УНИВЕРЗИТЕТ СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ, СКОПЈЕ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКА

Валентина Миовска **Весна Целакоска-Јорданова**

АЛГЕБАРСКИ
n-АРНИ СТРУКТУРИ

СКОПЈЕ 2014

УНИВЕРЗИТЕТ СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ, СКОПЈЕ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКА

ВАЛЕНТИНА МИОВСКА ВЕСНА ЦЕЛАКОСКА-ЈОРДАНОВА

АЛГЕБАРСКИ
n-АРНИ СТРУКТУРИ

СКОПЈЕ 2014

Автори:

Д-р Валентина Миовска, вонреден професор на ПМФ во Скопје

Д-р Весна Целакоска-Јорданова, вонреден професор на ПМФ во Скопје

Рецензенти:
Д-р Билјана Јанева, редовен професор во пензија

Д-р Костадин Тренчевски, редовен професор на ПМФ во Скопје

Алгебарски n-арни структури, основен учебник /
Валентина Миовска, Весна Целакоска-Јорданова,
Универзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје, 2016 год.,
116 страници, 24,6 цм, електронско издание

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје

Техничко уредување и дизајн на корицата : Авторите

Одлука за издавање учебник бр. 07-48/7 од 23.05.2014,
Природно-математички факултет, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Оваа книга е работена според наставната програма на предметот *Алгебарски* n*-арни структури* од вториот циклус студии по математика на Природно-математичкиот факултет во Скопје, за насоката *математички науки и примени* и главно е наменета како учебник за студентите што го посетуваат овој курс.

Материјалот е поделен на 5 глави:

I. Алгебарски n-полугрупи,

II. (i, j)-асоцијативни операции,

III. Алгебарски n-групи,

IV. Циклични n-полугрупи и циклични n-групи

V. Прилог

Во првата глава е даден историски преглед на алгебарските n-арни структури, почетни поими што се користат во останатите глави, како и резултати во врска со алгбарските n-полугрупи. Во втората глава се воведени поимите (i, j)-асоцијативна операција и (i, j)-комутативен n-групоид. Разработени се разни својства во врска со (i, j)-асоцијативните операции, нивната врска со неутралните, односно централните елементи во даден n-групоид, со неутралните низи, со (i, j)-комутативните n-групоиди, а се разгледуваат и делумно асоцијативни n-групоиди со неутрални елементи. Во третата глава се воведуваат неколку (еквивалентни) дефиниции на n-група (на Дернте, на Пост и на Чупона), се разгледуваат разни својства на n-групи, воведени се изводни n-групи, а формулирани се и докажани теоремите на Пост и на Хоссу-Глускин. Во четвртата глава, во два параграфа се разгледуваат својства на n-адични степени во n-полугрупи и n-групи, а и нивната врска со цикличните n-полугрупи и n-групи. Во петтата глава се разгледани идеали во сурјективни n-полугрупи и $\{i, j\}$-неутрални операции во n-групоиди.

Секоја глава е поделена на неколку параграфи, а зад некои од параграфите од првата, третата и четвртата глава следуваат задачи за вежбање. Задачите не се решени. Извесен број задачи се означени со ѕвездичка, што означува дека решението не е едноставно и дека студентите ќе треба да консултираат дополнителна литература, којашто неизоставно е наведена во делот Литература, на крајот од книгава.

Им благодариме на рецензентите проф. д-р Костадин Тренчевски и проф. д-р Билјана Јанева што внимателно го прочитаа ракописот и дадоа корисни забелешки и сугестии. Авторите им благодарат и на студентите Климентина Климоска, Ренета Попоска, Габриела Лабоска и Димитар Ниневски кои во текот на подготовката на испитот, а Димитар – на дипломската работа, ни дадоа полезни забелешки.

Авторите ќе им бидат благодарни на сите што ќе дадат добронамерни забелешки (од секаков вид) во врска со текстот на овој учебник.

Скопје, март 2014 година

Авторите

Глава I — Алгебарски *n*-полугрупи

Воведни забелешки

Развојот на класичните алгебарски структури и продлабоченото разбирање на нивните фундаментални својства е помогнато на природен начин преку тернарните и, општо, n-арните обопштувања. Првите тернарни операции биле воведени уште во XIX век од А. Кели (A. Cayley) и, како резултат на неговите идеи, биле разгледани n-арни обопштувања на матрици и детерминанти, а подоцна, во XX век се направени и испитувани n-арни обопштувања на групи, полугрупи, квазигрупи и други алгебарски структури. Идејата за вакви испитувања се јавува во едно предавање на Е. Каснер, одржано на 53-то годишно собрание на Американската асоцијација за унапредување на науката во 1904 година [E. Kasner: *An extension of the group concept* (reported by L. G. Weld), Bull. Amer. Math. Soc. 10 (1904), 290–291)].

Во суштина, развојот на таа гранка од алгебрата почнува од 1928 година со појавата на статијата на Дорнте, за n-групите [W. Dörnte: *Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbergriff*, Math. Z. 29 (1928), 1–19], напишана по иницијатива на Еми Нетер. Резултатите, добиени во овој труд се покажале толку оригинални што Сушкевич им посветил посебна глава во својата монографија [А. К. Сушкевич: *Теория обобщенных групп*, Киев, 1937].

Публикациите по алгебарски n-арни структури во наредните 2 децении се малубројни и имаат епизоден карактер. Меѓутоа, во тој период била објавена една мошне опширна и важна работа на Пост за n-групите [E. L. Post: *Polyadic groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 48 (1940), 208–350], којашто со своите длабоки резултати, извршила суштинско влијание на натамошниот развој, не само на теоријата на n-групите, туку и на други алгебарски n-арни структури.

Веќе од втората половина на 50-те години на XX век ситуацијата драстично се изменува: приливот од трудови посветени на разни алгебарски *n*-арни системи почна да расте, а натаму продолжи да се зголемува постојано, од деценија во деценија, така што досега е создадена обемна литература во оваа област на алгебрата. Потврда за тоа може да послужи, на пример, библиографијата во прегледот на Глазек по *n*-арни групи и ним блиски *n*-арни системи [K. Glazek: *Bibliography of n-groups* (*polyadic groups*) *and some group like n-ary systems*, Proceedings of the Symposium n-ary Structures, Skopje 1982, 253–289].

Ваквиот развој на алгебарските *n*-арни структури беше поттикнат, секако, и од бурниот развој на теоријата на полугрупите. Појавата на неколкуте монографии од таа област во тој период [Е. С. Ляпин: *Полугруппй*, Москва (1960); A. H. Clifford and G. B. Preston: *The algebraic theory of semigroups*, Providence, Vol I (1961), Vol II (1967); M. Petrich: *Introduction to semigroups*, Columbus, Ohio (1973), В. Д. Белоусов, *n-арные квазиīруūūы*, Кишинев (1972)] изврши значително влијание врз развојот и на теоријата на *n*-полугрупите кај нас.

Бројот на трудовите за алгебарски *n*-арни структури, објавени од математичарите што работеле во Република Македонија во периодот 1946–2007 година изнесува околу 60. Од нив, речиси половината се однесуваат на *n*-полугрупите, а другата половина е посветена на други *n*-арни структури: *n*-групи, *n*-квазигрупи, *n*-групоиди и обопштувања на прстени и модули.

Првите статии, посветени на *n*-полугрупите, се објавени во почетокот на 60-те години на минатиот век од Ѓ. Чупона и Б. Трпеновски, потоа следуваат трудови од Н. Целакоски со таа проблематика, а подоцна се приклучуваат трудови од П. Кржовски, С. Марковски, Д. Димовски, Б. Јанева и др.

1.1. Почетни поими и својства

Подолу ќе изнесеме некои основни поими, ознаки и својства во врска со алгебарски структури коишто имаат само една n-арна операција, за $n \geq 2$.

Нека G е непразно множество и нека n е позитивен цел број. Секое пресликување f од G^n (n-тиот декартов степен на G) во G се вика n*-арна операција* на G. Тоа значи дека на секоја n-торка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ елементи од G, со n-арната операција f ѝ се придружува единствен елемент од G којшто се означува со $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Секоја n-арна операција се нарекува уште и *финишарна*. Во специјален случај, кога $n = 1, 2, 3$, велиме дека операцијата е *унарна*, *бинарна*, *шернарна*, соодветно.

Множеството G заедно со n-арната операција f се нарекува *n-арен īруūоид* (покусо: *n-īруūоид* или *n-оūераūив*) и се означува со (G, f) или кусо со $\underline{G}$. Поимот 2-групоид се совпаѓа со поимот *īруūоид*. Наместо 1-арен групоид ќе велиме *моноунар*.

Во теоријата на n-арните групоиди прифатени се следните ознаки. Низата елементи $x_i, x_{i+1}, ..., x_j$ често се означува со x_i^j. За $j < i$ тој симбол ја означува празната низа, т.е. низата што не содржи ниту еден елемент. Бројот на сите елементи во низата се нарекува *должина* на низата. Должината на празната низа ја означуваме со 0. Ако во низата x_{i+1}^{i+t}, $x_{i+1} = x_{i+2} = ... = x_{i+t} = x$, тогаш наместо x_{i+1}^{i+t} пишуваме $\overset{t}{x}$. Според тоа, $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ скратено ќе го запишуваме со $f\left(x_1^n\right)$, а $f\left(x_1^i \overset{t}{x} x_{i+t+1}^n\right)$ е скратена ознака за $f\left(x_1, ..., x_i, \underbrace{x, ..., x}_{t}, x_{i+t+1}, ..., x_n\right)$. За поедноставен изглед на горните записи, наместо симболот f за n-арната операција, ќе го употребуваме симболот [ ]. Горните производи се запишуваат како $[x_1 x_2 ... x_n]$, $[x_1^n]$, $[x_1 ... x_i \underbrace{x ... x}_{t} x_{i+t+1} ... x_n]$ и $[x_1^i \overset{t}{x} x_{i+t+1}^n]$, соодветно.

Пример 1.1. Нека $G = \{2n+1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$. Да ставиме $[x_1 x_2 x_3] = x_1 + x_2 + x_3$. Тогаш $\left(G, [\,]\right)$ е 3-групоид. Даденото множество не е групоид во однос на операцијата собирање, зашто збирот на два непарни цели броја е парен, па операцијата + не е затворена во G.

За еден тернарен групоид $(G, [\,])$ велиме дека е *изведен* од бинарна операција $\cdot$ ако $[xyz] = (x \cdot y) \cdot z$, за кои било $x, y, z \in G$. Ако $[xyz] = ((x \cdot y) \cdot z) \cdot b$, за кои било $x, y, z \in G$ и некој фиксен $b \in G$, тогаш за $(G, [\,])$ велиме дека е b-*изведен* од $\cdot$.

Ако $\left(G, [\,]\right)$ е n-групоид, а A непразно подмножество од G такво што $[a_1^n] \in A$ за секои $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, тогаш велиме дека $\left(A, [\,]|_A\right)$ е n-*подгрупоид* од $\underline{G}$. 2-подгрупоид од 2-групоид е *подгрупоид* од групоид.

За да го дефинираме поимот n-полугрупа, претходно ќе го воведеме поимот *сложен производ* во алгебра $\left(G, \mathcal{F}\right)$, каде што G е непразно множество, а $\mathcal{F}$ е фамилија од финитарни операции на G.

1) Ако $x \in G$, тогаш пишуваме $x = \prod(x)$ и велиме дека $\prod(x)$ е *сложен производ од нулти ред.*

2) Ако $x, x_1, x_2, ..., x_n \in G$, f е n-арна операција од $\mathcal{F}$ и ако $x = f(x_1^n)$, тогаш пишуваме $x = \prod(x_1, x_2, ..., x_n)$. За десната страна на ова равенство велиме дека е *сложен производ од прв ред.*

3) Да претпоставиме дека $y_i = \prod_i (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik_i})$ е сложен производ со ред r_i, за $i = 1, ..., m$ и дека g е m-арна операција од $\mathcal{F}$. Тогаш за десната страна на равенството

$$g(y_1, ..., y_m) = g(\prod{}_1 (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}), ..., \prod{}_m (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mk_m}))$$

велиме дека е *сложен производ со ред* $r=1+r_1+...+r_m$. Овој сложен производ ќе го означуваме со $\prod(x_{11},...,x_{1k_1},...,x_{m1},x_{m2},...,x_{mk_m})$.

Поимот сложен производ е осмислен и кај секој n-групоид $(G,[])$. Да забележиме дека ако $\prod(x_1,x_2,...,x_m)$ е сложен производ во n-групоидот $(G,[])$, тогаш m е од облик $m=k(n-1)+1$, каде што k е ненегативен цел број.

Имено, за $k=0$, имаме производ од нулти ред, т.е. $x=\prod(x)$. За ова m, коешто е 1, имаме дека $m=0\cdot(n-1)+1$, т.е. важи равенството $m=k(n-1)+1$. Нека $m>1$ и нека тврдењето е точно за сложени производи со должини помали од m. Значи, ако

$$\prod(x_1,x_2,...,x_m)=[\prod{}_1(x_1,...,x_{m_1}),\prod{}_2(x_{m_1+1},...,x_{m_1+m_2}),...,\prod{}_n(...,x_{m_1+m_2+...+m_n})],$$

имаме дека $m=m_1+m_2+...+m_n$. Од индуктивната претпоставка имаме дека $m_i=k_i(n-1)+1$, па значи $m=k_1(n-1)+1+...+k_n(n-1)+1=(k_1+...+k_n+1)(n-1)+1$.

Специјално, со помош на една n-арна операција $[\,]$ на множество G може да се дефинираат n m-арни операции $[\,]'_i$, каде што $m=2n-1$, $i\in\{1,...,n\}$, на следниов начин:

$$[x_1^{2n-1}]'_1=[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}],\ [x_1^{2n-1}]'_2=[x_1[x_2^{n+1}]x_{n+2}^{2n-1}],...,\ [x_1^{2n-1}]'_n=[x_1^{n-1}[x_n^{2n-1}]].$$

Овие m-арни операции $[\,]'_i$ се викаат и *продолжени производи* на n-арната операција $[\,]$ и тие, во општ случај, се различни меѓу себе. Такви продолжени производи на n-арната операција $[\,]$ може да се направат и за кој било $m=k(n-1)+1$, каде што k е природен број што е поголем или еднаков на 2. На пример,

$$[x_1^{k(n-1)+1}]'=[[...[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}]...]x_{(k-1)(n-1)+2}^{k(n-1)+1}],$$

е *продолжен производ* или m-арна операција *изведена* од $[\,]$. Притоа, n-арната операција се нарекува *примитивна операција* за m-арната операција $[\,]'$.

За еден n-групоид $(G,[\,])$ велиме дека е *асоцијативен* или *n-полугрупа* ако операцијата $[\,]$ е *асоцијативна*, т.е. ако важат равенствата

$$[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}]=[x_1[x_2^{n+1}]x_{n+2}^{2n-1}]=...=[x_1^{n-1}[x_n^{2n-1}]],\text{ т.е.}$$

$$[x_1^{2n-1}]'_1=[x_1^{2n-1}]'_2=...=[x_1^{2n-1}]'_n.$$

За еден n-групоид $(G,[\,])$ велиме дека е *комутативен* ако

$$[x_1...x_n]=[x_{\nu_1}...x_{\nu_n}]$$

е точно равенство за кои било $x_1,...,x_n\in G$ и која било пермутација $\nu_1,...,\nu_n$ на броевите $1,...,n$.

За n-групоидот $(G,[\,])$ велиме дека е *кратлив во однос на* i*-тото место* или покусо, i*-кратлив*, за фиксен $i \in \{1,...,n\}$, ако

$$[a_1...a_{i-1}xa_{i+1}...a_n] = [a_1...a_{i-1}ya_{i+1}...a_n] \Rightarrow x = y .$$

Ако $i = 1$, тогаш за $(G,[\,])$ велиме дека е *кратлив одлево*, а ако $i = n$, тогаш за $(G,[\,])$ велиме дека е *кратлив оддесно*. Ако n-групоидот $(G,[\,])$ е i-кратлив за секој $i \in \{1,...,n\}$, тогаш велиме дека е *кратлив*.

Низата e_1^{n-1} се нарекува i*-неутрална* за операцијата $[\,]$, каде што $i \in \{1,...,n\}$, ако $[e_1^{i-1}xe_i^{n-1}] = x$, за секој $x \in G$. За $i = n$, таа се нарекува *лево неутрална низа*, а за $i = 1$, *десно неутрална низа* за операцијата $[\,]$. Низата e_1^{n-1} се нарекува *неутрална* за $[\,]$ ако е i-неутрална за секој $i \in \{1,2,...,n\}$.

Елементот $e \in G$ се нарекува i*-неутрален* за операцијата $[\,]$, каде што $i \in \{1,2,...,n\}$, ако низата $\overset{n-1}{e}$ е i-неутрална за $[\,]$. Елементот e е неутрален за операцијата $[\,]$ ако е i-неутрален за секој $i \in \{1,2,...,n\}$. Во тој случај e се нарекува и единица за операцијата $[\,]$. 1-неутрален елемент уште се нарекува *лев неутрален елемент*, а n-неутрален елемент се нарекува *десен неутрален елемент*. Множеството од сите i-неутрални елементи за операцијата $[\,]$ го означуваме со E_i, каде што $i \in \{1,2,...,n\}$.

Елементот $c \in G$ се нарекува *централен елемент* за n-групоидот $(G,[\,])$ ако за секои $x_1,...,x_{n-1} \in G$ и за секои $i, j \in \{1,2,...,n\}$ е исполнето равенството

$$[x_1^{i-1}cx_i^{n-1}] = [x_1^{j-1}cx_j^{n-1}].$$

Множеството од сите централни елементи за n-групоидот $(G,[\,])$ се нарекува *центар* на n-групоидот $(G,[\,])$ и се означува со $Z(G)$.

За еден елемент $x \in G$ велиме дека е *идемпотентен* ако $[\overset{n}{x}] = x$. Еден n-групоид во кој сите елементи се идемпотентни, се нарекува *идемпотентен* n*-групоид*.

Пример 1.2. Нека $G = \{a,b\}$. Дефинираме тернарна операција $[\,]$ на G со $a = [aaa] = [abb] = [bab] = [bba] = [bbb]$, $b = [aab] = [aba] = [baa]$. Очигледно е дека a е i-неутрален елемент, каде што $i \in \{1,2,3\}$. Освен тоа, a и b се централни елементи за $(\{a,b\},[\,])$.

Пример 1.3. На множеството $G = \{x\}$ може да се дефинира само една n-арна операција $[\,]$, $[\overset{n}{x}] = x$. За $(G,[\,])$ велиме дека е *тривијален* n-групоид. Јасно, x е i-неутрален елемент за секој $i \in \{1,2,...,n\}$ и централен за $(G,[\,])$.

Нека $(G,[\,])$ и $(G',[\,]')$ се n-групоиди. За пресликувањето $\varphi: G \to G'$ велиме дека е *хомоморфизам* (од n-групоидот $(G,[\,])$ во n-групоидот $(G',[\,]')$) ако $\varphi([x_1^n]) = [\varphi(x_1)...\varphi(x_n)]'$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in G$.

Хомоморфизмот φ се вика *мономорфизам*, *еӣиморфизам*, *изоморфизам* ако пресликувањето φ е инјекција, сурјекција, биекција, соодветно. Хомоморфизам на n-групоид $(G,[\,])$ сам во себе се вика *ендоморфизам*, а изоморфизам на $(G,[\,])$ во себе - *авӣоморфизам*.

Не е тешко да се докаже дека ако φ е изоморфизам од n-група $(G,[\,])$ во n-група $(G',[\,]')$, тогаш φ^{-1} е изоморфизам од G' во G и дека ако φ е изоморфизам од n-група $(G,[\,])$ во n- група $(G',[\,]')$, а ψ е изоморфизам од n-група $(G',[\,]')$ во n-арната група $(G'',[\,]'')$, тогаш составот $\psi\varphi$ е изоморфизам од $(G,[\,])$ во $(G'',[\,]'')$. Значи, изоморфизам на n-групи е рефлексивна, симетрична и транзитивна релација, т.е. е релација за еквивалентност.

Задачи

1. Покажи дека во тернарна полугрупа изведена од симетричната група S_3 сите елементи со ред 2 се леви или десни неутрални елементи, но не се 2-неутрални елементи.
2. Во тернарна полугрупа изведена од Булова група сите елементи се i-неутрални.
3. Во тернарна полугрупа што е 1-изведена од адитивната полугрупа $\mathbf{Z}_4$ нема ни лев, ни десен, ни 2-неутрален елемент.
4. Наведи пример на 2-кратлив тернарен групоид што не е кратлив.
5. Наведи пример на лево и десно кратлив тернарен групоид што не е кратлив.
6. Ако во тернарна полугрупа $(G,[\,])$ постои елемент e таков што за секој $y \in G$ важи $[eye] = y$, тогаш $(G,[\,])$ може да се изведе од бинарна полугрупа $(G,\oplus)$.
7. Нека $(S,\cdot)$ е полугрупа, a е фиксен елемент од S. Дефинираме n-арна операција на S со $[x_1x_2...x_n] = x_1ax_2...x_n$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in S$. Да се покаже дека во n-групоидот $(S,[\,])$ е точен следниов идентитет:

$$[[x_1x_2...x_n]x_{n+1}...x_{2n-1}] = [x_1x_2...x_{n-1}[x_nx_{n+1}...x_{2n-1}]].$$

8. Нека $\boldsymbol{G} = (G,*)$ е групоид и нека во овој групоид важи законот за ентропија, т.е. $(x*y)*(u*v) = (x*u)*(y*v)$. Дефинираме $(n+1)$-арна операција со:

$$[x_0x_1...x_n] = (...((x_0 * x_1) * x_2)\ldots) * x_n.$$

Докажи дека во добиениот ($n+1$)-групоид е исполнет следниот обопштен закон за ентропија:

$$[[x_{00}x_{01}\dots x_{0n}][x_{10}x_{11}\dots x_{1n}]\dots[x_{n0}x_{n1}\dots x_{nn}]]=[[x_{00}x_{10}\dots x_{n0}][x_{01}x_{11}\dots x_{n1}]\dots[x_{01}x_{1n}\dots x_{nn}]].$$

9. Нека $\boldsymbol{G}=(G,*)$ е групоид во кој важи дистрибутивниот закон, т.е. $x*(y*z)=(x*y)*(x*z)$. Дефинираме ($n+1$)-арна операција со:

$$[x_0x_1\dots x_n]=(\dots((x_0*x_1)*x_2)\dots)*x_n.$$

Докажи дека во добиениот ($n+1$)-групоид е исполнет следниот *обопштен дистрибутивен закон*:

$$[x_1x_2\dots x_n[y_0y_1\dots y_n]]=[[x_1x_2\dots x_ny_0][x_1x_2\dots x_ny_1]\dots[x_1x_2\dots x_ny_n]].$$

10. За еден тернарен групоид $(G,[\,])$ велиме дека е *семикомутативен* ако $[xyz]=[zyx]$, за секој $x,y,z\in G$, а велиме дека е *медијален* ако го задоволува идентитетот

$$[[x_{11}x_{12}x_{13}][x_{21}x_{22}x_{23}][x_{31}x_{32}x_{33}]]=[[x_{11}x_{21}x_{31}][x_{12}x_{22}x_{32}][x_{13}x_{23}x_{33}]].$$

Покажи дека секоја семикомутативна тернарна полугрупа е медијална.

1.2. *n*-полугрупи

За една n-арна операција $[\,]$ на G велиме дека е (i,j)-*асоцијативна*, каде што $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ и $i\neq j$, ако за секои $x_1,x_2,\dots,x_{2n-1}\in G$ важи равенството

$$[x_1^{i-1}[x_i^{i+n-1}]x_{i+n}^{2n-1}]=[x_1^{j-1}[x_j^{j+n-1}]x_{j+n}^{2n-1}].$$

Ако горното равенство важи за секои $x_1,\dots,x_{2n-1}\in G$ и за секои $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, тогаш велиме дека операцијата $[\,]$ е *асоцијативна*. Во тој случај, за n-групоидот $(G,[\,])$ велиме дека е n-*полугрупа*.

Јасно е дека 2-полугрупи се полугрупите. Некогаш е практично наместо полугрупа $(S,*)$ да се вели и само полугрупа S, а множењето на елементи од S може да се означува со запишување на елементите еден до друг, кога тоа не води до забуна. Воведувањето на поимот *n*-полугрупа се оправдува со фактот дека секоја *n*-полугрупа може да се смета за *n*-потполугрупа на некоја полугрупа.

Со следната теорема ќе покажеме дека важи *обопштениот асоцијативен закон* кај класата n-полугрупи.

Теорема 2.1. *Ако* $(G,[\,])$ *е* n-*полугрупа и ако* $\prod'(x_1,\dots,x_m)$, $\prod''(x_1,\dots,x_m)$ *се два сложени производа, тогаш* $\prod'(a_1,\dots,a_m)=\prod''(a_1,\dots,a_m)$, *за секои* $a_1,\dots,a_m\in G$.

Доказ. Во претходниот параграф покажавме дека $m = k(n-1)+1$, каде што k е ненегативен цел број. За $k=0$ и за $k=1$ тврдењето е очигледно точно, зашто и во двата случаја постои само еден сложен производ со должина $m=1$ (сложен производ од нулти ред), односно само еден сложен производ со должина $m=n$ (сложен производ од прв ред). Точноста на тврдењето за $k=2$ следува од дефиницијата на поимот n-полугрупа. Да претпоставиме дека $k>2$ и дека тврдењето е точно за производи што имаат должина помала од m, т.е. $\prod^*(a_1,\dots,a_q)=[a_1\dots a_q]$ за секој сложен производ $\prod^*$ со должина $q=r(n-1)+1$, каде што $r<k$. Да ставиме $[x_1^m]'=[[x_1^n]x_{n+1}^m]]$ (Притоа, за $m=0$, ќе ставиме $[x]'=[x]$). Ако $\prod(x_1,\dots,x_m)$ е дефиниран со

$$\prod(x_1,x_2,\dots,x_m)=[\prod{}_1(x_1,\dots,x_{m_1}),\prod{}_2(x_{m_1+1},\dots,x_{m_1+m_2}),\dots,\prod{}_n(\dots,x_{m_1+m_2+\dots+m_n})],$$

тогаш добиваме дека $\prod(x_1,x_2,\dots,x_m)=[[x_1^{m_1}][x_{m_1+1}^{m_1+m_2}]\dots[x_{m_1+m_2+\dots+m_{n-1}+1}^m]]$. Нека p е најмалиот број за кој $m_{p+1}\ge n$. Ако во десната страна на претходното равенство ставиме $y=[x_{p+1}^{p+n}]$ и ја примениме индуктивната претпоставка, тогаш:

$$\prod(x_1,x_2,\dots,x_m)=[x_1^p\,y\,x_{p+n+1}^m]=[[x_1^p\,y\,x_{p+n+1}^{2n-1}]\,x_{2n}^m]=[[x_1^{2n-1}]x_{2n}^m]=[x_1^m]'.\ \square$$

Како последица на Теоремата 2.1 се добива следната

Последица 2.1. (*а*) *Ако* $(G,[\,])$ *е* n*-полугрупа, тогаш* $(G,[\,])$ *може да се смета за* $k(n-1)+1$*-полугрупа, за секој природен број* k. (Притоа, $[x_1^m]=[x_1^j[x_{j+1}^{j+r}]x_{j+r+1}^m]$, каде што $r=t(n-1)+1$, t е природен број помал од k, а $j\in\{0,1,2,\dots,m-r\}$ е произволно.)

(*б*) Ако $(S,\cdot)$ *е полугрупа и ако* $[\,]:S^n\to S$ *е* n*-арна операција на* S *дефинирана со* $[x_1^n]=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$, *тогаш* $(S,[\,])$ *е* n*-полугрупа.*

Доказ. (а) Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа и нека k е природен број. Нека $m=k(n-1)+1$ и $x_1,x_2,\dots,x_{2m-1}\in G$. Тогаш $2m-1=2k(n-1)+1$, па според Теоремата 2.1 постои само една операција со арност $2m-1$ изведена од операцијата $[\,]$. Ќе ја означиме со истиот симбол $[\,]$. Според тоа, имаме:

$$[[x_1^m]x_{m+1}^{2m-1}]=[x_1[x_2^{m+1}]x_{m+2}^{2m-1}]=\dots=[x_1^{m-1}[x_m^{2m-1}]].$$

Значи, $(G,[\,])$ може да се смета за m-полугрупа, т.е. $k(n-1)+1$-полугрупа.

(б) Нека $(S,\cdot)$ е полугрупа и нека $[\,]:S^n\to S$ е n-арна операција на S дефинирана со $[x_1^n]=x_1x_2\dots x_n$. Јасно е дека $(S,[\,])$ е n-групоид. $(S,\cdot)$ е полугрупа, па според тоа, за секои $x_1,\dots,x_{2n-1}\in G$

$$(x_1\dots x_n)\,x_{n+1}\dots x_{2n-1}=$$
$$=x_1(x_2\dots x_{n+1})x_{n+2}\dots x_{2n-1}=\dots=x_1\dots x_{n-1}(x_n\dots x_{2n-1}).$$

Оттука, $[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}]=[x_1[x_2^{n+1}]x_{n+2}^{2n-1}]=...=[x_1^{n-1}[x_n^{2n-1}]]$, за секои $x_1,...,x_{2n-1}\in G$. Следствено, $(S,[\,])$ е n-полугрупа. □

Тврдењето од Последицата 2.1 (б) го наметнува прашањето дали секоја n-полугрупа $(G,[\,])$ може да се добие од некоја полугрупа $(G,\cdot)$ така што за секои $x_1,x_2,...,x_n\in G$ да важи $[x_1^n]=x_1x_2...x_n$. Во општ случај одговорот е негативен, што може да се види од следниот пример.

Пример 2.1. Нека $G=\{2k+1 \mid k\in\mathbf{Z}\}$ е множеството од сите непарни цели броеви. Дефинираме 5-арна операција $[\,]$ на G со $[x_1^5]=\sum_{i=1}^{5}x_i$. Од тоа што $x_i=2k_i+1$, $k_i\in\mathbf{Z}$, $i\in\{1,2,3,4,5\}$, се добива дека $[x_1^5]=\sum_{i=1}^{5}x_i=\sum_{i=1}^{5}(2k_i+1)=2k+1$, па според тоа $(G,[\,])$ е 5-групоид. Од асоцијативноста на $\mathbf{Z}$ следува дека $(G,[\,])$ е 5-полугрупа. Да претпоставиме дека постои полугрупа $(G,\cdot)$ таква што важи равенството $[x_1^5]=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5$, за секои $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in G$. Тогаш, на пример,

$$9=1+1+1+1+1+1+1+1+1=\big((1+1+1+1+1)+1+1+1+1\big)=$$

$$=[[\overset{5}{1}]\overset{4}{1}]=\big((1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1)\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\big)=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=$$

$$=(1\cdot1)\cdot(1\cdot1)\cdot(1\cdot1)\cdot(1\cdot1)\cdot1=[\overset{4}{(1\cdot1)}1]=4(1\cdot1)+1,$$

а тоа е можно ако и само ако $1\cdot1=2$, но $2\notin G$.

Овде ќе го воведеме поимот покривачка полугрупа.

Нека G е непразно множество и нека F е множеството од сите непразни конечни низи $a_1a_2...a_n$ на елементи од G. Притоа, две низи $a_1a_2...a_n$ и $b_1b_2...b_m$ се еднакви ако и само $n=m$ и $a_i=b_i$, за $i=1,2,...,n$. Дефинираме операција *конкатенација* на F со

$$(a_1a_2...a_n)(b_1b_2...b_m)=a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m.$$

Множеството F заедно со операцијата конкатенација е полугрупа. Оваа полугупа се нарекува *полугрупа слободно генерирана од* G. Да забележиме дека F е и n-полугрупа во однос на операцијата дефинирана во Посл. 2.1 (б).

Една полугрупа $(S,\cdot)$ е *покривачка полугрупа* за n-полугрупата $(G,[\,])$ ако и само ако се исполнети следниве услови:

(i) $G\subseteq S$;

(ii) секој $a\in S$ е производ од облик $a=a_1a_2...a_n$, каде што $a_1,a_2,...,a_n\in G$;

(iii) $[a_1^n]=a_1a_2...a_n$, за секои $a_1,a_2,...,a_n\in G$.

Така, на пример, полугрупата $(\mathbf{Z},+)$ е покривачка полугрупа на 2-полугрупата од непарни цели броеви во однос на операцијата собирање.

Теорема 2.3. *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-полугрупа и нека* F *е полугрупата што е слободно генерирана од* G*. Дефинираме релација* α *на* F *со:*

$$u\,\alpha\,v \;\Leftrightarrow\; u=a_1...a_{i-1}a_ia_{i+1}...a_k,\quad v=a_1...a_{i-1}b_1...b_na_{i+1}...a_k,$$

каде што $a_i=[b_1^n]$ *во* n*-полугрупата* $(G,[\,])$*. Нека* $\beta=\Delta\cup\alpha\cup\alpha^{-1}$*, а* γ *е транзитивното проширување на* β*. Тогаш:*

(*а*) γ *е конгруенција на полугрупата* F*.*

(*б*) *Ако* $a,a_1,...,a_k\in G$*, тогаш* $a\;\gamma\;b=a_1...a_k$ *во* F *ако и само ако* $b=[a_1^k]$ *во* $(G,[\,])$.

(*в*) *Ако* $1\le i\le j<n$*,* $a_1,...,a_i,b_1,...,b_j\in G$*, тогаш:* $a_1...a_i\;\gamma\;b_1...b_j\;\Rightarrow\; i=j$.

(*г*) *Ако* $G^\gamma=\{a^\gamma\,|\,a\in G\}$*, тогаш* G^γ *е* n*-потполугрупа од полугрупата* $S=F/\gamma$*, при што пресликувањето* $\psi: a\mapsto a^\gamma$ *е изоморфизам од* $(G,[\,])$ *во* $(G^\gamma,[\,])$.

Доказ. (а) Релацијата α е рефлексивна, зашто за секој $a\in G$, $[a]=a$, па значи и γ е рефлексивна релација, а бидејќи е симетрична и транзитивна, следува дека е релација за еквивалентност на F. Лесно се покажува дека (му го оставме тоа на читателот) ако $x\;\gamma\;y$, тогаш $xz\;\gamma\;yz$ и $zx\;\gamma\;zy$, од што следува дека γ е конгруенција на F.

(б) Нека $a,a_1,...,a_k\in G$. Обратната насока на тврдењето е јасна. Имено, ако $a=[a_1^k]$ во $(G,[\,])$, од рефлексивноста на α следува дека $a\,\alpha\,a_1...a_k$ во F, па значи $a\,\gamma\,a_1...a_k$ во F.

Нека $a\in G$ и нека $a\;\alpha\;u$. Од дефиницијата на α следува дека u има облик $u=b_1...b_n$, при што $a=[b_1^n]$ во $(G,[\,])$. Ако $u\,\alpha\,v$, тогаш $v=b_1...b_{i-1}c_1...\,c_nb_{i+1}...b_k$, каде што $b_i=[c_1^n]$ во $(G,[\,])$, па значи $a=[b_1^{i-1}[c_1^n]b_{i+1}^n]=[b_1^{i-1}c_1^n\,b_{i+1}^n]$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме дека $a\in G$, $a\,\alpha\,u_1, u_1\,\alpha\,u_2,...,u_{k-1}\alpha\,u_k$ од каде што следува дека $u_k=a_1...a_{k(n-1)+1}$, каде што $a=[a_1^{k(n-1)+1}]$ во $(G,[\,])$. Одовде и од дефиницијата на γ следува дека $a,b\in G$ и $a\,\gamma\,b$ повлекува $a=b$.

(в) Нека $u=a_1...a_i$, $a_1,...,a_i\in G$. Да ставиме $|u|=i$. Од дефиницијата на α јасно е дека $u\;\alpha\;v$ повлекува $|u|\equiv|v|(\mathrm{mod}(n-1))$, а оттука следува дека $u\;\gamma\;v\;\Rightarrow$ $|u|\equiv|v|(\mathrm{mod}(n-1))$. Според тоа, ако $a_1...a_i=u\;\gamma\;v=b_1...b_j$, $1\le i\le j\le n-1$, тогаш $i\equiv j(\mathrm{mod}(n-1))$, што е можно само за $i=j$.

(г) Нека $a_1^\gamma,...,a_n^\gamma\in G^\gamma$. Ако $a=[a_1^n]$ во $(G,[\,])$, тогаш $a\;\alpha\;a_1...a_n$, од каде што следува дека $a_1^\gamma...a_n^\gamma=a^\gamma$ во G^γ, т.е. дека G^γ е n-потполугрупа од F/γ, а и дека ψ е епиморфизам од $(G,[\,])$ во $(G^{\gamma},[\,])$. Од (б) следува дека ψ е инјекција. □

Тврдењето (г) од Теоремата 2.3 ни дозволува n-полугрупата $(G,[\,])$ да ја сметаме за n-потполугрупа од $S = F/\gamma$. Во тој случај S станува покривка на $(G,[\,])$. Да забележиме дека $S = G \cup G^2 \cup ... \cup G^{n-1}$, при што $G^i \cap G^j = \varnothing$ за $i \neq j$ и $a_1...a_i = a_1'...a_i'$ во S $\Leftrightarrow$ $a_1...a_i \ \gamma \ a_1'...a_i'$ во F.

