1}^{100} E(X_k)\right) = \frac{1}{100}\cdot 100\cdot E(X_k) = 0$$

и

$$D(\overline{X}_{100}) = D\left(\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} X_k\right) = \frac{1}{100^2}\left(\sum_{k=1}^{100} D(X_k)\right) = \frac{1}{100}\cdot D(X_k) = 1.$$

Со примена на неравенството на Чебишев добиваме:

$$P\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} X_k\right| \geq 1\right) = P\left(\left|\overline{X}_{100}\right| \geq 1\right) = P\left(\left|\overline{X}_{100} - E(\overline{X}_{100})\right| \geq 1\right) \leq \frac{D(\overline{X}_{100})}{1^2} = 1.$$

г) $P\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} X_k\right| \leq 1\right) = P\left(-1 \leq \overline{X}_{100} \leq 1\right) =$

$$= P\left(\frac{-1 - E(\overline{X}_{100})}{\sqrt{D(\overline{X}_{100})}} \leq \frac{\overline{X}_{100} - E(\overline{X}_{100})}{\sqrt{D(\overline{X}_{100})}} \leq \frac{1 - E(\overline{X}_{100})}{\sqrt{D(\overline{X}_{100})}}\right) =$$

$$= P\left(-1 \leq \frac{\overline{X}_{100} - E(\overline{X}_{100})}{\sqrt{D(\overline{X}_{100})}} \leq 1\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) =$$

$$= 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6826.$$

2. Веројатноста за појавување на настанот A во секој од 10000 независни обиди е $p = 1/4$.

а) Со помош на неравенството на Чебишев да се оцени веројатноста дека релативната фреквенција на појавување на настанот A се разликува од веројатноста p по апсолутна вредност за помалку од 0.01.

б) Со помош на теоремата на Моавр-Лаплас приближно да се пресмета веројатноста дека релативната фреквенција на појавување на настанот A се разликува од веројатноста p по апсолутна вредност најмногу за 0.01.

Решение.

Нека случајната променлива X е број на појавувања на настанот A во 10000 независни обиди. Јасно е дека $X : \mathcal{B}(10000, 1/4)$. Тогаш

$$E(X) = np = 2500 \;\text{ и }\; D(X) = npq = 1875.$$

Релативната фреквенција на појавување на настанот A во 10000 независни обиди е случајна променлива $Y = X/n = X/10000$, за која

$$E(Y) = E(X/n) = E(X)/n = p = 1/4$$

и

$$D(Y) = D(X/n) = \frac{D(X)}{n^2} = 0.1875 \cdot 10^{-4}.$$

а) Користејќи го неравенството на Чебишев добиваме:

$$P\big(|Y - p| \geq 0.01\big) = P\big(|Y - E(Y)| \geq 0.01\big) \leq \frac{D(Y)}{0.01^2} = \frac{3}{16},$$

од каде следува дека бараната веројатност е

$$P\big(|Y - p| < 0.01\big) = 1 - P\big(|Y - p| \geq 0.01\big) \geq 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}.$$

б) Од теоремата на Моавр-Лаплас се добива

$$\begin{aligned} P(|Y - p| \leq 0.01) &= P(-0.01 \leq Y - p \leq 0.01) = \\ &= P(-0.01 \leq Y - E(Y) \leq 0.01) = \\ &= P\left(-\frac{0.01}{\sqrt{0.1875 \cdot 10^{-4}}} \leq \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \leq \frac{0.01}{\sqrt{0.1875 \cdot 10^{-4}}}\right) = \\ &= P\left(-2.31 \leq \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \leq 2.31\right) = \\ &= \Phi(2.31) - \Phi(-2.31) = 2\Phi(2.31) - 1 \approx 0.9792. \end{aligned}$$

3. Со еден инструмент изведени се 100 независни мерења на една физичка величина, чија точна вредност е a. Притоа, апсолутната грешка во секое мерење не е поголема од 0.2.

а) Да се оцени веројатноста дека аритметичката средина на резултатите од мерењата се разликува од a по апсолутна вредност за најмалку 0.05.

б) Со помош на неравенството на Чебишев да се определи колку најмалку мерења треба да се извршат за да аритметичката средина на резултатите од мерењата се разликува од a по апсолутна вредност за помалку од 0.02, со веројатност не помала од 0.9.

Решение.