Од изложеното досега, можеме да заклучиме дека *за секоја n-полугрупа постои покривачка полугрупа.*

Својство 2.1. *n-полугрупата $(G,[\,])$ има 1-неутрална и n-неутрална низа ако и само ако нејзината слободна покривка S има единица.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа, нека (e_1^{n-1}) е 1-неутрална и n-неутрална низа и нека S е слободната покривка на $(G,[\,])$. Тогаш $e = e_1...e_{n-1} \in S$ и за секој $x = x_1...x_i \in S$ важи дека

$$xe = x_1...x_i e_1...e_{n-1} = x_1...x_{i-1}[x_i e_1^{n-1}] = x_1...x_{i-1}x_i = x \text{ и}$$

$$ex = e_1...e_{n-1}x_1...x_i = [e_1^{n-1}x_1]x_2...x_i = x_1x_2...x_i = x,$$

што значи дека e е единицата на S.

Обратно, нека e е единицата на слободната покривка S на $(G,[\,])$. Бидејќи $S = G \cup G^2 \cup ... \cup G^{n-1}$, имаме дека $e \in G^i$ за некој $i \in \{1,...,n-1\}$. Нека $e \in G^p$ и нека $x \in G^{n-p}$. Тогаш $e = e_1...e_p$, $x = x_1...x_{n-p}$, каде што $e_1,...,e_p, x_1,...,x_{n-p} \in G$, и

$$x = x_1...x_{n-p} = x_1...x_{n-p}e = x_1...x_{n-p}e_1...e_p \in G^n \subseteq G,$$

па $G^{n-p} \subseteq G$. Од конструкцијата на слободната покривка S, следува дека $G \cap G^j = \varnothing$, за секој $j \in \{2,...,n-1\}$, па оттука $n-p=1$, т.е. $p = n-1$. Според тоа, за секој $a \in G$ имаме дека

$$ae = ae_1...e_{n-1} = [ae_1^{n-1}] = a \text{ и } ea = e_1...e_{n-1}a = [e_1^{n-1}a] = a,$$

што значи дека низата (e_1^n) е 1-неутрална и n-неутрална за $(G,[\,])$. □

Својство 2.2. *Ако n-полугрупата $(G,[\,])$ има покривка S што е кратлива полугрупа, тогаш и $(G,[\,])$ е кратлива n-полугрупа.*

Доказ. Нека S е кратлива полугрупа што е покривка на n-полугрупата $(G,[\,])$. Користејќи ја кратливоста на S, за секое $i \in \{1,2,...,n\}$, имаме:

$$[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n] = [a_1^{i-1}ya_{i+1}^n] \Leftrightarrow a_1...a_{i-1}xa_{i+1}...a_n = a_1...a_{i-1}ya_{i+1}...a_n \Leftrightarrow$$
$$a_2...a_{i-1}xa_{i+1}...a_n = a_2...a_{i-1}ya_{i+1}...a_n \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow xa_{i+1}...a_n = ya_{i+1}...a_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow xa_{i+1}...a_{n-1} = ya_{i+1}...a_{n-1} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow xa_{i+1} = ya_{i+1} \Leftrightarrow x = y.$$

Според тоа, n-полугрупата $(G,[\,])$ е i-кратлива за секој $i \in \{1,2,\dots,n\}$, па $(G,[\,])$ е кратлива n-полугрупа. □

Добро е познато дека на која било полугрупа $(S,\cdot)$ можеме да ѝ придружиме неутрален елемент $e \notin S$ на тој начин што $(S \cup \{e\},\circ)$ е полугрупа што ја содржи $(S,\cdot)$ како нејзина потполугрупа. Доволно е операцијата $\circ$ да се дефинира како проширување на операцијата $\cdot$ ставајќи $x \circ y = x \cdot y$, за секои $x, y \in S$, $e \circ e = e$ и $x \circ e = e \circ x = x$, за секој $x \in S$.

Природно се поставува следново прашање: *Дали може да се најде аналогна конструкција за* n*-полугрупите?* Во [10] е покажано дека одговорот е потврден.

Лема 2.1. *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-полугрупа. Тогаш* $(G,[\,])$ *има неутрален елемент ако и само ако постои полугрупа* $(G,\circ)$ *со неутрален елемент таква што* $[x_1^n] = x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$ *за секои* $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$.

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа со единица e. Дефинираме бинарна операција $\circ$ на G со $x \circ y = [xy\overset{n-2}{e}]$. Тогаш

$$(x \circ y) \circ z = [[xy\overset{n-2}{e}]z\overset{n-2}{e}] = [xy[\overset{n-2}{e}ze]\overset{n-3}{e}] =$$
$$= [xy[z\overset{n-1}{e}]\overset{n-3}{e}] = [x[yz\overset{n-2}{e}]\overset{n-2}{e}] = x \circ (y \circ z),$$

па $(G,\circ)$ е полугрупа. Исто така,

$$[x_1^n] = [[x_1^n]\overset{n-1}{e}] = [x_1[x_2^n e]\overset{n-2}{e}] = x_1 \circ [x_2^n e] = x_1 \circ [[x_2^n e]\overset{n-1}{e}] =$$
$$= x_1 \circ [x_2[x_3^n ee]\overset{n-2}{e}] = x_1 \circ x_2 \circ [x_3^n ee] = \dots =$$
$$= x_1 \circ \dots \circ x_{n-2} \circ [x_{n-1}^n\overset{n-2}{e}] = x_1 \circ \dots \circ x_{n-2} \circ [[x_{n-1}^n\overset{n-2}{e}]\overset{n-1}{e}] =$$
$$= x_1 \circ \dots \circ x_{n-2} \circ [x_{n-1}[x_n\overset{n-1}{e}]\overset{n-2}{e}] = x_1 \circ \dots \circ x_{n-2} \circ x_{n-1} \circ [x_n\overset{n-1}{e}] =$$
$$= x_1 \circ \dots \circ x_{n-2} \circ x_{n-1} \circ x_n.$$

Освен тоа, $x \circ e = [x\overset{n-1}{e}] = x$ и $e \circ x = [ex\overset{n-2}{e}] = x$, па e е неутрален елемент на полугрупата $(G,\circ)$.

Обратно, нека $(G,\circ)$ е полугрупа со неутрален елемент e таква што $[x_1^n] = x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$. Тогаш за секој $x \in G$ и секој $i \in \{1,2,\dots,n\}$ важи

$$[\overset{i-1}{e}\,x\,\overset{n-i}{e}] = \underbrace{e \circ \dots \circ e}_{i-1} \circ x \circ \underbrace{e \circ \dots \circ e}_{n-i} = x,$$

па e е неутрален елемент за n-полугрупата $(G,[\,])$. □

Лема 2.2. *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-полугрупа и нека* $\circ$ *е асоцијативна примитивна бинарна операција за* $[\,]$*. Тогаш операцијата* $[\,]$ *има неутрална низа ако и само ако има единица.*

Доказ. Нека e_1^{n-1} е неутрална низа за операцијата $[\,]$. Тогаш важи дека $e = e_1 \circ \ldots \circ e_{n-1} \in G$ и за секој $x \in G$ имаме дека

$$x \circ e = x \circ e_1 \circ \ldots \circ e_{n-1} = [xe_1^{n-1}] = x \text{ и } e \circ x = e_1 \circ \ldots \circ e_{n-1} \circ x = [e_1^{n-1}x] = x\,.$$

Тоа значи дека e е единица за $(G,\circ)$, па e е единица и за $(G,[\,])$.

Обратно, нека e е единица за $(G,[\,])$. Тогаш низата $\overset{n-1}{e}$ е неутрална за $[\,]$. □

Директно од Лемата 2.2 се добива следната последица.

Последица 2.2. *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-полугрупа и нека* $\circ$ *е асоцијативна примитивна бинарна операција за* $[\,]$*. Ако операцијата* $[\,]$ *нема единица, тогаш таа нема ниту неутрална низа.* □

Теорема 2.2. *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-полугрупа што нема единица. Ако постои асоцијативна примитивна бинарна операција за* $[\,]$*, тогаш на* n*-полугрупата* $(G,[\,])$ *можеме да ѝ придружиме единица.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа што нема единица и нека $\circ$ е асоцијативна примитивна бинарна операција за $[\,]$. Тогаш $(G,\circ)$ е полугрупа на која може да ѝ се придружи единица $e \notin G$ така што $(G,\circ)$ е потполугрупа од $(G \cup \{e\},*)$, т.е. $x * y = x \circ y$ за секои $x, y \in G$, $e * e = e$ и $x * e = e * x = x$ за секој $x \in G$. Нека $[\,]'$ е n-арна операција на $G \cup \{e\}$ изведена од $*$. Јасно е дека операцијата $[\,]'$ е асоцијативна, па $(G \cup \{e\},[\,]')$ е n-полугрупа со единица e таква што

$$[x_1^n]' = x_1 * x_2 * \ldots * x_n = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = [x_1^n]$$

за секои $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$. Со тоа на n-полугрупата $(G,[\,])$ ѝ е придружен неутрален елемент e. □

Задачи

1. Нека $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ е која било фамилија од $n-1$ пар по пар дисјунктни множества, а $F(S_1, S_2, \ldots, S_{n-1})$ е множество од сите функции $f: \bigcup_{i=1}^{n-1} S_i \to \bigcup_{i=1}^{n-1} S_i$, такви што $f(S_1) \subseteq S_2$, $f(S_2) \subseteq S_3$, ... , $f(S_{n-1}) \subseteq S_1$. Покажи дека $F(S_1, \ldots, S_{n-1})$ е n-полугрупа во однос на операцијата композиција на кои било n функции, т.е. операцијата $[f_1 f_2 \ldots f_n] = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$.

2. Нека σ е произволна пермутација на $1,2,\dots,n-1$. Покажи дека множеството $F^{\sigma}(S_1,S_2,\dots,S_{n-1})$ од сите функции $f:\bigcup_{i=1}^{n-1} S_i \to \bigcup_{i=1}^{n-1} S_i$, такви што $f(S_i)\subseteq S_{\sigma(i)}$, за секој $i\in\{1,2,\dots,n-1\}$ е n-полугрупа во однос на операцијата композиција на кои било n функции, т.е. операцијата $[f_1 f_2 \dots f_n] = f_1\circ f_2 \circ\dots\circ f_n$.

3. Нека $R(k_1,k_2)$ е фамилија од сите парови матрици $A=(A_1,A_2)$ над прстен R каде што A_1 е $k_1\times k_2$ матрица, а A_2 е $k_2\times k_1$ матрица. Тогаш $R(k_1,k_2)$ е 3-полугрупа во однос на операцијата $[A^1A^2A^3]=(A_1^{\,1}A_2^{\,2}A_1^{\,3}, A_2^{\,1}A_1^{\,2}A_2^{\,3})$.

4. Нека $R(k_1,k_2,k_3)$ е фамилија од сите тројки од матрици $A=(A_1,A_2,A_3)$ над прстен R каде што A_1 е $k_1\times k_2$ матрица, A_2 е $k_2\times k_3$ матрица, а A_3 е $k_3\times k_1$ матрица. Тогаш $R(k_1,k_2,k_3)$ е 4-полугрупа во однос на операцијата

$$[A^1A^2A^3A^4]=(A_1^{\,1}A_2^{\,2}A_3^{\,3}A_1^{\,4}, A_2^{\,1}A_3^{\,2}A_1^{\,3}A_2^{\,4}, A_3^{\,1}A_1^{\,2}A_2^{\,3}A_3^{\,4}).$$

5*. Нека $R(k_1,k_2,\dots,k_n)$ е фамилија од сите n-ки од матрици $A=(A_1,A_2,\dots,A_n)$ над прстен R каде што A_i е $k_i\times k_{i+1}$ матрица, а A_{n-1} е $k_{n-1}\times k_1$ матрица. Тогаш $R(k_1,k_2,\dots,k_n)$ е n-полугрупа во однос на операцијата

$$[A^1A^2\dots A^n]=(A_1^{\,1}A_2^{\,2}\dots A_1^{\,n}, A_2^{\,1}A_3^{\,2}\dots A_2^{\,n},\dots, A_{n-1}^{\,1}A_1^{\,2}\dots A_{n-1}^{\,n}).$$

6. Ако во тернарна полугрупа $(G,[\,])$ во која е задоволен идентитетот $[xyz]=[yxz]$ постојат $a,b\in G$ такви што $[axb]=x$, за секој $x\in G$, тогаш $(G,[\,])$ е комутативна.

7. Да се покаже дека ако e е единица во n-полугрупата $(G,[\,])$, тогаш:

$$(\forall x_1,x_2,\dots,x_{n-1})\quad [ex_1x_2\dots x_{n-1}]=[x_1ex_2\dots x_{n-1}]=\dots=[x_1x_2\dots x_{n-1}e].$$

8. Нека $(G,[\,])$ е 3-групоид со единица e. Да се докаже дека ако во $(G,[\,])$ е исполнет барем еден од следните идентитети

$i)$ $[[xyz]uv]=[x[yzu]v]$, $ii)$ $[[xyz]uv]=[xy[zuv]]$, $iii)$ $[x[yzu]v]=[xy[zuv]]$,

тогаш $(G,[\,])$ е 3-полугрупа.

9. Докажи дека една тернарна полугрупа е кратлива ако и само ако таа е 2-кратлива.

10. Докажи дека една тернарна полугрупа е кратлива ако и само ако е лево и десно кратлив.

11. Ако $(G,[\,])$ е n-полугрупа во која важи законот за кратење за $i=0$ и $i=n$, тогаш во неа важи законот за кратење за секој i. Докажи!

12. Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа со единица e и нека $*$ е бинарна операција на G дефинирана со: $(\forall x,y\in G)\quad x*y=[xye\ldots e]$.
   а) Да се покаже дека $(G,*)$ е полугрупа.
   б) Да се покаже дека $(G,*)$ е покривка на дадената n-полугрупа $(G,[\,])$.

13. Нека $(G,[\,])$ е комутативна n-полугрупа со особината:
$$(\forall x\in G)(\exists a_1,a_2,\ldots,a_n)\quad [a_1a_2\ldots a_n]=x\,.$$
   Да се покаже дека секоја покривка на $(G,[\,])$ е комутативна полугрупа.

14. Докажи дека ако $(S,[\,])$ е n-полугрупа слободно генерирана од множество G, а F е полугрупа слободно генерирана од истото множество G, тогаш F е покривачка полугрупа за $(S,[\,])$.

15. Ако некоја покривка S на една n-полугрупа $(G,[\,])$ е кратлива полугрупа, тогаш и $(G,[\,])$ е кратлива n-полугрупа. Докажи!

1.3. Тернарни асоцијативни операции со неутрални низи

Во овој дел со $[\,]$ означуваме тернарна асоцијативна операција на G. За $[\,]$ велиме дека е тернарна асоцијативна операција ако за секои $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in G$ се исполнети равенствата
$$[[x_1x_2x_3]x_4x_5]=[x_1[x_2x_3x_4]x_5]=[x_1x_2[x_3x_4x_5]]\,.$$
Според теоремата 2.1, ако $[\,]$ е асоцијативна операција, тогаш постои само една ($2k+1$)-арна операција $[\,]'$ што е изведена од $[\,]$.

Низата (e_1e_2) што е 2-неутрална, е всушност i-неутрална за $i\in\{1,2,3\}$, а e_1 и e_2 се централни елементи за 3-групоидот $(G,[\,])$. Ова е главното тврдење на следната

Теорема 3.1. *Нека* $[\,]$ *е тернарна асоцијативна операција на множество* G *и нека* (e_1e_2) *е* 2*-неутрална низа за операцијата* $[\,]$. *Тогаш:*

(*а*) (e_1e_2) *и* (e_2e_1) *се* i*-неутрални низи за операцијата* $[\,]$ *за секој* $i\in\{1,2,3\}$.

(*б*) e_1 *и* e_2 *се централни елементи за* 3*-групоидот* $(G,[\,])$.

(*в*) *низата* (f_1f_2) *е* 1*-неутрална ако и само ако* (f_1f_2) *е* 3*-неутрална низа.*

(*г*) $[x\overset{2k}{e_1}]=y$ *ако и само ако* $[y\overset{2k}{e_2}]=x$.

Доказ. Бидејќи (e_1e_2) е 2-неутрална низа за дадена тернарна асоцијативна операција $[\,]$ на G, тогаш за секој $x\in G$ важат следниве равенства:

$$[xe_1e_2]=[e_1[xe_1e_2]e_2]=[e_1x[e_1e_2e_2]]=[e_1xe_2]=x\,,$$
$$[xe_2e_1]=[e_1[xe_2e_1]e_2]=[[e_1xe_2]e_1e_2]=[xe_1e_2]=x\,,$$

што значи дека низите (e_1e_2) и (e_2e_1) се 1-неутрални. Потоа, за секои $x,y\in G$ важи дека

$$[e_1xy]=[e_1[xe_2e_1]y]=[[e_1xe_2]e_1y]=[xe_1y]=$$
$$=[xe_1[ye_2e_1]]=[x[e_1ye_2]e_1]=[xye_1]\,,$$

т.е. дека e_1 е централен елемент за 3-групоидот $(G,[\,])$. Сега, за секој $x\in G$ имаме дека $[e_2xe_1]=[e_1e_2x]=[e_1e_2[e_1xe_2]]=[[e_1e_2e_1]xe_2]$, па, низата (e_2e_1) е 2-неутрална. За секои $x,y\in G$ важи дека

$$[e_2xy]=[e_2[xe_1e_2]y]=[[e_2xe_1]e_2y]=[xe_2y]=$$
$$=[xe_2[ye_1e_2]]=[x[e_2ye_1]e_2]=[xye_2]\,,$$

па, e_2 е централен елемент за 3-групоидот $(G,[\,])$. Според тоа, за секој $x\in G$ важи равенството $[e_1e_2x]=[e_2e_1x]=[e_1xe_2]=x$, што значи дека низите (e_1e_2) и (e_2e_1) се и 3-неутрални. Следствено, тврдењата под (а) и (б) се докажани.

Сега ќе го докажеме тврдењето под (в). Нека (f_1f_2) е 1-неутрална низа. Бидејќи операцијата $[\,]$ е асоцијативна и e_1 и e_2 се централни елементи за 3-групоидот $(G,[\,])$, за секој $x\in G$ имаме дека

$$[f_1f_2x]=[f_1f_2[e_1e_2x]]=[[f_1f_2e_1]e_2x]=[[e_1f_1f_2]e_2x]=[e_1e_2x]=x\,,$$

што значи дека (f_1f_2) е 3-неутрална низа.

Обратно, нека (f_1f_2) е 3-неутрална низа. Бидејќи операцијата $[\,]$ е асоцијативна и e_1 и e_2 се централни елементи за 3-групоидот $(G,[\,])$, за секој $x\in G$ имаме дека

$$[xf_1f_2]=[[xe_1e_2]f_1f_2]=[xe_1[e_2f_1f_2]]=[xe_1[f_1f_2e_2]]=[xe_1e_2]=x\,,$$

што значи дека (f_1f_2) е 1-неутрална низа.

Останува да се докаже тврдењето под (г). Прво докажуваме дека за секои $x_1,x_2,\ldots,x_{2r},y_1,y_2,\ldots,y_{2s}\in G$ важи

$$[x_1^{2r}e_1]=[y_1^{2s}e_1]\ \Leftrightarrow\ [x_1^{2r}e_2]=[y_1^{2s}e_2]\,.$$

Навистина, $[x_1^{2r}e_1]=[y_1^{2s}e_1]\ \Rightarrow\ [x_1^{2r}e_2]=[x_1^{2r}[e_1e_2e_2]]=$

$$=[[x_1^{2r}e_1]e_2e_2]=[[y_1^{2s}e_1]e_2e_2]=[y_1^{2s}[e_1e_2e_2]]=[y_1^{2s}e_2]\,.$$

Докажавме дека низата (e_1e_2) е 2-неутрална, па

$$[x_1^{2r}e_2]=[y_1^{2s}e_2]\ \Rightarrow\ [x_1^{2r}e_1]=[x_1^{2r}[e_2e_1e_1]]=$$
$$=[[x_1^{2r}e_2]e_1e_1]=[[y_1^{2s}e_2]e_1e_1]=[y_1^{2s}[e_2e_1e_1]]=[y_1^{2s}e_1]\,.$$

Со помош на принципот на математичка индукција ќе покажеме дека за секој $y \in G$ важи равенството $y=[y\overset{k}{e_1}\overset{k}{e_2}]$. Точноста на тврдењето за $k=1$ следува од тоа што низата (e_1e_2) е 1-неутрална за операцијата $[\,]$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за k. Тогаш

$$y=[y\overset{k}{e_1}\overset{k}{e_2}]=[y\overset{k-1}{e_1}[e_1e_1e_2]\overset{k}{e_2}]=[y\overset{k+1}{e_1}\overset{k+1}{e_2}],$$

што значи дека тврдењето е исполнето и за $k+1$.

Бидејќи $e_1 \in Z(G)$, имаме дека

$$[x\overset{2k}{e_1}]=y \;\Leftrightarrow\; [x\overset{2k}{e_1}]=[y\overset{k}{e_1}\overset{k}{e_2}]=[y\overset{k-1}{e_1}\overset{k}{e_2}e_1], \text{ па}$$

$$[x\overset{2k}{e_1}]=y \;\Leftrightarrow\; [x\overset{2k-1}{e_1}e_2]=[y\overset{k-1}{e_1}\overset{k+1}{e_2}].$$

Повторувајќи ја постапката уште $k-1$ пати добиваме дека $[x\overset{2k}{e_1}]=y \Leftrightarrow [x\overset{k}{e_1}\overset{k}{e_2}]=[y\overset{2k}{e_2}]$. Како што видовме, $x=[x\overset{k}{e_1}\overset{k}{e_2}]$ за секој $x \in G$, а оттука следува дека $[x\overset{2k}{e_1}]=y \Leftrightarrow x=[y\overset{2k}{e_2}]$. □

Следните две својства се последици од претходната теорема.

Последица 3.1. *Ако* $[\,]$ *е асоцијативна операција и* $E_2 \neq \emptyset$, *тогаш* $E_2 \subseteq E_1 = E_3$.

Доказ. Ако $e \in E_2$, тогаш низата (ee) е 2-неутрална, па од Теоремата 3.1 (а) следува дека низата (ee) е и 1-неутрална, односно $e \in E_1$, па $E_2 \subseteq E_1$. Според Теоремата 3.1 (в) имаме дека $f \in E_1 \Leftrightarrow f \in E_3$, па $E_1 = E_3$. □

Во овој случај наместо E_1 и E_3 ќе пишуваме E.

Последица 1.2. *Ако* $(G,\cdot)$ *е полугрупа и ако постојат* $a,b \in G$ *такви што за секој* $x \in G$ *важи* $axb = x$, *тогаш* $ab = ba$ *е неутрален елемент во полугрупата и за секој* $x \in G$ *важи дека* $ax = xa$ *и* $bx = xb$.

Доказ. Ако ставиме $[xyz]=xyz$ добиваме тернарна асоцијативна операција за која низата (ab) е 2-неутрална. Тогаш според Теоремата 3.1 (а) следува дека низите (ab) и (ba) се i-неутрални за $i=\{1,2,3\}$, па за секој $x \in G$ имаме дека $x=(ab)x=x(ab)=(ba)x$. Ставајќи $x=ba$ добиваме дека $ba=(ba)(ab)$, а ставајќи $x=ab$ добиваме $ab=(ba)(ab)$, од каде што $ab=ba$ е неутрален елемент во $(G,\cdot)$. Исто така, $xa=(axb)a=ax(ba)=ax$ и $xb=(bxa)b=bx(ab)=bx$. □

Во Теоремата 3.1, условот (e_1e_2) е 2-неутрална низа не може да се замени со условот (e_1e_2) е 1-неутрална низа или 3-неутрална низа. Исто така, условот

$[\,]$ да биде асоцијативна операција не може да се замени со некој од тие услови, што може да се види од следните примери.

Пример 3.1. Нека S_3 е групата од пермутации од 3 елементи. Дефинираме тернарната операција $[\,]$ на S_3 со $[xyz]=xyz$. Според Посл. 2.1 (б) операцијата $[\,]$ е асоцијативна. Нека $a=(12)$ и $b=(13)$. $a^{-1}=(12)$, $aba^{-1}=(12)(13)(12)=(23)$. За секој $x\in S_3$ важи $x=xaa^{-1}=aa^{-1}x$, односно низата (aa^{-1}) е 1-неутрална и 3-неутрална, но не е 2-неутрална низа за тернарната асоцијативна операција $[\,]$, бидејќи $aba^{-1}=(23)\neq(13)=b$.

Пример 3.2. На множеството $\{a,b\}$ дефинираме тернарна операција $[\,]$ со $a=[aaa]=[bab]=[bba]=[bbb]$, $b=[aab]=[aba]=[abb]=[baa]$. Очигледно, низата (aa) е i-неутрална за $i=\{1,2,3\}$, но операцијата $[\,]$ не е асоцијативна. Имено, $[a[aba]b]=[abb]=b\neq a=[bab]=[[aab]ab]$.

Од дефиницијата за изведени операции следува дека за секоја n-арна операција $[\,]$ самата операција $[\,]$ е примитивна. Тоа е единствената n-арна примитивна операција за $[\,]$. Навистина, нека $[\,]'$ е примитивна операција за $[\,]$ со арност n. Тогаш имаме дека $[x_1^n]=[[x_1^{m_1}]_1,[x_{m_1+1}^{m_1+m_2}]_2,...,[x_{m_1+m_2+...+m_{n-1}}^{m}]_n]'$ и притоа $[\,]_1,[\,]_2,...,[\,]_n$ се $m_1,m_2,...,m_n$-арни операции изведени од $[\,]'$, каде што $m_1+m_2+...+m_n=n$. Од тоа што $m_1,m_2,...,m_n\in\mathbf{N}$, следува дека $m_1=...=m_n=1$. Така, $[x]_i=x$ за секој $i=\{1,...,n\}$, односно $[x_1^n]=[x_1^n]'$, т.е. $[\,]=[\,]'$. Од Теоремата 2.1 следува дека од една унарна операција може да се изведе само унарна операција, зашто $k(1-1)+1=1$. Значи, ако $n=3$, тогаш останатите примитивни операции се бинарни ($3=2(2-1)+1$).

Теорема 3.2. *Нека* $[\,]$ *е тернарна асоцијативна операција на множество* G *за која низата* (e_1e_2) *е* 1-*неутрална и нека* $[\,]'$ *е бинарна операција. Тогаш за секои* $x,y,z\in G$ *важи дека* $[x[yz]']'=[xyz]$ *ако и само ако постои елемент* $e\in G$ *таков што* e *е* 1-*неутрален за операцијата* $[\,]$ *и за секои* $x,y\in G$ *важи* $[xy]'=[xye]$.

Доказ. За секои $x,y,z\in G$, $[x[yz]']'=[xyz]$ $\Rightarrow x=[xe_1e_2]=[x[e_1e_2]']'=[xe]'$, каде што $e=[e_1e_2]'$ $\Rightarrow$ $[xy]'=[x[ye]']'=[xye]$ $\Rightarrow$ $[xee]=[x[ee]']'=[xe]'=x$, а оттука елементот e е 1-неутрален за операцијата $[\,]$.

Обратно, нека e е 1-неутрален елемент за операцијата $[\,]$ и нека за секои $x,y\in G$ важи равенството $[xy]'=[xye]$. Тогаш, за секои $x,y,z\in G$ важи

$$[x[yz]']'=[x[yze]e]=[[xyz]ee]=[xyz]. \ \square$$

Слично се докажува точноста на следната теорема:

Теорема 3.3. *Нека* $[\,]$ *е тернарна асоцијативна операција на множество* G *за која низата* (e_1e_2) *е* 3*-неутрална и нека* $[\,]'$ *е бинарна операција. Тогаш за секои* $x,y,z\in G$ *важи дека* $[[xy]'z]'=[xyz]$ *ако и само ако постои елемент* $e\in G$ *таков што* e *е* 3*-неутрален за операцијата* $[\,]$ *и за секои* $x,y\in G$ *важи* $[xy]'=[exy]$.

Доказ. За секои $x,y,z\in G$, $[[xy]'z]'=[xyz]$ $\Rightarrow$ $x=[e_1e_2x]=[[e_1e_2]'x]'=[ex]'$, каде што $e=[e_1e_2]'$ $\Rightarrow$ $[xy]'=[[ex]'y]'=[exy]$, за секои $x,y\in G$, а оттука следува дека $[eex]=[[ee]'x]'=[ex]'=x$, за секој $x\in G$. Според тоа, елементот e е 3-неутрален за операцијата $[\,]$.

Обратно, нека e е 3-неутрален елемент за операцијата $[\,]$ и нека за секои $x,y\in G$ важи равенството $[xy]'=[exy]$. Тогаш, за секои $x,y,z\in G$ важат равенствата $[[xy]'z]'=[e[exy]z]=[ee[xyz]]=[xyz]$. □

Од својствата на асоцијативните бинарни операции следува дека ако за тернарната операција $[\,]$ постои барем една примитивна бинарна операција што е асоцијативна, тогаш и операцијата $[\,]$ е асоцијативна.

Притоа, од асоцијативноста на тернарната операција $[\,]$ не следува асоцијативност на сите нејзини примитивни операции, што може да се види од следниот пример.

Пример 1.3. Да ја разгледаме диедралната група D_3 со 6 елементи чија келиева шема е дадена со следната таблица:

$\circ$	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
a_0	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
a_1	a_1	a_2	a_0	b_1	b_2	b_0
a_2	a_2	a_0	a_1	b_2	b_0	b_1
b_0	b_0	b_2	b_1	a_0	a_2	a_1
b_1	b_1	b_0	b_2	a_1	a_0	a_2
b_2	b_2	b_1	b_0	a_2	a_1	a_0

Ако ставиме $[xyz]=xyz$, $x,y,z\in D_3$, добиваме тернарна асоцијативна операција. Нека $[\,]'$ е бинарна операција определена со $[xy]'=xyb_1$, каде што $x,y\in D_3$ се произволни. Тогаш $[\,]'$ е примитивна операција за операцијата $[\,]$ затоа што $[x[yz]']'=\left(x\left(yzb_1\right)b_1\right)=xyz$, но операцијата $[\,]'$ не е асоцијативна зашто, на пример, $[[a_0a_0]'a_1]'=[b_1a_1]'=a_2\neq b_2=[a_0b_2]'=[a_0[a_0a_1]']'$.

Во Посл.3.1 видовме дека ако операцијата $[\,]$ е асоцијативна и $E_2 \neq \varnothing$, тогаш $E_2 \subseteq E_1 = E_3$ и во тој случај наместо E_1 и E_3 ќе пишуваме E. Истата ознака ја користиме и во следната теорема којашто дава одговор на прашањето кои примитивни операции од една тернарна асоцијативна операција која има 2-неутрална низа се асоцијативни.

Теорема 3.4. *Нека* $[\,]$ *е тернарна операција на множество* G *и нека* $[\,]_a$ *и* ${}_a[\,]$ *се бинарни операции дефинирани со* $[xy]_a = [xya]$ *и* ${}_a[xy] = [axy]$ *за секои* $x, y \in G$. *Ако* $[\,]$ *е асоцијативна операција за која* (e_1e_2) *е* 2*-неутрална низа, тогаш важат следните услови:*

(*а*) $[\,]'$ *е бинарна примитивна операција за операцијата* $[\,]$ *ако и само ако постои* $e \in E$ *таков што* $[\,]' = [\,]_e$ *или* $[\,]' = {}_e[\,]$.

(*б*) *Ако* $e, f \in E$, *тогаш:*

1) $[\,]_e = [\,]_f \;\Leftrightarrow\; e = f$;

2) ${}_f[\,] = [\,]_e \;\Leftrightarrow\; e = f \in E_2 \;\Leftrightarrow\; [\,]_e$ *е асоцијативна операција.*

Доказ. (а) Според Теоремата 3.1 (б), (e_1e_2) е 1-неутрална и 3-неутрална низа за тернарната асоцијативна операција $[\,]$. Според дефиницијата за изведени операции следува дека операцијата $[\,]'$ е бинарна примитивна операција за $[\,]$ ако и само ако за секои $x, y, z \in G$ важи $[x[yz]']' = [xyz]$ или $[[xy]'z]' = [xyz]$. Од Теоремата 3.2 имаме дека

$$(\forall x, y, z \in G)[x[yz]']' = [xyz] \;\Leftrightarrow\; (\exists e \in E)(\forall x, y \in G)[xy]' = [xye] = [xy]_e,$$

а од Теоремата 3.3 имаме дека

$$(\forall x, y, z \in G)[[xy]'z]' = [xyz] \;\Leftrightarrow\; (\exists e \in E)(\forall x, y \in G)[xy]' = [exy] = {}_e[xy].$$

Оттука следува дека операцијата $[\,]'$ е бинарна примитивна операција за операцијата $[\,]$ ако и само ако постои $e \in E$ таков што $[\,]' = [\,]_e$ или $[\,]' = {}_e[\,]$.

(б) 1) $[\,]_e = [\,]_f \;\Rightarrow\; e = [e_1e_2e] = [e_1e_2]_e = [e_1e_2]_f = [e_1e_2f] = f$. Оваа импликација е докажана без користење на условот $e, f \in E$. Импликацијата $e = f \;\Rightarrow\; [\,]_e = [\,]_f$ важи тривијално, па $[\,]_e = [\,]_f \;\Leftrightarrow\; e = f$.

2)
$$ {}_f[\,] = [\,]_e \;\Rightarrow\; e = [e_1e_2e] = [e_1e_2]_e = {}_f[e_1e_2] = [fe_1e_2] = f \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (\forall x \in G)\, x = [eex] = {}_e[ex] = [ex]_e = [exe] \;\Rightarrow\; e \in E_2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (\forall x, y, z \in G)[x[yz]_e]_e = [x[yze]e] = [x[yez]e] = [[xye]ze] = [[xy]_e z]_e \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; [\,]_e \text{ е асоцијативна операција.}$$

Нека $e \in E$ и $[\,]_e$ е асоцијативна операција. Тогаш за секој $x \in G$ имаме дека $x = [ee[xee]] = [e[exe]e] = [e[ex]_e]_e = [[ee]_e x]_e = [exe]$, па $e \in E_2$. □

Ако се отфрли претпоставката за асоцијативност или егзистенција на 2-неутрална низа за тернарната операција $[\,]$, тогаш примитивни бинарни операции може да постојат и кога $E_1 = E_3 = \varnothing$. Тоа може да се види од следните примери.

Пример 3.4. Нека $|G| \geq 2$ и $a \in G$. Дефинираме тернарна операција $[\,]$ на множеството G со $[xyz] = a$, за секои $x, y, z \in G$. Очигледно важи дека

$$(\forall x, y, z, u, v \in G) \quad [[xyz]uv] = [x[yzu]v] = [xy[zuv]] = a\,,$$

т.е. операцијата $[\,]$ е асоцијативна. Нека $b \in G$ и нека $b \neq a$. Тогаш $(\forall x, y \in G)[bxy] = [xby] = [xyb] = a$, што значи дека $E_1 = E_2 = E_3 = \varnothing$. Дефинираме бинарна операција $[\,]'$ на множеството G со $[xy]' = a$, за секои $x, y \in G$. Операцијата $[\,]'$ е примитивна за $[\,]$ зашто $[xyz] = [[xy]'z]' = a$, за секои $x, y, z \in G$.

Пример 3.5. Нека $G = \mathbf{Q}$ е множеството од рационални броеви и нека $[\,]$ е тернарна операција на G дефинирана на следниот начин:

$$(\forall x, y, z \in G) \quad [xyz] = \frac{1}{4}x + y + 2z + 6\,.$$

Да претпоставиме дека e е 1-неутрален елемент за операцијата $[\,]$. Тогаш за секој $x \in G$ имаме дека

$$[xee] = x \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4}x + e + 2e + 6 = x \;\Leftrightarrow\; e = -\frac{x}{12} - 2\,,$$

што значи дека елементот e зависи од x, т.е. не е еднозначно определен. Поради тоа $E_1 = \varnothing$. Слично, ако претпоставиме дека e е 3-неутрален елемент за операцијата $[\,]$, тогаш за секој $x \in G$ имаме дека

$$[eex] = x \;\Leftrightarrow\; \frac{e}{4} + e + 2x + 6 = x \;\Leftrightarrow\; e = -\frac{4}{5}(x + 6)\,,$$

па елементот e не е еднозначно определен, што значи дека и множеството $E_3 = \varnothing$. Ако e е 2-неутрален елемент за операцијата $[\,]$, тогаш за секој $x \in G$ имаме дека

$$[exe] = x \;\Leftrightarrow\; \frac{e}{4} + x + 2e + 6 = x \;\Leftrightarrow\; e = -2\frac{2}{3}\,,$$

па $e = -2\frac{2}{3}$ е 2-неутрален елемент за $[\,]$, т.е. $E_2 = \left\{-2\frac{2}{3}\right\}$.

Сепак бинарната операција $[\,]'$ на G дефинирана со $[xy]' = \frac{1}{2}x + 2y + 4$ за секои $x, y \in G$ е примитивна за $[\,]$. Навистина, за секои $x, y, z \in G$ добиваме дека $[[xy]'z]' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + 2y + 4\right) + 2z + 4 = \frac{1}{4}x + y + 2z + 6 = [xyz]$.