Резултатот од секое мерење е случајна променлива X_i, $i \in \{1, 2, ..., 100\}$. Од условот на задачата следува дека случајните променливи X_i, $i \in \{1, 2, ..., 100\}$, се независни. Притоа, $E(X_i) = a$ и

$$| X_i - a | = \left| X_i - E(X_i) \right| \leq 0.2 ,$$

од каде следува дека

$$D(X_i) = E\left((X_i - E(X_i))^2 \right) \leq 0.2^2 = 0.04, \quad i \in \{1, 2, .., 100\}.$$

а) Аритметичката средина на резултатите од мерењата е случајна променлива $\overline{X}_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$ за која

$$E\left(\overline{X}_{100} \right) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = \frac{1}{100} 100a = a$$

и

$$D\left(\overline{X}_{100} \right) = \frac{1}{100^2} \sum_{i=1}^{100} D(X_i) \leq \frac{0.04 \cdot 100}{100^2} = 4 \cdot 10^{-4}.$$

Од неравенството на Чебишев добиваме:

$$P\left(\left| \overline{X}_{100} - a \right| \geq 0.05 \right) = P\left(\left| \overline{X}_{100} - E\left(\overline{X}_{100} \right) \right| \geq 0.05 \right) \leq \frac{D\left(\overline{X}_{100} \right)}{0.05^2} \leq \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0.05^2} = 0.16.$$

б) Дефинираме случајна променлива $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Тогаш,

$$E\left(\overline{X}_n \right) = a \quad \text{и} \quad D\left(\overline{X}_n \right) \leq \frac{0.04}{n}.$$

Потребно е да се определи n така што да важи неравенството $P\left(\left| \overline{X}_n - a \right| < 0.02 \right) \geq 0.9$, односно

$$1 - P\left(\left| \overline{X}_n - a \right| \geq 0.02 \right) \geq 0.9,$$

од каде се добива $P\left(\left| \overline{X}_n - a \right| \geq 0.02 \right) \leq 0.1$.

Од друга страна, од неравенството на Чебишев, имаме

$$P\left(\left|\overline{X}_n - a\right| \geq 0.02\right) = P\left(\left|\overline{X}_n - E\left(\overline{X}_n\right)\right| \geq 0.02\right) \leq \frac{D\left(\overline{X}_n\right)}{0.02^2} \leq \frac{0.04}{0.02^2 n}.$$

Од последните две неравенства се добива $\frac{0.04}{0.02^2 n} \leq 0.1$, односно $n \geq 1000$. Значи, треба да се извршат најмалку 1000 мерења.

4. На случаен начин се запишуваат цифри независно една од друга.

а) Да се пресмета веројатноста дека збирот на првите сто запишани цифри ќе биде меѓу 400 и 550.

б) Да се определи со веројатност 0.8, колку најмногу се разликува збирот на првите 160 запишани цифри од неговата очекувана вредност по апсолутна вредност.

Решение.

Нека *i*-тата запишана цифра, $i \in \{1, 2, 3, ...\}$, е случајна променлива X_i. Тогаш, X_i е дискретна случајна променлива со закон на распределба

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 9 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & \dots & 1/10 \end{pmatrix}, \quad i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...\},$$

од каде добиваме дека

$$E(X_i) = \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} x_i = 4.5, \quad E\left(X_i^2\right) = \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} x_i^2 = 28.5.$$

Во горните равенства се користи

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{и} \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Според тоа,

$$D(X_i) = E\left(X_i^2\right) - \left(E(X_i)\right)^2 = 28.5 - 20.25 = 8.25.$$

а) Збирот на првите сто запишани цифри е случајна променлива $X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ и за неа важи

$$E\left(X_{100}\right) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 100E(X_i) = 450,$$

$$D(X_{100})=\sum_{i=1}^{100}D(X_i)=100D(X_i)=825.$$

Со помош на централната гранична теорема, за бараната веројатност се добива

$$P(400\le X_{100}\le 550)=P\left(\frac{400-450}{\sqrt{825}}\le\frac{X_{100}-E(X_{100})}{\sqrt{D(X_{100})}}\le\frac{550-450}{\sqrt{825}}\right)=$$

$$=P\left(-1.74\le\frac{X_{100}-E(X_{100})}{\sqrt{D(X_{100})}}\le 3.48\right)=\Phi(3.48)-\Phi(-1.74)=$$