Задачи

1. За $[\,]$ велиме дека е *кватернарна* асоцијативна операција ако $[[x_1^4]x_5^7] = [x_1[x_2^5]x_6^7] = [x_1^2[x_3^6]x_7] = [x_1^3[x_4^7]]$ за секои $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in G$.

2. Докажи дека ако $[\,]$ е кватернарна асоцијативна операција на множество G и ако $(e_1 e_2 e_3)$ е 2-неутрална и 3-неутрална низа за операцијата $[\,]$, тогаш:

(а) низите $(e_{\nu_1} e_{\nu_2} e_{\nu_3})$ се i-неутрални за операцијата $[\,]$, каде што $i \in \{1,2,3,4\}$, за секоја пермутација ν_1, ν_2, ν_3 на броевите $1,2,3$.

(б) e_1, e_2 и e_3 се централни елементи за 4-групоидот $(G,[\,])$.

(в) низата $(f_1 f_2 f_3)$ е 1-неутрална ако и само ако $(f_1 f_2 f_3)$ е 4-неутрална низа.

2. Нека $(G,\cdot)$ е полугрупа и нека постојат $a,b,c \in G$ такви што за секој $x \in G$ $a \cdot b \cdot x \cdot c = x = a \cdot x \cdot b \cdot c$. Тогаш $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a$ е неутрален елемент на полугрупата $(G,\cdot)$ и $a,b,c \in Z(G)$. Докажи!

3. Нека $(G,\cdot)$ е полугрупа и нека $a_1,\dots,a_{n-1} \in G$ се такви што за секој $x \in G$ важи $a_1 \dots a_i x a_{i+1} \dots a_{n-1} = x$, за секој $i \in \{2,\dots,n-1\}$. Тогаш $a_{\nu_1} \dots a_{\nu_{n-1}} = a_{\mu_1} \dots a_{\mu_{n-1}}$ е неутрален елемент на полугрупата $(G,\cdot)$, каде што $\nu_1 \dots \nu_{n-1}$ и $\mu_1 \dots \mu_{n-1}$ се произволни пермутации на броевите $1,\dots,n-1$, и за секој $i \in \{1,\dots,n-1\}$ важи $a_i \in Z(G)$. Докажи!

4*. Нека S_4 е групата од симетрии на квадрат. Користиме ознаки: ρ_i за ротации, μ_i за осни симетрии во однос на симетралите на страните и δ_i за осни симетрии во однос на дијагоналите. Келиевата шема е дадена со следната таблица:

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
μ_1	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3
μ_2	μ_2	δ_2	μ_1	δ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1
δ_1	δ_1	μ_2	δ_2	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_1	δ_1	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ρ_0

Дефинираме кватернарна операција $[\,]$ на S_4 со $[xyzu] = xyzu$.

а) Најди 1-неутрална и 4-неутрална низа за операцијата $[\,]$, што не е 2-неутрална и 3-неутрална.

б) Најди 1-неутрална, 2-неутрална и 4-неутрална низа за операцијата $[\,]$, што не е 3-неутрална.

в) Најди 1-неутрална, 3-неутрална и 4-неутрална низа за операцијата $[\,]$, што не е 2-неутрална.

г) Провери дали низата $(\rho_0 \rho_2 \rho_2)$ е i-неутрална за секој $i \in \{1,2,3,4\}$.

5. Нека $G = \{a, b\}$. Дефинираме кватернарна операција $[\,]$ на G со:

$$a = [aaaa] = [aaab] = [aaba] = [abaa] = [baaa] = [bbaa] = [bbba] = [bbbb],$$

$$b = [baba] = [baab] = [abab] = [abba] = [aabb] = [abbb] = [babb] = [bbab].$$

Докажи дека (aab) е i-неутрална низа за секој $i \in \{1,2,3,4\}$, но операцијата $[\,]$ не е асоцијативна.

Глава II (*i*, *j*)-асоцијативни операции

2.1. Финитарни асоцијативни операции со неутрални елементи

Во овој дел ќе докажеме дека ако $(G,[\,])$ е (i,j)-асоцијативен n-групоид и $e \in Z(G)$ е неутрален елемент за $[\,]$, тогаш постои полугрупа $(G,*)$, единствена до изоморфизам, таква што за секои $x_1,...,x_n \in G$ важи дека $[x_1^n] = x_1 * ... * x_n$. Оттука како последица се добива дека ако $(G,[\,])$ е n-полугрупа и $\left(e_1^{n-1}\right)$ е 1-неутрална низа, а $\left(f_1^{n-1}\right)$ е n-неутрална низа за $[\,]$, тогаш постои полугрупа $(G,*)$, единствена до изоморфизам, таква што за секои $x_1,...,x_n \in G$ важи дека $[x_1^n] = x_1 * ... * x_n$, ако и само ако $(G,[\,])$ има единица. Освен тоа ќе докажеме дека ако $(G,[\,])$ има единица, тогаш од $(i,i+1)$-асоцијативноста, односно од $(i,i+2)$-асоцијативноста на $(G,[\,])$ следува неговата асоцијативност, а ќе направиме и неколку забелешки во врска со тоа. Овие резултати се изнесени во [28].

Прво ќе докажеме неколку помошни тврдења.

Нека $[\,]$ е n-арна операција на G. Дефинираме n-арна операција $[\,]^*$ на G со $[x_1^n]^* = [x_n ... x_1]$, за секои $x_1,...,x_n \in G$. Јасно е дека $([\,]^*)^* = [\,]$. За операцијата $[\,]^*$ велиме дека е дуална на $[\,]$ и за неа важи следната

Лема 1.1. (*а*) *n-групоидот $(G,[\,])$ е (i,j)-асоцијативен ако и само ако n-групоидот $(G,[\,]^*)$ е $(n-i+1, n-j+1)$-асоцијативен.*

(*б*) *Низата $\left(e_1^{n-1}\right)$ е i-неутрална за n-арната операција $[\,]$ ако и само ако низата $(e_{n-1}...e_1)$ е $n-i+1$-неутрална за операцијата $[\,]^*$.*

(*в*) *Елементот $c \in G$ е централен за n-арната операција $[\,]$ ако и само ако е централен елемент за операцијата $[\,]^*$.*

Доказ. (а) Нека $x_1, x_2, ..., x_{2n-1} \in G$ се произволни елементи. Тогаш

$$[x_{2n-1}...x_{2n-i+1}[x_{2n-i}...x_{n-i+1}]x_{n-i}...x_1] = [x_1^{n-i}[x_{n-i+1}^{2n-i}]^* x_{2n-i+1}^{2n-1}]^* \text{ и}$$
$$[x_{2n-1}...x_{2n-j+1}[x_{2n-j}...x_{n-j+1}]x_{n-j}...x_1] = [x_1^{n-j}[x_{n-j+1}^{2n-j}]^* x_{2n-j+1}^{2n-1}]^*,$$

па n-групоидот $(G,[\,])$ е (i,j)-асоцијативен ако и само ако n-групоидот $(G,[\,]^*)$ е $(n-i+1, n-j+1)$-асоцијативен.

(б) Равенството $[e_1^{i-1} x e_i^{n-1}] = [e_{n-1}...e_i x e_{i-1}...e_1]^*$ важи за секој $x \in G$, па низата $\left(e_1^{n-1}\right)$ е i-неутрална за операцијата $[\,]$ ако и само ако низата $(e_{n-1}...e_1)$ е $n-i+1$-неутрална за нејзината дуална операција $[\,]^*$.

(в) Нека $c \in G$ е централен елемент за n-арната операција $[\,]$ и нека $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ и $x_1, ..., x_{n-1} \in G$ се произволни елементи. Тогаш имаме дека $[x_{n-1}...x_i c x_{i-1}...x_1] = [x_{n-1}...x_j c x_{j-1}...x_1]$, односно $[x_1^{i-1} c x_i^{n-1}]^* = [x_1^{j-1} c x_j^{n-1}]^*$, па c е централен елемент и за операцијата $[\,]^*$. Слично се покажува дека важи и обратното тврдење. □

Последица 1.1. (*а*) *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-групоид. Елементот* $e \in G$ *е* i*-неутрален за операцијата* $[\,]$ *ако и само ако е* $n-i+1$*-неутрален за операцијата* $[\,]^*$.

(*б*) *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-групоид. Елементот* $e \in G$ *е неутрален за операцијата* $[\,]$ *ако и само ако е неутрален елемент за операцијата* $[\,]^*$.

Доказ. (а) Елементот $e \in G$ е i-неутрален за операцијата $[\,]$ ако и само ако низата $\left(\overset{n-1}{e}\right)$ е i-неутрална за $[\,]$, а тоа, според Лемата 1.1 (б) важи ако и само ако $\left(\overset{n-1}{e}\right)$ е $n-i+1$-неутрална низа за $[\,]^*$, односно ако и само ако e е $n-i+1$-неутрален елемент за операцијата $[\,]^*$.

(б) Елементот $e \in G$ е неутрален за операцијата $[\,]$ ако и само ако е i-неутрален за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Од тврдењето под (а) следува дека последново е еквивалентно со e е $n-i+1$-неутрален елемент за операцијата $[\,]^*$ за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$, па e е неутрален елемент за $[\,]^*$. □

Лема 1.2. *Ако* $(G,[\,])$ *е* $(i, i+k)$*-асоцијативен* n*-групоид, каде што* $1 \le k \le i-1$ *и* $\left(e_1^{n-1}\right)$ *е* $i+k$*-неутрална низа за* $(G,[\,])$, *тогаш* n*-групоидот* $(G,[\,])$ *е и* $(i-k, i)$*-асоцијативен.*

Доказ. Нека $x_1, x_2, ..., x_{2n-1} \in G$. Имаме

$$[x_1^{i-k-1}[x_{i-k}^{i-k+n-1}]x_{i-k+n}^{2n-1}] = [e_1^{i+k-1}[x_1^{i-k-1}[x_{i-k}^{i-k+n-1}]x_{i-k+n}^{2n-1}]e_{i+k}^{n-1}] =$$
$$= [e_1^{i-1}[e_i^{i+k-1}x_1^{i-k-1}[x_{i-k}^{i-k+n-1}]x_{i-k+n}^{2n-k-1}]x_{2n-k}^{2n-1}e_{i+k}^{n-1}] = [e_1^{i-1}[e_i^{i+k-1}x_1^{i-1}[x_i^{i+n-1}]x_{i+n}^{2n-k-1}]x_{2n-k}^{2n-1}e_{i+k}^{n-1}] =$$
$$= [e_1^{i+k-1}[x_1^{i-1}[x_i^{i+n-1}]x_{i+n}^{2n-1}]e_{i+k}^{n-1}] = [x_1^{i-1}[x_i^{i+n-1}]x_{i+n}^{2n-1}],$$

па n-групоидот $(G,[\,])$ е $(i-k,i)$-асоцијативен. □

Од Лемата 1.1 и од Лемата 1.2 се добива дека важи следната

Лема 1.3. *Ако* $(G,[\,])$ *е* $(i,i+k)$*-асоцијативен* n*-групоид,* $k\ge 1$*,* $n\ge i+2k$ *и* (e_1^{n-1}) *е* i*-неутрална низа за* $(G,[\,])$*, тогаш* n*-групоидот* $(G,[\,])$ *е* $(i+k,i+2k)$*-асоцијативен.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е $(i,i+k)$-асоцијативен n-групоид, при што $k\ge 1$ и $n\ge i+2k$. Од Лемата 1.1(а) следува дека n-групоидот $(G,[\,]^*)$ е $(n-i-k+1,n-i+1)$-асоцијативен, а пак од Лемата 1.1(б), дека $(e_{n-1}...e_1)$ е $n-i+1$-неутрална низа за $[\,]^*$. Да ставиме $l=n-i-k+1$. Тогаш $n-i+1=l+k$, па n-групоидот $(G,[\,]^*)$ е $(l,l+k)$-асоцијативен. Бидејќи $1\le k\le l-1$ и $(e_{n-1}...e_1)$ е $l+k$-неутрална низа за $(G,[\,]^*)$, според Лемата 1.2, $(G,[\,]^*)$ е $(l-k,l)$-асоцијативен n-групоид, т.е. $(n-i-2k+1,n-i-k+1)$-асоцијативен n-групоид. Повторно користејќи ја Лемата 1.1 (а), добиваме дека n-групоидот $(G,[\,])$ е $(i+k,i+2k)$-асоцијативен. □

Својство 1.1. *Ако* n*-групоидот* $(G,[\,])$ *е* (i,j)*-асоцијативен и* (j,k)*-асоцијативен, тогаш* $(G,[\,])$ *е* (i,k)*-асоцијативен* n*-групоид.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е (i,j)-асоцијативен и (j,k)-асоцијативен n-групоид и нека $x_1,x_2,...,x_{2n-1}\in G$ се произволни елементи. Тогаш

$$[x_1^{i-1}[x_i^{i+n-1}]x_{i+n}^{2n-1}]=[x_1^{j-1}[x_j^{j+n-1}]x_{j+n}^{2n-1}] \quad \text{и} \quad [x_1^{j-1}[x_j^{j+n-1}]x_{j+n}^{2n-1}]=[x_1^{k-1}[x_k^{k+n-1}]x_{k+n}^{2n-1}],$$

па $[x_1^{i-1}[x_i^{i+n-1}]x_{i+n}^{2n-1}]=[x_1^{k-1}[x_k^{k+n-1}]x_{k+n}^{2n-1}]$, т.е. $(G,[\,])$ е (i,k)-асоцијативен n-групоид.

Лема 1.4. *Ако* $(G,[\,])$ *е* $(i,i+k)$*-асоцијативен* n*-групоид,* $k\ge 1$ *и* $e\in Z(G)$ *е негов неутрален елемент, тогаш* $(G,[\,])$ *е* $(1,n)$*-асоцијативен* n*-групоид.*

Доказ. Заради Лемата 1.2 доволно е да докажеме тврдењето е точно за $i<1+k$. Ако $i>1$, тогаш:

$$[x_1^{i+k-1}[x_{i+k}^{i+k+n-1}]x_{i+k+n}^{2n-1}]=[\overset{i-1}{e}[x_1^{i+k-1}[x_{i+k}^{i+k+n-1}]x_{i+k+n}^{2n-1}]\overset{n-i}{e}]=$$

$$=[\overset{i-1}{e}\,x_1^k[x_{k+1}^{i+k-1}[x_{i+k}^{i+k+n-1}]x_{i+k+n}^{2n-1}\overset{k}{e}]\overset{n-i-k}{e}]=[\overset{i-1}{e}\,x_1^k[\overset{i-1}{e}\,x_{k+1}^{i+k-1}\overset{k-i+1}{e}[x_{i+k}^{i+k+n-1}]x_{i+k+n}^{2n-1}]\overset{n-i-k}{e}]=$$

$$=[\overset{i-1}{e}\,x_1^k[\overset{i-1}{e}[x_{k+1}^{i+k-1}\overset{k-i+1}{e}\,x_{i+k}^{i+n-1}]x_{i+n}^{2n-1}]\overset{n-i-k}{e}]=[\overset{i-1}{e}\,x_1^k[\overset{i-1}{e}[x_{k+1}^{i+n-1}\overset{k-i+1}{e}]x_{i+n}^{2n-1}]\overset{n-i-k}{e}]=$$

$$=[\overset{i-1}{e}[x_1^k\overset{i-1}{e}[x_{k+1}^{i+n-1}\overset{k-i+1}{e}]x_{i+n}^{2n-k-1}]x_{2n-k}^{2n-1}\overset{n-i-k}{e}]=[\overset{i-1}{e}[\overset{i-1}{e}\,x_1^k[x_{k+1}^{i+n-1}\overset{k-i+1}{e}]x_{i+n}^{2n-k-1}]x_{2n-k}^{2n-1}\overset{n-i-k}{e}]=$$

$$=[\overset{i-1}{e}[\overset{i-1}{e}[x_1^n]x_{n+1}^{i+n-1}\overset{k-i+1}{e}\,x_{i+n}^{2n-k-1}]x_{2n-k}^{2n-1}\overset{n-i-k}{e}]=[\overset{i-1}{e}[\overset{k}{e}[x_1^n]x_{n+1}^{2n-k-1}]x_{2n-k}^{2n-1}\overset{n-i-k}{e}]=$$

$$=[\overset{i+k-1}{e}[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}]\overset{n-i-k}{e}]=[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}],$$

т.е. $(G,[\,])$ е и $(1,i+k)$-асоцијативен n-групоид. Според Лемата 1.1 (а), n-групоидот $(G,[\,]^*)$ е $(n-i-k+1,n)$-асоцијативен. Од Лемата 1.1 (в) следува дека e е централен елемент за $(G,[\,]^*)$, а од Посл.1.1 (б) дека e е неутрален елемент за операцијата $[\,]^*$. Горниот доказ можеме да го примениме за n-групоидот $(G,[\,]^*)$, па $(G,[\,]^*)$ е $(1,n)$-асоцијативен n-групоид. Користејќи ја Лемата 1.1 (а) добиваме дека $(G,[\,])$ е $(1,n)$-асоцијативен n-групоид. □

Лема 1.5. *Ако* $(G,[\,])$ *е* (i,j)*-асоцијативен* n*-групоид,* $i\neq j$*, и ако* $e\in Z(G)$ *е неутрален елемент во* $(G,[\,])$*, тогаш* $(G,[\,])$ *е* n*-полугрупа.*

Доказ. Од Лемата 1.4 следува дека $(G,[\,])$ е $(1,n)$-асоцијативен n-групоид. Нека $e\in Z(G)$ е неутрален елемент за $(G,[\,])$ и нека $p\in\{1,\dots,n-1\}$ и $x_1,\dots,x_{p+n-1}\in G$ се произволни елементи. Тогаш имаме дека

$$[[x_1^p\overset{n-p}{e}]x_{p+1}^{p+n-1}]=[x_1^p\overset{n-p-1}{e}[ex_{p+1}^{p+n-1}]]=[x_1^p\overset{n-p-1}{e}[x_{p+1}^{p+n-1}e]]=$$
$$=[[x_1^p\overset{n-p-1}{e}x_{p+1}]x_{p+2}^{p+n-1}e]=[[x_1^{p+1}\overset{n-p-1}{e}]x_{p+2}^{p+n-1}e].$$

Со повторување на оваа постапка уште q пати, $q\le n-p$, добиваме дека

$$[[x_1^p\overset{n-p}{e}]x_{p+1}^{p+n-1}]=[[x_1^{p+q}\overset{n-p-q}{e}]x_{p+q+1}^{p+n-1}\overset{q}{e}].$$

Нека $r\in\{2,\dots,n-1\}$. Користејќи го последното равенство добиваме дека

$$[x_1^{r-1}[x_r^{r+n-1}]x_{r+n}^{2n-1}]=[[x_1\overset{n-1}{e}]x_2^{r-1}[x_r^{r+n-1}]x_{r+n}^{2n-1}]=$$
$$=[[x_1^{r-1}[x_r^{r+n-1}]\overset{n-r}{e}]x_{r+n}^{2n-1}\overset{r-1}{e}]=[[x_1^{r-1}\overset{n-r}{e}[x_r^{r+n-1}]]x_{r+n}^{2n-1}\overset{r-1}{e}]=$$
$$=[[[x_1^{r-1}\overset{n-r}{e}x_r]x_{r+1}^{r+n-1}]x_{r+n}^{2n-1}\overset{r-1}{e}]=[[[x_1^r\overset{n-r}{e}]x_{r+1}^{r+n-1}]x_{r+n}^{2n-1}\overset{r-1}{e}]=$$
$$=[[[x_1^n]x_{n+1}^{r+n-1}\overset{n-r}{e}]x_{r+n}^{2n-1}\overset{r-1}{e}]=[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}\overset{r-1}{e}]=[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}].$$

Според тоа, $(G,[\,])$ е $(1,t)$-асоцијативен n-групоид за секој $t\in\{2,\dots,n\}$, па од Св.1.1 следува дека $(G,[\,])$ е n-полугрупа. □

Лема 1.6. *Нека* $(G,[\,])$ *е* $(1,2)$*-асоцијативен* n*-групоид и нека* (e_1^{n-1}) *е* 1*-неутрална низа за* $(G,[\,])$*. Постои бинарна операција* $\cdot$ *таква што за секои* $x_1,\dots,x_n\in G$ *важи равенството* $[x_1^n]=x_1\cdot(x_2\cdot\ldots\cdot(x_{n-1}\cdot x_n)\ldots)$ *ако и само ако постои* 1*-неутрален елемент за* $(G,[\,])$*.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е $(1,2)$-асоцијативен n-групоид и нека (e_1^{n-1}) е 1-неутрална низа за $(G,[\,])$.

Нека $\cdot$ е бинарна операција таква што за секои $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \in G$ важи равенството $[x_1^n] = x_1 \cdot \left(x_2 \cdot ... \cdot \left(x_{n-1} \cdot x_n\right)...\right)$ и нека $x \in G$ е произволен елемент. Тогаш елементот $e = e_1 \cdot \left(e_2 \cdot ... \cdot \left(e_{n-2} \cdot e_{n-1}\right)...\right) \in G$ го задоволува равенството

$$x \cdot e = x \cdot \left(e_1 \cdot \left(e_2 \cdot ... \cdot \left(e_{n-2} \cdot e_{n-1}\right)...\right)\right) = [xe_1^{n-1}] = x, \text{ па } [x \overset{n-1}{e}] = x \cdot \underbrace{\left(e \cdot ... \cdot \left(e \cdot e\right)...\right)}_{n-2} = x,$$

т.е. e е 1-неутрален елемент за $(G,[\,])$.

Обратно, нека e е 1-неутрален елемент за $(G,[\,])$. Дефинираме бинарна операција $\cdot$ на G со $x \cdot y = [xy \overset{n-2}{e}]$. Тогаш, од $(1,2)$-асоцијативноста на $(G,[\,])$ добиваме дека

$$[x_1^n] = [[x_1^n] \overset{n-1}{e}] = [x_1[x_2^n e] \overset{n-2}{e}] = x_1 \cdot [x_2^n e] = x_1 \cdot [[x_2^n e] \overset{n-1}{e}] =$$

$$= x_1 \cdot [x_2[x_3^n ee] \overset{n-2}{e}] = x_1 \cdot \left(x_2 \cdot [x_3^n ee]\right) = ... = x_1 \cdot \left(x_2 \cdot ... \cdot \left(x_{n-2} \cdot [x_{n-1}^n \overset{n-2}{e}]\right)...\right) =$$

$$= x_1 \cdot \left(x_2 \cdot ... \cdot \left(x_{n-2} \cdot [[x_{n-1}^n \overset{n-2}{e}] \overset{n-1}{e}]\right)...\right) = x_1\left(\cdot x_2 \cdot ... \cdot \left(x_{n-2} \cdot [x_{n-1}[x_n \overset{n-1}{e}] \overset{n-2}{e}]\right)...\right) =$$

$$= x_1 \cdot \left(x_2 \cdot ... \cdot \left(x_{n-2} \cdot \left(x_{n-1} \cdot [x_n \overset{n-1}{e}]\right)\right)...\right) = x_1 \cdot \left(x_2 \cdot ... \cdot \left(x_{n-1} \cdot x_n\right)...\right). \quad \square$$

Лема 1.7. *Нека* $(G,[\,])$ *е* $(n-1,n)$*-асоцијативен* n*-групоид и нека* $\left(f_1^{n-1}\right)$ *е* n*-неутрална низа за* $(G,[\,])$. *Постои бинарна операција* $\circ$ *таква што за секои* $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \in G$ *важи равенството* $[x_1^n] = \left(...\left(x_1 \circ x_2\right) \circ ... \circ x_{n-1}\right) \circ x_n$ *ако и само ако постои* n*-неутрален елемент за* $(G,[\,])$.

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е $(n-1,n)$-асоцијативен n-групоид и нека $\left(f_1^{n-1}\right)$ е n-неутрална низа за $(G,[\,])$. Тогаш од Лемата 1.1 (а) следува дека $(G,[\,]^*)$ е $(1,2)$-асоцијативен n-групоид, а од Лемата 1.1(б) дека $\left(f_{n-1}...f_1\right)$ е 1-неутрална низа за $(G,[\,]^*)$.

Нека $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \in G$ се произволни елементи и нека $\circ$ е бинарна операција таква што $[x_1^n] = \left(...\left(x_1 \circ x_2\right) \circ ... \circ x_{n-1}\right) \circ x_n$. Тогаш

$$[x_1^n]^* = [x_n ... x_1] = \left(...\left(x_n \circ x_{n-1}\right) \circ ... \circ x_2\right) \circ x_1.$$

Нека $\cdot$ е дуалната операција на $\circ$, т.е. $x \cdot y = y \circ x$ за секои $x, y \in G$. Тогаш $[x_1^n]^* = x_1 \cdot \left(x_2 \cdot ... \cdot \left(x_{n-1} \cdot x_n\right)...\right)$, па според Лемата 1.6, $(G,[\,]^*)$ има 1-неутрален елемент e. Според Посл.1.1 (а) e е n-неутрален елемент за $(G,[\,])$.

Обратно, нека e е n-неутрален елемент за $(G,[\,])$. Според Посл.1.1 (a) e е 1-неутрален елемент за $(G,[\,]^*)$. Од Лемата 1.6 имаме дека постои бинарна операција $\cdot$ таква што $[x_1^n]^* = x_1 \cdot (x_2 \cdot ... \cdot (x_{n-1} \cdot x_n)...)$ за секои $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \in G$, па $[x_1^n] = [x_n ... x_1]^* = x_n \cdot (x_{n-1} \cdot ... \cdot (x_2 \cdot x_1)...)$. Нека $\circ$ е дуалната операција на $\cdot$, т.е. $x \circ y = y \cdot x$, за секои $x, y \in G$. Тогаш $[x_1^n] = (...(x_1 \circ x_2) \circ ... \circ x_{n-1}) \circ x_n$ за секои $x_1, ..., x_n \in G$. □

Сега ќе го докажеме тврдењето:

Теорема 1.1 *Ако* $(G,[\,])$ *е* (i,j)*-асоцијативен* n*-групоид и ако* $e \in Z(G)$ *е неутрален елемент во* $(G,[\,])$, *тогаш постои единствена до изоморфизам полугрупа* $(G,*)$, *таква што за секои* $x_1, ..., x_n \in G$ *важи* $[x_1^n] = x_1 * ... * x_n$.

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е (i,j)-асоцијативен n-групоид и нека $e \in Z(G)$ е неутрален елемент во $(G,[\,])$. Според Лемата 1.5 $(G,[\,])$ е n-полугрупа, па според Лемата 2.1 од Гл.I, постои полугрупа $(G,*)$ таква што за секои $x_1, ..., x_n \in G$ важи $[x_1^n] = x_1 * ... * x_n$.

Нека $(G,\circ)$ е полугрупа, различна од $(G,*)$, таква што $[x_1^n] = x_1 \circ ... \circ x_n$ за секои $x_1, ..., x_n \in G$ и нека $f = \underbrace{e \circ ... \circ e}_{n-1} \in G$. Тогаш за секој $x \in G$ добиваме дека

$$x = [x \overset{n-1}{e}] = x \circ \underbrace{e \circ ... \circ e}_{n-1} = x \circ f \text{ и } x = [\overset{n-1}{e} x] = \underbrace{e \circ ... \circ e}_{n-1} \circ x = f \circ x,$$

па f е неутрален елемент на $(G,\circ)$, а $g = \underbrace{e * ... * e}_{n-1} \in G$ е неутрален елемент на $(G,*)$.

Од доказот на Лемата 2.1 од Гл.I следува дека f е неутрален елемент за $(G,[\,])$. За секои $x, y \in G$ имаме дека

$$x \circ y = x \circ \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n-2} \circ y = [x \overset{n-2}{f} y] = x * \underbrace{f * ... * f}_{n-2} * y = x * a * y,$$

при што $a = \underbrace{f * ... * f}_{n-2}$. Инверзен елемент на a е елементот f. Имено:

$$a * f = f * a = \underbrace{f * ... * f}_{n-1} = \underbrace{f * ... * f}_{n-1} * g = [\overset{n-1}{f} g] = g.$$

Дефинираме пресликување $\varphi : G \to G$ со: $\varphi(x) = x * a$, за секој $x \in G$. Ако $x = y$, $x, y \in G$, тогаш $x * a = y * a$, т.е. $\varphi(x) = \varphi(y)$, па пресликувањето φ е добро дефинирано. Ако $\varphi(x) = \varphi(y)$, тогаш $x * a = y * a$, па $x * a * f = y * a * f$, од што следува дека $x = y$. Според тоа, φ е инјекција. Ако за секој $y \in G$

ставиме $x = y * f$ добиваме дека $\varphi(x) = x * a = y * f * a = y$, па φ е сурјекција. Бидејќи $x \circ y = x * a * y$ имаме дека $\varphi(x \circ y) = \varphi(x * a * y) = x * a * y * a = \varphi(x) * \varphi(y)$, па знначи φ е хомоморфизам. Според тоа, φ е изоморфизам. □

Од Теоремата 1.1 се добива следната

Последица 1.2. *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-полугрупа. Ако* (e_1^{n-1}) *е* 1*-неутрална низа, а* (f_1^{n-1}) n*-неутрална низа за* $(G,[\,])$*, тогаш постои единствена до изоморфизам полугрупа* $(G,*)$*, таква што за секои* $x_1,\dots,x_n \in G$ *важи* $[x_1^n] = x_1 * \dots * x_n$ *ако и само ако* $(G,[\,])$ *има неутрален елемент.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа и нека (e_1^{n-1}) е 1-неутрална, а (f_1^{n-1}) n-неутрална низа за $(G,[\,])$.

Нека $(G,*)$ е полугрупа (единствена до изоморфизам) таква што за секои $x_1,\dots,x_n \in G$ важи $[x_1^n] = x_1 * \dots * x_n$ и нека $e = e_1 * \dots * e_{n-1}$ и $f = f_1 * \dots * f_{n-1}$. Тогаш, за секој $x \in G$ важат равенствата

$$e * x = e_1 * \dots * e_{n-1} * x = [e_1^{n-1} x] = x \quad \text{и} \quad x * f = x * f_1 * \dots * f_{n-1} = [x f_1^{n-1}] = x,$$

што значи дека e е лева единица, а f десна единица на $(G,*)$, па $e = f$ е единица на $(G,*)$. Од доказот на Лемата 2.1 од Гл.I, следува дека e е неутрален елемент за $(G,[\,])$.

Обратно, нека e е неутрален елемент за $(G,[\,])$. Од доказот на Теоремата 1.1 следува дека постои единствена до изоморфизам полугрупа $(G,*)$, таква што $[x_1^n] = x_1 * \dots * x_n$, за секои $x_1,\dots,x_n \in G$. □

Докажавме дека ако $(G,[\,])$ е (i,j)-асоцијативен n-групоид и ако $e \in Z(G)$ е неутрален елемент за $[\,]$, тогаш $(G,[\,])$ е n-полугрупа (Лема 1.5). Ќе разгледаме неколку својства кога е занемарен условот e да биде централен елемент на $(G,[\,])$.

Својство 1.2. *Ако* $(G,[\,])$ *е* $(i,i+1)$*-асоцијативен* n*-групоид и ако* e *е неутрален елемент за* $(G,[\,])$*, тогаш* $e \in Z(G)$.

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е $(i,i+1)$-асоцијативен n-групоид и нека e е неутрален елемент за $[\,]$. Нека $x_1,\dots,x_{n-1} \in G$ се произволни елементи. Тогаш:

$$[x_1^{i-1} e x_i^{n-1}] = [x_1^{i-1} e [\overset{i-1}{e}\, x_i\, \overset{n-i}{e}\,] x_{i+1}^{n-1}] = [x_1^{i-1} [\overset{i}{e}\, x_i\, \overset{n-i-1}{e}\,] e x_{i+1}^{n-1}] = [x_1^i e x_{i+1}^{n-1}].$$

Нека $i \le k \le n-2$ и нека $[x_1^{k-1} e x_k^{n-1}] = [x_1^k e x_{k+1}^{n-1}]$. Тогаш:

$$[x_1^k e x_{k+1}^{n-1}] = [\overset{i-1}{e}\, [x_1^k e x_{k+1}^{n-1}]\, \overset{n-i}{e}\,] = [\overset{i-1}{e}\, x_1 [x_2^k e x_{k+1}^{n-1} e]\, \overset{n-i-1}{e}\,] =$$

$$= [\overset{i-1}{e}\, x_1[x_2^{k+1}ex_{k+2}^{n-1}e]\overset{n-i-1}{e}\,] = [\overset{i-1}{e}\,[x_1^{k+1}ex_{k+2}^{n-1}]\overset{n-i}{e}\,] = [x_1^{k+1}ex_{k+2}^{n-1}].$$

Нека $2 \le k < i$ и нека $[x_1^{k-1}ex_k^{n-1}] = [x_1^k ex_{k+1}^{n-1}]$. Тогаш:

$$[x_1^{k-1}ex_k^{n-1}] = [\overset{i}{e}[x_1^{k-1}ex_k^{n-1}]\overset{n-i-1}{e}\,] = [\overset{i-1}{e}\,[ex_1^{k-1}ex_k^{n-2}]x_{n-1}\overset{n-i-1}{e}\,] =$$

$$= [\overset{i-1}{e}\,[ex_1^{k-2}ex_{k-1}^{n-2}]x_{n-1}\overset{n-i-1}{e}\,] = [\overset{i}{e}[x_1^{k-2}ex_{k-1}^{n-1}]\overset{n-i-1}{e}\,] = [x_1^{k-2}ex_{k-1}^{n-1}].$$

Значи, $[x_1^{k-1}ex_k^{n-1}] = [x_1^k ex_{k+1}^{n-1}]$ за секој $k \in \{1,\dots,n-1\}$, па e е централен елемент за $(G,[\,])$. □

Својство 1.3. *Ако* $(G,[\,])$ *е* $(i,i+2)$*-асоцијативен* n*-групоид и ако* e *е неутрален елемент за* $[\,]$*, тогаш* $e \in Z(G)$.

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е $(i,i+2)$-асоцијативен n-групоид и нека e е неутрален елемент за $[\,]$. Нека $x_1,\dots,x_{n-1} \in G$ се приозволни елементи. Тогаш:

$$[x_1^{i-1}ex_i^{n-1}] = [x_1^{i-1}ex_i[\overset{n-1}{e}\,x_{i+1}]x_{i+2}^{n-1}] = [x_1^{i-1}[ex_i\overset{n-2}{e}\,]ex_{i+1}^{n-1}] = [x_1^i ex_{i+1}^{n-1}],$$

$$[x_1^{i-1}ex_i^{n-1}] = [x_1^{i-1}ex_i[\overset{n-2}{e}\,x_{i+1}e]x_{i+2}^{n-1}] = [x_1^{i-1}[ex_i\overset{n-2}{e}\,]x_{i+1}ex_{i+2}^{n-1}] = [x_1^{i+1}ex_{i+2}^{n-1}].$$

Нека $i \le k \le n-3$ и нека $[x_1^{k-1}ex_k^{n-1}] = [x_1^k ex_{k+1}^{n-1}]$. Тогаш:

$$[x_1^{k+1}ex_{k+2}^{n-1}] = [\overset{i-1}{e}\,[x_1^{k+1}ex_{k+2}^{n-1}]\overset{n-i}{e}\,] = [\overset{i-1}{e}\,x_1x_2[x_3^{k+1}ex_{k+2}^{n-1}ee]\overset{n-i-2}{e}\,] =$$

$$= [\overset{i-1}{e}\,x_1x_2[x_3^{k+2}ex_{k+3}^{n-1}ee]\overset{n-i-2}{e}\,] = [\overset{i-1}{e}\,[x_1^{k+2}ex_{k+3}^{n-1}]\overset{n-i}{e}\,] = [x_1^{k+2}ex_{k+3}^{n-1}].$$

Нека $2 \le k < i$ и нека $[x_1^k ex_{k+1}^{n-1}] = [x_1^{k+1}ex_{k+2}^{n-1}]$. Тогаш:

$$[x_1^{k-1}ex_k^{n-1}] = [\overset{i+1}{e}\,[x_1^{k-1}ex_k^{n-1}]\overset{n-i-2}{e}\,] = [\overset{i-1}{e}\,[eex_1^{k-1}ex_k^{n-3}]x_{n-2}x_{n-1}\overset{n-i-2}{e}\,] =$$

$$= [\overset{i-1}{e}\,[eex_1^{k-2}ex_{k-1}^{n-3}]x_{n-2}x_{n-1}\overset{n-i-2}{e}\,] = [\overset{i+1}{e}\,[x_1^{k-2}ex_{k-1}^{n-1}]\overset{n-i-2}{e}\,] = [x_1^{k-2}ex_{k-1}^{n-1}].$$

Значи, $[x_1^{k-1}ex_k^{n-1}] = [x_1^k ex_{k+1}^{n-1}]$ за секој $k \in \{1,\dots,n-1\}$, па e е централен елемент за $(G,[\,])$. □

Постојат и други конкретни примери кога неутралниот елемент e на (i,j)-асоцијативниот n-групоид $(G,[\,])$ припаѓа на центарот на $(G,[\,])$, што не се опфатени со горните две својства, каков што е следниов.