$$=\Phi(3.48)-1+\Phi(1.74)\approx 0.9995-1+0.91814=0.45882.$$

б) Дефинираме нова случајна променлива $X_{160}=\sum_{i=1}^{160}X_i$ и за неа

$$E(X_{160})=160\cdot 4.5=720,\quad D(X_{160})=160\cdot 8.25=1320.$$

Се бара број $k>0$ таков што $P(|X_{160}-E(X_{160})|\le k)=0.8$. Од централната гранична теорема добиваме:

$$0.8=P(|X_{160}-E(X_{160})|\le k)=P(-k\le X_{160}-E(X_{160})\le k)=$$

$$=P\left(\frac{-k}{\sqrt{1320}}\le\frac{X_{160}-E(X_{160})}{\sqrt{D(Y_{160})}}\le\frac{k}{\sqrt{1320}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{1320}}\right)-\Phi\left(\frac{-k}{\sqrt{1320}}\right)=2\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{1320}}\right)-1,$$

од каде што следува $\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{1320}}\right)=0.9$. Бидејќи $\Phi(1.29)=0.9$ се добива $\frac{k}{\sqrt{1320}}\approx 1.29$. Значи, $k\approx 46.5$.

5. а) Се изведуваат 400 независни фрлања на монета. Да се определи веројатноста дека бројот на паднати писма ќе се разликува од очекуваниот број на појавувања на писмо за помалку од 20 по апсолутна вредност.

б) Колку најмалку независни фрлања на монетата треба да се изведат за да бидеме сигурни со веројатност 0.95 дека бројот на паднати писма ќе се разликува од очекуваниот број на појавувања на писмо, за помалку од 10 по апсолутна вредност?

Решение.

а) Нека случајната променлива Y е број на паднати писма во 400 независни фрлања на монетата. Тогаш $Y:\mathcal{B}\left(400,\frac{1}{2}\right)$ и

$$D(Y)=npq=100\,.$$

Користејќи ја теоремата на Моавр-Лаплас, за бараната веројатност добиваме:

$$\begin{aligned}P\left(\left|Y-E(Y)\right|<20\right)&=P\left(-20<Y-E(Y)<20\right)=\\&=P\left(\frac{-20}{\sqrt{100}}<\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}<\frac{20}{\sqrt{100}}\right)=\\&=P\left(-2<\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}<2\right)=\\&=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1\approx 0.9544.\end{aligned}$$

б) Нека случајната променлива Z е број на паднати писма во n фрлања на монетата. Јасно е дека $Z:\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$. Тогаш $D(Z)=npq=n/4$.

Од условот на задачата имаме:

$$\begin{aligned}0.95=P\left(\left|Z-E(Z)\right|<10\right)&=P\left(-10<Z-E(Z)<10\right)=\\&=P\left(\frac{-10}{\sqrt{n/4}}<\frac{Z-E(Z)}{\sqrt{D(Z)}}<\frac{10}{\sqrt{n/4}}\right)=\\&=P\left(-\frac{20}{\sqrt{n}}<\frac{Z-E(Z)}{\sqrt{D(Z)}}<\frac{20}{\sqrt{n}}\right)=\\&=\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(-\frac{20}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right)-1,\end{aligned}$$

од каде што следува $2\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right)-1=0.95$, т.е. $\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right)=0.975.$

Од последната равенка имаме $\frac{20}{\sqrt{n}} \approx 1.960$, односно $n \approx 104.1$. Значи, треба да се извршат најмалку 105 фрлања на монетата, за со веројатноста 0.95, бројот на паднати писма се разликува од очекуваниот број на појавувања на писмо за помалку од 10 по апсолутна вредност.

6. Стрелец гаѓа во мета и со веројатност 0.5 погодува десетка, со веројатност 0.3 деветка, со веројатност 0.1 осмица, а веројатноста да погоди седмица, шестка или да промаши е иста и изнесува 0.1. Колкава е веројатноста дека во 500 независни гаѓања, стрелецот ќе освои повеќе од 4200 поени, ако при погодувањето на десетка, деветка и осмица добива по 10, 9 и 8 поени, соодветно, а во останатите случаи останува без поени?

Решение.

Нека X_i е случајната променлива: број на освоени поени во i-тото гаѓање, $i = \{1, 2, ..., 500\}$. Тогаш нејзините закон на распределба и математичко очекување се:

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 10 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$E(X_i) = 0 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.3 + 10 \cdot 0.5 = 0.8 + 2.7 + 5 = 8.5.$$

Бидејќи

$$E(X_i^2) = 0^2 \cdot 0.1 + 8^2 \cdot 0.1 + 9^2 \cdot 0.3 + 10^2 \cdot 0.5 = 6.4 + 24.3 + 50 = 80.7,$$

за дисперзијата имаме:

$$D(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 80.7 - 72.25 = 8.45.$$

Бројот на освоени поени во 500 независни гаѓања е случајна променлива $X_{500} = \sum_{i=1}^{500} X_i$ со математичко очекување и дисперзија:

$$E(X_{500}) = E\left(\sum_{i=1}^{500} X_i\right) = \sum_{i=1}^{500} E(X_i) = 500E(X_i) = 4250,$$

$$D(X_{500})=D\left(\sum_{i=1}^{500}X_i\right)=\sum_{i=1}^{500}D(X_i)=500D(X_i)=4225.$$

Бараната веројатност

$$P(X_{500}>4200)=1-P\left(X_{500}\le 4200\right)=$$
$$=1-P\left(\frac{X_{500}-E(X_{500})}{\sqrt{D(X_{500})}}\le\frac{4200-4250}{\sqrt{4225}}\right)=$$
$$=1-P\left(\frac{X_{500}-E(X_{500})}{\sqrt{D(X_{500})}}\le -0.769\right)=$$
$$=1-\Phi\left(-0.769\right)=1-\left(1-\Phi\left(0.769\right)\right)=$$
$$=\Phi\left(0.769\right)\approx 0.7794.$$

7. Еден студент решил компјутерот да му „помогне“ за да одлучи колку време да спрема еден испит. „Помошта“ на компјутерот се состои во тоа што компјутерот случајно избира броеви од множеството $\{0,1,2,...\}$. Познато е дека компјутерот го избира бројот k со веројатност $p_k=\frac{2}{3^{k+1}}$. Ако компјутерот избере непарен број, тогаш студентот треба да учи 1 час помалку, а ако избере парен број, тогаш треба да учи 1 час повеќе (0 се смета за парен број). Колкава е веројатноста дека по 100 случајни и независни бирања на броеви од страна на компјутерот, студентот треба да учи не помалку од 40, но не повеќе од 45 часа?

Решение.

Нека случајната променлива X_i е бројот на часови што треба да учи студентот кој се добива како резултат на i-тото случајно бирање на број од страна на комјутерот. Тогаш $X_i\in\{-1,+1\}$, $i\in\{1,2,\ldots,100\}$, и за веројатностите добиваме:

$$P(X_i=-1)=P\left(\text{избраниот број}\in\{1,3,5,...\}\right)=$$
$$=p_1+p_3+p_5+\cdots=\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\cdots=$$
$$=\frac{2}{3^2}\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\right)=\frac{2}{3^2}\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4},$$

$$P(X_i=1)=P\left(\text{избраниот број}\in\{0,2,4,6,...\}\right)=$$
$$=p_0+p_2+p_4+..=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+\cdots=$$
$$=\frac{2}{3}\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\right)=\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}.$$

Законот на распределба на случајната променлива X_i е

$$X_i:\begin{pmatrix}-1 & +1\\ 1/4 & 3/4\end{pmatrix},$$

од каде што $E(X_i)=1/2$ и $D(X_i)=3/4$.

Нека случајната променлива X_{100} е бројот на часови за учење што се добива по 100 случајни бирања на број од страна на компјутерот. Тогаш $X_{100}=\sum_{i=1}^{100}X_i$ и

$$E(X_{100})=100E(X_i)=50,\ D(X_{100})=100D(X_i)=75.$$

Од централната гранична теорема, за бараната веројатност добиваме:

$$P(40\le X_{100}\le 45)=P\left(\frac{40-50}{\sqrt{75}}\le\frac{X_{100}-E(X_{100})}{\sqrt{D(X_{100})}}\le\frac{45-50}{\sqrt{75}}\right)=$$
$$=P\left(-1.155\le\frac{X_{100}-E(X_{100})}{\sqrt{D(X_{100})}}\le-0.577\right)=$$
$$=\Phi(-0.577)-\Phi(-1.155)=$$
$$=1-\Phi(0.577)-1+\Phi(1.155)=$$
$$=\Phi(1.155)-\Phi(0.577)\approx 0.157.$$

8. Во процесот на собирање, броевите се заокружуваат на најблискиот цел број. Нека грешките при заокружувањето се независни случајни променливи кои се рамномерно распределени на интервалот $(-0.5, 0.5)$. Со помош на централната гранична теорема да се определи:

а) веројатноста дека апсолутната грешка на збирот од 1500 броеви ќе биде поголема од 15;

б) колку најмногу броеви треба да се соберат, за со веројатност поголема од 0.99, апсолутната грешка на добиениот збир биде помала од 15.