Пример 1.1. Нека $(G,[\,])$ е $(2,5)$-асоцијативен 6-групоид и нека e е единица на $(G,[\,])$. Нека $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in G$ се произволни елементи. Тогаш важат следните равенства

$$[x_1eex_2x_3x_4] = [x_1eex_2[eeex_3ee]x_4] = [x_1[eex_2eee]x_3eex_4] = [x_1x_2x_3eex_4],$$

$$[x_1eeex_2x_3] = [x_1eee[x_2\overset{5}{e}\,]x_3] = [x_1[eeex_2ee]eeex_3] = [x_1x_2eeex_3],$$

$$[x_1ex_2^5] = [x_1ex_2x_3[\overset{5}{e}\,x_4]x_5] = [x_1[ex_2x_3eee]eex_4x_5] =$$

$$= [x_1[eeex_2x_3e]eex_4x_5] = [x_1eee[x_2x_3eeex_4]x_5] =$$
$$= [x_1eee[x_2eeex_3x_4]x_5] = [x_1[eeex_2ee]ex_3x_4x_5] = [x_1x_2ex_3x_4x_5],$$
$$[x_1ex_2^5] = [x_1ex_2x_3[\overset{5}{e}x_4]x_5] = [x_1[ex_2x_3eee]eex_4x_5] =$$
$$= [x_1[eeex_2x_3e]eex_4x_5] = [x_1eee[x_2x_3eeex_4]x_5] =$$
$$= [x_1eee[x_2eex_3ex_4]x_5] = [x_1[eeex_2ee]x_3ex_4x_5] = [x_1x_2x_3ex_4x_5],$$
$$[x_1ex_2^5] = [e[x_1ex_2^5]\overset{4}{e}] = [ex_1ex_2[x_3x_4x_5eee]e] = [eex_1x_2[x_3x_4x_5eee]e] = [e[ex_1^5]\overset{4}{e}] = [ex_1^5],$$
$$[x_1x_2x_3ex_4x_5] = [x_1x_2x_3e[eex_4eee]x_5] = [x_1[x_2x_3eeex_4]eeex_5] =$$
$$= [x_1[x_2eeex_3x_4]eeex_5] = [x_1x_2ee[ex_3x_4eee]x_5] =$$
$$= [x_1x_2ee[eeex_3x_4e]x_5] = [x_1[x_2\overset{5}{e}]x_3x_4ex_5] = [x_1^4ex_5],$$
$$[x_1^4ex_5] = [e[x_1^4ex_5]\overset{4}{e}] = [ex_1x_2x_3[x_4ex_5eee]e] = [ex_1x_2x_3[x_4x_5\overset{4}{e}]e] = [e[x_1^5e]\overset{4}{e}] = [x_1^5e].$$

Според тоа, $e \in Z(G)$.

Ако $(G,[\,])$ е (i,j)-асоцијативен n-групоид и ако e е неутрален елемент во $(G,[\,])$, тогаш во општ случај не следува дека e е и централен елемент на $(G,[\,])$. Тоа може да се види во следниот пример.

Пример 1.2. Нека $(G,\cdot)$ е некомутативна група. Дефинираме n-арна операција $[\,]$ на G, за $n \geq 4$, со:

$$[x_1^n] = x_1x_2...x_{n-1}x_2^{-1}...x_{n-1}^{-1}x_2...x_{n-1}x_n \text{, за секои } x_1,x_2,...,x_n \in G.$$

Тогаш, за секои $x_1,x_2,...,x_n \in G$ имаме дека

$$[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}] = x_1x_2...x_{n-1}x_2^{-1}...x_{n-1}^{-1}x_2...x_{n-1}x_nx_{n+1}...x_{2n-2}x_{n+1}^{-1}...x_{2n-2}^{-1}x_{n+1}...x_{2n-2}x_{2n-1} = [x_1^{n-1}[x_n^{2n-1}]],$$

па значи $(G,[\,])$ е $(1,n)$-асоцијативен n-групоид.

Нека e е неутралниот елемент на групата $(G,\cdot)$. Според Лемата 2.1 од Гл.I, e е неутрален елемент и на n-групоидот $(G,[\,])$. Да претпоставиме дека e е централен елемент за $(G,[\,])$. Тогаш за секои $x,y \in G$ важи дека $[xy\overset{n-2}{e}] = [exy\overset{n-3}{e}]$, односно $xy = xyx^{-1}y^{-1}xy$ од каде што следува дека $xy = yx$, што претставува контрадикција со претпоставката дека $(G,\cdot)$ е некомутативна група.

Од горните забелешки природно се наметнува прашањето за кои парови (i,j), $i,j \in \{1,...,n\}$, $i \neq j$, од (i,j)-асоцијативноста на n-групоидот $(G,[\,])$, при егзистенција на барем еден неутрален елемент за $[\,]$, следува дека $(G,[\,])$ е n-полугрупа. Овој проблем може природно да се обопшти на следниот начин.

Нека $[\,]$ *е* n*-арна операција на* G *и нека* $[\,]'$ *и* $[\,]''$ *се две* m*-арни операции изведени од* $[\,]$*. Ако равенството* $[x_1^m]' = [x_1^m]''$ *е нетривијален идентитет, дали и во кои случаи* n*-групоидот* $(G,[\,])$ *е асоцијативен, односно комутативен?*

Решение на овој проблем, кога $[\,]$ е бинарна операција, е дадено во [7], каде што е докажано дека ако $[x_1^m]' = [x_1^m]''$ не е директна последица од асоцијативноста, тогаш операцијата $[\,]$ е комутативна, а ако $[x_1^m]' = [x_1^m]''$ не е директна последица од комутативноста, тогаш $[\,]$ е асоцијативна операција.

Во следните два примери ќе видиме дека ваков резултат може да важи и во случај кога операцијата $[\,]$ не е бинарна.

Пример 1.3. Нека $[\,]$ е тернарна оперција на G и нека за секои $x_1,...,x_7 \in G$ важи равенството $[[x_1x_2x_3]x_4[x_5x_6x_7]] = [x_1[x_2[x_3x_4x_5]x_6]x_7]$. Нека e е неутрален елемент за
$[\,]$. Тогаш:

$$[x_1ex_2] = [[eex_1]e[eex_2]] = [e[e[x_1ee]e]x_2] = [ex_1x_2],$$

$$[x_1ex_2] = [[x_1ee]e[x_2ee]] = [x_1[e[eex_2]e]e] = [x_1x_2e],$$

па e е централен елемент за $(G,[\,])$. Користејќи го тоа, добиваме дека

$$[[x_1x_2x_3]x_4x_5] = [[x_1x_2x_3]x_4[eex_5]] = [x_1[x_2[x_3x_4e]e]x_5] =$$
$$= [x_1[x_2[ex_3x_4]e]x_5] = [[x_1x_2e]x_3[x_4ex_5]] = [[ex_1x_2]x_3[x_4x_5e]] =$$
$$= [e[x_1[x_2x_3x_4]x_5]e] = [x_1[x_2x_3x_4]x_5],$$

т.е. $(G,[\,])$ е $(1,2)$-асоцијативен тернарен групоид. Од Лемата 1.5 следува дека $(G,[\,])$ е тернарна полугрупа.

Пример 1.4. Нека $[\,]$ е тернарна оперција на G и нека за секои $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in G$ важи равенството $[[x_1x_2x_3]x_4x_5] = [[x_1x_2x_4]x_3x_5]$.

Нека e е неутрален елемент за $[\,]$. Тогаш имаме дека

$$[x_1ex_2] = [[x_1ex_2]ee] = [[x_1ee]x_2e] = [x_1x_2e] = [[ex_1e]x_2e] = [[ex_1x_2]ee] = [ex_1x_2],$$

па e е централен елемент за $(G,[\,])$. Според тоа,

$$[x_1x_2x_3] = [[eex_1]x_2x_3] = [[eex_2]x_1x_3] = [x_2x_1x_3],$$

$$[x_1x_2x_3] = [[x_1x_2x_3]ee] = [[x_1x_2e]x_3e] = [[ex_1x_2]x_3e] =$$
$$= [[ex_1x_3]x_2e] = [[ex_1x_3]ex_2] = [[ex_1e]x_3x_2] = [x_1x_3x_2],$$

од каде што следува дека $(G,[\,])$ е комутативен тернарен групоид. Оттука добиваме дека $[[x_1x_2x_3]x_4x_5] = [x_4[x_1x_2x_3]x_5]$ и $[[x_1x_2x_3]x_4x_5] = [x_4[x_1x_2x_3]x_5]$, па $[[x_4x_1x_2]x_3x_5] = [x_4[x_1x_2x_3]x_5]$. Според тоа, $(G,[\,])$ е $(1,2)$-асоцијативен тернарен групоид, па од лемата 1.5 следува дека тој е и тернарна полугрупа.

Одговор на прашањето иницирано од примерите 1.3 и 1.4, кога $(G,[\,])$ има централен неутрален елемент е даден во [19]. Имено, нека $(G,[\,])$ е n-групоид и нека $[\,]'$ е $(k+1)(n-1)+1$-арна операција на G изведена од $[\,]$. За изразот $[x_1^{(k+1)(n-1)+1}]'$ велиме дека е *продолжен производ од елементите* $x_1, x_2, ..., x_{(k+1)(n-1)+1} \in G$. Нека $I=(i_1, i_2, ..., i_k)$, каде што $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ се елементите пред кои стои отворена заграда $[$. Соодветниот продолжен производ го означуваме со $\prod_I x_1^{(k+1)(n-1)+1}$. За индексите $i_1, i_2, ..., i_k$ важи дека $i_v \le i_{v+1}$ за секој $v \in \{1,2,...,k-1\}$ и $i_v \le v(n-1)+1$ за секој $v \in \{1,2,...,k\}$. Ако $i_v = i_{v+1} = ... = i_{v+s-1}$, $s \le k$, $v+s-1 \le k$, тогаш пред x_{i_v} има s отворени загради $[$, кога $i_v \ne 1$, и $s+1$ отворени загради $[$, кога $i_v = 1$.

Нека $I=(i_1, i_2, ..., i_k)$ и $J=(j_1, j_2, ..., j_k)$. Ако за секои $x_1, x_2, ..., x_{(k+1)(n-1)+1} \in G$ важи дека $\prod_I x_1^{(k+1)(n-1)+1} = \prod_J x_1^{(k+1)(n-1)+1}$, тогаш n-групоидот $(G,[\,])$ ќе го означуваме со $G(I,J)$. На пример, во Примерот 1.3 $(G,[\,])$ е $G((1,5),(2,3))$ тернарен групоид. Во [19] е докажано дека ако n-групоидот $G(I,J)$, $I \ne J$, има централен неутрален елемент, тогаш тој е n-полугрупа.

2.2. (*i*, *j*)-асоцијативни операции со неутрални низи

Во продолжение разгледуваме неколку поопшти резултати во врска со делумно асоцијативните операции со неутрални низи изнесени во [29].

Својство 2.1. *Ако* $(G,[\,])$ *е* $(1,2)$*-асоцијативен* n*-групоид, тогаш секоја* 2*-неутрална низа во* $(G,[\,])$ *е и* n*-неутрална.*

Доказ. Нека (e_1^{n-1}) е 2-неутрална низа во $(G,[\,])$. Од $(1,2)$-асоцијативноста на n-групоидот $(G,[\,])$ добиваме дека

$$[e_1^{n-1}x] = [e_1[e_1^{n-1}x]e_2^{n-1}] = [[e_1 e_1 e_2^{n-1}]x e_2^{n-1}] = [e_1 x e_2^{n-1}] = x,$$

за секој $x \in G$. □

Дуално на горното својство е следното

Својство 2.2. *Ако* $(G,[\,])$ *е* $(n-1,n)$*-асоцијативен* n*-групоид, тогаш секоја* $(n-1)$*-неутрална низа за* $(G,[\,])$ *е и* 1*-неутрална.*

Доказ. Од Лемата 1.1 (а) имаме дека $(G,[\,]^*)$ е $(1,2)$-асоцијативен n-групоид.

Нека $\left(e_1^{n-1}\right)$ е $(n-1)$-неутрална низа за $\left(G,[\,]\right)$. Тогаш, според Лемата 1.1 (б) $\left(e_1^{n-1}\right)$ е 2-неутрална низа за $\left(G,[\,]^*\right)$, па од Св. 2.1 имаме дека низата $\left(e_1^{n-1}\right)$ е и n-неутрална за $\left(G,[\,]^*\right)$. Повторно користејќи ја Лемата 1.1 (б) добиваме дека низата $\left(e_1^{n-1}\right)$ е и 1-неутрална за n-групоидот $\left(G,[\,]\right)$. □

Својство 2.3. *Нека* $\left(G,[\,]\right)$ *е* $\left(1,i\right)$*-асоцијативен* n*-групоид и нека* $\left(e_1^{n-1}\right)$ *е* i*-неутрална низа за* $\left(G,[\,]\right)$*. Тогаш,* $[xe_1^{n-1}]=[xe_i^{n-1}e_1^{i-1}]$ *за секој* $x\in G$.

Доказ. Нека $x\in G$ е произволен елемент. Тогаш

$$[xe_1^{n-1}]=[[e_1^{i-1}xe_i^{n-1}]e_1^{n-1}]=[e_1^{i-1}[xe_i^{n-1}e_1^{i-1}]e_i^{n-1}]=[xe_i^{n-1}e_1^{i-1}].\quad \square$$

Својство 2.4. *Нека* $\left(G,[\,]\right)$ *е* $\left(1,i\right)$*-асоцијативен и* $\left(j,j+i-1\right)$*-асоцијативен* n*-групоид (според тоа* $j+i\le n+2$*) и нека* $\left(e_1^{n-1}\right)$ *е* 1*-неутрална и* i*-неутрална низа за* $\left(G,[\,]\right)$*. Тогаш* $[x_1^{j-1}e_1^{i-1}x_j^{n-i+1}]=[x_1^j e_1^{i-1}x_{j+1}^{n-i+1}]$*, за секои* $x_1,x_2,\dots,x_{n-i+1}\in G$.

Доказ. Бидејќи $\left(e_1^{n-1}\right)$ е 1-неутрална низа за $\left(G,[\,]\right)$, од Св. 2.3 следува дека и низата $\left(e_i^{n-1}e_1^{i-1}\right)$ е 1-неутрална за $\left(G,[\,]\right)$. Тогаш, за секои $x_1,x_2,\dots,x_{n-i+1}\in G$ имаме дека

$$[x_1^{j-1}e_1^{i-1}x_j^{n-i+1}]=[x_1^{j-1}e_1^{i-1}[x_je_i^{n-1}e_1^{i-1}]x_{j+1}^{n-i+1}]=[x_1^{j-1}[e_1^{i-1}x_je_i^{n-1}]e_1^{i-1}x_{j+1}^{n-i+1}]=[x_1^je_1^{i-1}x_{j+1}^{n-i+1}].\quad \square$$

Својство 2.5. *Нека* $\left(G,[\,]\right)$ *е* $\left(1,n\right)$*-асоцијативен* n*-групоид и нека* $\left(e_1^{n-1}\right)$ *е* i*-неутрална низа за* $\left(G,[\,]\right)$ *за секој* $i\in\{2,\dots,n\}$*. Ако* $[f_1^{n-1}e_1]=e_1$*, тогаш* $\left(f_1^{n-1}\right)$ *е* n*-неутрална низа за* $\left(G,[\,]\right)$*, а ако* $[e_nf_1^{n-1}]=e_n$*, тогаш* $\left(f_1^{n-1}\right)$ *е* 1*-неутрална низа за* $\left(G,[\,]\right)$.

Доказ. Нека $[f_1^{n-1}e_1]=e_1$. Тогаш

$$[f_1^{n-1}x]=[f_1^{n-1}[e_1^{i-1}xe_i^{n-1}]]=[[f_1^{n-1}e_1]e_2^{i-1}xe_i^{n-1}]=[e_1^{i-1}xe_i^{n-1}]=x,$$

за секој $x\in G$, т.е. $\left(f_1^{n-1}\right)$ е n-неутрална низа за $\left(G,[\,]\right)$.

Нека $[e_nf_1^{n-1}]=e_n$. Тогаш

$$[xf_1^{n-1}]=[[e_1^{i-1}xe_i^{n-1}]f_1^{n-1}]=[e_1^{i-1}xe_i^{n-2}[e_{n-1}f_1^{n-1}]]=[e_1^{i-1}xe_i^{n-1}]=x,$$

за секој $x\in G$, т.е. $\left(f_1^{n-1}\right)$ е 1-неутрална низа за $\left(G,[\,]\right)$. □

За една n-арна операција $[\,]$ на G велиме дека е $\left(i,j\right)$*-комутативна*, $i,j\in\{1,\dots,n\}$ и $i<j$, ако за секои $x_1,x_2,\dots,x_n\in G$ важи $[x_1^n]=[x_1^{i-1}x_jx_{i+1}^{j-1}x_ix_{j+1}^n]$. Во тој случај за n-групоидот $\left(G,[\,]\right)$ велиме дека е $\left(i,j\right)$*-комутативен.* Ако равенството $[x_1^n]=[x_1^{i-1}x_jx_{i+1}^{j-1}x_ix_{j+1}^n]$ важи за секои $x_1,x_2,\dots,x_n\in G$ и за секои

$i, j \in \{1,...,n\}$ такви што $i < j$, тогаш велиме дека операцијата $[\,]$ е *комутативна*, а за n-групоидот $(G,[\,])$ велиме дека е *комутативен*.

Ќе докажеме дека секоја (i, j)-комутативна n-полугрупа што има неутрална низа е комутативна n-полугрупа. За таа цел прво ќе ги докажеме следните тврдења.

Својство 2.6. *Нека $(G,[\,])$ е (i, j)-комутативен и (j,k)-комутативен n-групоид. Тогаш n-групоидот $(G,[\,])$ е (i,k)-комутативен.*

Доказ. Нека $x_1, x_2,..., x_n \in G$ се произволни елементи. Со последователна примена на (i, j)-комутативноста, на (i,k)-комутативноста и повторно на (i, j)-комутативноста на n-групоидот $(G,[\,])$ имаме:

$$[x_1^n] = [x_1^{i-1} x_j x_{i+1}^{j-1} x_i x_{j+1}^n] = [x_1^{i-1} x_j x_{i+1}^{j-1} x_k x_{j+1}^{k-1} x_i x_{k+1}^n] =$$
$$[x_1^{i-1} x_k x_{i+1}^{j-1} x_j x_{j+1}^{k-1} x_i x_{k+1}^n] = [x_1^{i-1} x_k x_{i+1}^{k-1} x_i x_{k+1}^n].$$

Според тоа, $(G,[\,])$ е (i,k)-комутативен n-групоид. □

Лема 2.1. *Нека $(G,[\,])$ е (i, j)-комутативен и $(j-i+1, j+1)$-асоцијативен n-групоид кој има $(j-i)$-неутрална низа. Тогаш $(G,[\,])$ е $(i, j+1)$-комутативен n-групоид.*

Доказ. Нека (e_1^{n-1}) е $(j-i)$-неутрална низа за n-групоидот $(G,[\,])$. Од (i, j)-комутативноста и $(j-i+1, j+1)$-асоцијативноста на $(G,[\,])$ добиваме дека

$$[x_1^n] = [x_1^j [e_1^{j-i-1} x_{j+1} e_{j-i}^{n-1}] x_{j+2}^n] = [x_1^{j-i} [x_{j-i+1}^j e_1^{j-i-1} x_{j+1} e_{j-i}^{n-i-1}] e_{n-i}^{n-1} x_{j+2}^n] =$$
$$= [x_1^{j-i} [x_{j-i+1}^{j-1} x_{j+1} e_1^{j-i-1} x_j e_{j-i}^{n-i-1}] e_{n-i}^{n-1} x_{j+2}^n] = [x_1^{j-1} x_{j+1} [e_1^{j-i-1} x_j e_{j-i}^{n-1}] x_{j+2}^n] = [x_1^{j-1} x_{j+1} x_j x_{j+2}^n]$$

за секои $x_1, x_2,..., x_n \in G$, што значи дека $(G,[\,])$ е $(j, j+1)$-комутативен n-групоид. Бидејќи $(G,[\,])$ е (i, j)-комутативен и $(j, j+1)$-комутативен n-групоид од Св. 2.6 следува дека $(G,[\,])$ е $(i, j+1)$-комутативен n-групоид. □

Лема 2.2. *Нека $(G,[\,])$ е (i, j)-комутативен и $(i-1, n+i-j)$-асоцијативен n-групоид кој има $n+i-j+1$-неутрална низа. Тогаш $(G,[\,])$ е $(i-1, j)$-комутативен n-групоид.*

Доказ. Нека (e_1^{n-1}) е $n+i-j+1$-неутрална низа за n-групоидот $(G,[\,])$. Од (i, j)-комутативноста и $(i-1, n+i-j)$-асоцијативноста на $(G,[\,])$ добиваме дека

$$[x_1^n] = [x_1^{i-2} [e_1^{n+i-j} x_{i-1} e_{n+i-j+1}^{n-1}] x_i^n] = [x_1^{i-2} e_1^{n-j+1} [e_{n-j+2}^{n+i-j} x_{i-1} e_{n+i-j+1}^{n-1} x_i^{n+i-j}] x_{n+i-j+1}^n] =$$
$$= [x_1^{i-2} e_1^{n-j+1} [e_{n-j+2}^{n+i-j} x_i e_{n+i-j+1}^{n-1} x_{i-1} x_{i+1}^{n+i-j}] x_{n+i-j+1}^n] = [x_1^{i-2} [e_1^{n+i-j} x_i e_{n+i-j+1}^{n-1}] x_{i-1} x_{i+1}^n] = [x_1^{i-2} x_i x_{i-1} x_{i+1}^n]$$

за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in G$, што значи дека $(G,[\,])$ е $(i-1,i)$ комутативен n-групоид. Бидејќи $(G,[\,])$ е $(i-1,i)$-комутативен и (i,j)-комутативен n-групоид од Св. 2.6 следува дека $(G,[\,])$ е $(i-1,j)$-комутативен n-групоид. □

Теорема 2.1. *Ако* $(G,[\,])$ *е* (i,j)*-комутативна* n*-полугрупа со неутрална низа, тогаш* $(G,[\,])$ *е комутативна* n*-полугрупа.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е (i,j)-комутативна n-полугрупа со неутрална низа. Тогаш од Лемата 2.1 следува дека n-полугрупата $(G,[\,])$ е (i,r)-комутативна за секој $r \in \{j, j+1, ..., n\}$, а од Лемата 2.2 следува дека е (s,r)-комутативна за секои $s,r \in \{1,2,...,n\}$ такви што $i<j$. Според тоа, $(G,[\,])$ е комутативна n-полугрупа. □

Ќе наведеме пример од кој може да се види дека во Теоремата 2.1 егзистенцијата на неутралната низа не може да се изостави.

Пример 2.1. Нека $|G| \geq 2$. На множеството G дефинираме n-арна операција $[\,]$ со $[x_1^n] = x_1$. Очигледно, за секој $i \in \{1,...,n\}$ и за секои $x_1, x_2, ..., x_{2n-1} \in G$, $[x_1^{i-1}[x_i^{i+n-1}]x_{i+n}^{2n-1}] = [x_1^{i-1}x_i x_{i+n}^{2n-1}] = x_1$, па $(G,[\,])$ е n-полугрупа. Да претпоставиме дека низата (e_1^{n-1}) е неутрална за $(G,[\,])$. Ако $x \neq e_1 \in G$, тогаш $[e_1 x e_2^{n-1}] = e_1 \neq x$. Според тоа $(G,[\,])$ нема неутрална низа. За секои $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ и за секои $1<i<j\leq n$ важи дека $[x_1^{i-1}x_j x_{i+1}^{j-1}x_i x_{j+1}^n] = x_1 = [x_1^n]$, па n-полугрупата $(G,[\,])$ е (i,j)-комутативна за секои $1<i<j\leq n$, но не е $(1,n)$-комутативна, затоа што ако $x_1 \neq x_n$, тогаш $[x_n x_2^{n-1} x_1] = x_n \neq x_1 = [x_1^n]$.

2.3. Делумно асоцијативни *n*-групоиди со неутрални елементи

Од тврдењата и примерите изнесени во претходните параграфи природно се поставува прашањето за изучување на (i,j)-асоцијативните n-групоиди кога постои барем еден неутрален елемент. Конкретно, нека $(G,[\,])$ е $(i+1, i+k+1)$-асоцијативен n-групоид со единица ($k>0$) и нека d е најголемиот заеднички делител на броевите i, k и $n-1$. Ќе докажеме дека тогаш $(G,[\,])$ е $(rd+1,(r+s)d+1)$-асоцијативен n-групоид за секои $r \geq 0$ и $s \geq 1$ такви што $r+s \leq p$, каде што $n-1 = pd$.

Освен тоа, постои $\left(1,d+1\right)$-асоцијативен $d+1$-групоид $\left(G,[\,]'\right)$ таков што за секои $x_1,x_2,\ldots,x_{pd+1}\in G$ важи равенството

$$[x_1^{pd+1}]=[[[\ldots[[x_1^{d+1}]'x_{d+2}^{2d+1}]'\ldots]'x_{(p-2)d+1}^{(p-1)d}]'x_{(p-1)d+1}^{pd+1}]'.$$

Резултатите од овој дел се изнесни во [26].

Прво ќе докажеме неколку помошни тврдења.

Лема 3.1. *Ако* $\left(G,[\,]\right)$ *е* $\left(i+1,i+k+1\right)$*-асоцијативен* n*-групоид со единица* e*, тогаш во* $\left(G,[\,]\right)$ *важат следниве равенства:*

(a) $[\overset{k}{e}\,x_1^{n-k}]=[x_1^{n-k}\,\overset{k}{e}]$,

$(б)$ $k\geq i\;\Rightarrow\;[\overset{k-i}{e}\,x_1^{n+i-k}]=[x_1^i\,\overset{k-i}{e}\,x_{i+1}^{n+i-k}]=[x_1^{2i}\,\overset{k-i}{e}\,x_{2i+1}^{n+i-k}]=[x_1^{2i+1}\,\overset{k-i}{e}\,x_{2i+2}^{n+i-k}]=[x_1^{n+i-k}\,\overset{k-i}{e}]$.

Доказ. (а) Нека $x_1,\ldots,x_{n-k}\in G$ се произволни елементи. Тогаш

$$[\overset{k}{e}\,x_1^{n-k}]=[\overset{i}{e}[\overset{k}{e}\,x_1^{n-k}]\overset{n-i-1}{e}]=[\overset{i+k}{e}[x_1^{n-k}\,\overset{k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=[x_1^{n-k}\,\overset{k}{e}].$$

(б) Нека $x_1,\ldots,x_{n+i-k}\in G$ се произволни елементи. Прво докажуваме дека $[\overset{k-i}{e}\,x_1^{n+i-k}]=[x_1^{n+i-k}\,\overset{k-i}{e}]$. Имаме:

$$[\overset{k-i}{e}\,x_1^{n+i-k}]=[\overset{i}{e}[\overset{k-i}{e}\,x_1^{n+i-k}]\overset{n-i-1}{e}]=[\overset{k}{e}\,x_1^i[x_{i+1}^{n+i-k}\,\overset{k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$

$$=[\overset{i}{e}[\overset{k}{e}\,x_1^i[x_{i+1}^{n+i-k}\,\overset{k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-1}{e}]=[\overset{i+k}{e}[x_1^i[x_{i+1}^{n+i-k}\,\overset{k}{e}]\overset{n-i-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=[x_1^i[x_{i+1}^{n+i-k}\,\overset{k}{e}]\overset{n-i-1}{e}]=y.$$

Треба да покажеме дека $y=[x_1^{n+i-k}\,\overset{k-i}{e}]$. Ако $n\leq 2k$, добиваме:

$$y=[x_1^{n+i-k}\,\overset{2k-n}{e}\,\overset{n}{[e]}\,\overset{n-i-k-1}{e}]=[x_1^{n+i-k}\,\overset{k-i}{e}].$$

Ако, пак, $2k<n\leq 3k$, доказот на тврдењето го добиваме на следниот начин:

$$y=[x_1^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i-k}\,\overset{2k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=[\overset{i}{e}[x_1^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i-k}\,\overset{2k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-1}{e}]=$$

$$=[\overset{i}{e}\,x_1^k[x_{k+1}^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i-k}\,\overset{2k}{e}]\overset{n-i-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=[\overset{i}{e}\,x_1^k[x_{k+1}^{n+i-k}\,\overset{3k-n}{e}\,\overset{n}{[e]}\,\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$

$$=[\overset{i}{e}\,x_1^k[x_{k+1}^{n+i-k}\,\overset{2k-i}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=[\overset{i}{e}[x_1^{n+i-k}\,\overset{k-i}{e}]\overset{n-i-1}{e}]=[x_1^{n+i-k}\,\overset{k-i}{e}].$$

Во случајот кога $sk<n\leq\left(s+1\right)k$, за $s\geq 3$, постапката може да се обопшти на следниот начин:

$$y=[x_1^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i-k}\,\overset{2k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=[\overset{i}{e}[x_1^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i-k}\,\overset{2k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-1}{e}]=$$

$$=[\overset{i}{e}\,x_1^k[x_{k+1}^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i-k}\,\overset{2k}{e}]\overset{n-i-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=[\overset{i}{e}\,x_1^k[x_{k+1}^{i+2k}[x_{i+2k+1}^{n+i-k}\,\overset{3k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$

$$=[\overset{i}{e}\,x_1^k[\overset{i}{e}[x_{k+1}^{i+2k}[x_{i+2k+1}^{n+i-k}\,\overset{3k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$

$$=[\overset{i}{e}\,x_1^k[\overset{i}{e}\,x_{k+1}^{2k}[x_{2k+1}^{i+2k}[x_{i+2k+1}^{n+i-k}\,\overset{3k}{e}]\overset{n-i-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=\ldots=$$

$$=[\overset{i}{e}\,x_1^k[\overset{i}{e}\,x_{k+1}^{2k}[\ldots[\overset{i}{e}[x_{(s-2)k+1}^{i+(s-1)k}[x_{i+(s-1)k+1}^{n+i-k}\,\overset{sk}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-1}{e}]\ldots]\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$

$$= [\overset{i}{e} x_1^k [\ldots[\overset{i}{e} x_{(s-2)k+1}^{(s-1)k} [x_{(s-1)k+1}^{i+(s-1)k} [x_{i+(s-1)k+1}^{n+i-k} \overset{sk}{e}] \overset{n-i-1}{e}] \overset{n-i-k-1}{e}]\ldots] \overset{n-i-k-1}{e}] =$$

$$= [\overset{i}{e} x_1^k [\ldots[\overset{i}{e} x_{(s-2)k+1}^{(s-1)k} [x_{(s-1)k+1}^{n+i-k} \overset{(s+1)k-n}{e} \overset{n}{[e]} \overset{n-i-k-1}{e}] \overset{n-i-k-1}{e}]\ldots] \overset{n-i-k-1}{e}] =$$

$$= [\overset{i}{e} x_1^k [\ldots[\overset{i}{e} x_{(s-2)k+1}^{(s-1)k} [x_{(s-1)k+1}^{n+i-k} \overset{sk-i}{e}] \overset{n-i-k-1}{e}]\ldots] \overset{n-i-k-1}{e}] =$$

$$= [\overset{i}{e} x_1^k [\ldots[\overset{i}{e}[x_{(s-2)k+1}^{n+i-k} \overset{(s-1)k-i}{e}] \overset{n-i-1}{e}]\ldots] \overset{n-i-k-1}{e}] =$$

$$= [\overset{i}{e} x_1^k [\ldots[x_{(s-2)k+1}^{n+i-k} \overset{(s-1)k-i}{e}]\ldots] \overset{n-i-k-1}{e}] = \ldots =$$

$$= [\overset{i}{e} x_1^k [x_{k+1}^{n+i-k} \overset{2k-i}{e}] \overset{n-i-k-1}{e}] = [\overset{i}{e}[x_1^{n+i-k} \overset{k-i}{e}] \overset{n-i-1}{e}] = [x_1^{n+i-k} \overset{k-i}{e}].$$

Според тоа, $[\overset{k-i}{e} x_1^{n+i-k}] = [x_1^{n+i-k} \overset{k-i}{e}]$.

Со помош на последното равенство и на равенството под (а) се докажува дека $[\overset{k-i}{e} x_1^{n+i-k}] = [x_1^i \overset{k-i}{e} x_{i+1}^{n+i-k}]$. Имено,

$$[x_1^i \overset{k-i}{e} x_{i+1}^{n+i-k}] = [\overset{i}{e}[x_1^i \overset{k-i}{e} x_{i+1}^{n+i-k}] \overset{n-i-1}{e}] = [\overset{i}{e} x_1^i \overset{k-i}{e} [x_{i+1}^{n+i-k} \overset{k}{e}] \overset{n-i-k-1}{e}] = [\overset{i}{e} x_1^i \overset{k-i}{e} [\overset{k}{e} x_{i+1}^{n+i-k}] \overset{n-i-k-1}{e}] = z.$$

Ако $n \le 2k$, тогаш

$$z = [\overset{i}{e}[x_1^i \overset{n-i}{e}] \overset{2k-n}{e} x_{i+1}^{n+i-k} \overset{n-i-k-1}{e}] = [\overset{i}{e}[\overset{k-i}{e} x_1^i \overset{n-k}{e}] \overset{2k-n}{e} x_{i+1}^{n+i-k} \overset{n-i-k-1}{e}] =$$

$$= [\overset{k}{e} x_1^i [\overset{k}{e} x_{i+1}^{n+i-k}] \overset{n-i-k-1}{e}] = [\overset{k}{e} x_1^i [x_{i+1}^{n+i-k} \overset{k}{e}] \overset{n-i-k-1}{e}] = [\overset{i}{e}[\overset{k-i}{e} x_1^{n+i-k}] \overset{n-i-1}{e}] = [\overset{k-i}{e} x_1^{n+i-k}].$$

Ако $n \le 2k$, тогаш $n+i > 2k$, па

$$[x_1^{n+i-k} \overset{k-i}{e}] = [\overset{i}{e}[x_1^{n+i-k} \overset{k-i}{e}] \overset{n-i-1}{e}] = [\overset{i}{e} x_1^k [x_{k+1}^{n+i-k} \overset{2k-i}{e}] \overset{n-i-k-1}{e}] =$$

$$= [\overset{i}{e} x_1^k [\overset{k-i}{e} x_{k+1}^{n+i-k} \overset{k}{e}] \overset{n-i-k-1}{e}] = [\overset{i}{e}[x_1^k \overset{k-i}{e} x_{k+1}^{n+i-k}] \overset{n-i-1}{e}] = [x_1^k \overset{k-i}{e} x_{k+1}^{n+i-k}].$$

Користејќи го равенството $[x_1^{n+i-k} \overset{k-i}{e}] = [x_1^k \overset{k-i}{e} x_{k+1}^{n+i-k}]$ добиваме

$$z = [\overset{i}{e}[x_1^i \overset{k-i}{e} \overset{k-i}{e} \overset{i}{e} x_{i+1}^{n+i-2k}] x_{n+i-2k+1}^{n+i-k} \overset{n-i-k-1}{e}] =$$

$$= [\overset{i}{e}[x_1^i \overset{k}{e} x_{i+1}^{n+i-2k} \overset{k-i}{e}] x_{n+i-2k+1}^{n+i-k} \overset{n-i-k-1}{e}] = [\overset{i}{e}[\overset{k-i}{e} x_1^i \overset{k}{e} x_{i+1}^{n+i-2k}] x_{n+i-2k+1}^{n+i-k} \overset{n-i-k-1}{e}] =$$

$$= [\overset{k}{e} x_1^i [\overset{k}{e} x_{i+1}^{n+i-k}] \overset{n-i-k-1}{e}] = [\overset{k}{e} x_1^i [x_{i+1}^{n+i-k} \overset{k}{e}] \overset{n-i-k-1}{e}] = [\overset{k}{e} x_1^i [x_{i+1}^{n+i-k} \overset{k}{e}] \overset{n-i-k-1}{e}] =$$

$$= [\overset{i}{e}[\overset{k-i}{e} x_1^{n+i-k}] \overset{n-i-1}{e}] = [\overset{k-i}{e} x_1^{n+i-k}].$$

Според тоа, $[\overset{k-i}{e} x_1^{n+i-k}] = [x_1^i \overset{k-i}{e} x_{i+1}^{n+i-k}]$.

Ќе докажеме дека $[x_1^{2i} \overset{k-i}{e} x_{2i+1}^{n+i-k}] = [x_1^i \overset{k-i}{e} x_{i+1}^{n+i-k}]$. Навистина,

$$[x_1^{2i} \overset{k-i}{e} x_{2i+1}^{n+i-k}] = [x_1^i \overset{n}{[e]} x_{i+1}^{2i} \overset{k-i}{e} x_{2i+1}^{n+i-k}] = [x_1^i \overset{k}{e}[\overset{n-k}{e} x_{i+1}^{2i} \overset{k-i}{e}] x_{2i+1}^{n+i-k}] =$$

$$= [x_1^i \overset{k}{e}[\overset{n-i}{e} x_{i+1}^{2i}] x_{2i+1}^{n+i-k}] = [x_1^i \overset{n}{[e]} \overset{k-i}{e} x_{i+1}^{n+i-k}] = [x_1^i \overset{k-i}{e} x_{i+1}^{n+i-k}].$$

Слично се покажува дека важи $[x_1^{2i+1} \overset{k-i}{e} x_{2i+2}^{n+i-k}] = [x_1^i \overset{k-i}{e} x_{i+1}^{n+i-k}]$. Имено,

$$[x_1^{2i+1}\overset{k-i}{e}\,x_{2i+2}^{n+i-k}]=[x_1^i[\overset{n-1}{e}\,x_{i+1}]x_{i+2}^{2i+1}\overset{k-i}{e}\,x_{2i+1}^{n+i-k}]$$
$$=[x_1^i\overset{k}{e}[\overset{n-k-1}{e}\,x_{i+1}^{2i+1}\overset{k-i}{e}]x_{2i+1}^{n+i-k}]=[x_1^i\overset{k}{e}[\overset{n-i-1}{e}\,x_{i+1}^{2i+1}]x_{2i+1}^{n+i-k}]=$$
$$=[x_1^i[\overset{n}{e}]\overset{k-i-1}{e}\,x_{i+1}^{n+i-k}]=[x_1^i[\overset{n}{e}]\overset{k-i}{e}\,x_{i+1}^{n+i-k}].\qquad\square$$

Лема 3.2. *Ако* $(G,[\,])$ *е* $(i+1,i+k+1)$*-асоцијативен* n*-групоид, каде што* $i\le k$*, со неутрален елемент, тогаш* $(G,[\,])$ *е и:*

(*а*) $(1,i+k+1)$*-асоцијативен* n*-групоид,*

(*б*) $(1,n)$*-асоцијативен* n*-групоид,*

(*в*) $(1,k+1)$*-асоцијативен* n*-групоид.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е $(i+1,i+k+1)$-асоцијативен n-групоид со единица e и нека $i\le k$. Користејќи ги равенствата од Лемата 3.1, добиваме:

(а)
$$[x_1^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i+k}]x_{n+i+k+1}^{2n-1}]=[\overset{i}{e}[x_1^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i+k}]x_{n+i+k+1}^{2n-1}]\overset{n-i-1}{e}]$$
$$=[\overset{i}{e}\,x_1^k[x_{k+1}^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i+k}]x_{n+i+k+1}^{2n-1}\overset{k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$
$$=[\overset{i}{e}[\overset{i}{e}\,x_1^k[x_{k+1}^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i+k}]x_{n+i+k+1}^{2n-1}\overset{k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-1}{e}]$$
$$=[\overset{2i}{e}\,x_1^{k-i}[x_{k-i+1}^k[x_{k+1}^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i+k}]x_{n+i+k+1}^{2n-1}\overset{k}{e}]\overset{n-i-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$
$$=[\overset{2i}{e}\,x_1^{k-i}[\overset{k}{e}\,x_{k-i+1}^k[x_{k+1}^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i+k}]x_{n+i+k+1}^{2n-1}\overset{k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$
$$=[\overset{2i}{e}\,x_1^{k-i}[\overset{i}{e}[\overset{k-i}{e}\,x_{k-i+1}^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i+k}]x_{n+i+k+1}^{2n-1}]\overset{n-i-1}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$
$$=[\overset{2i}{e}\,x_1^{k-i}[\overset{k-i}{e}\,x_{k-i+1}^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i+k}]x_{n+i+k+1}^{2n-1}]\overset{n-i-k-1}{e}]=[\overset{2i}{e}\,x_1^{k-i}[x_{k-i+1}^k\overset{k-i}{e}\,x_{k+1}^{i+k}[x_{i+k+1}^{n+i+k}]x_{n+i+k+1}^{2n-1}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$
$$=[\overset{2i}{e}\,x_1^{k-i}[x_{k-i+1}^k[\overset{k-i}{e}\,x_{k+1}^{n+i}]x_{n+i+1}^{2n-1}]\overset{n-i-k-1}{e}]=[\overset{2i}{e}\,x_1^{k-i}[x_{k-i+1}^k[x_{k+1}^{n+i}\overset{k-i}{e}]x_{n+i+1}^{2n-1}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$
$$=[\overset{i}{e}[\overset{i}{e}\,x_1^k[x_{k+1}^{n+i}\overset{k-i}{e}]x_{n+i+1}^{2n-k-1}]x_{2n-k}^{2n-1}\overset{n-i-k-1}{e}]=[\overset{i}{e}[\overset{i}{e}[x_1^n]x_{n+1}^{n+i}\overset{k-i}{e}\,x_{n+i+1}^{2n-k-1}]x_{2n-k}^{2n-1}\overset{n-i-k-1}{e}]=$$
$$=[\overset{i}{e}[\overset{k}{e}[x_1^n]x_{n+1}^{2n-k-1}]x_{2n-k}^{2n-1}\overset{n-i-k-1}{e}]=[\overset{i+k}{e}[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}]\overset{n-i-k-1}{e}]=[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}].$$

Според тоа $(G,[\,])$ е $(1,i+k+1)$-асоцијативен n-групоид.

(б) Нека $i\ge 1$. Од тврдењето под (а) и од Св.1.1 следува дека n-групоидот $(G,[\,])$ е $(1,i+1)$-асоцијативен. Бидејќи $i\le k$ и $i+k+1\le 1$ важи дека $n\ge 2i+1$. Нека q е количникот, а r остатокот при делење на $n-1$ со i. Тогаш $0\le r<i$ и $n\ge 1+si$ за секој $s\in\{2,\dots,q\}$. Со примена на Лемата 1.2 $q-1$ пати добиваме дека $(G,[\,])$ е $((s-1)i+1,si+1)$-асоцијативен n-групоид за секој $s\in\{2,\dots,q\}$, па според Св.1.1 n-групоидот $(G,[\,])$ е $(1,qi+1)$-асоцијативен. Ако $r=0$, тогаш $qi+1=n$, па $(G,[\,])$ е $(1,n)$-асоцијативен n-групоид. Ако $r>0$, тогаш $qi+1=n-r$, т.е. $(G,[\,])$ е $(1,n-r)$-асоцијативен n-групоид. Од Лемата 1.1 (а) следува дека $(G,[\,]^*)$ е $(r+1,n)$-асоцијативен, т.е. $(r+1,r+n-r-1+1)$-асоцијативен n-групоид. Бидејќи $r<i$ и $n\geq 2i+1$ важи дека $n>2r+1$, па $r<n-r-1$. Сега, од тврдењето под (а) добиваме дека n-групоидот $(G,[\,]^*)$ е $(1,n)$-асоцијативен. Повторно користејќи ја Лемата 1.1 (а) имаме дека $(G,[\,])$ е $(1,n)$-асоцијативен n-групоид.

Ако $i=0$, тогаш n-групоидот $(G,[\,])$ е $(1,1+k)$-асоцијативен, па горната дискусија, наместо по i, ја спроведуваме по k.

(в) За секои $x_1,x_2,...,x_{2n-1}\in G$ имаме

$$[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}]=[\overset{i}{e}[[x_1^n]x_{n+1}^{2n-1}]\overset{n-i-1}{e}]=[\overset{i}{e}[x_1^n]x_{n+1}^{n+k-1}[x_{n+k}^{2n-1}\overset{k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$

$$=[\overset{i}{e}x_1^k[x_{k+1}^{n+k-1}[x_{n+k}^{2n-1}\overset{k}{e}]]\overset{n-i-k-1}{e}]=[\overset{i}{e}x_1^k[[x_{k+1}^{n+k}]x_{n+k+1}^{2n-1}\overset{k}{e}]\overset{n-i-k-1}{e}]=$$

$$=[\overset{i}{e}[x_1^k[x_{k+1}^{n+k}]x_{n+k+1}^{2n-1}]\overset{n-i-1}{e}]=[x_1^k[x_{k+1}^{n+k}]x_{n+k+1}^{2n-1}].\qquad\square$$

Лема 3.3. *Нека $(G,[\,])$ е $(i+1,i+k+1)$-асоцијативен n-групоид и нека d е најголемиот заеднички делител на i и k. Ако n-групоидот $(G,[\,])$ има неутрален елемент, тогаш тој е $(1,d+1)$-асоцијативен.*

Доказ. Нека $i=pd$ и $k=qd$. Броевите p и q се заемно прости бидејќи d е најголемиот заеднички делител на i и k.

Ако $i=0$, тогаш $k=d$, па $(G,[\,])$ е $(1,d+1)$-асоцијативен n-групоид. Затоа нека $i\geq 1$. Ако $q=1$, тогаш $(G,[\,])$ е $(pd+1,(p+1)d+1)$-асоцијативен n-групоид. $1\leq d\leq sd$ за секој $s\in\{1,...,p\}$, па со примена на Лемата 1.2 p пати добиваме дека n-групоидот $(G,[\,])$ е $(1,d+1)$-асоцијативен.

Нека $q\geq 2$ и $p=1$. Тогаш $(G,[\,])$ е $(d+1,d+(q-1)d+1)$-асоцијативен n-групоид и $d\leq (q-1)d$, па од Лемата 3.2 следува дека n-групоидот $(G,[\,])$ е $(1,(q-1)d+1)$-асоцијативен и $(1,qd+1)$-асоцијативен, а од Св.1.1 дека е $((q-1)d+1,qd+1)$-асоцијативен. Слично како и во претходниот случај, $1\leq d\leq sd$ за секој $s\in\{1,...,q-1\}$, па со примена на Лемата 1.2 $q-1$ пати добиваме дека n-групоидот $(G,[\,])$ е $(1,d+1)$-асоцијативен.

Нека $p\geq 2$ и $q\geq 2$. Ако $i\geq k$, нека u е колчникот, а t остатокот при делење на i со k. Тогаш $i=uk+t$, $u\geq 1$, $0\leq t<k$ и $(G,[\,])$ е $(uk+t+1,(u+1)k+t+1)$-асоцијативен n-групоид. Бидејќи $1\leq k\leq sk+t$ за секој $s\in\{1,...,u\}$, со примена на Лемата 1.2 u пати имаме дека n-групоидот $(G,[\,])$ е $(t+1,t+k+1)$-асоцијативен. Според Евклидовиот алгоритам, d е најголемиот

заеднички делител на k и t. Ако $i<k$, ставајќи $i=t$ можеме двата случаи да ги разгледуваме истовремено. Нека $t=rd$. Тогаш r и q се заемно прости броеви. Бидејќи $t<k$ од Лемата 3.2 имаме дека n-групоидот $(G,[\,])$ е $(1,k+1)$-асоцијативен и $(1,t+k+1)$-асоцијативен, па според Св.1.1, $(G,[\,])$ е $(t+1,k+1)$-асоцијативен n-групоид. Ставаме $k_1=k-t=(q-r)d=q_1d$, $q_1=q-r$. Нека s_1 е количникот, а i_1 остатокот при делење на t со k_1. Тогаш важи дека $i_1=t-s_1k_1=(r-s_1q_1)d=r_1d$, $r_1=r-s_1q_1$. Очигледно $q_1\geq 1$, $0\leq i_1<k_1$, $s_1\geq 1$ и $r_1\geq 0$.

Ако $i_1=0$, тогаш $r_1=0$, па $r=s_1q_1$ и $q=(s_1+1)q_1$. Бидејќи r и q се заемно прости, следува дека $q_1=1$. Тогаш n-групоидот $(G,[\,])$ е $(s_1d+1,(s_1+1)d+1)$-асоцијативен. Со примена на Лемата 1.2 s_1 пати добиваме дека $(G,[\,])$ е $(1,d+1)$-асоцијативен n-групоид.

Нека $i_1>0$. Тогаш $(G,[\,])$ е $(i_1+s_1k_1+1,i_1+(s_1+1)k_1+1)$-асоцијативен n-групоид, па со примена на Лемата 1.2 s_1 пати добиваме дека $(G,[\,])$ е (i_1+1,i_1+k_1+1)-асоцијативен n-групоид. Јасно е дека $q>q_1$ и $d|k_1$. Ако $d_1|k_1$, $d_1|t$ и $d_1>d$, тогаш $d_1|k$, па d_1 е најголемиот заеднички делител на k и t, а тоа противречи на претпоставката дека d е најголемиот заеднички делител на k и t. Според тоа, d е најголемиот заеднички делител на k_1 и t, а според Евклидовиот алгоритам d е најголемиот заеднички делител на k_1 и i_1. Сега, можеме повторно да ја примениме Лемата 3.2 за (i_1+1,i_1+k_1+1)-асоцијативниот n-групоид $(G,[\,])$ и целосно да ја повториме претходната постапка. Со примена на претходната постапка, во конечен број чекори, се добива конечна низа од природни броеви $q>q_1>q_2>...>q_j=1$, на која ѝ соодветствува конечната низа од природни броеви $k>k_1>k_2>...>k_j=d$, каде што $k_f=q_fd$, $(G,[\,])$ е (i_f+1,i_f+k_f+1)-асоцијативен n-групоид и $i_f<k_f$ за секој $f\in\{1,...,j\}$. Така добиваме дека $(G,[\,])$ е (i_j+1,i_j+d+1)-асоцијативен n-групоид и $i_j<k_j=q_jd=d$. Со примена на Лемата 3.2 се добива дека $(G,[\,])$ е $(1,d+1)$-асоцијативен n-групоид. □

Лема 3.4. *Нека $(G,[\,])$ е $pd+1$-групоид со неутрален елемент. Ако за секои $r\geq 0$ и $s\geq 1$ такви што $r+s\leq p$ важи дека $(G,[\,])$ е $(rd+1,(r+s)d+1)$-асоцијативен $pd+1$-групоид, тогаш постои $(1,d+1)$-асоцијативен $d+1$-групоид $(G,[\,]')$ таков што за секои $x_1,x_2,...,x_{pd+1}\in G$ е исполнето равенството*

$$[x_1^{pd+1}]=[[[...[[x_1^{d+1}]'x_{d+2}^{2d+1}]'...]'x_{(p-2)d+1}^{(p-1)d}]'x_{(p-1)d+1}^{pd+1}]'.$$

Доказ. Нека e е неутрален елемент во $(G,[])$. Дефинираме $(d+1)$-арна операција $[]'$ на G со $[x_1^{d+1}]'=[x_1^{d+1}\overset{(p-1)d}{e}]$ за секои $x_1,x_2,...,x_{d+1}\in G$. Тогаш за секои $x_1,x_2,...,x_{pd+1}\in G$ добиваме

$$[x_1^{pd+1}]=[\overset{(p-1)d}{e}[x_1^{pd+1}]\overset{d}{e}]=[[\overset{(p-1)d}{e}x_1^{d+1}]x_{d+2}^{pd+1}\overset{d}{e}]=$$

$$=[\overset{(p-1)d}{e}[[x_1^{d+1}\overset{(p-1)d}{e}]x_{d+2}^{pd+1}\overset{d}{e}]\overset{d}{e}]=[[\overset{(p-1)d}{e}[x_1^{d+1}\overset{(p-1)d}{e}]x_{d+2}^{2d+1}]x_{2d+2}^{pd+1}\overset{2d}{e}]=$$

$$=[[[x_1^{d+1}\overset{(p-1)d}{e}]x_{d+2}^{2d+1}\overset{(p-1)d}{e}]x_{2d+2}^{pd+1}\overset{2d}{e}]=...=$$

$$=[[...[[x_1^{d+1}\overset{(p-1)d}{e}]x_{d+2}^{2d+1}\overset{(p-1)d}{e}]...]x_{(p-2)d+2}^{pd+1}\overset{(p-2)d}{e}]=$$

$$=[\overset{(p-1)d}{e}[[...[[x_1^{d+1}\overset{(p-1)d}{e}]x_{d+2}^{2d+1}\overset{(p-1)d}{e}]...]x_{(p-2)d+2}^{pd+1}\overset{(p-2)d}{e}]\overset{d}{e}]=$$

$$=[[\overset{(p-1)d}{e}[...[[x_1^{d+1}\overset{(p-1)d}{e}]x_{d+2}^{2d+1}\overset{(p-1)d}{e}]...]x_{(p-2)d+2}^{(p-1)d+1}]x_{(p-1)d+2}^{pd+1}\overset{(p-1)d}{e}]=$$

$$=[[[...[[x_1^{d+1}\overset{(p-1)d}{e}]x_{d+2}^{2d+1}\overset{(p-1)d}{e}]...]x_{(p-2)d+2}^{(p-1)d+1}\overset{(p-1)d}{e}]x_{(p-1)d+2}^{pd+1}\overset{(p-1)d}{e}]=$$

$$=[[[...[[x_1^{d+1}]'x_{d+2}^{2d+1}]'...]'x_{(p-2)d+1}^{(p-1)d}]'x_{(p-1)d+1}^{pd+1}]'.$$

Нека $x_1,x_2,...,x_{2d+1}\in G$ се произволни елементи. Тогаш

$$[[x_1^{d+1}]'x_{d+2}^{2d+1}]'=[[x_1^{d+1}\overset{(p-1)d}{e}]x_{d+2}^{2d+1}\overset{(p-1)d}{e}]=$$

$$=[[\overset{(p-1)d}{e}x_1^{d+1}]x_{d+2}^{2d+1}\overset{(p-1)d}{e}]=[\overset{(p-1)d}{e}x_1^{d}[x_{d+1}^{2d+1}\overset{(p-1)d}{e}]]=$$

$$=[x_1^{d}[x_{d+1}^{2d+1}\overset{(p-1)d}{e}]\overset{(p-1)d}{e}]=[x_1^{d}[x_{d+1}^{2d+1}]']'.$$

Значи, $d+1$-групоидот $(G,[]')$ е $(1,d+1)$-асоцијативен. □

Со користење на претходните тврдења можеме да ја докажеме следнава теорема.

Теорема 3.1. *Нека $(G,[])$ е $(i+1,i+k+1)$-асоцијативен n-групоид со неутрален елемент и нека d е најголемиот заеднички делител на броевите i, k и $n-1$. Нека $n-1=pd$. Тогаш $(G,[])$ е $(rd+1,(r+s)d+1)$-асоцијативен n-групоид за секои $r\geq 0$ и $s\geq 1$ такви што $r+s\leq p$. Покрај тоа, постои $(1,d+1)$-асоцијативен $d+1$-групоид $(G,[]')$ таков што за секои $x_1,x_2,...,x_n\in G$ важи равенството*

$$[x_1^{n}]=[[[...[[x_1^{d+1}]'x_{d+2}^{2d+1}]'...]'x_{(p-2)d+1}^{(p-1)d}]'x_{(p-1)d+1}^{n}]'.$$

Доказ. Нека d_1 најголемиот заеднички делител на броевите i и k. Тогаш според Лемата 3.3 $(G,[\,])$ е $(1,d_1+1)$-асоцијативен n-групоид. Притоа d е делител на d_1, т.е. $d_1 = k_1 d$.

а) Ако $k_1 = 1$, тогаш $d_1 = d$, па $(G,[\,])$ е $(1,d+1)$-асоцијативен n-групоид. Оттука, со повеќекратна примена на Лемата 1.3 и Св.1.1 се добива дека $(G,[\,])$ е $(rd+1,(r+s)d+1)$-асоцијативен n-групоид за секои $r \geq 0$ и $s \geq 1$ такви што $r+s \leq p$, каде што $n-1 = pd$.

б) Нека $k_1 \geq 2$ и нека v е количникот, а t_1 остатокот при делење на $n-1$ со d_1. Јасно, $n-1 = vd_1 + t_1$, $d | t_1$, $t_1 < d_1$ и $v \geq 1$.

Ако $v > 1$, тогаш со примена на Лемата 1.3 $v-1$ пати се добива дека $(G,[\,])$ е $(sd_1+1,(s+1)d_1+1)$-асоцијативен n-групоид за секој $s \in \{1,\dots,v-1\}$, па според Св.1.1 n-групоидот $(G,[\,])$ е $(1,vd_1+1)$-асоцијативен. За $v=1$ последново важи тривијално. Од Лемата 3.2 имаме дека n-групоидот $(G,[\,])$ е $(1,n)$-асоцијативен, а од Св.1.1 дека е (vd_1+1,n)-асоцијативен, т.е. $(n-t_1,n)$-асоцијативен.

Нека d_2 најголемиот заеднички делител на броевите $n-t_1-1$ и t_1. Според Лемата 3.3 $(G,[\,])$ е $(1,d_2+1)$-асоцијативен n-групоид. Бројот d е делител на $n-1$ и t_1, па $d_2 = k_2 d$ и $k_2 < k_1$. Ако $k_2 = 1$, тогаш го добиваме случајот под а), а ако $k_2 > 1$, тогаш го добиваме случајот под б).

Со примена на претходната постапка, во конечен број чекори, се добива конечна низа од природни броеви $k > k_1 > k_2 > \dots > k_j = 1$. Притоа $d_f = k_f d$ и $(G,[\,])$ е $(1,d_f+1)$-асоцијативен n-групоид за секој $f \in \{1,\dots,j\}$. Така се добива дека $(G,[\,])$ е $(1,d+1)$-асоцијативен n-групоид, а оттука, со повеќекратна примена на Лемата 1.3 и Св.1.1 се добива дека $(G,[\,])$ е $(rd+1,(r+s)d+1)$-асоцијативен n-групоид за секои $r \geq 0$ и $s \geq 1$ такви што $r+s \leq p$, каде што $n-1 = pd$. Тогаш според Лемата 3.4 постои $(1,d+1)$-асоцијативен $d+1$-групоид $(G,[\,]')$ таков што за секои $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ е исполнето равенството

$$[x_1^n] = [[[\dots[[x_1^{d+1}]' x_{d+2}^{2d+1}]' \dots]' x_{(p-2)d+1}^{(p-1)d}]' x_{(p-1)d+1}^n]' \ . \ \square$$

Глава III Алгебарски *n*-групи

3.1. Аксиоматика на *n*-групи

Нека G е непразно множество, а $[\,]: G^n \to G$ е n-арна операција на G. Ако за секои $x_0, x_1, ..., x_n \in G$ и фиксиран $i \in \{1, ..., n\}$, постои елемент $z \in G$, таков што $[x_1^{i-1}\, z\, x_i^{n-1}] = x_0$, тогаш велиме дека оваа равенка е i*-решлива* или *решлива на месшошо* i. Ако ова решение на равенката е единствено за секој $i \in \{1, ..., n\}$, тогаш за парот $(G, [\,])$ велиме дека е n*-квазигруџа*. Асоцијативна n-квазигрупа се нарекува n*-груџа* или *џолиадична груџа.* Во бинарниот случај (т.е. за $n = 2$) поимот n-група се совпаѓа со поимот група. Кардиналниот број $|G|$ на множеството G се нарекува *ред* на n-групата $(G, [\,])$ и го означуваме со $|G|$. Ако редот $|G|$ е конечен, тогаш $(G, [\,])$ е *конечна* n-група.

Пример 1.1. Нека $(\{1, 2, 3, 4\}; \cdot)$ е Клајновата група и нека $\varphi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,4\,3 \end{pmatrix}$ е пермутација на $G = \{1, 2, 3, 4\}$. Дефинираме тернарна операција $[\;]$ на $\{1, 2, 3, 4\}$ со: $[xyz] = x \cdot \varphi(y) \cdot z \cdot 2$, за секои $x, y, z \in G$. Тогаш, $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \varepsilon$, $\varphi(2) = 2$ и $\varphi \in Aut(Q, [\;])$. Во $(\{1, 2, 3, 4\}; \cdot)$ важат следниве равенства:

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

а) $$\begin{aligned}[][xyz]uv] &= (x \cdot \varphi(y) \cdot z \cdot 2) \cdot \varphi(u) \cdot v \cdot 2 = \\ &= x \cdot (\varphi(y) \cdot z \cdot 2 \cdot \varphi(u)) \cdot v \cdot 2 = \\ &= x \cdot \varphi(y \cdot \varphi(z) \cdot u \cdot 2) \cdot v \cdot 2 = \\ &= [x[yzu]v],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[][xyz]uv] &= (x \cdot \varphi(y) \cdot z \cdot 2) \cdot \varphi(u) \cdot v \cdot 2 = \\ &= x \cdot \varphi(y) \cdot (z \cdot 2 \cdot \varphi(u) \cdot v) \cdot 2 = [xy[zuv]] .\end{aligned}$$

б) $x=[zyu]$ е решение на равенката $[xyz]=u$, бидејќи

$$[xyz]=[[zyu]yz]=[(z\cdot\varphi(y)\cdot u\cdot 2)yz]=z\cdot\varphi(y)\cdot u\cdot 2\cdot\varphi(y)\cdot z\cdot 2$$
$$=z\cdot z\cdot\varphi(y)\cdot\varphi(y)\cdot 2\cdot 2\cdot u=1\cdot 1\cdot 1\cdot u=u$$

$y=[\varphi(x)z\varphi(u)]$ е решение на равенката $[xyz]=u$, бидејќи

$$[xyz]=[x[\varphi(x)z\varphi(u)]z]=[x(\varphi(x)\cdot\varphi(z)\cdot\varphi(u)\cdot 2)z]$$
$$=x\cdot\varphi(\varphi(x)\cdot\varphi(z)\cdot\varphi(u)\cdot 2)\cdot z\cdot 2=x\cdot x\cdot z\cdot u\cdot 2\cdot z\cdot 2=u$$

$z=[xyu]$ е решение на равенката $[xyz]=u$, бидејќи

$$[xyz]=[xy[xyu]]=[xy(x\cdot\varphi(y)\cdot u\cdot 2)]=x\cdot\varphi(y)\cdot x\cdot\varphi(y)\cdot u\cdot 2\cdot 2=u.$$

Единственоста на решенијата следува од фактот дека $(\{1,2,3,4\};\cdot)$ е група.

Од а) и б) имаме дека $(\{1,2,3,4\};[\ ])$ е 3-група. □

Вакви и слични n-арни системи можат да имаат многу примени во разни гранки. На пример, во теоријата на автомати се користат n-полугрупи и n-групи; некои n-групоиди се користат во теоријата на квантни групи; различни примени на тернарни структури во физиката се опишани од R. Kerner, а во физиката исто така се користат и n-арни Лиеви групи.

Идејата за испитување на ваквите групи изгледа потекнува од едно предавање на E. Kasner одржано на 53-тата средба на Американската асоција-ција за унапредување на науката во 1904 година. Но, првиот труд што се однесува на теоријата на n-групите (дефинирани како што е дадено погоре) бил напишан од W. Dörnte во 1928 година (в. [4]). Во негова чест n-групите се нарекуваат и *Дернтеови* n*-групи*. Во овој труд тој забележал дека кој било n-групоид $(G,[\,])$, каде што $[x_1^n]=x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n\circ b$, при што $(G,\circ)$ е група, а b е фиксен елемент од G што припаѓа на центарот на $(G,\circ)$, е n-група. Ваквите n-групи се нарекуваат b*-изведени* од групата $(G,\circ)$ и се означуваат со $der_b(G,\circ)$. Во случај кога b е неутралниот елемент во групата $(G,\circ)$, велиме дека n-групата $(G,[\,])$ е *редуцирлива* до групата $(G,\circ)$ или дека *е изведена* од $(G,\circ)$. За секој $n\geq 3$ постојат n-групи што не се изведени од ниту една група. За нив велиме дека се *нередуцирливи*.

Пост, а подоцна и Твермоес, дале и друга дефиниција на n-група, во која го ослабеле едно од двете барања дадени во дефиницијата на Дернте. Имено, таа дефиниција гласи:

Алгебрата $(G,[\,])$, каде што G е непразно множество, а $[\,]:G^n\to G$ е n-арна операција на G и $n\geq 2$, се нарекува n*-група* ако и само ако n-арната операција $[\,]$ на множеството G е асоцијативна и за секоја низа $a_1^{n-1}a\in G^n$, секоја од равенките $[xa_1^{n-1}]=a$ и $[a_1^{n-1}y]=a$ е решлива во G.

Оваа дефиниција е позната како Постова дефиниција на n-група.

Пример 1.2. Нека $B_3 = \{(12),(13),(23)\}$ е множеството од непарни пермутации од 3 елементи. Дефинираме тернарна операција $[\,]$ на B_3 со $[x_1x_2x_3] = x_1 \circ x_2 \circ x_3$, каде што $\circ$ е операцијата композиција на пресликувања. Операцијата е добро дефинирана бидејќи композицијата на три непарни пермутации е непарна пермутација. Од асоцијативноста на операцијата композиција на пресликувања, следува дека $(B_3,[\,])$ е 3-полугрупа. Нека $a_1, a_2, b \in B_3$ се произволни елементи. За секој $p \in B_3$ важи дека $p \circ p = 1_{\{1,2,3\}}$, па за $x = [a_2a_1b]$ и $y = [ba_2a_1]$ добиваме дека $b = [a_1a_2x] = [ya_1a_2]$. Според тоа, $(B_3,[\,])$ е 3-група. □

Ќе покажеме дека Постовата дефиниција е еквивалентна со онаа на Дернте, но претходно ќе покажеме неколку својства и ќе воведеме уште неколку поими. Во нив поимот n-група ќе биде според Постовата дефиниција.

Својство 1.1. *Ако $(G,[\,])$ е n-група, тогаш за секој природен број k и за секоја низа $a_1^{k(n-1)}a \in G^{k(n-1)+1}$, секоја од равенките $[xa_1^{k(n-1)}] = a$ и $[a_1^{k(n-1)}y] = a$ е решлива во G.*

Доказ. Ќе ја покажеме решливоста на равенката $[a_1^{k(n-1)}y] = a$. Ако $k = 1$, тогаш равенството важи заради втората аксиома од Постовата дефиниција. Да претпоставиме дека постои такво k за кое равенката $[a_1^{k(n-1)}y] = a$ е нерешлива во G за најмалку една низа $a_1^{k(n-1)}a \in G^{k(n-1)+1}$. Да го избереме најмалото такво k. Очигледно, $k > 1$.

Нека $a_1^{k(n-1)}a$ е произволна фиксна низа од $G^{k(n-1)+1}$. Да ја разгледаме равенката $[a_1^{(k-1)(n-1)}u] = a$. Од изборот на k следува дека оваа равенка е решлива во G, т.е. постои таков елемент $c \in G$, што $[a_1^{(k-1)(n-1)}c] = a$. Од втората аксиома на Постовата дефиниција заклучуваме дека во G е решлива и равенката $[a_{(k-1)(n-1)+1}^{k(n-1)}v] = c$, т.е. постои таков елемент $b \in G$ што $[a_{(k-1)(n-1)+1}^{k(n-1)}b] = c$. Од Посл. 2.1 (а) од Гл. I, од равенставата $[a_{(k-1)(n-1)+1}^{k(n-1)}b] = c$ и $[a_1^{(k-1)(n-1)}c] = a$ имаме дека

$$[a_1^{k(n-1)}b] = [a_1^{(k-1)(n-1)}[a_{(k-1)(n-1)+1}^{k(n-1)}b]] = [a_1^{(k-1)(n-1)}c] = a,$$

од каде што следува дека b е решение на равенката $[a_1^{k(n-1)}y] = a$, што противречи на претпоставката. □

Својство 1.2. *Нека $(G,[\,])$ е n-група, $e_1^{k(n-1)} \in G^{k(n-1)}$, каде што $k \geq 1$ и нека $a \in G$.*

1) *Ако $[e_1^{k(n-1)}a] = a$, тогаш $e_1^{k(n-1)}$ е лева неутрална низа во G.*

2) *Ако $[ae_1^{k(n-1)}] = a$, тогаш $e_1^{k(n-1)}$ е десна неутрална низа во G.*

Доказ. 1) Нека $[e_1^{k(n-1)}a] = a$ и нека $u \in G$ е произволен елемент. Ќе ја разгледаме равенката $[\overset{n-1}{a}\,y] = u$. Од втората аксиома на Постовата дефиниција, имаме дека постои елемент $b \in G$, таков што $[\overset{n-1}{a}\,b] = u$. Очигледно,

$$u = [\overset{n-1}{a}\, b] = [a\, \overset{n-2}{a}\, b] = [[e_1^{k(n-1)}a]\, \overset{n-2}{a}\, b] = [e_1^{k(n-1)}[\overset{n-1}{a}\, b]] = [e_1^{k(n-1)}u] \text{, т.е. } [e_1^{k(n-1)}u] = u \text{,}$$

па $e_1^{k(n-1)}$ е лева неутрална низа за $[\,]$.

Особината 2) се покажува аналогно како 1). □

Користејќи ги овие својства, лесно се покажува следново својство.

Својство 1.3. *Секоја* n*-група* $(G,[\,])$ *има најмалку една лева (десна) неутрална низа со должина* $k(n-1)$*, за секој природен број* k.

Доказ. Фиксираме природен број k, низа $e_2^{k(n-1)} \in G^{k(n-1)-1}$ и елемент $a \in G$. Ќе ја разгледаме равенката $[xe_2^{k(n-1)}a] = a$. Од Св.1.1. следува дека во G постои елемент e_1, таков што $[e_1 e_2^{k(n-1)}a] = [e_1^{k(n-1)}a] = a$. Оттука и од Св.1.2 следува егзистенцијата на лева неутрална низа со должина $k(n-1)$. Слично се покажува и егзистенцијата на десна неутрална низа со должина $k(n-1)$. □

Својство 1.4. *Секоја лева неутрална низа со должина* $k(n-1)$ *во* n*-група* $(G,[\,])$ *е и десна неутрална низа со должина* $k(n-1)$ *и обратно.*

Доказ. 1) Нека $e_1^{k(n-1)}$ е лева неутрална низа во n-групата $(G,[\,])$. Ќе фиксираме елемент $a \in G$ и ставаме $b = [ae_1^{k(n-1)}]$. Бидејќи $e_1 = [e_1^{k(n-1)}e_1]$, тогаш, очигледно,

$$b = [ae_1^{k(n-1)}] = [a[e_1^{k(n-1)}e_1]e_2^{k(n-1)}] = [[ae_1^{k(n-1)}]e_1^{k(n-1)}].$$

Оттука и од равенството $b = [ae_1^{k(n-1)}]$ имаме дека $b = [be_1^{k(n-1)}]$. Имајќи го предвид Св.1.2, можеме да заклучиме дека $e_1^{k(n-1)}$ е десна неутрална низа во n-групата $(G,[\,])$.

2) Нека $c_1^{k(n-1)}$ е десна неутрална низа во n-групата $(G,[\,])$. Да ставиме $d = [c_1^{k(n-1)}c]$, каде што c е некој фиксен елемент од G. Бидејќи $c_{k(n-1)} = [c_{k(n-1)}c_1^{k(n-1)}]$, јасно е дека

$$d = [c_1^{k(n-1)}c] = [c_1^{k(n-1)-1}c_{k(n-1)}c] = [c_1^{k(n-1)-1}[c_{k(n-1)}c_1^{k(n-1)}]c] = [c_1^{k(n-1)}[c_1^{k(n-1)}c]].$$

Оттука и од равенството $d = [c_1^{k(n-1)}c]$, добиваме дека $d = [c_1^{k(n-1)}d]$, па од Св.1.2 следува дека $c_1^{k(n-1)}$ е лева неутрална низа со должина $k(n-1)$ во n-групата $(G,[\,])$. □

Последица 1.1. *Секоја лева (десна) неутрална низа со должина* $k(n-1)$ *во* n*-група* $(G,[\,])$ *е неутрална низа со должина* $k(n-1)$ *во* $(G,[\,])$. □

Од Св.1.2 и Посл.1.1 произлегуваат следниве доволни услови за тоа кога една низа со должина $k(n-1)$ во n-група $(G,[\,])$ е неутрална низа во таа n-група.

Својство 1.5. *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-група,* $e_1^{k(n-1)} \in G^{k(n-1)}$*, каде што* $k \geq 1$ *и нека* $a \in G$*. Ако е исполнето барем едно од равенствата* $[e_1^{k(n-1)}a] = a$ *или* $[ae_1^{k(n-1)}] = a$*, тогаш* $e_1^{k(n-1)}$ *е неутрална низа со должина* $k(n-1)$ *во* $(G,[\,])$*.*

Својство 1.6. *Ако* $e_1^i e_{i+1}^{k(n-1)}$ *е неутрална низа со должина* $k(n-1)$ *во* n*-група* $(G,[\,])$*, каде што* $1 \leq i \leq k(n-1)$*, тогаш* $e_{i+1}^{k(n-1)} e_1^i$ *е исто така неутрална низа со должина* $k(n-1)$ *во* $(G,[\,])$*.*

Доказ. Ќе покажеме дека тврдењето е точно за $i=1$. Очигледно е дека важи следново равенство: $[e_1^{k(n-1)}e_1] = [e_1 e_2^{k(n-1)} e_1] = e_1$. Од Св.1.5 следува дека $e_2^{k(n-1)}e_1$ е неутрална низа во $(G,[\,])$ со должина $k(n-1)$. Да претпоставиме дека постои i за кое тврдењето не е точно. Од сите такви i да го избереме најмалиот. Очигледно $i > 1$, а јасно е и дека $i < k(n-1)$. Бидејќи $e_2^i e_{i+1}^{k(n-1)} e_1$ е неутрална низа во $(G,[\,])$ со должина $k(n-1)$ (според горното) и бидејќи должината на низата e_2^i е помала од i, тогаш од изборот на i заклучуваме дека $e_{i+1}^{k(n-1)} e_1 e_2^i$ е неутрална низа со должина $k(n-1)$ во $(G,[\,])$, што е контрадикција. □

Овде ќе го воведеме поимот обратна низа.

Нека $(G,[\,])$ е n-група и нека $a_1^i \in G^i$. Низата $b_1^j \in G^j$ се нарекува *лева* (*десна*) *обратна низа на низата* a_1^i, ако низата $b_1^j a_1^i$ ($a_1^i b_1^j$) е неутрална низа во $(G,[\,])$ со должина $i+j$.