Решение.

Нека грешката при заокружување на i-тиот број, $i \in \{1,2,3,\ldots\}$, е случајна променлива X_i. Тогаш, X_i има рамномерна распределба на интервалот $(-0.5, 0.5)$ и

$$E(X_i) = \frac{-0.5+0.5}{2} = 0,\ D(X_i) = \frac{(0.5+0.5)^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Грешката при собирање на n заокружени броеви е случајна променлива $X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ и за неа важи:

$$E\left(X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nE(X_i) = 0,$$

$$D\left(X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = nD(X_i) = \frac{n}{12}.$$

а) Со помош на централната гранична теорема, за бараната веројатност се добива

$$\begin{aligned} P\left(\left|X_{1500}\right| > 15\right) &= 1 - P\left(\left|X_{1500}\right| \le 15\right) = 1 - P(-15 \le X_{1500} \le 15) = \\ &= 1 - P\left(\frac{-15-0}{\sqrt{125}} \le \frac{X_{1500} - E(X_{1500})}{\sqrt{D(X_{1500})}} \le \frac{15-0}{\sqrt{125}}\right) = \\ &= 1 - P\left(-1.341 \le \frac{X_{1500} - E(X_{1500})}{\sqrt{D(X_{1500})}} \le 1.341\right) = \\ &= 1 - \Phi(1.341) + \Phi(-1.341) = \\ &= 2 - 2\Phi(1.341) \approx 0.1802. \end{aligned}$$

б) Се бара за кое n важи неравенството $P\left(\left|X_n\right| < 15\right) \ge 0.99$. Од централната гранична теорема добиваме:

$$\begin{aligned} P\left(\left|X_n\right| < 15\right) &= P(-15 < X_n < 15) = \\ &= P\left(\frac{-15-0}{\sqrt{n/12}} \le \frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{D(X_n)}} \le \frac{15-0}{\sqrt{n/12}}\right) = \end{aligned}$$

$$=2\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{n/12}}\right)-1.$$

Според тоа, треба да важи $2\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{n/12}}\right)-1\geq 0.99$, односно $\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{n/12}}\right)\geq 0.995$, од каде се добива неравенката $\frac{15}{\sqrt{n/12}}\geq 2.575$, чие решение е $n\leq 407.2$. Заклучуваме дека треба да се соберат најмногу 407 броеви.

Дополнителни задачи

9. Бројот на авиони што пристигнуваат на еден аеродром за даден временски период е случајна променлива X со закон на распределба

$$P(X=k)=\frac{100^k e^{-100}}{k!},\quad k\in\{0,1,2,\dots\}.$$

Со користење на неравенството на Чебишев, да се оцени веројатноста дека бројот на авиони што пристигнуваат на аеродромот во дадениот временски период е помеѓу 80 и 120.

[$P(80<X<120)=P(|X-100|<20)\geq 3/4$.]

10. Нека случајната променлива X е рамномерно распределена на интервалот $(0,2)$. Со користење на неравенството на Чебишев да се оцени веројатноста $P(|X-1|<0.75)$, а потоа оваа веројатност приближно да се пресмета со користење на централната гранична теорема.

[Со неравенството на Чебишев се добива $P(|X-1|<0.75)\geq 0.4074$,

а со централната гранична теорема $P(|X-1|<0.75)\approx 0.8064$.]

11. Со помош на неравенството на Чебишев, да се определи колку најмалку независни и еднакво распределени случајни променливи со дисперзија 5, треба да се соберат за со веројатност најмалку 0.9973, нивната аритметичка средина се разликува од нивното математичкото очекување по апсолутна вредност за помалку од 0.01?

[18518519.]

12. Дебелината на снежната покривка во даден регион (на годишно ниво) е случајна променлива X со математичко очекување еднакво на 70cm.

а) Што може да се каже за веројатноста дека дебелината на снежната покривка оваа година ќе биде помеѓу 55cm и 85cm?