Од оваа дефиниција следува дека $i \geq 1$, $j \geq 1$ и $i + j \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,(n-1))$.

Својство 1.7. *Ако* $(G,[\,])$ *е* n*-група, тогаш за секоја низа* $a_1^i \in G^i$ *и за секој* $j \in \mathbf{N}$ *што ја задоволува конгруентната равенка* $i + j \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,(n-1))$*, постои обратна низа со должина* j*.*

Доказ. Очигледно, $j \geq 1$. Да фиксираме некој елемент $a \in G$ и да го разгледаме равенството $[aa_1^i \overset{j-1}{a}\, y] = a$. Од Св.1.1 следува дека оваа равенка е решлива во G на краевите. Нека c е решение на равенката, т.е. $[aa_1^i \overset{j-1}{a}\, c] = a$. Одовде и од Св.1.2 следува дека $a_1^i \overset{j-1}{a}\, c$ е неутрална низа во $(G,[\,])$ со должина $(i+j)$. Оттука имаме дека $\overset{j-1}{a}\, c$ е обратна низа со должина j за низата a_1^i. □

Со помош на обратни низи ќе ја покажеме и следнава теорема.

Теорема 1.1. *Ако* $(G,[\,])$ *е* n*-група, тогаш за секој природен број* k *и за секоја низа* $a_1^{i-1} a_{i+1}^{k(n-1)+1} a \in G^{k(n-1)+1}$ *равенството* $[a_1^{i-1} x_i a_{i+1}^{k(n-1)+1}] = a$ *има единствено решение во* G*, за секој* $i \in \{1, 2, \ldots, k(n-1)+1\}$*.*

Доказ. Следниве случаи се можни: 1) $i=1$; 2) $i = k(n-1)+1$; 3) $1 < i < k(n-1)+1$.

1) $i=1$. Тогаш равенството $[a_1^{i-1} x_i a_{i+1}^{k(n-1)+1}] = a$ добива облик $[x_1 a_2^{k(n-1)+1}] = a$. Од Св.1.1. следува дека последново равенство има решение во G. Ќе покажеме

дека оваа равенка има единствено решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат елементи $c,d\in G$ коишто се различни решенија на равенката $[x_1a_2^{k(n-1)+1}]=a$. Тогаш $[ca_2^{k(n-1)+1}]=[da_2^{k(n-1)+1}]$. Ако должината на низата $a_2^{k(n-1)+1}$ е еднаква на $k(n-1)$, тогаш според Св. 1.7 и од дефиницијата за обратна низа, следува дека за оваа низа постои обратна низа со должина $n-1$, која ќе ја означиме со b_1^{n-1}. Според тоа, равенството $[ca_2^{k(n-1)+1}]=[da_2^{k(n-1)+1}]$ може да се трансформира во следниов облик:

$$[[ca_2^{k(n-1)+1}]b_1^{n-1}]=[[da_2^{k(n-1)+1}]b_1^{n-1}] \text{ или во } [ca_2^{k(n-1)+1}b_1^{n-1}]=[da_2^{k(n-1)+1}b_1^{n-1}].$$

Одовде и од тоа што $a_2^{k(n-1)+1}b_1^{n-1}$ е неутрална низа во $(G,[\,])$ со должина $(k+1)(n-1)$, се добива дека $c=d$, што е противречност.

2) $i=k(n-1)+1$. Во овој случај равенката $[a_1^{i-1}x_ia_{i+1}^{k(n-1)+1}]=a$ го добива обликот $[a_1^{k(n-1)}x_{k(n-1)+1}]=a$. Постапувајќи слично како во претходниот случај, заклучуваме дека оваа равенка има единствено решение во G.

3) $1<i<k(n-1)+1$. Очигледно е дека $i-1\geq 1$ и $i+1\leq k(n-1)+1$, па според тоа низите a_1^{i-1} и $a_{i+1}^{k(n-1)+1}$ се непразни. Значи, должината на овие низи е помала од $k(n-1)$. Нека c_1^s и d_1^t се обратни низи на a_1^{i-1} и $a_{i+1}^{k(n-1)+1}$, соодветно. Тогаш, можеме да согледаме дека $s=k(n-1)-i+1$ и $t=i-1$. Ќе покажеме дека елементот $c_i^*=[c_1^sad_1^t]$ е решение на равенката $[a_1^{i-1}x_ia_{i+1}^{k(n-1)+1}]=a$. Навистина, имајќи предвид дека $a_1^{i-1}c_1^s$ и $d_1^ta_{i+1}^{k(n-1)+1}$ се неутрални низи со должина $k(n-1)$ во $(G,[\,])$, добиваме дека

$$[a_1^{i-1}c_i^*a_{i+1}^{k(n-1)+1}]=[a_1^{i-1}[c_1^sad_1^t]a_{i+1}^{k(n-1)+1}]=[[a_1^{i-1}c_1^sa]d_1^t\,a_{i+1}^{k(n-1)+1}]=[ad_1^t\,a_{i+1}^{k(n-1)+1}]=a.$$

Останува да покажеме дека c_i^* е единствено решение на дадената равенка. Да претпоставиме дека таа има уште едно ршение $d_i^*\in G$ што е различно од c_i^*. Тогаш:

$$[a_1^{i-1}c_i^*a_{i+1}^{k(n-1)+1}]=[a_1^{i-1}d_i^*a_{i+1}^{k(n-1)+1}], \text{ т.е. } [c_1^s[a_1^{i-1}c_i^*\,a_{i+1}^{k(n-1)+1}]d_1^t]=[c_1^s[a_1^{i-1}d_i^*\,a_{i+1}^{k(n-1)+1}]d_1^t],$$

од каде што следува дека $c_i^*=d_i^*$, што е противречност. □

Од оваа теорема, за $k=1$ произлегува следнава

Последица 1.2. *Ако* $(G,[\,])$ *е* n*-група, тогаш за секоја низа* $a_1^{i-1}a_{i+1}^n\,a\in G^n$*, равенството* $[a_1^{i-1}x_ia_{i+1}^n]=a$ *има единствено решение во* G*, за секој* $i\in\{1,2,...,n\}$. □

Лесно е да се согледа дека дефиницијата на Дернте и дефиницијата на Пост се еквивалентни. Вториот услов од дефиницијата на Пост е значително ослабен во однос на вториот услов од дефиницијата на Дернте. На олеснување на вториот услов од дефиницијата на Дернте работеле повеќемина, како на пример, А. К. Слипеко, В. И. Тјутин и други. Од резултатите на Тјутин се добива дека вториот услов од дефиницијата на Дернте може да се замени со следниов услов: за секои $a,b\in G$, секоја од равенките $[x\overset{n-1}{a}]=b$ и $[\overset{n-1}{a}y]=b$ е решлива во G при $n\geq 2$ и само една равенка $[\overset{i-1}{a}x\overset{n-i}{a}]=b$, за некој фиксиран $i\in\{2,3,...,n-1\}$, при $n\geq 3$.

Подолу ќе ја разгледаме дефиницијата на Чупона за n-група дадена во [39], а при воведувањето на поимот тополошка n-група. Дефиницијата на Чупона ја формулираме во следниве неколку реда.

Алгебрата $(G;[\,],[\,]_t,[\,]_r)$ од тип (n,n,n) каде што $n\geq 2$, се нарекува n-*група* ако се исполнети следниве услови:

1) n-арната операција $[\,]$ на множеството G е асоцијативна;

2) За секоја низа $x_1^{n-1}y\in G^n$ се исполнети равенствата

$$[[yx_{n-1}x_{n-2}...x_1]_t\,x_1^{n-1}]=y=[x_1^{n-1}[x_{n-1}x_{n-2}...x_1y]_r].$$

Оваа дефиниција и дефиницијата на Пост се еквивалентни. Имено, нека $(G,[\,])$ е n-група во смисла на дефиниција на Пост. На множеството G дефинираме две n-арни операции $[\,]_t$ и $[\,]_r$ на следниот начин.

Нека $y,x_1,x_2,...,x_{n-1}\in G$ се произволно избрани елементи. Да претпоставиме дека $[yx_{n-1}x_{n-2}...x_1]_t$ и $[x_{n-1}x_{n-2}...x_1y]_r$ се решенија на равенките $[ux_1^{n-1}]=y$ и $[x_1^{n-1}v]=y$, соодветно, т.е. $[[yx_{n-1}x_{n-2}...x_1]_t\,x_1^{n-1}]=y$ и $[x_1^{n-1}[x_{n-1}x_{n-2}...x_1y]_r]=y$. Тоа значи дека се исполнети равенствата од вториот услов на дефиницијата на Чупона. Обратното тврдење е очигледно.

Задачи

1. Да се покаже дека ако $(G,[\,])$ е n-група во смисла на дефиниција на Пост, тогаш:
   а) постои низа $a_1,...,a_{n-1}\in G$, таква што за секој $x\in G$, $[xa_1^{n-1}]=[a_1^{n-1}x]=x$.
   б) за секоја низа елементи $b_1,...,b_n\in G$ и секој број $i\ (1\leq i\leq n)$, постои еднозначно определен $x\in G$ таков што $[b_1^{i-1}xb_{i+1}^n]=b_i$.

2. Покажи дека секоја n-група е кратлив n-групоид.

3*. Покажи дека една n-полугрупа $(G,[\,])$ е n-група ако и само ако за секои $a,b\in G$ и за некои фиксни $i,j\in\{1,2,...,n-1\}$, равенките $[\overset{i}{a}\overset{n-i-1}{b}x]=b$ и $[y\overset{n-j-1}{b}\overset{j}{a}]=b$ се решливи во G.

4. Тернарна полугрупа $(G,[\,])$ е идемпотентна група ако и само ако ги задоволува идентитетите $[yxx]=[xxy]=y$.

5*. Покажи дека една n-полугрупа $(G,[\,])$ е n-група $(n\geq 3)$ ако и само ако постои $d\in G$, таков што за секои $a,b\in G$ и за некои фиксни $i,j\in\{1,2,...,n-1\}$, равенките $[\overset{i}{a}\overset{n-i-1}{b}x]=d$ и $[y\overset{n-j-1}{b}\overset{j}{a}]=b$ се решливи во G.

6. Покажи дека една n-полугрупа $(G,[\,])$ е n-група ($n \geq 3$) ако и само ако постои $d \in G$, таков што за секои $a,b \in G$, најмалку еден пар од следниве равенки се решливи во G:

   (а) $[a \overset{n-2}{b} x] = d$, $[y \overset{n-2}{b} a] = b$ (б) $[a \overset{n-2}{b} x] = d$, $[y \overset{n-1}{a}] = b$

   (в) $[\overset{n-1}{a} x] = d$, $[y \overset{n-2}{b} a] = b$ (г) $[\overset{n-1}{a} x] = d$, $[y \overset{n-1}{a}] = b$

7*. Покажи дека една n-полугрупа $(G,[\,])$ е n-група ($n \geq 3$) ако и само ако постои $d \in G$, таков што за секои $a,b \in G$ и за некои фиксни $i, j \in \{1,2,...,n-1\}$, равенките $[\overset{i}{a} \overset{n-i-1}{b} x] = b$ и $[y \overset{n-j-1}{b} \overset{j}{a}] = d$ се решливи во $(G,[\,])$.

8. Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа таква што за сите $a_1, a_2, ..., a_n, b \in G$, постојат единствени x_1 и x_n такви што $[x_1 a_2^m] = b$ и $[a_1^{m-1} x_m] = b$. Тогаш важат следните тврдења:

   а) Ако $[e_1^m] = e_m$ (или $[e_1^m] = e_1$), тогаш $[e_1^{m-1} x] = x$ ($[x e_2^m] = x$), за секој $x \in G$.

   б) Ако e_1^{m-1} е лева неутрална низа во $(G,[\,])$, тогаш таа е и десно неутрална низа. Важи и обратното.

   в) Ако e_1^{m-1} е лева и десна неутрална низа во $(G,[\,])$, тогаш таа е неутрална низа во $(G,[\,])$.

9. Една n-полугрупа $(G,[\,])$ се нарекува n-*моноид* ако и само ако постои најмалку една низа e_1^{n-1} над G таква што за секој $x \in G$ важат равенствата $[x e_1^{n-1}] = x = [e_{n-1} e_1^{n-2} x]$ (e_1^{n-1} е десна неутрална низа, а $e_{n-1} e_1^{n-2}$ е лева неутрална низа).

   Покажи дека:

   а) Ако $(G,[\,])$ е *семикомутативна* n-полугрупа (т.е. важи идентитетот $[x_1^n] = [x_n x_{n-1} ... x_1]$) со десна неутрална низа e_1^{n-1}, тогаш таа е n-моноид.

   б) Секоја n-група е n-моноид.

10. Ако $(G,[\,])$ е n-моноид, тогаш важат и равенствата $[e_1^{n-1} x] = x = [x e_{n-1} e_1^{n-2}]$.

11. На множеството $G = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ дефинираме тернарна операција $[\,]: G^3 \to G$ со:

$$[(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)] = (x_1 y_2 x_3, y_1 x_2 y_3).$$

   Провери дали $(G,[\,])$ е семикомутативен 3-моноид со десна неутрална низа $(1,1)(1,1)$.

12. На множеството $G = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ дефинираме тернарна операција $[\,]: G^3 \to G$ со:

$$[(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)] = (x_1 y_2 x_3, y_1 x_2 y_3).$$

   Провери дали $(G,[\,])$ е семикомутативен 3-моноид со две десни неутрални низи $(1,1)(1,1)$ и $(-1,-1)(-1,-1)$.

3.2. Некои својства на *n*-групи

Ќе разгледаме некои својства на n-групите во врска со покривките на n-група и во врска со неутралните елементи во n-група.

Теорема 2.1. *Ако* $(S,\cdot)$ *е покривка на* n*-групата* $(G,[\,])$, *тогаш* $(S,\cdot)$ *е група.*

Доказ. Нека $s,t\in S$. Тогаш $s=a_1...a_i$, $t=b_1...b_j$, каде што $a_1,...,a_i,b_1,...,b_j\in G$ и $1\le i\le j\le n-1$. Нека $c_1,...,c_{n-i-1}\in S$ се произволни елементи. Имајќи го предвид тоа што $(G,[\,])$ е n-група, добиваме дека постојат $d',d''\in G$ такви што

$$[d'c_1^{n-i-1}a_1^i]=b_j\,,\ [a_1^ic_1^{n-i-1}d'']=b_1\,.$$

Ако ставиме $y=b_1...b_{j-1}d'c_1...c_{n-i-1}$, $x=c_1...c_{n-i-1}d''b_2...b_j$, добиваме $sx=ys=t$, па $(S,\cdot)$ е асоцијативна квазигрупа, од што следува дека $(S,\cdot)$ е група. □

Од Теоремата 3.1 произлегуваат следните тврдења.

Последица 2.1. *Секоја* n*-група е кратлива* n*-полугрупа.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е n-група и нека $(S,\cdot)$ е покривка на $(G,[\,])$. Според Теоремата 2.1 $(S,\cdot)$ е група, па значи е и кратлива полугрупа. Тогаш од Својството 2.2 од Гл. I, следува дека $(G,[\,])$ е кратлива n-полугрупа. □

Својство 2.1. *Секоја покривка од една комутативна* n*-група е комутативна група.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е комутативна n-група, а $(S,\cdot)$ покривка на $(G,[\,])$. Тогаш од Теоремата 2.1 следува дека $(S,\cdot)$ е група. Нека $a,b\in G$ се произволни елементи. Од тоа што $(G,[\,])$ е n-група, следува дека постојат $a_1,...,a_n\in G$ такви што $a=[a_1...a_n]$. Бидејќи $(S,\cdot)$ е група, следува дека $a=[a_1...a_n]=a_1...a_n$. Користејќи ја комутативноста на $(G,[\,])$, добиваме дека

$$ab=(a_1...a_n)b=a_1(a_2...a_nb)=a_1(ba_2...a_n)=(a_1ba_2...a_{n-1})a_n=$$
$$=(ba_1...a_{n-1})a_n=b(a_1...a_{n-1}a_n)=ba\,,$$

од што, ако се има предвид дека G е генераторно множество за $(S,\cdot)$, добивме дека $(S,\cdot)$ е навистина комутативна група. □

Ќе наведеме пример од кој може да се види дека една комутативна n-полугрупа може да има и некомутативни покривки.

Пример 2.1. Нека $G=\{2k+1 \mid k\in\mathbf{N}\}$ е множеството од непарни броеви поголеми од 1. Дефинираме 5-арна операција $[\,]$ на G со $[x_1^5]=\sum_{i=1}^{5}x_i$. Според Посл. 2.1 (б) од Гл. I, следува дека $(G,[\,])$ е 5-полугрупа. Нека $(F,\cdot)$ е слободната полугрупа генерирана од G, а α е релацијата на F дефинирана во Теоремата 2.3 од Гл. I. Бидејќи $5 \neq [x_1^5],\ 7 \neq [x_1^5]$, за секои $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in G$, добиваме дека $57\ \alpha\ u \ \Rightarrow\ u = 57$, а исто така $u\ \alpha\ 57 \ \Rightarrow\ u = 57$. Оттука следува дека во покривката $S = F/_{\gamma}$ имаме $5 \cdot 7 \neq 7 \cdot 5$. (Во овој пример 57 е производот на 5 и 7 во слободната полугрупа F, а $5 \cdot 7$ во $(S,\cdot)$.)

Својство 2.2. *Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа и $m = k(n-1)+1$, каде што $k \geq 1$. Тогаш $(G,[\,])$ е n-група ако и само ако $(G,[\,])$ е m-група. Притоа, $(G,[\,])$ е комутативна n-група ако и само ако таа е комутативна m-група.*

Доказ. Од Посл. 2.1 (а) од Гл. I следува дека $(G,[\,])$ е m-полугрупа. Останува да се докаже дека за секои $a_1,\ldots,a_{m-1}, b \in G$, постојат $x, y \in G$ такви што $b = [a_1^{m-1}x] = [ya_1^{m-1}]$. За $k = 1$, имаме $m = n$. Затоа нека $k \geq 2$. Ако $a_1,\ldots,a_{m-1}, b \in G$ се произволни елементи и ако ставиме $[a_{n-1}^{m-1}] = a$, тогаш постојат елементи $x, y \in G$ такви што $[a_1^{n-2}ax] = b$ и $[ya_1^{n-2}a] = b$, т.е. $[a_1^{m-1}x] = [ya_1^{m-1}] = b$. Значи, $(G,[\,])$ е и m-група. Обратно, нека $(G,[\,])$ е m-група и нека $a_1,\ldots,a_{n-1}, b \in G$ се произволни елементи. Бидејќи $(G,[\,])$ е m-група, следува дека постојат $c_1,\ldots,c_m \in G$ такви што $a_{n-1} = [c_1^m]$. Нека $d = [c_1^n]$. Тогаш постојат $x, y \in G$ такви што

$$[a_1^{n-2}dc_{n+1}^m x] = [ya_1^{n-2}dc_{n+1}^m] = b,$$

т.е. $[a_1^{n-1}x] = [ya_1^{n-1}] = b$. Според тоа, $(G,[\,])$ е n-група.

Натаму, ако $(S,\cdot)$ е покривка на n-групата $(G,[\,])$, таа ќе биде покривка и на m-групата $(G,[\,])$, па заклучокот за комутативноста ќе следува од Св. 3.1. □

Во [33] е докажан и следниот резултат.

Теорема 2.2. *Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа. $(G,[\,])$ е n-група ако и само ако постои покривка $(S,\cdot)$ на $(G,[\,])$ што е група.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е n-група. Бидејќи $(G,[\,])$ е n-полугрупа, според Теорема-та 2.3 од Гл. I, следува дека постои полугрупа $(S,\cdot)$ што е покривка на $(G,[\,])$, а од Теоремата 2.1 следува дека $(S,\cdot)$ е група.

Обратно, нека $(S,\cdot)$ е група што е покривка на n-полугрупата $(G,[\,])$ и нека $a_1,\ldots,a_{n-1}, b \in G$ се призволни елементи. Бидејќи $(S,\cdot)$ е група имаме дека $x = (a_1 \ldots a_{n-1})^{-1} b,\ y = b(a_1 \ldots a_{n-1})^{-1} \in S$. Освен тоа, G е генераторно множество за $(S,\cdot)$, па постојат елементи $c_1,\ldots,c_p \in G$ такви што $(a_1 \ldots a_{n-1})^{-1} = c_1 \ldots c_p$. Користејќи го ова, добиваме дека

$$x=\left(a_1...a_{n-1}\right)^{-1}b=\left(a_1...a_{n-1}\right)^{n-2}\left(\left(a_1...a_{n-1}\right)^{-1}\right)^{n-1}b=\left(a_1...a_{n-1}\right)^{n-2}\left(c_1...c_p\right)^{n-1}b,$$

$$y=b\left(a_1...a_{n-1}\right)^{-1}=b\left(a_1...a_{n-1}\right)^{n-2}\left(\left(a_1...a_{n-1}\right)^{-1}\right)^{n-1}=b\left(a_1...a_{n-1}\right)^{n-2}\left(c_1...c_p\right)^{n-1}.$$

Така x, односно y, е призвод од r елементи од G, каде што

$$r=(n-1)(n-2)+p(n-1)+1=(n+p-2)(n-1)+1,$$

па x и y може да се претстават како производи што се определени во n-полугрупата $(G,[\,])$, т.е. $x,y\in G$ и

$$[a_1^{n-1}x]=a_1...a_{n-1}x=a_1...a_{n-1}\left(a_1...a_{n-1}\right)^{-1}b=b,$$

$$[ya_1^{n-1}]=ya_1...a_{n-1}=b\left(a_1...a_{n-1}\right)^{-1}a_1...a_{n-1}=b.$$

Значи, за секои $a_1,...,a_{n-1},b\in G$, постојат елементи $x,y\in G$ такви што $[a_1^{n-1}x]=[ya_1^{n-1}]=b$. Според тоа $(G,[\,])$ е n-група. □

Следната последица ја добиваме како специјален случај на Теоремата 2.2.

Последица 2.3. *Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа. Тогаш $(G,[\,])$ е n-група ако и само ако слободната покривка F на $(G,[\,])$ е група.* □

Освен тоа важи и следното тврдење:

Последица 2.4. *Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа. Ако постои покривка $(S,\cdot)$ на $(G,[\,])$ што е група, тогаш секоја покривка на $(G,[\,])$ е група.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа и нека S е покривка на $(G,[\,])$ што е група. Тогаш според Теоремата 2.2 $(G,[\,])$ е n-група, а според Теоремата 2.1 секоја покривка на $(G,[\,])$ е група. □

Теорема 2.3. *n-групоидот $(G,[\,])$ е асоцијативна n-квазигрупа ако и само ако е n-група.*

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е асоцијативна n-квазигрупа. Јасно, тогаш $(G,[\,])$ е n-полугрупа. Ако во дефиницијата за n-квазигрупа земеме $i=1$ и $i=n$ добиваме дека за секои $a_1,...,a_n\in G$ постојат $x,y\in G$ такви што $[a_1^{n-1}x]=[ya_1^{n-1}]=a_n$. Тоа значи дека $(G,[\,])$ е n-група. Обратно, нека $(G,[\,])$ е n-група. Јасно, $[\,]$ е асоцијативна операција. Нека $(S,\cdot)$ е покривка на $(G,[\,])$. Тогаш според Теоремата 2.1 $(S,\cdot)$ е група. Нека $a_1,...,a_n\in G$ и $i\in\{1,2,...,n\}$ се призволни елементи. Бидејќи $(S,\cdot)$ е група имаме дека $x=\left(a_1...a_{i-1}\right)^{-1}a_i\left(a_{i+1}...a_n\right)^{-1}\in S$. Освен тоа, G е генераторно множество за $(S,\cdot)$, па постојат елементи $c_1,...,c_p\in G$ такви што $\left(a_1...a_{i-1}\right)^{-1}=c_1...c_k$ и $\left(a_{i+1}...a_n\right)^{-1}=c_{k+1}...c_p$, каде што $1\le k<p$. Користејќи го тоа

се добива дека

$$x=\left(a_1...a_{i-1}\right)^{-1}a_i\left(a_{i+1}...a_n\right)^{-1}=\left(a_1...a_{i-1}\right)^{n-2}\left(\left(a_1...a_{i-1}\right)^{-1}\right)^{n-1}a_i\left(\left(a_{i+1}...a_n\right)^{-1}\right)^{n-1}\left(a_{i+1}...a_n\right)^{n-2}$$

$$=\left(a_1...a_{i-1}\right)^{n-2}\left(\left(a_1...a_{i-1}\right)^{-1}\right)^{n-1}a_i\left(\left(a_{i+1}...a_n\right)^{-1}\right)^{n-1}\left(a_{i+1}...a_n\right)^{n-2}=$$

$$=\left(a_1...a_{i-1}\right)^{n-2}\left(c_1...c_k\right)^{n-1}a_i\left(c_{k+1}...c_p\right)^{n-1}\left(a_{i+1}...a_n\right)^{n-2}.$$

Така, x е призвод од r елементи од G, каде што

$$r=(i-1)(n-2)+k(n-1)+1+(p-k)(n-1)+(n-i)(n-2)=$$

$$=(i-1+n-i)(n-2)+(k+p-k)(n-1)+1=(n-1)(n-2)+$$

$$+p(n-1)+1=(p+n-2)(n-1)+1.$$

Значи, x може да се претстави како производ што е определен во n-групата $(G,[\,])$, т.е. $x\in G$ и

$$[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=a_1...a_{i-1}xa_{i+1}...a_n=a_1...a_{i-1}\left(a_1...a_{i-1}\right)^{-1}a_i\left(a_{i+1}...a_n\right)^{-1}a_{i+1}...a_n=a_i.$$

Нека $y\in G$ и $[a_1^{i-1}ya_{i+1}^n]=a_i$. Тогаш $a_1...a_{i-1}ya_{i+1}...a_n=a_i$. Бидејḱи $(S,\cdot)$ е група, важи дека $y=(a_1...a_{i-1})^{-1}a_i(a_{i+1}...a_n)^{-1}=x$. Според тоа, за секои $a_1,...,a_n\in G$ и секој $i\in\{1,2,...,n\}$, постои единствен елемент $x\in G$ таков што $[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=a_i$, па $(G,[\,])$ е асоцијативна n-квазигрупа. □

Докажавме дека n-полугрупата $(G,[\,])$ е n-група ако и само ако за секои $a_1,a_2,...,a_n\in G$ и за секој $i\in\{1,2,...,n\}$ постои единствен елемент $x\in G$ што го задоволува равенството $[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=a_i$. Уште повеḱе, со користење на Посл.2.3 во [33] е докажано дека важи и следната

Теорема 2.4. *n-полугрупата $(G,[\,])$ е n-група ($n\geq 3$) ако и само ако постои фиксен број $k\in\{2,...,n-1\}$ таков што за секои $a_1,a_2,...,a_n\in G$, постои $x\in G$ што го задоволува равенството $[a_1^{k-1}xa_{k+1}^n]=a_k$.*

Доказ. Ако $(G,[\,])$ е n-група, тогаш тврдењето следува од Теоремата 2.3. Обратно, нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа и нека $k\in\{2,...,n-1\}$ е фиксен број таков што за секои $u_1,...,u_n\in G$, постои $w\in G$ што го задоволува равенството $[u_1^{k-1}wu_{k+1}^n]=u_k$. Користејḱи ја Последицата 2.3 доволно е да докажеме дека слободната покривка $(S,\cdot)$ на $(G,[\,])$ е група.

Нека $a,b\in S$ се произволни елементи. Тогаш $a=a_1...a_i$, $b=b_1...b_j$, каде што $a_1,...,a_i,b_1,...,b_j\in G$. Нека $c_{i+1},...,c_{2n-2}\in G$ се произволно избрани елементи. Од претпоставката следува дека постои $x_k\in G$ што ја задоволува равенката

$$[[a_1^ic_{i+1}^n]c_{n+1}^{n+k-2}x_kc_{n+k-1}^{2n-2}]=b_1$$

и $y_k\in G$ што ја задоволува равенката

$$[c_{i+1}^{i+k-1} y_k c_{i+k}^{n+i-2} [c_{n+i-1}^{2n-2} a_1^i]] = b_j .$$

Ставајќи $x = c_{i+1}...c_{n+k-2} x_k c_{n+k-1}...c_{2n-2} b_2...b_j \in S$ добиваме

$$ax = a_1...a_i c_{i+1}...c_{n+k-2} x_k c_{n+k-1}...c_{2n-2} b_2...b_j = b_1 b_2...b_j = b ,$$

а ставајќи $y = b_1...b_{j-1} c_{i+1}...c_{i+k-1} y_k c_{i+k}...c_{2n-2} \in S$ добиваме

$$ya = b_1...b_{j-1} c_{i+1}...c_{i+k-1} y_k c_{i+k}...c_{2n-2} a_1...a_i = b_1...b_{j-1} b_j = b .$$

Значи, постојат $x, y \in S$ такви што $ax = ya = b$, т.е. $(S,\cdot)$ е асоцијативна квазигрупа, па $(S,\cdot)$ е група. Сега од Последицата 2.3 следува дека $(G,[\,])$ е n-група. □

Резултатите од Св. 2.2, Посл. 2.3, Св. 2.1 и Теоремата 2.4 може да се преформулираат во следната:

Теорема 2.5. *Нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа. Следните тврдења се еквивалентни:*

(*а*) *$(G,[\,])$ е n-група.*

(*б*) *$(G,[\,])$ е $k(n-1)+1$-група за секој $k \in \mathbf{N}$.*

(*в*) *Слободната покривка на $(G,[\,])$ е група.*

(*г*) *Постои покривка на $(G,[\,])$ што е група.*

Ако $n \geq 3$:

(*д*) *Постои фиксен број $k \in \{2,...,n-1\}$ таков што за секои $a_1, a_2,..., a_n \in G$ постои $x \in G$ што го задоволува равенството $[a_1^{k-1} x a_{k+1}^n] = a_k$.* □

Овие карактеризации на поимот n-група може да се разгледуваат како други дефиниции за тој поим, еквивалентни на деф. 2.

Следната теорема претставува уште една карактеризација на поимот n-група изложена во [33].

Теорема 2.6. *Една n-полугрупа $(G,[\,])$ е n-група ($n \geq 3$) ако и само ако постои фиксен број $k \in \{1,2,...,n-2\}$ таков што за секои $x_1,...,x_k \in G$, постојат $x_{k+1},...,x_{n-1} \in G$, такви што секој $y \in G$ ги задоволува равенствата*

$$[x_1^{n-1} y] = [y x_{k+1}^{n-1} x_1^k] = y .$$

Доказ. Нека $(G,[\,])$ е n-група и нека $k \in \{1,2,...,n-2\}$ е фиксен. Според Последицата 2.3, слободната покривка $(S,\cdot)$ на $(G,[\,])$ е група. Нека e е единицата во $(S,\cdot)$ и нека $x_1,...,x_k \in G$ се произволно избрани елементи. Тогаш, $x_1...x_k (x_1...x_k)^{-1} = e$ во $(S,\cdot)$ и $(x_1...x_k)^{-1} \in G^i$, за некој $i \in \{1,2,...,n-1\}$. Во доказот на Својството 2.2 од Гл. I видовме дека $e \in G^{n-1}$, па $(x_1...x_k)^{-1} \in G^{n-k-1}$. Ова значи дека постојат елементи $x_{k+1},...,x_{n-1} \in G$ такви што $(x_1...x_k)^{-1} = x_{k+1}...x_{n-1}$. Според тоа,

$$x_1...x_k x_{k+1}...x_{n-1} = x_{k+1}...x_{n-1}x_1...x_k = e.$$

Очигледно е дека низите x_1^{n-1} и $x_{k+1}^{n-1}x_1^k$ се 1-неутрални и n-неутрални, па секој $y \in G$ го задоволува равенството $[x_1^{n-1}y] = [yx_{k+1}^{n-1}x_1^{k-1}] = y$.

Обратно, нека $(G,[\,])$ е n-полугрупа и нека $k \in \{1,...,n-2\}$ е фиксен број таков што за секои $x_1,...,x_k \in G$, постојат $x_{k+1},...,x_{n-1} \in G$ такви што секој $y \in G$ го задоволува равенството $[x_1^{n-1}y] = [yx_{k+1}^{n-1}x_1^k] = y$. Тогаш x_1^{n-1} е 1-неутрална, а $x_{k+1}^{n-1}x_1^k$ е n-неутрална низа во $(G,[\,])$. Нека $(S,\cdot)$ е слободната покривка на $(G,[\,])$. Според доказот на Својството 2.2 од Гл. I, елементот $e_1 = x_1...x_{n-1}$ е лева единица во $(S,\cdot)$, а $e_2 = x_{k+1}...x_{n-1}x_1...x_k$ е десна единица во $(S,\cdot)$, па $e_1 = e_2 = e$ е единицата во S.

Нека $a = a_1...a_i \in S$ е произволен елемент. Ако $i = k$, тогаш од претпоставката следува дека постојат $a_{k+1},...,a_{n-1} \in G$ такви што $a_1...a_k a_{k+1}...a_{n-1} = a_{k+1}...a_{n-1}a_1...a_k = e$, па $a' = a_{k+1}...a_{n-1} \in S$ е инверзен елемент на a. Ако $i < k$, тогаш избираме елементи $c_{i+1},...,c_k \in G$, па од претпоставката следува дека постојат $a_{k+1},...,a_{n-1}, a'_{k+1},...,a'_{n-1} \in G$ такви што

$$a_1...a_i c_{i+1}...c_k a_{k+1}...a_{n-1} = c_{i+1}...c_k a'_{k+1}...a'_{n-1}a_1...a_i = e.$$

Значи $a' = c_{i+1}...c_k a_{k+1}...a_{n-1} \in S$ е инверзен елемент на a. Ако $i > k$, тогаш избираме елементи $c_1,...,c_{n-i} \in G$ и ставаме $c = [c_1^{n-i}a_1^i]$. Од претходните два случаи имаме дека постои инверзен елемент $a'_1...a'_{n-2}$ на c, па $a' = a'_1...a'_{n-2}c_1...c_{n-i} \in S$ е инверзен елемент на a.

Според тоа, слободната покривка $(S,\cdot)$ на $(G,[\,])$ е група, па од Посл. 2.3 следува дека $(G,[\,])$ е n-група. □

3.3. Неутрални и коси елементи во *n*-групи. Постова теорема

Секоја група има неутрален елемент (единица) и тоа единствен. Тоа не е случај кај *n*-арните групи за $n > 2$. За секој $n \geq 3$, постојат n-групи што немаат единица или што имаат повеќе од една единица. Мошне интересно е тоа што *n*-групите коишто имаат неутрален елемент се редуцирливи. Нередуцирливите *n*-групи немаат неутрален елемент. Множеството од сите неутрални елементи од дадена *n*-група (ако не е празно) формира *n*-арна подгрупа од дадената *n*-група.

Во овој раздел ќе наведеме и неколку својства во врска со неутралните елементи во n-група, но и ќе го воведеме поимот кос елемент во n-група и ќе разгледаме некои својства што се однесуваат на косите елементи во n-група.

Покрај тоа, ќе ја покажеме и теоремата на Пост за постоење на покривачка група за дадена n-група.

Својство 3.1. *За* $n \geq 3$ *постои* n*-група* $(G;[\ ])$ *во која секој* $a \in G$ *е неутрален елемент.*

Доказ. Нека $(G;\cdot)$ е Клајновата група и нека $[\,]$ е тернарна операција на G дефинирана со $[xyz] = x \cdot y \cdot z$, за секои $x, y, z \in \{1,2,3,4\}$. Тогаш за секои $a, x \in G$ важи $[xaa] = [axa] = [aax] = x$.

Ќе дадеме пример на n-група во која секој елемент е неутрален елемент.

Нека $G = \{0,1,...,n-2\}$. Дефинираме n-арна операција $[\,]$ на G со $[x_1^n] = \sum_1^n x_i\left(\mathrm{mod}(n-1)\right)$, (остатокот при делењето на збирот на $x_1, x_2, ..., x_n$ со $n-1$). Јасно е дека $(G,[\,])$ е n-групоид. Нека $x_1, x_2, ..., x_{2n-1} \in G$ и $i, j \in \{1,2,...,n\}$ се произволни елементи. Користејќи ја асоцијативноста на $(\mathbf{Z},+)$ имаме:

$$\sum_{k=1}^{i-1} x_k + \sum_{k=i}^{i+n-1} x_k + \sum_{k=i+n}^{2n-1} x_k = \sum_{k=1}^{j-1} x_k + \sum_{k=j}^{j+n-1} x_k + \sum_{k=j+n}^{2n-1} x_k .$$

Бидејќи $u \equiv v\left(\mathrm{mod}\, m\right) \Leftrightarrow a+u+b \equiv a+v+b\left(\mathrm{mod}\, m\right)$, добиваме дека

$$[x_1^{i-1}[x_i^{i+n-1}]x_{i+n}^{2n-1}] = \left(\sum_{k=1}^{i-1} x_k + \left(\sum_{k=i}^{i+n-1} x_k\left(\mathrm{mod}(n-1)\right)\right) + \sum_{k=i+n}^{2n-1} x_k\right)\left(\mathrm{mod}(n-1)\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{i-1} x_k + \sum_{k=i}^{i+n-1} x_k + \sum_{k=i+n}^{2n-1} x_k\right)\left(\mathrm{mod}(n-1)\right) = \left(\sum_{k=1}^{j-1} x_k + \sum_{k=j}^{j+n-1} x_k + \sum_{k=j+n}^{2n-1} x_k\right)\left(\mathrm{mod}(n-1)\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{j-1} x_k + \left(\sum_{k=j}^{j+n-1} x_k\left(\mathrm{mod}(n-1)\right)\right) + \sum_{k=j+n}^{2n-1} x_k\right)\left(\mathrm{mod}(n-1)\right) = [x_1^{j-1}[x_j^{j+n-1}]x_{j+n}^{2n-1}] .$$

Според тоа, $(G,[\,])$ е n-полугрупа.

Нека $x = y = \left(x_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\left(\mathrm{mod}(n-1)\right)$ е остатокот при делењето на бројот $x_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ со $n-1$. Тогаш имаме дека $x, y \in G$ и $[x_1^{n-1}x] = [yx_1^{n-1}] = x_n$, па $(G,[\,])$ е n-група. Исто така, $[\overset{i-1}{x_1}\, x_2\, \overset{n-i}{x_1}] = \left(x_2 + (n-1)x_1\right)\left(\mathrm{mod}(n-1)\right) = x_2\left(\mathrm{mod}(n-1)\right) = x_2$. Според тоа, $(G,[\,])$ е n-група во која секој елемент е неутрален. □

Својство 3.2. *За* $n \geq 3$ *постои* n*-група која нема неутрален елемент.*

Доказ. Нека $(\{1,2,3,4\};\cdot)$ е 3-групата од примерот 1.1. Тогаш за секои $a, x \in G$ важи

$$[axa] = a \cdot \varphi(x) \cdot a \cdot 2 = a \cdot a \cdot \varphi(x) \cdot 2 = 1 \cdot \varphi(x) \cdot 2 = \varphi(x) \cdot 2 ,$$

односно, за секои $a, x \in G$, важи равенството $[axa] = \varphi(x) \cdot 2$. Оттука, за $x = 1$ и за секој $a \in G$, добиваме дека $[a1a] = 2(\neq 1)$. □

Еве уште еден пример на n-група што нема неутрален елемент.

Пример 3.1. Нека $(\mathbf{Z},+)$ е адитивната група на целите броеви и нека t е позитивен цел број што не е делив со $n-1$. Дефинираме n-арна операција $[\,]$ на $\mathbf{Z}$ со $[x_1^n] = \sum_1^n x_i + t$. Јасно е дека $(\mathbf{Z},[\,])$ е n-групоид. Нека $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1} \in \mathbf{Z}$ и $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$ се произволни елементи. Тогаш, од асоцијативноста и комутативноста на $\mathbf{Z}$ имаме дека

$$[x_1^{i-1}[x_i^{i+n-1}]x_{i+n}^{2n-1}] = \sum_{k=1}^{i-1} x_k + \sum_{k=i}^{i+n-1} x_k + t + \sum_{k=i+n}^{2n-1} x_k + t =$$
$$= \sum_{k=j}^{j-1} x_k + \sum_{k=j}^{j+n-1} x_k + t + \sum_{k=j+n}^{2n-1} x_k + t = [x_1^{j-1}[x_j^{j+n-1}]x_{j+n}^{2n-1}].$$

Значи, $(\mathbf{Z},[\,])$ е n-полугрупа. Потоа, за $x = y = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i - t$, имаме дека $[x_1^{n-1}x] = [yx_1^{n-1}] = x_n$, па, според тоа, $(\mathbf{Z},[\,])$ е n-група. Да претпоставиме дека $(\mathbf{Z},[\,])$ има единица e. Тогаш $[x\overset{n-1}{e}] = x \iff x + (n-1)e + t = x \iff t = -(n-1)e$, но тогаш бројот t е делив со $n-1$, што противречи на претпоставката дека t не е делив со $n-1$. Според тоа $(\mathbf{Z},[\,])$ е n-група што нема единица.

Забелешка. Прашањето за придружување на единица на n-група без единица има смисла. Тоа прашање е разгледано во [10]. Одговорот на ова прашање ќе го разгледаме во следниот параграф. Имено, на n-група без единица не може да ѝ се придружи единица.

Нека $(G,[\,])$ е n-квазигрупа (која не мора да е n-група). Решението на равенката $[\overset{i-1}{a}\, x\, \overset{n-i}{a}] = a$ се нарекува i-*ти кос елемент* за a и се означува со $\bar{a}^{(i)}$. Значи, $[\overset{i-1}{a}\,\bar{a}^{(i)}\,\overset{n-i}{a}] = a$. Ако ова равенство важи за секој $i = 1,2,\dots,n$, тогаш $\bar{a}^{(i)}$ се нарекува *кос елемент* за a и се означува со $\bar{a}$.

Секој i-ти кос елемент во n-група е кос, т.е. $\bar{a}^{(i)} = \bar{a}$ за секој $i = 1,2,\dots,n$. Имено, ќе покажеме дека $\bar{a}^{(i)} = \bar{a}^{(n)}$ за секој $i = 1,2,\dots,n$. Од дефиницијата на i-ти кос елемент имаме дека $[\overset{n-1}{a}\,\bar{a}^{(n)}] = a$, па $[[\overset{n-1}{a}\,\bar{a}^{(n)}]\overset{n-1}{a}] = [a\overset{n-1}{a}] = [\overset{n}{a}]$, од каде што, заради асоцојативниот закон, имаме дека $[\overset{n-i}{a}[\overset{i-1}{a}\,\bar{a}^{(n)}\,\overset{n-i}{a}]\overset{i-1}{a}] = [\overset{n}{a}]$ или $[\overset{n-i}{a}[\overset{i-1}{a}\,\bar{a}^{(n)}\,\overset{n-i}{a}]\overset{i-1}{a}] = [\overset{n-i}{a}\,a\,\overset{i-1}{a}]$. Според тоа, $[\overset{i-1}{a}\,\bar{a}^{(n)}\,\overset{n-i}{a}] = a$, од што следува дека $\bar{a}^{(i)} = \bar{a}^{(n)}$.

Лема 3.1. *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-квазигрупа. Ако* $\bar{a}$ *е кос елемент за* a*, тогаш*

$$[x\,\overset{i-2}{a}\,\bar{a}\,\overset{n-i}{a}\,] = [\,\overset{n-i}{a}\,\bar{a}\,\overset{i-2}{a}\,x] = x,$$

за секој $x \in G$ *и* $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказ. Да претпоставиме дека $[x\,\overset{i-2}{a}\,\bar{a}\,\overset{n-i}{a}\,] = x'$. Тогаш $[[x\,\overset{i-2}{a}\,\bar{a}\,\overset{n-i}{a}\,]\,\overset{n-1}{a}\,] = [x'\,\overset{n-1}{a}\,]$. Применувајќи го асоцијативниот закон добиваме:

$$[x[\,\overset{i-2}{a}\,\bar{a}\,\overset{n-i+1}{a}\,]\,\overset{n-2}{a}\,] = [x'\,\overset{n-1}{a}\,], \text{ т.е. } [xa\,\overset{n-2}{a}\,] = [x'\,\overset{n-1}{a}\,],$$

од каде што имаме дека $[x\,\overset{n-1}{a}\,] = [x'\,\overset{n-1}{a}\,]$, т.е. $x = x'$. Аналогно се покажува и второто равенство. □

Со помош на поимот кос елемент може да се воведе уште една дефиниција на n-група.

Една n-полугрупа $(G,[\,])$, $n \geq 3$, се нарекува n-*група* ако за секои $x, y \in G$, постои елемент $x' \in G$ за кој важат равенствата

$$\begin{aligned} [x'\,\overset{n-2}{x}\,y] &= [y\,\overset{n-2}{x}\,x'] \\ [xx'\,\overset{n-3}{x}\,y] &= [y\,\overset{n-3}{x}\,x'x] \end{aligned} \tag{1.1}$$

Својство 3.2. *Горната дефиниција на* n*-група и дефиницијата на Дернте на* n*-група, се еквивалнтни.*

Доказ. Ако $(G,[\,])$ е n-група во смисла на Дернтеовата дефиниција, тогаш x' од равенките (1.1) е кос елемент за x, зашто ако ставиме $y = x$, ќе добиеме $[x'\,\overset{n-1}{x}\,] = x$. Равенствата (1.1) следуваат од Лемата 3.1, за $i = n, n-1$.

Ќе покажеме дека од последната дефиниција на n-група, следува Дернтеовата дефиницијата на n-група. Доволно е да покажеме дека равенката $[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n] = b$ има единствено решение за секои $a_1^n \in G^n$, $b \in G$ и за секој $i = 1, 2, \dots, n$. Ќе ги разгледаме низите

$$C = \overline{a_{i-1}}\,\overset{n-3}{a_{i-1}}\,\overline{a_{i-2}}\,\overset{n-3}{a_{i-2}} \dots \overline{a_2}\,\overset{n-3}{a_2}\,\overline{a_1}\,\overset{n-3}{a_1}\,,$$

$$D = \overset{n-3}{a_n}\,\overline{a_n}\,\overset{n-3}{a_{n-1}}\,\overline{a_{n-1}} \dots \overset{n-3}{a_{i+2}}\,\overline{a_{i+2}}\,\overset{n-3}{a_{i+1}}\,\overline{a_{i+1}}\,.$$

Да забележиме дека низата C има должина $(i-1)(n-2)$, а низата D има должина $(n-i)(n-2)$. Ако претпоставиме дека постои решение на равенката $[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n] = b$, тогаш добиваме

$$[C[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]D] = [CbD]. \tag{1.2}$$

Двете страни на последнава равенка имаат смисла, зашто, на пример, низата CbD има должина $(i-1)(n-2)+1+(n-i)(n-2) = (n-2)(n-1)+1$, т.е. $[CbD]$ е продолжен производ. Ќе ја трансформираме левата страна на равенството (1.2) со помош на равенствата (1.1):

$$w = [C[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]D] = [C\,a_1^{i-1}xa_{i+1}^nD] = [\underbrace{\overline{a_{i-1}}\,\overset{n-3}{a_{i-1}}\,\overline{a_{i-2}}\,\overset{n-3}{a_{i-2}} \dots \overline{a_2}\,\overset{n-3}{a_2}}_{C'}\,\overline{a_1}\,\overset{n-3}{a_1}\,a_1a_2^{i-1}xa_{i+1}^nD] =$$

$$= [C'[\overline{a_1}\,\overset{n-2}{a_1}\,a_2]a_3^{i-1}xa_{i+1}^nD] = [\underbrace{\overline{a_{i-1}}\,\overset{n-3}{a_{i-1}}\,\overline{a_{i-2}}\,\overset{n-3}{a_{i-2}} \dots}_{C''}\,\overline{a_2}\,\overset{n-3}{a_2}\,a_2a_3^{i-1}xa_{i+1}^nD] =$$

$$=[C''[\overline{a_2}\,\overset{n-2}{a_2}\,a_3]a_4^{i-1}xa_{i+1}^nD]=[C''a_3a_4^{i-1}xa_{i+1}^nD]=\ldots=$$
$$=[\overline{a_{i-1}}\,\overset{n-3}{a_{i-1}}\,\overline{a_{i-1}}\,xa_{i+1}^nD]=[[\overline{a_{i-1}}\,\overset{n-2}{a_{i-1}}\,x]a_{i+1}^nD]$$

Постапувајќи за D слично како за C, по неколку чекори добиваме дека
$$w=[xa_{i+1}\,\overset{n-3}{a_{i+1}}\,\overline{a_{i+1}}]=[x\,\overset{n-2}{a_{i+1}}\,\overline{a_{i+1}}]=x\,.$$
Според тоа, $x=[CbD]$.

Ќе провериме дали елементот x, определен со равенството $x=[CbD]$, ја задоволува равенката $[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=b$. Од равенките (1.1) имаме дека
$$[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=[a_1^{i-1}[CbD]a_{i+1}^n]=[a_1^{i-2}a_{i-1}[\overline{a_{i-1}}\,\overset{n-3}{a_{i-1}}\,C_1bD]a_{i+1}^n]=$$
$$=[a_1^{i-2}[a_{i-1}\overline{a_{i-1}}\,\overset{n-3}{a_{i-1}}\,\overline{a_{i-2}}\,C_2bD]a_{i+1}^n]=[a_1^{i-2}[a_{i-1}\overline{a_{i-1}}\,\overset{n-3}{a_{i-1}}\,\overline{a_{i-2}}]C_2bD\,a_{i+1}^n].$$

Применувајќи ги равенките (1.1) се добива дека
$$[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=[a_1^{i-2}\overline{a_{i-2}}\,C_2bDa_{i+1}^n],$$
а продолжувајќи на ист начин, се доаѓа до
$$[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=[bDa_{i+1}^n]\,.$$
Но, $[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=[bD_1\overline{a_{i+2}}\,\overset{n-3}{a_{i+1}}\,\overline{a_{i+1}}\,a_{i+1}a_{i+2}^n]=[bD_1[\overline{a_{i+2}}\,\overset{n-3}{a_{i+1}}\,\overline{a_{i+1}}\,a_{i+1}]a_{i+2}^n]=[bD_1\overline{a_{i+2}}\,a_{i+2}^n]$.
Прололжувајќи натаму, на крајот добиваме дека
$$[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=[b\,\overset{n-3}{a_n}\,\overline{a_n}a_n]=b\,.$$
Според тоа, равенката $[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=b$ има решение и тоа решение е единствено.

Теорема 3.1. *Класата $\mathcal{V}$ од сите n-групи е многуобразие, т.е. таа е затворена во однос на подалгебри, хомоморфни слики и директни производи.*

Доказ. Ова е јасно ако една n-група ја дефинираме како n-полугрупа $(G,[\ ],^{-})$ така што
$$\left[\overline{x}\,\overset{n-2}{x}\,y\right]=\left[y\overline{x}\,\overset{n-2}{x}\right]=\left[\overset{n-2}{x}\,\overline{x}\,y\right]=\left[y\,\overset{n-2}{x}\,\overline{x}\right],$$
за секои $x,y\in G$. Да забележиме дека на множеството G се дефинирани една n-арна и една унарна операција. □

Како што порано беше спомнато, ако $(G,\cdot)$ е бинарна група, тогаш $(G,[\,])$, каде што n-арната операција $[\,]$ е дефинирана со $[x_1^n]=x_1x_2\ldots x_n$, е n-група. Подолу ќе ги наведеме потребните и доволните услови за една n-група да биде изведена од бинарна.

Во врска со изложеното погоре, се поставува следното прашање. Можно ли е n-групата $(G,[\,])$ да се смести (т.е. да се вложи) во поширока n-група $(G',[\,])$ таква што $(G',[\,])$ да биде изведена од некоја бинарна група? Тоа прашање е еквивалентно со следното. За бинарната група $(G',\cdot)$ велиме дека е *покривка* (т.е. *покривачка група*) за n-групата $(G,[\,])$ ако: 1) G е множество генератори за $(G',\cdot)$; 2) $[x_1^n]=x_1x_2\ldots x_n$ за кои било $x_1^n\in G^n$.

Според тоа, поставеното прашање може да се преформулира: Дали постои покривачка група за (која било) дадена n-група? Позитивен одговор дава теоремата на Пост.

Теорема 3.2. (Е. Пост) *За секоја* n*-група постои покривачка група.*

Претходно ќе покажеме неколку својства на продолжените производи. За поедноставување на записите на низите од елементи од G ќе ги означуваме со големите букви од латиницата: $A = a_1^m$, $B = b_1^p$, итн. Под AB се подразбира низата $a_1^m b_1^p$. Да го означиме со G_0 множеството од сите низи што содржат $k(n-1)+1$ $(k \geq 1)$ елементи. Ако $A \in G_0$, тогаш $[A]$ е соодветниот продолжен производ на низата A. Да напоменеме дека со $|A|$ се означува должината на низата A.

Важат следните својства на продолжените производи.

1) Нека $a \in G$. Равенките

$$[Ax] = a, \quad [yA] = a \tag{3.1}$$

имаат единствени решенија. Очигледно, овде $|A| = k(n-1)$ за некој k, $k \geq 1$. Точноста на тврдењето следува од тоа што равенките (3.1) имаат решенија во изведената m-група $(G,[\,]')$ од n-групата $(G,[\,])$, каде што $[x_1^m]' = [x_1^m]$ и $m = k(n-1)+1$.

2) Ако $a, b \in G$, тогаш постојат низи C и D, такви што $[Ca] = b$, $[aD] = b$. Навистина, решавајќи ја равенката $[xa_2^{m-1}a] = b$ во некоја m-група каде што $m = k(n-1)+1$, ќе најдеме дека $x = c$. Следствено, $C = ca_2^{m-1}$.

3) Нека низата A го задоволува равенството $\left[Aa\right] = a$ или $\left[aA\right] = a$, за некој a. Тогаш:

$$(\forall x \in Q) \ [xA] = [Ax] = x. \tag{3.2}$$

Низата A, којашто го задоволува равенството (3.2) за кој било $x \in G$, всушност е лево и десно неутрална низа. Неа ќе ја наречеме *единична*, а множеството од сите такви низи ќе го означиме со E_G. Очигледно, празната низа 0 е исто така единична. Да забележиме дека, ако $A \in E_G$, тогаш $|A| = k(n-1)$ за некој природен број k.

Ќе покажеме дека за секој $x \in G$ важат равенствата (3.2). Нека е даден елемент $a \in G$. Според својството 2), постои најмалку една низа A, таква што $[Aa] = a$. Нека x е кој било елемент од G. Пак според 2), постои низа F, таква што $x = [aF]$. Следствено, $[Ax] = [A[aF]] = [[Aa]F] = [aF] = x.$

Нека $[xA] = x'$. Да го претставиме A во вид yA'. Тогаш:

$$[x'A] = [[xA]A] = [[xA][yA']] = [x[Ay]A'] = [xyA'] = [xyA'] = [xA].$$

Но, од равенството $[x'A] = [xA]$, следува дека $x' = x$, т.е. $[xA] = x$.

4) Нека P, C се две низи, такви што $RS \in G_0$. Ако $A \in E_G$, тогаш, очигледно, и $RAS \in G_0$. Во тој случај

$$[RAS] = [RS]. \tag{3.3}$$

За да го докажеме (3.3), да претпоставиме прво дека $S \neq 0$. Нека $S = aS'$. Тогаш $[RAS] = [RAaS'] = [R[Aa]S'] = [RaS'] = [RS]$.

Нека $S = 0$. Да го претставиме R во вид $R'a$. Тогаш

$$[RA] = [R'aA] = R'[aA]] = [R'a] = [R]. \qquad (3.4)$$

Со тоа, равенството (3.3) е покажано.

Последица 3.1. *Ако* $P \in G_0$ *и* $A \in E_G$, *тогаш*

$$[PA] = [AP] = [P]. \qquad (3.5)$$

Навистина, доволно е во (3.3) да се стави $R = 0,\ S = P.$ Другото равенство од (3.5) не е ништо друго туку (3.4).

5) Нека R е некоја низа. Тогаш постојат низи R' и R'' такви што $RR', R''R \in E_G$. Навистина, нека a е произволен елемент од G и нека R_1 е која било низа, таква што $|aRR_1| = k(n-1)$, за некој k. Равенката $[aRR_1x] = a$ има единствено решение. Нека $R_1x = R'$ и $RR' = A.$ Тогаш $[aA] = a$, од каде што според својството 3), следува дека $A = RR' \in E_G$.

6) Нека A и A' се некои низи и нека за некои R и S

$$[RAS] = [RA'S]. \qquad (3.6)$$

Тогаш (3.6) важи само ако $RAS, RA'S \in G_0$.

Навистина, нека (3.6) е исполнето за некои R и S. Според 5), постојат низи R' и S', такви што $R'R,\ SS' \in E_G$. Нека $UAV \in G_0$. Тогаш $UA'V \in G_0$, зашто од $RAS, RA'S \in G_0$ следува дека

$$|R| + |A| + |S| \equiv 1 \pmod{n-1} \quad \text{и}$$

$$|R| + |A'| + |S| \equiv 1 \pmod{n-1}.$$

Оттука $|A| \equiv |A'| \pmod{n-1}$. Бидејќи $UAV \in G_0$, следува дека

$$|U| + |A| + |V| \equiv 1 \pmod{n-1}, \text{ од каде што}$$

$$|U| + |A'| + |V| \equiv 1 \pmod{n-1}, \text{ т.е.}$$

$UAV \in G_0$. Користејќи го својството 4), добиваме

$$[UAV] = [UR'RASS'V] = [UR'[RAS]S'V] = [UR'[RA'S]S'V] = [URR'A'SS'V] = [UA'V].$$

Сега можеме да пристапиме кон доказот на теоремата. Нека Γ е множеството од сите низи на елементите од G, вклучувајќи ја и празната низа 0. Множеството Γ е полугрупа во однос на операцијата конкатенација на низи: $AB = a_1^m b_1^p$, каде што $A = a_1^m,\ B = b_1^p$. Очигледно, празната низа е единица на таа полугрупа.

Да дефинираме бинарна релација θ на Γ на следниов начин:

$A\,\theta\,A'$ ако и само ако е исполнето (3.6) за некои низи R и S.

Лесно се согледува дека θ е еквивалентност. Симетричноста и рефлексивноста се очигледни. Нека $A\,\theta\,A'$ и $A'\,\theta\,A''$. Според дефиницијата на θ, исполнети се равенствата

$$[RAS]=[RA'S], \quad [UA'V]=[UA''V] \tag{3.7}$$

за некои $R,S,U,V\in\Gamma$. Но, од второто равенство на (3.7), според својството 6), следува дека $[RA'S]=[RA''S]$, зашто $[RA'S]\in G_0$. Следствено, $[RAS]=[RA'S]$, т.е. $A\,\theta\,A''$. Уште повеќе, θ е конгруенција. Навистина, нека $A\,\theta\,A'$, $B\,\theta\,B'$ и нека $RABS\in G_0$. Тогаш, според својството 6), добиваме дека важат равенствата $[RABS]=[RA'BS]=[RA'B'S]$, од каде што, пак, $AB\,\theta\,A'B'$.

Да ја разгледаме сега фактор-полугрупата Γ/θ. Елементи на оваа полугрупа се класите конгруенции $K(A)$, каде што $K(A)$ го означува множеството од сите низи B, такви што $B\,\theta\,A$. Очигледно, $K(A)\,K(B)=K(AB)$. Една од класите конгруенции е $K(0)$, којашто, според својството 4), се совпаѓа со E_G. Класата $K(0)$, очигледно е единица на полугрупата Γ/θ. Според својството 5), секој елемент од Γ/θ има инверзен: ако земеме класа $K(R)$, тогаш постои низа R', таква што $RR'\in E_G$, т.е. $K(RR')=K(0)$ и, следствено, $K(R)\,K(R')=K(0)$. Според тоа, Γ/θ е група.

Нека a е произволен елемент од G. Ќе покажеме дека од $b\,\theta\,a$, каде што $b\in G$, следува дека $a=b$. Навистина, $b=[bA]$ за некоја низа $A\in E_G$. Но, од $b\,\theta\,a$ следува дека $[bA]=[aA]$, па $b=[aA]=a$. Значи, класата $K(a)$, каде што $a\in G$, содржи само еден елемент од G (имено елементот a). Затоа класата $K(a)$ ќе ја означиме со a, т.е. $K(a)=a$.

Нека $b=[a_1^n]$ и нека C е низа, таква што $bC\in G_0$. Тогаш:

$$[a_1^nC]=[[a_1^n]C]=[bC].$$

Следствено, $b\,\theta\,a_1^n$, т.е. $K(b)=K(a_1^n)$, од каде што добиваме

$$K(b)=K(a_1a_2\ldots a_n)=K(a_1)\,K(a_2)\ldots K(a_n), \quad \text{т.е.}$$

$$b=[a_1^n]=a_1a_2\ldots a_n\ .$$

Со тоа теоремата е докажана. □

Задачи

1. Во тернарна група $(G,[\ ])$ за секои $x,y,z\in G$ важат следниве идентитети:
   а) $[xx\bar{x}]=[x\bar{x}x]=[\bar{x}xx]=x$ б) $[yx\bar{x}]=[y\bar{x}x]=[\bar{x}xy]=[x\bar{x}y]=y$
   в) $\overline{[xyz]}=[\bar{z}\,\bar{y}\,\bar{x}]$ г) $\bar{\bar{x}}=x$.

2. Тернарна полугрупа $(G,[\ ])$ со унарна операција $\bar{\ }: x\to\bar{x}$ е тернарна група ако и само ако се задоволени идентитетите $[yx\bar{x}]=[x\bar{x}y]=y$.

3. Тернарна полугрупа $(G,[\ ])$ е идемпотентна тернарна група ако и само ако се задоволени идентитетите $[yxx]=[xxy]=y$.

4*. Тернарна група што задоволува еден од идентитетите $[xy\bar{x}]=y$ или $[\bar{x}yx]=y$, е комутативна.

5*. За која било тернарна група $(G,[\ ])$ постои бинарна група $(G^*,*)$ и нејзина нормална подгрупа $G_0\triangleleft G^*$, таква што $G^*/G_0\cong\mathbf{Z}_2$ и $[xyz]=x*y*z$ за секои $x,y,z\in G$.

3.4. Изводни n-групи

Ќе ги разгледаме таканаречените изводни n-групи, првпат воведени од Дернте во [9].

Нека $(G,[\ ])$ е n-група. Ако на множеството G постои r-група $(G,[\ ]_r)$ така што $n=k(r-1)+1$ и $\left[x_1^n\right]=\left[x_1^n\right]_r$, за секој елемент $x_1^n\in G^n$, тогаш $(G,[\ ])$ се нарекува *изводна n-група* од r-групата $(G,[\ ]_r)$.

Ако една n-група $(G,[\ ])$ не е изводна од произволна r-група $(G,[\ ]_r)$, за секој $2\le r<n$, тогаш $(G,[\ ])$ се нарекува *примитивна n-група.* Потребните и доволните услови кога некоја n-група е изводна на r- група ги дал Пост. Претходно ќе го воведеме поимот еквивалентни низи.

Нека $(G,[\ ])$ е n-група, k е природен број и нека $a_1^i\in G^i$, $b_1^i\in G^i$, каде што $1\le i\le k(n-1)$. За низите a_1^i и b_1^i велиме дека се *еквивалентни* ако за некоја низа $c_1^j d_1^{k(n-1)+1-i-j}\in G^{k(n-1)+1-i}$ важи равенството

$$\left[c_1^j a_1^i d_1^{k(n-1)+1-i-j}\right]=\left[c_1^j b_1^i d_1^{k(n-1)+1-i-j}\right].$$

Теорема 4.1. *Нека $(G,[\ ])$ е n-група и r е природен број различен од 1, таков што $n=k(r-1)+1$. Тогаш $(G,[\ ])$ е изводна од r-арната група $(G,[\ ]_r)$ ако и само ако*

1) *постои низа e_1^{r-1} на елементи од $(G,[\ ])$, така што за секој елемент x од $(G,[\ ])$ низите xe_1^{r-1} и $e_1^{r-1}x$ се еквивалентни;*

2) *низата $e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}$ со должина $n-1$ е неутрална низа во $(G,[\ ])$.*

Доказ. Нека n-групата $(G,[\ ])$ е изводна од r-арната група $(G,[\ ]_r)$. Нека e_1^{r-1} е неутрална низа на r-групата $(G,[\ ]_r)$. Тогаш, за секој елемент x од $(G,[\ ]_r)$ важат равенствата $\left[xe_1^{r-1}\right]_r=\left[e_1^{r-1}x\right]_r=x$. Нека $a_1^{n-r}\in G^{n-r}$. Тогаш:

$$\left[a_1^{n-r}xe_1^{r-1}\right]=\left[a_1^{n-r}xe_1^{r-1}\right]_r=\left[a_1^{n-r}e_1^{r-1}x\right]_r=\left[a_1^{n-r}e_1^{r-1}x\right].$$

Оттука и од дефиницијата за еквивалентни низи заклучуваме дека xe_1^{r-1} и $e_1^{r-1}x$ се еквивалентни низи, за секој x од $(G,[\ ])$, па значи важи 1).

Нека a е елемент од $(G,[\ ])$. Тогаш јасно е дека и a е елемент од $(G,[\ ]_r)$. Имаме:

$$[a\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k}]=[a\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k}]_r=[[ae_1^{r-1}]_r\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]_r=[a\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]_r$$

$$=[[ae_1^{r-1}]_r\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-2}]_r=[a\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-2}]_r=...=[ae_1^{r-1}]_r=a,$$

и затоа $e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}$ со должина $n-1$ е неутрална низа во $(G,[\ ])$, односно важи 2).

Обратно, нека важат условите 1) и 2). На множеството G дефинираме r-арна операција $[\ ]_r$ со $[x_1^r]_r=[x_1^r\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]$, за секој $x_1^r\in X^r$. Ќе покажеме дека $\left(G,[\ ]_r\right)$ е r-група. Нека $x_1^{2r-1}\in X^{2r-1}$. Тогаш:

$$[[x_1^r]_r x_{r+1}^{2r-1}]_r=[[x_1^r\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]x_{r+1}^{2r-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]=[x_1^r\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}x_{r+1}^{2r-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]$$

$$=[x_1^{2r-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]=[x_1^j x_{j+1}^{j+r}x_{j+r+1}^{2r-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]=$$

$$=[x_1^j x_{j+1}^{j+r}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}x_{j+r+1}^{2r-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]=[x_1^j[x_{j+1}^{j+r}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]x_{j+r+1}^{2r-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]=$$

$$=[x_1^j[x_{j+1}^{j+r}]_r x_{j+r+1}^{2r-1}]_r,$$

каде што $j=1,2,...,r-1$. Значи, r-арната операција $[\ ]_r$ на G е асоцијативна.

Нека $a_1^{r-1}\in G^{r-1},\ a\in G$. Бидејќи $(G,[\ ])$ е n-група, следува дека за $a_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}\in G^{k(r-1)}$ и $a\in G$ постојат $x,y\in G$ така што $[xa_1^{r-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]=a$ и $[a_1^{r-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}y]=a$. Оттука $[xa_1^{r-1}]_r=a$, а од 1) следува дека

$$a=[a_1^{r-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}y]=[a_1^{r-1}\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-2}ye_1^{r-1}]=...=[a_1^{r-1}y\underbrace{e_1^{r-1}e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]=[a_1^{r-1}y]_r.$$

Значи, $\left(G,[\ ]_r\right)$ е r-група. Останува уште да докажеме дека $(G,[\ ])$ е изводна од $\left(G,[\ ]_r\right)$. Нека $x_1^n\in G^n$. Имаме:

$$[x_1^n]_r=[x_1^r x_{r+1}^{2r-1}x_{2r}^{3r-2}...x_{(k-2)(r-1)+2}^{(k-1)(r-1)+1}x_{(k-1)(r-1)+2}^{k(r-1)+1}]_r$$

$$=[[...[[x_1^r\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]x_{r+1}^{2r-1}x_{2r}^{3r-2}\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]...x_{(k-2)(r-1)+2}^{(k-1)(r-1)+1}\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]x_{(k-1)(r-1)+2}^{k(r-1)+1}\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k-1}]$$

$$=[x_1^n\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k(k-1)}]=[x_1^n\underbrace{\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k}\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k}...\underbrace{e_1^{r-1}...e_1^{r-1}}_{k}}_{k-1}]=[x_1^n].\ \square$$

Од Теоремата 4.1 следува дека n-групата $(G,[\ ])$ е изводна од бинарната група $(G,\cdot)$ акко $[x_1^n]=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$, за секој $x_1^n\in G^n$.

Како последици од Теоремата 4.1 произлегуваат следните две својства:

Последица 4.1. *Една* n*-група* $(G,[\ ])$ *е изводна од бинарната група* $(G,\cdot)$ *ако и само ако* $(G,[\ ])$ *има единица.*

Доказ. Очигледно, бинарната операција $\cdot$ се дефинира со равенството

$$x_1\cdot x_2=[x_1x_2\overset{n-2}{e}],\ \text{каде што}\ x_1,x_2\in G.\ \square$$

Последица 4.2. *Нека* $(G,[\ ])$ *е конечна* n*-група со ред* g *и* НЗД$(g,n-1)=1$*. Ако* $(G,[\ ])$ *има единица, тогаш таа е единствен идемпотентен елемент во* $(G,[\ ])$.

Доказ. Нека e е единицата во $(G,[\ ])$. Тогаш од $x\cdot e=[xe\overset{n-2}{e}]=x=[ex\overset{n-2}{e}]=e\cdot x$, за секој $x\in G$, следува дека e е единица во бинарната група $(G,\cdot)$. Нека ε е друг идемпотентен елемент во $(G,[\ ])$. Тогаш, $\varepsilon^n=[\overset{n}{\varepsilon}]=\varepsilon$ и оттука $\varepsilon^{n-1}=e$. Бидејќи $n-1\geq 1$ и НЗД$(g,n-1)=1$, следува дека $\varepsilon=e$. $\square$

3.5. Претставување на *n*-група преку бинарна група

Описот на *n*-група, во општ случај, бара проширување на носителот на *n*-групата за да се добие носителот на групата во која се сместува дадената *n*-група. Има и друг опис на n-група, во кој не се проширува основното множество, но затоа пак, n-арната операција не е обично проширување на бинарната операција од групата. Тој опис е наречен теорема на Хоссу-Глускин (M. Hosszu: *On the explicit form of n-group operations,* Publ. Math., 10 № 1–4 (1963), 88–92 и Л. М. Глускин: *Позиционные оперативы*, Матем. сб. 68 (1965), 444–482).

Докажаната теорема на Пост покажува дека секоја *n*-група $(G,[\,])$ е изведена од бинарна, меѓутоа зададена на поголемо множество $G'\supseteq G$. Се поставува прашање: не може ли на некој начин да се претстави *n*-групата $(G,[\,])$ со помош на бинарна група определена на истото тоа множество G? Подолу е докажано дека тоа е возможно. Претходно ќе докажеме две леми.

Лема 5.1. *Нека* $(G,[\,])$ *е n-група. Тогаш постои бинарна група* $(G,\circ)$*, таква што* $[x_1^n]$ *има вид* $[x_1^n]=\varphi(x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n)$*, каде што* φ *е некоја пермутација на множеството* G *и* $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=(\ldots((x_1\circ x_2)\circ x_3)\circ\ldots\circ x_n)$.

Доказ. Нека е a некој фиксиран елемент од G. Да ги воведеме ознаките:

$$[\overset{n-1}{a}x]=\varphi(x),\quad x\circ y=[\overset{n-2}{a}\varphi^{-1}(x)y].$$

Очигледно, φ е пермутација на множеството G, а $(G,\circ)$ е квазигрупа.

Да го трансформираме $[x_1^n]$, имајќи ги предвид последните две равенства:

$$[x_1^n]=[[\overset{n-1}{a}\,\varphi^{-1}(x_1)]\,x_2^n] = [a[\overset{n-2}{a}\,\varphi^{-1}(x_1)x_2]\,x_3^n] = [a[\overset{n-1}{a}\,\varphi^{-1}(x_1\circ x_2)]\,x_3^n] =$$
$$=[aa[\overset{n-2}{a}\,\varphi^{-1}(x_1\circ x_2)\,x_3]\,x_4^n]=[\overset{2}{a},\ x_1\circ x_2\circ x_3,\ x_4^n]=\ldots=[\overset{n-2}{a},\ x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_{n-1},\ x_n]=$$
$$=[\overset{n-2}{a}[\overset{n-1}{a}\,\varphi(x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_{n-1})]\,x_n] = [\overset{n-1}{a}[\overset{n-2}{a}\,\varphi^{-1}(x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_{n-1})]\,x_n] = \varphi(x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n).\ \square$$

Лема 5.2. *Нека во групата* $(G,\cdot)$ *е исполнето равенството*

$$\alpha_1(x_1)\cdot\alpha_2(x_2)\cdot\ldots\cdot\alpha_n(x_n)\cdot a = \beta_1(x_1)\cdot\beta_2(x_2)\cdot\ldots\cdot\beta_n(x_n)\cdot b, \tag{5.1}$$

за сите $x_i\in G$, *каде што* α_i,β_i *се автоморфизми на групата* $(G,\cdot)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, a,b *се некои елементи од* G. *Тогаш* $a=b$, $\alpha_i=\beta_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Доказ. Ако ставиме прво $x_i=1$ (1 е единицата на групата $(G,\cdot)$) за сите $i=1,2,\ldots,n$, ќе добиеме $a=b$. Кратејќи го равенството (5.1) со $a=b$ и ставајќи $x_i=1$ за сите $i\neq k$ $(1\le k\le n)$, ќе добиеме $\alpha_k x_k=\beta_k x_k$, од каде што следува дека $\alpha_k=\beta_k$. □

Претставување на n-група $(G,[\,])$ преку некоја бинарна група, дефинерана исто така на множеството G, дава следната теорема, позната под името Теорема на Хоссу-Глускин. За да можеме да го следиме доказот на оваа теорема ќе ги дефинираме поимите изотоп на квазигрупа и квазиавтоморфизам.