б) Дали може да се подобри одговорот под а), ако е познато дека стандардната девијација на случајната променлива X е 10cm?

[а) Бидејќи нема доволно информации да се оцени бараната веројатност, од особините на веројатноста следува дека $P(55 < X < 85) \geq 0$,

б) $P(55 < X < 85) \geq 5/9$ претставува подобрено ограничување.]

13. На случаен начин независно една од друга, се запишуваат цифри од множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ се додека збирот на добиените броеви не биде поголем од 1000. Да се покаже дека доволно е да се запишат 250 цифри.

Упатство. Треба да се покаже дека збирот на првите 250 запишани цифри скоро сигурно ќе биде поголем од 1000.

14. Случајната променлива $\overline{X}_{3200}$ е аритметичка средина на 3200 независни и еднакво распределени случајни променливи со математичко очекување 3 и дисперзија 2. Да се најде веројатноста

$$P\left(\overline{X}_{3200} \in (2.95, 3.075)\right).$$

[0.9759.]

15. Во една осигурителна компанија, осигурени се 10000 луѓе од иста возраст и иста социјална група. Веројатноста дека едно лице ќе биде повредено во текот на една година е 0.006. Секој осигуреник на 1 јануари плаќа 12 денари, а во случај на повреда, осигурителната компанија му исплаќа 1000 денари. Да се пресмета веројатноста дека:

а) во една година осигурителната компанија ќе има губиток;

б) во една година осигурителната компанија ќе има добивка од 40000 денари.

[а) Осигурителната компанија ќе има губиток

ако во една година има повеќе од 120 повреди.
Бараната веројатност е 0,
б) Осигурителна компанија ќе има добивка од 40000 денари
ако во една година има најмногу 80 повреди.
Бараната веројатност е 0.99534.]

16. Фабрика произведува лампиони за елка и ги транспортира до купувачите. Веројатноста дека еден лампион ќе се скрши при транспортот е 0.05.

а) Ако купувач нарачал 200 лампиони, колкава е веројатноста дека нема да добие повеќе од 12 скршени лампиони?

б) Колку најмалку лампиони треба да нарача купувачот за да биде сигурен со веројатност 0.95 дека ќе добие барем 100 неоштетени лампиони?

[а) 0.742, б) 2346.]

17. Стрелец ја погаѓа целта со веројатност 0.4. Колку најмалку независни гаѓања треба да направи стрелецот, за да веројатноста дека целта ќе биде погодена барем 80 пати е 0.9?

[224.]

18. Една фармацевтска компанија планира да ја тестира ефикасноста на новиот лек. Примањата на лекот од различни пациенти може да се сметаат како независни обиди со веројатност за успех p, каде што p е веројатноста дека лекот ќе го има саканиот ефект. Стратегијата на компанијата е лекот да го има саканиот ефект на $(84 \pm 3)\%$ од тестираните пациенти, со веројатност најмалку 0.95. Да се определи најмалиот број на пациенти потребни за тестирање на лекот.

[1067.]

19. Независните случајните променливи X_1, X_2, X_3 и X_4 имаат рамномерна распределба на интервалот (450, 550). Применувајќи ја централната гранична теорема, приближно да се пресмета веројатноста

$$P\left(1900 \le \sum_{k=1}^{4} X_k \le 2100\right).$$

[0.9164.]

20. Во 100 кутии се распределени црни и бели топчиња. Бројот на црни топчиња во секоја кутија е случајна променлива со Пуасонова распределба $\mathcal{P}(1)$. Сите 100 случајни променливи се независни. Да се најде веројатноста дека број на црни топчиња во сите 100 кутии е поголем од 120.

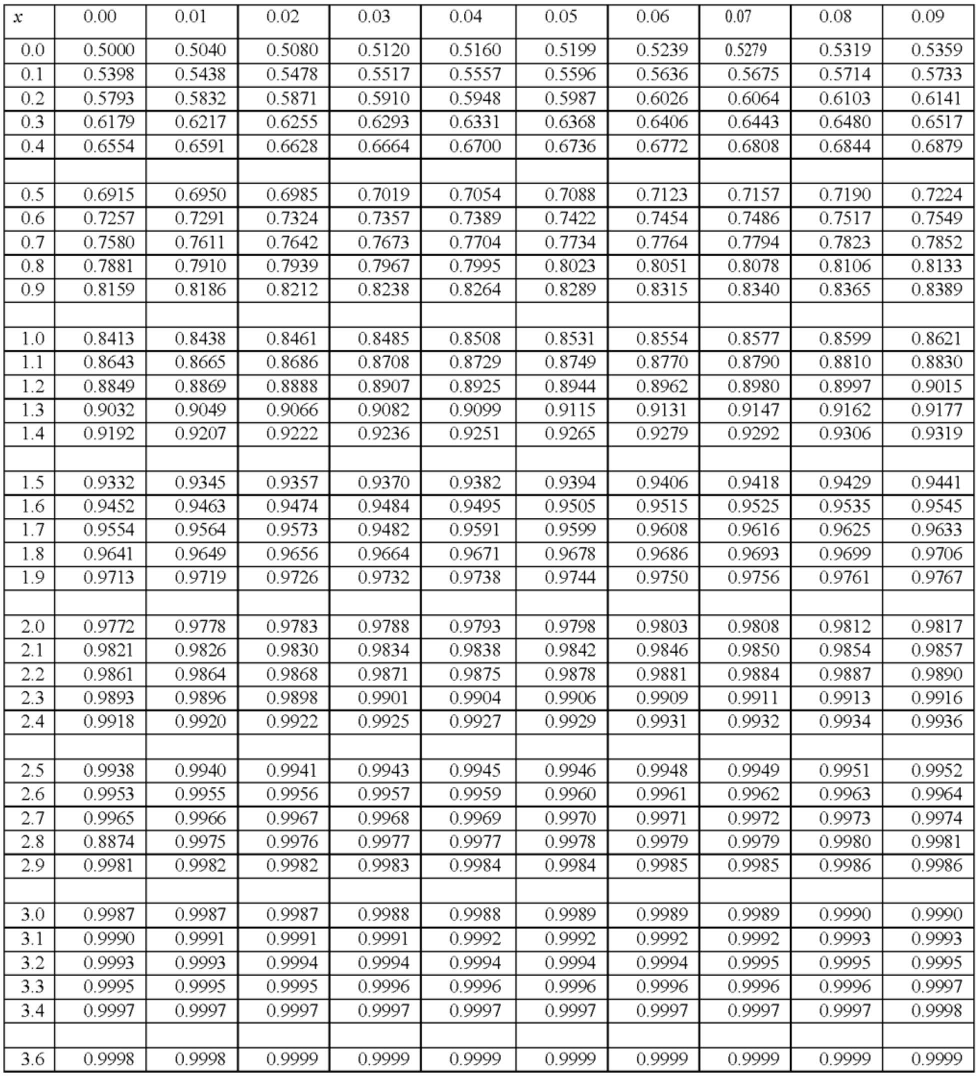
[0.0228.]

21. Еден резервоар за вода се празни секој ден и при тоа времето на празнење за еден ден е случајна променлива со рамномерна распределба на интервалот (50мин., 70мин.). Познато е дека во една минута истекува $1l$ вода. Колку најмалку литри треба да содржи резервоарот за да веројатноста дека и по 400 дена во резервоарот сеуште ќе има вода, е поголема од 0.95?

Упатство. Нека X_i е количината на вода што ќе истече i-тиот ден, $i=1, 2, ..., 400$. Тогаш, $X_i : \mathcal{U}(50l,\ 70l)$. Ако n е бараната количина вода што треба да ја содржи резервоарот, тогаш таа се определува од условот $P\left(\sum_{i=1}^{400} X_i \le n\right) > 0.95$.

[24190*l*.]

Таблица за стандардизирана нормална распределба: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5733
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9482	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.8874	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Литература

Ibe, O. C., *Fundamentals of Applied Probability and Random Processes*, Elsevier Academic Press, USA, 2005.

Hsu, H., *Probability, Random Variables & Random Processes*, McGraw-Hill, USA, 1997.

Krishnan, V., *Probability and Random Processes*, John Wiley & Sons Inc, USA, 2006.

Milton, J. S., Arnold, J. C., *Introduction to Probability and Statistics*, McGraw-Hill, USA, 1990.

Mališić, J., *Zbirka zadataka iz teorije verojatnoće sa primenama*, Građevinska knjiga, Beograd, 1990.

Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, USA, 1991.

Soong, T. T., *Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers*, John Wiley & Sons Ltd, England, 2004.

Ušćumlić, M. P., *Zbirka zadataka iz više matematike II*, Nauka, Beograd, 1998.