Една квазигрупа $(G,[\,]')$ е *изотоп на квазигрупа* $(G,[\,])$ ($[\,]$ и $[\,]'$ имаат иста арност n и се дефинирани на исто множество G) ако постои низа $T=(\alpha_1^{n+1})$ од пермутации на множеството G такви што

$$[x_1^n]'=\alpha_{n+1}^{-1}([\alpha_i(x_i)_1^n])$$

за сите $x_1^n\in G^n$. Ознака: $[\,]'=[\,]^T$. Низата T за која важи горното равенство се нарекува *изотопија*. Пермутацијата α_i се нарекува i*-та компонента на изотопијата* T.

Една изотопија T се нарекува *автотопија* на квазигрупа $(G,[\,])$, ако $[\,]=[\,]^T$. Една пермутација φ се нарекува *квазиавтоморфизам* ако постои автотопија од облик $T=(\alpha_1^{n+1},\varphi)$.

Теорема 5.1. (М. Хоссу, Л. М. Глускин) *Нека* $(G,[\,])$ *е n-група. Постои бинарна група* $(G,\cdot)$ *и автоморфизам* θ *на таа група, така што важи равенството*

$$[x_1^n] = x_1\cdot\theta(x_2)\cdot\theta^2(x_3)\cdot\ldots\cdot\theta^{n-2}(x_{n-1})\cdot\theta^{n-1}(x_n)\cdot c,$$

каде што c *е некој елемент од* G, *при што се исполнуваат условите*

$$\theta^{n-1}(x)=cxc^{-1},\quad \theta(c)=c, \tag{5.2}$$

за секој $x\in G$.

Доказ. Според лемата 5.1, n-групата $(G,[\,])$ има претставување

$$[x_1^n] = \varphi(x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n)\,, \tag{5.3}$$

каде што $(G,\circ)$ е некоја бинарна квазигрупа, φ е некоја пермутација на множеството G, а $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$ означува $(\ldots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \ldots \circ x_n)$.
Во $(G,[\,])$ е исполнета (1,2)-асоцијативноста:

$$[[x_1^n]\,x_{n+1}^{2n-1}] \;=\; [x_1\,[x_2^{n+1}]\,x_{n+2}^{2n-1}]. \tag{5.4}$$

Да го трансформираме (5.4), користејќи го (5.3):

$$\varphi(\varphi(x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n) \circ x_{n+1} \circ \ldots \circ x_{2n-1}) = \varphi(x_1 \circ \varphi(x_2 \circ \ldots \circ x_{n+1}) \circ x_{n+2} \circ \ldots \circ x_{2n-1})\,.$$

По скратувањето добиваме

$$\varphi(x_1 \circ \ldots \circ x_n) \circ x_{n+1} = x_1 \circ \varphi(x_2 \circ \ldots \circ x_{n+1})\,. \tag{5.5}$$

Да ја воведеме пермутацијата λ:

$$\lambda(x) = x \circ b.$$

Во (5.5), да ги замениме $x_3, x_4, \ldots, x_n$ со b:

$$\varphi(\lambda^{n-2}(x_1 \circ x_2)) \circ x_{n+1} \;=\; x_1 \circ \varphi(\lambda^{n-2}(x_2) \circ x_{n+1}). \tag{4.6}$$

Нека со

$$A(x,y) = \varphi(\lambda^{n-2}(x)) \circ y, \quad B(x,y) = x \circ y, \quad C(x,y) = x \circ \varphi(y), \quad D(x,y) = \lambda^{n-2}(x) \circ y$$

се дефинирани четири нови бинарни операции. Тогаш (5.6) го добива обликот

$$A(B(x_1, x_2), x_{n+1}) = C(x_1, D(x_2, x_{n+1}))\,.$$

Според теоремата за четири квазигрупи која гласи: *Ако четири квазигрупи* $(G,[\,]_i)$, $i = 1,2,3,4$ *се сврзани со општиот асоцијативен закон*

$$A_1(A_2(x,y),z) = A_3(xA_4(y,z))\,,$$

тогаш сите (G,A_i) *се изотопни со една иста група*, (и која овде ја наведуваме без доказ), квазигрупите (G,A), (G,B), (G,C) и (G,D) се изотопни со една иста група чија операција ќе ја означуваме со $(\cdot)$[1]. Специјално, не губејќи од општоста, овде сметаме дека квазигрупата со операција $(\circ)$ е главно изотопна на квазигрупата со операција $(\cdot)$, па $B = (\circ)$ е главно изотопна на групата со операција $(\cdot)$, т.е.

$$x \circ y = \alpha(x) \cdot \beta(y).$$

Да преминеме во (5.6) кон операцијата $(\cdot)$:

$$\alpha(\varphi(\lambda^{n-2}(\alpha(x_1) \cdot \beta(x_2)))) \cdot \beta(x_{n+1}) \;=\; x_1 \cdot \beta(\varphi(\alpha(\lambda^{n-2}(\beta^{-1}(x_2) \cdot x_{n+1})))). \tag{5.7}$$

Применувајќи ја лемата 5.1, заклучуваме дека $\beta\varphi$ е квазиавтоморфизам на групата $(G,\cdot)$.

[1] Да се реши една функционална равенка $A_1(A_2(x,y),z) = A_3(xA_4(y,z))$, значи да се определат четири (бинарни) квазигрупи (G,A_i), $i = 1,2,3,4$ коишто се поврзани преку равенката. (Податално може да се прочита во четвртата глава на [1].)

Сега во (5.5) да ставиме $x_4 = x_5 = \ldots = x_{n+1} = b$:

$$\lambda(\varphi(\lambda^{n-2}(x_1 \circ x_2 \circ x_3))) = x_1 \circ \varphi(\lambda^{n-2}(x_2 \circ x_3)).$$

Да преминеме на $(\cdot)$:

$$\lambda(\varphi(\lambda^{n-3}(\alpha(\alpha(x_1)\cdot\beta(x_2))))) \cdot \beta(x_3) = \alpha(x_1)\cdot\beta(\varphi(\lambda^{n-2}(\alpha(x_2)\cdot\beta(x_3)))),\ \text{т.е.}$$

$$\lambda\varphi\lambda^{n-3}(\alpha(x_1x_2)x_3) = x_1\beta\varphi\lambda^{n-2}(\alpha\beta^{-1}x_2x_3)\,. \qquad (5.8)$$

Применувајќи ја лемата 5.1 на (5.8) заклучуваме дека $\alpha,\ \alpha\beta^{-1} = \gamma$ се квазиавтоморфизми на групата $(G,\cdot)$. Оттука следува дека и $\beta = \gamma^{-1}\alpha$ се квазиавтоморфизми на групата $(G,\cdot)$. Бидејќи $\beta\varphi$ е исто така квазиавтоморфизам, следува дека и φ е квазиавтоморфизам на групата $(G,\cdot)$. Квазиавтоморфизмите α, β и φ може да се претстават во вид

$$\alpha(x) = \alpha_0(x)\cdot a, \quad \beta(x) = \beta_0(x)\cdot b, \quad \varphi(x) = \varphi_0(x)\cdot f\,, \qquad (5.9)$$

каде што $\alpha_0,\ \beta_0,\ \varphi_0$ се автоморфизми на групата $(G,\cdot)$, а $a,\ b,\ f$ се некои елементи од G. Имајќи ги предвид равнствата (5.3) и (5.4), $[x_1^n]$ ќе го доведеме до видот

$$[x_1^n] = \alpha_1(x_1)a_1\,\alpha_2(x_2)a_2 \ldots \alpha_n(x_n)a_n \qquad (5.10)$$

каде што α_i се автоморфизми на групата $(G,\cdot)$, а a_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ се елементи од G. Го трансформираме (5.10) во

$$[x_1^n] = \alpha_1(x_1)(a_1\,\alpha_2(x_2)a_1^{-1})(a_1a_2\,\alpha_3(x_3)\,a_2^{-1}a_1^{-1})\ldots$$
$$\ldots\ (a_1a_2\ldots a_{n-1}\,\alpha_n(x_n)\,a_{n-1}^{-1}\ldots a_2^{-1}a_1^{-1})(a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n).$$

Следствено, $[x_1^n]$ може да се претстави во обликот

$$[x_1^n] = \gamma_1(x_1)\,\gamma_2(x_2)\ldots\gamma_n(x_n)c\,, \qquad (5.11)$$

каде што γ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ се автоморфизми на групата $(G,\cdot)$, а c е некој елемент од G.

Користејќи го равенството (5.11), во (5.4) може да се премине кон операцијата $(\cdot)$:

$$\gamma_1(\gamma_1(x_1)\gamma_2(x_2)\ldots\gamma_n(x_n)c)\gamma_2(x_{n+1})\ldots\gamma_n(x_{2n-1})c =$$
$$= \gamma_1(x_1)\gamma_2(\gamma_1(x_2)\gamma_2(x_3)\ldots\gamma_n(x_{n+1})c)\gamma_3(x_{n+2})\ldots\gamma_n(x_{2n-1})c.$$

Средувајќи го овој израз, добиваме:

$$\gamma_1^2(x_1)\gamma_1(\gamma_2(x_2))\ldots\gamma_1(\gamma_n(x_n))\gamma_1(c)\gamma_2(x_{n+1}) =$$
$$= \gamma_1(x_1)\cdot\gamma_2(\gamma_1(x_2))\ldots\gamma_2(\gamma_n(x_{n+1}))\gamma_2(c),$$

т.е.

$$\gamma_1^2(x_1)\cdot\gamma_1(\gamma_2(x_2))\ldots\gamma_1(\gamma_n(x_n))\cdot\gamma'(x_{n+1})\gamma_1(c) =$$
$$= \gamma_1(x_1)\cdot\gamma_2(\gamma_1(x_2))\ldots\gamma_2(\gamma_n(x_{n+1}))\gamma_2(c), \qquad (5.12)$$

каде што $\gamma'(x) = \gamma_1(c)\cdot x\cdot(\gamma_1(c))^{-1}$.

Да ја примениме Лемата 5.1 на (5.12):

$$\gamma_1^2=\gamma_1,\ \gamma_1\gamma_2=\gamma_2\gamma_1,\ \gamma_1\gamma_3=\gamma_2^2,\ \ldots,\ \gamma_1\gamma_i=\gamma_2\gamma_{i-1},\ \gamma_1\gamma_n=\gamma_2\gamma_{n-1},\ \gamma'\gamma_2=\gamma_2\gamma_n; \quad (5.13)$$

$$\gamma_1(c)=\gamma_2(c). \quad (5.14)$$

Од равенствата (5.13) добиваме дека $\gamma_1=\varepsilon$, а и рекурентното равенство

$$\gamma_1\gamma_i=\gamma_2\gamma_{i-1}\ \ (i\le n) \quad (5.15)$$

и равенството

$$\gamma'=\gamma_2\gamma_n\gamma_2^{-1}. \quad (5.16)$$

Од (5.15) наоѓаме дека $\gamma_i=\gamma_2^{i-1}$ ($i=1,2,\ldots,n$). Од (5.14) добиваме дека

$$\gamma_2(c)=c, \quad (5.17)$$

а на крајот, од (5.16) наоѓаме

$$\gamma'(x)=\gamma_2\gamma_2^{n-1}\gamma_2^{-1}(x)=\gamma_2^{n-1}(x),$$
$$\gamma_2^{n-1}(x)=\gamma'(x)=\gamma_1(c)\cdot x\cdot(\gamma_1(c))^{-1}, \quad \text{или}$$
$$\gamma_2^{n-1}(x)\ =\ cxc^{-1}. \quad (5.18)$$

Со тоа е добиено следното претставување за $[x_1^n]$:

$$[x_1^n]\ =\ x_1\gamma_2(x_2)\gamma_2^2(x_3)\ldots\gamma_2^{n-1}(x_n)c\,,$$

при што условите (5.2), според (5.17) и (5.18), исто така се исполнети ($\theta=\gamma_2$). Со тоа, теоремата е докажана. □

Последица 5.1. *Ако n-групата* $(G,[\,])$ *има единица, тогаш таа може да се претстави во видот* $[x_1^n]=x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n$, *каде што* $(G,\circ)$ *е некоја бинарна група.*

Со други зборови, ако n-групата има единица, тогаш таа е изведена од бинарна група.

Доказ. Нека e е единица на n-групата $(G,[\,])$. Тогаш важи равенството $[ex\overset{n-1}{e}]=x$, за сите $x\in G$. Следствено, $e\theta(x)\theta^2(e)\ldots\theta^{n-1}(e)\cdot c=x.$ Специјално, за $x=1$ (1 е единицата на групата $(G,\cdot)$) добиваме $e\theta(e)\theta^2(e)\ldots\theta^{n-1}(e)\cdot c=c$, од каде што

$$\theta^2(e)\theta^3(e)\ldots\theta^{n-1}(e)=e^{-1}. \quad (5.19)$$

Според тоа, $e\theta(x)e^{-1}=x,\ \ \theta(x)=e^{-1}xe.$ Специјално, $\theta(x)=e$, па равенството (5.19) добива вид $e^{n-2}c=e^{-1}$, од каде што $c=e^{1-n}$. Сега, лесно е да се докаже нашето тврдење:

$$[x_1^n]\ =\ x_1\theta(x_2)\theta^2(x_3)\ldots\theta^{n-2}(x_{n-1})\theta^{n-1}(x_n)c\ =$$
$$=x_1(e^{-1}x_2e)(e^{-2}x_3e^2)\ldots(e^{-(n-2)}xe^{n-2})(e^{-(n-1)}xe^{n-1})e^{1-n}=x_1e^{-1}x_2e^{-1}x_3e^{-1}\ldots\, e^{-1}x_n.$$

Нека $xe^{-1}y=x\circ y$. Очигледно, $(G,\circ)$ е група (бинарна). Следствено, $[x_1^n]=x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n$, што и требаше да се докаже. □

Забелешка. Во [3] авторите посочуваат дека во формулацијата на теоремата на Хосcу-Глускин се зборува за n-група $(A,[\,])$ и за некоја бинарна група $(A,\circ)$. Овие групи имаат заеднички носител A. Авторите забележале дека Е.

Пост ја формулирал и ја докажал оваа теорема земајќи изоморфна слика на подмножество $A_0 = \{x_1 x_2 ... x_{n-1} \mid x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in A\} \subseteq G$ (каде што G е група генерирана од множеството A и n-арната операција $[\ ]$ со бинарната операција на G се сврзани со равенството $[x_1 x_2 ... x_n] = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$, за секои $x_1, ..., x_n \in A$), наместо група $(A, \circ)$. Множеството A_0 е нормална подгрупа од групата G и се нарекува *асоцирана група* на n-групата $(A, [\ ])$. Покрај тоа, авторите на [3] коментираат дека краток и убав доказ на оваа теорема дал Е. И. Соколов во трудот *О теореме Глускина-Хоссу для n-групп Дёрнте,* Мат. исследования. - Вып. 39. - С. 187-189, користејќи го поимот кос елемент.

Мислењето на авторите на [3] е дека отсуството на името на Е. Пост во името на теоремата е грешка што мора да биде поправена во интерес на историската вистина. Изгледа дека Хоссу не знаел за резултатите на Пост, а важно е да се забележи дека Глускин не ги изучувал n-арните групи, туку испитувал голема класа на алгебарски системи, наречени позициони оперативи, каде што добил голем број резултати. Теоремата на Пост-Хоссу-Глускин е меѓу бројните последици на резултатите на Глускин.

Ќе ја разгледаме примената на теоремата на Хоссу-Глускин во следново својство.

Својство 5.1. *За секој $n > 2$ постои најмалку една n-полугрупа (n-група) на која не може да ѝ се придружи n-арна единица.*

Доказ. Доволно е да покажеме дека за секој $n > 2$ постои најмалку една n-група што нема неутрални елементи.

Прво ќе ја разгледаме мултипликативната група $G = T(3, K)$ од триаголни матрици од облик $\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, каде што K е поле со карактеристика $p \neq 0$.

Тогаш, пресликувањето $\theta : G \to G$ дефинирано со

$$\theta \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha x & y \\ 0 & 1 & \beta z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

каде што α е примитивен корен на единицата со степен $n-1$ и $\alpha\beta = 1$, е автоморфизам на G. Не е тешко да се провери дека множеството G со операцијата $[\ ] : G^n \to G$ дефинирана со

$$[A_1, A_2, ..., A_n] = A_1 \cdot \theta(A_2) \cdot \theta^2(A_3) \cdot ... \cdot \theta^{n-1}(A_n) \cdot B,$$

каде што $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, е n-група.

Оваа група не содржи ниту еден n-арен неутрален елемент.

Имено, кога A би бил нејзин неутрален елемент, тогаш би имале $[X, A, A, ..., A] = [A, X, A, ...A]$, за секој $X \in G$. Од дефиницијата на операцијата $[\,]$, можеме да заклучиме дека $X \cdot \theta(A) = A \cdot \theta(X) = \theta(X) \cdot A$, од што следува дека $\theta(X) = X$, за секој $X \in G$, што не е точно. Значи, $(G, [\,])$ е n-група без неутрални елементи. □

Задачи

1. Провери дека множеството $G = T(3, K)$ од Својството 4.1, заедно со операцијата $[\,] : G^n \to G$ дефинирана со

$$[A_1, A_2, ..., A_n] = A_1 \cdot \theta(A_2) \cdot \theta^2(A_3) \cdot ... \cdot \theta^{n-1}(A_n) \cdot B,$$

каде што $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, е n-група, а θ е автоморфизам на G дефиниран како во Својството 2.3.

2. Нека $\mathbf{C}$ е множеството од комплексните броеви и нека ε е $n-1$-виот примитивен корен на единицата. Тогаш $G = \mathbf{C}^3$ со операцијата

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + x_1 y_3, x_3 + y_3)$$

е група и $\theta(x_1, x_2, x_3) = (\varepsilon x_1, \varepsilon^2 x_2, \varepsilon x_3)$ е автоморфизам на G. Провери дека $(G, [\,])$, каде што операцијата $[\,]$ е дефинирана со

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x_n}] = \mathbf{x}_1 \bullet \theta(\mathbf{x}_2) \bullet \theta^2(\mathbf{x}_3) \bullet ... \bullet \theta^{\mathbf{n}-1}(\mathbf{x_n})$$

е n-група без n-арни неутрални елементи.

Глава IV — Циклични n-полугрупи и циклични n-групи

4.1. Циклични и хомогени n-полугрупи

Во овој раздел ќе дефинираме циклични и хомогени n-полугрупи, но претходно ќе го воведеме поимот n-арен степен на елемент од n-полугрупа $(G,[\,])$.

Нека k е ненегативен цел број и нека a е елемент на n-полугрупа $(G,[\,])$. Елементот од G, означен со симболот $a^{\langle k\rangle}$, се нарекува k-*ти* n-*арен степен на* a ако $a^{\langle 0\rangle}=a$ и $a^{\langle k\rangle}=\left[\overset{k(n-1)+1}{a}\right]$.

Значи, допуштени k-ти n-арни степени на a се:

$$a^{\langle 0\rangle}=a,\ a^{\langle 1\rangle}=\left[\overset{n}{a}\right],\ a^{\langle 2\rangle}=\left[\overset{2n-1}{a}\right],\ a^{\langle 3\rangle}=\left[\overset{3n-2}{a}\right],\ \ldots$$

Да забележиме дека $a^{\langle k+1\rangle}=\left[\overset{\langle k\rangle}{a}\,\overset{n-1}{a}\right]$. Множеството од сите k-ти n-арни степени на a е генерирано од елементот $a\in G$. Него ќе го означуваме со $\langle a\rangle$.

Својство 1.1. *Ако* $n_1,n_2,\ldots,n_i$ *се ненегативни цели броеви и* a *е кој било елемент од* n-*полугрупа, тогаш:*

а) $(a^{\langle n_1\rangle})^{\langle n_2\rangle}=a^{\langle n_1n_2(n-1)+n_1+n_2\rangle}$; *б)* $\left[a^{\langle n_1\rangle}a^{\langle n_2\rangle}\ldots a^{\langle n_i\rangle}\right]=a^{\langle n_1+n_2+\ldots+n_i+1\rangle}$.

Доказ. а) $$(a^{\langle r\rangle})^{\langle s\rangle}=\left[\overset{s(n-1)+1}{a^{\langle r\rangle}}\right]=\left[\overset{s(n-1)+1}{\left[\overset{r(n-1)+1}{a}\right]}\right]=\left[\overset{(r(n-1)+1)(s(n-1)+1)}{a}\right]=\left[\overset{rs(n-1)^2+(r+s)(n-1)+1}{a}\right]=$$

$$=\left[\overset{(rs(n-1)+(r+s))(n-1)+1}{a}\right]=a^{\langle rs(n-1)+r+s\rangle}.$$

б) $$\left[a^{\langle r_1\rangle}a^{\langle r_2\rangle}\ldots a^{\langle r_n\rangle}\right]=\left[\overset{r_1(n-1)+1}{a}\overset{r_2(n-1)+1}{a}\ldots\overset{r_n(n-1)+1}{a}\right]=\left[\overset{(r_1+r_2+\ldots+r_n)(n-1)+n}{a}\right]=\left[\overset{(r_1+r_2+\ldots+r_n+1)(n-1)+1}{a}\right]=$$

$= a^{\langle r_1+r_2+...+r_n+1\rangle}$. □

Разгледувајќи ги степените на a, можеме да согледаме два случаја:

I) Кои било два допуштени k-ти n-арни степени на a не се меѓусебе еднакви, па множеството

$$a^{\langle 0\rangle} = a,\ a^{\langle 1\rangle} = \left[\overset{n}{a}\right],\ a^{\langle 2\rangle} = \left[\overset{2n-1}{a}\right],\ a^{\langle 3\rangle} = \left[\overset{3n-2}{a}\right],...,\ a^{\langle k\rangle} = \left[\overset{k(n-1)+1}{a}\right],...$$

е бесконечно пребројливо множество.

II) Постојат два ненегативни цели броеви r и s такви што $r < s$ и $a^{\langle r\rangle} = a^{\langle s\rangle}$. Без да изгубиме од општоста, можеме да претпоставиме дека s е најмалиот можен таков ненегативен цел број. Нека $p = s - r$, при што $a^{\langle r\rangle} = a^{\langle r+p\rangle}$. Тогаш, со индукција по k ($k \geq 0$), се покажува дека $a^{\langle r\rangle} = a^{\langle r+kp\rangle}$. Од друга страна, за секој ненегативен цел број m, имаме дека $m = kp + i$, каде што $k \geq 0$, $0 \leq i < p$. Значи, $a^{\langle r+m\rangle} = a^{\langle r+(kp+i)\rangle} = a^{\langle r+i\rangle}$. Ова значи дека секој допуштен степен на a по $(s-1)$-виот, е елемент на множеството

$$G_a = \{a^{\langle r\rangle}, a^{\langle r+1\rangle}, ..., a^{\langle s-1\rangle}\}.$$

Да забележиме дека $a^{\langle x\rangle} = a^{\langle y\rangle}$ ако и само ако $x \equiv y \pmod{p(n-1)}$. Според тоа, редот на $\langle a\rangle$ е $s = r + p$, каде што p е редот на G_a (*период* на a), а r е *индекс* на a.

За една n-полугрупа $(G,[\,])$ се вели дека е *циклична* (или *моногенерирана*) ако $G = \langle a\rangle$, за некој $a \in G$.

Множеството G_a е затворено во однос на истата n-арна операција во $(G,[\,])$, па според тоа е n-потполугрупа од $(G,[\,])$.

Едно подмножество I од n-полугрупа $(G,[\,])$ се нарекува i-*идеал* во G ако $[G^{i-1}IG^{n-i}] \subseteq I$, за некој $i = 1,2,...,n$. По договор, $[G^0IG^{n-1}] = [IG^{n-1}]$, $[G^{n-1}IG^0] = [G^{n-1}I]$ и $[G^0IG^0] = I$. Ако I е i-идеал во G за секој $i = 1,2,...,n$, тогаш I се нарекува *идеал* во G.

Имајќи ја предвид горната дефиниција, се покажува дека G_a е идеал во $\langle a\rangle$. Всушност, G_a е минимален идеал во $\langle a\rangle$, зашто ако $x \in G_a$ и x_i припаѓа на кој било идеал $I \subseteq G_a$, тогаш од својство на n-групи, постојат $n-1$ елементи $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \in G_a$ такви што $[x_1x_2...x_{i-1}x_ix_{i+1}...x_n] = x$. Значи, $x \in I$, па според тоа $G_a = I$. Максималноста на G_a како n-подгрупа е очигледна.

Ќе покажеме дека G_a е n-група во смисла на Постовата дефиниција за n-група. Заради нејзината очигледна комутативност, доволно е да се покаже дека равенката

$$[a^{\langle r+k_1\rangle}a^{\langle r+k_2\rangle}...a^{\langle r+k_{n-1}\rangle}x] = a^{\langle r+k\rangle},$$

има решение за кое било множество од ненегативни цели броеви $0 \le k, k_1, ..., k_{n-1} < p$. Но, $x = a^{\langle r+y \rangle}$ е решение на горната равенка ако и само ако

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle r + k_i \rangle + \langle r + y \rangle = \langle r + k \rangle \pmod{p(n-1)}.$$

Ова значи дека

$$(n-1)(\langle r \rangle + \sum_{i=1}^{n-1} k_i - k + y) \equiv 0 \pmod{p(n-1)}, \text{ т.е.}$$

$$\langle r \rangle + \sum_{i=1}^{n-1} k_i - k + y \equiv 0 \pmod{p}.$$

Бидејќи последнава конгруентна равенка секогаш има единствено решение по y, $0 \le y < p$, следува дека почетната равенка исто така има едиствено решение. Според тоа, G_a е n-група.

Сега, за да покажеме дека G_a е циклична, доволно е да покажеме дека за секој ненегативен цел број $m \ge 0$, важи

$$(a^{\langle r+m \rangle})^{\langle p \rangle} = a^{\langle r+m \rangle},$$

и дека постои цел број N таков што ниту еден помал не-$\langle 0 \rangle$ дозволен степен на $a^{\langle r+N \rangle}$ од $\langle p \rangle$-тиот е еднаков сам на себе, т.е. дека

$$G_a = \left\{ a^{\langle r+N \rangle}, (a^{\langle r+N \rangle})^{\langle 1 \rangle}, ..., (a^{\langle r+N \rangle})^{\langle p-1 \rangle} \right\}.$$

За секој i, $(a^{\langle r+m \rangle})^{\langle i \rangle} = a^{\langle r+m \rangle}$ ако и само ако

$$\langle (r+m)i(n-1) + (r+m) + i \rangle \equiv \langle r+m \rangle \pmod{p(n-1)}.$$

Значи, $\quad (n-1)((r+m)i(n-1)+i) \equiv 0 \pmod{p(n-1)}$,

па според тоа, $\quad ((r+m)(n-1)+1)i \equiv 0 \pmod{p}$.

Ако ставиме $i = p$, тогаш сме го добиле првиот резултат што е спомнат погоре. Дека навистина постои цел број N следува од постоењето на бесконечно многу прости броеви од обликот $k(n-1)+1$. Ако $(r+N)(n-1)+1$ го означува кој било од овие прости броеви што е различен од простите множители на p, тогаш

$$((r+N)(n-1)+1)i \equiv 0 \pmod{p} \text{ ако и само ако } i \equiv 0 \pmod{p}.$$

Следствено, $G_a = \left\{ a^{\langle r+N \rangle}, (a^{\langle r+N \rangle})^{\langle 1 \rangle}, ..., (a^{\langle r+N \rangle})^{\langle p-1 \rangle} \right\}$.

Сето погоре искажано го сублимираме во следнава

Теорема 1.1. *Нека* $(G,[\,])$ *е* n*-полугрупа и нека* $a \in G$. *Ако* n*-полугрупата* $\langle a \rangle$ *генерирана од* a *е бесконечна, тогаш сите дозволени степени на* a *се меѓусебе различни. Ако* $\langle a \rangle$ *е конечна, тогаш постои цел број* r *(наречен индекс на* a*) и постои цел број* p *(наречен период на* a*), таков што* $a^{\langle r \rangle} = a^{\langle r+p \rangle}$ *и*

$$\langle a \rangle = \{a^{\langle 0 \rangle}, a^{\langle 1 \rangle}, ..., a^{\langle r+p-1 \rangle}\},$$

каде што $r+p$ *е редот на* $\langle a\rangle$. *Покрај тоа,* $G_a=\left\{a^{\langle r\rangle},a^{\langle r+1\rangle},\dots,a^{\langle r+p-1\rangle}\right\}$ *е максимална циклична* n*-потполугрупа и мининимален идеал во* $\langle a\rangle$. □

Следниве тврдења се очигледни последици:

Последица 1.1. *Постои циклична* n*-полугрупа со индекс* r *и период* p, *за секој пар од ненегативни цели броеви* r *и* s. □

Последица 1.2. *Две конечни циклични* n*-полугрупи се изоморфни ако и само ако имаат ист индекс и ист период.* □

Последица 1.3. *Кои било две бесконечни циклични* n*-полугрупи се изоморфни.* □

Последица 1.4. *Ако една* n*-полугрупа е* i*-кратлива за кој било фиксен* $i=1,2,\dots,n$, *тогаш секој елемент со конечен ред има индекс* 0. □

Споредено со обичните полугрупи, една конечна циклична n-полугрупа $\langle a\rangle$ не секогаш содржи идемпотентентен елемент, т.е. елемент e, таков што $e^{\langle 1\rangle}=e$.

Да ја разгледаме, на пример, 3-полугрупата $G=\{a,\overset{3}{[a]},\overset{5}{[a]},\overset{7}{[a]},\overset{9}{[a]},\overset{11}{[a]},\overset{13}{[a]}\}$ генерирана од елемент a таков што $\overset{7}{[a]}=\overset{15}{[a]}$. Тогаш $[aaa]=\overset{3}{[a]}$, $[\overset{3}{[a]}\overset{3}{[a]}\overset{3}{[a]}]=\overset{9}{[a]}$, $[\overset{5}{[a]}\overset{5}{[a]}\overset{5}{[a]}]=\overset{7}{[a]}$, $[\overset{7}{[a]}\overset{7}{[a]}\overset{7}{[a]}]=\overset{13}{[a]}$, $[\overset{9}{[a]}\overset{9}{[a]}\overset{9}{[a]}]=\overset{11}{[a]}$, $[\overset{11}{[a]}\overset{11}{[a]}\overset{11}{[a]}]=\overset{9}{[a]}$ и $[\overset{13}{[a]}\overset{13}{[a]}\overset{13}{[a]}]=\overset{7}{[a]}$.

Во таа смисла, го добиваме следнов значаен резултат.

Теорема 1.2. *За секој елемент* a *со конечен индекс* r *и период* p *од една* n*-полугрупа* $(G,[\,])$, $\langle a\rangle$ *содржи единствен идемпотент ако и само ако конгруентната равенка*

$$(n-1)x+\langle r\rangle\equiv 0 \pmod p$$

има решение во множеството на ненегативни цели броеви. Ако тоа постои, тогаш идемпотентот во $\langle a\rangle$ *е истовремено неутрален елемент во* G_a.

Доказ. Елементот $a^{\langle r+x\rangle}$ е идемпотентен ако и само ако

$$n\langle r+x\rangle\equiv\langle r+x\rangle \pmod{p(n-1)}$$

или

$$(n-1)\langle r+x\rangle\equiv 0 \pmod{p(n-1)},$$

па значи, ако и само ако $(n-1)x+\langle r\rangle\equiv 0 \pmod p$.

Потсети се (од теорија на броеви) дека ваква линеарна конгруентна равенка има решение ако и само ако НЗД$(n-1,p)$ е делител на $\langle r\rangle=r(n-1)+1$. Јасно, ова е можно само тогаш кога НЗД$(n-1,p)=1$, па според тоа може да има само еден идемпотент во $\langle a\rangle$.

Сега, за да покажеме дека елементот $a^{\langle r+x\rangle}$ таков што $(n-1)x+\langle r\rangle \equiv 0 \pmod p$, т.е. идемпотентниот елемент во $\langle a\rangle$, е неутрален елемент во G_a, ќе земеме произволен елемент $a^{\langle r+y\rangle}$ од G_a. Бидејќи

$$(nr+(n-1)x+y+1)(n-1)+1=([(r+x)(n-1)+1]+(r+y))(n-1)+1\equiv$$
$$\equiv (r+y)(n-1)+1 \,(\mathrm{mod}\ p),$$

тогаш $[a^{\langle r+x\rangle}a^{\langle r+x\rangle}...a^{\langle r+x\rangle}a^{\langle r+y\rangle}a^{\langle r+x\rangle}...a^{\langle r+x\rangle}]=a^{\langle nr+(n-1)x+y+1\rangle}=a^{\langle r+y\rangle}$, за секој ненегативен цел број y. □

Последица 1.5. *Во обична полугрупа (т.е. во 2-полугрупа), полугрупата генерирана од еден елемент, ако е од конечен ред, има единствен идемпотентен елемент.* □

Ова е јасно, зашто во овој случај $n-1=1$.

Последица 1.6. (Пост) *Една циклична n-група $(G,[\,])$ има единствен идемпотент ако и само ако нејзиниот ред е заемно прост со $n-1$.* □

Една n-полугрупа $(G,[\,])$ е *периодична* ако и само ако секој елемент од $(G,[\,])$ има конечен ред, т.е. е конечна n-полугрупа. Таа се нарекува *хомогена* ако и само ако за секој елемент $a\in G$, $\langle a\rangle$ содржи идемпотент.

Еден n-арен алгебарски систем $(G,[\,])$ се нарекува *ентропичен* ако и само ако

$$[[a_{11}a_{12}...a_{1n}][a_{21}a_{22}...a_{2n}]...[a_{n1}a_{n2}...a_{nn}]]=[[a_{11}a_{21}...a_{n1}][a_{12}a_{22}...a_{n2}]...[a_{1n}a_{2n}...a_{nn}]]$$

за секоја $n\times n$ матрица $[a_{ij}]$ со елементи од G.

Очигледно, комутативноста повлекува ентропија, па ако постои неутрален елемент, тогаш ентропијата ја повлекува и комутативноста и асоцијативноста.

Пред да продолжиме натаму, згодно е да ги погледнеме следниве две леми.

Лема 1.1. *Множеството од сите ненегативни цели броеви формира комутативна полугрупа со операција * дефинирана со:*

$$a^{\langle s_1\rangle*\langle s_2\rangle}=(a^{\langle s_1\rangle})^{\langle s_2\rangle} \text{ или } \langle s_1\rangle*\langle s_2\rangle=\langle s_1s_2(n-1)+s_1+s_2\rangle. \ \square$$

Проверката на ова тврдење е директна. Покрај тоа, може да се провери дека $\langle s_1\rangle*\langle s_2\rangle*...*\langle s_n\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(s_1,s_2,...,s_n)(n-1)^{i-1}$, каде што σ_i ја означува i-тата елементарна симетрична функција на s-овците.

Со индукција по m се покажува следнава

Лема 1.2. *За секој цел број* $m \geq 0$ *и кое било множество елементи* $x_1, x_2, ..., x_n$ *што припаѓаат на еден ентропичен* n*-арен систем, важи следново равенство* $[x_1 x_2 ... x_n] = [x_1^{\langle m \rangle} x_2^{\langle m \rangle} ... x_n^{\langle m \rangle}]$. □

Теорема 1.3. *Ентропична и хомогена* n*-полугрупа* $(G,[\,])$ *е дисјунктна унија од* n*-потполугрупи* $(G_e,[\,])$, *наречени максимални унипотентни* n*-потполугрупи од* $(G,[\,])$, *секоја од која содржи само еден идемпотент* $e \in G$ *таков што* $[G_{e_1} G_{e_2} ... G_{e_n}] \subseteq G_{[e_1 e_2 ... e_n]}$, *за кое било множество* $e_1, e_2, ..., e_n$ *од идемпотенти во* G.

Доказ. Нека E е множеството од сите идемпотентни елементи во G. Бидејќи $(G,[\,])$ е ентропична n-полугрупа, следува дека E е n-потполугрупа од $(G,[\,])$.

За секој $e \in E$, нека $G_e = \{x : x^{\langle m \rangle} = e$ за некој цел број $m \geq 0\}$. Ако $e \neq e'$, каде што $e, e' \in E$, тогаш $G_e \cap G_{e'} = \emptyset$. Зашто, кога не би било така, $x^{\langle r \rangle} = e$ и $x^{\langle s \rangle} = e$ за некој $x \in G$. Но, тогаш

$$e = e^{\langle s \rangle} = (x^{\langle r \rangle})^{\langle s \rangle} = x^{\langle r \rangle * \langle s \rangle} = x^{\langle s \rangle * \langle r \rangle} = (x^{\langle s \rangle})^{\langle r \rangle} = e'^{\langle r \rangle} = e',$$

што е контрадикција.

Множеството G_e, за секој $e \in E$, е исто така n-полугрупа над истата n-арна операција дефинирана во G. Зашто, ако $x_1, x_2, ..., x_n \in G_e$, така што

$$x_1^{\langle m_1 \rangle} = x_2^{\langle m_2 \rangle} = ... = x_n^{\langle m_n \rangle} = e,$$

за некои ненегативни цели броеви $m_1, m_2, ..., m_n$, тогаш

$$[x_1 x_2 ... x_n]^{\langle m_1 \rangle * \langle m_2 \rangle * ... * \langle m_n \rangle} = ((x_1)^{\langle m_1 \rangle})^{\langle m_2 \rangle * ... * \langle m_n \rangle} ((x_2)^{\langle m_2 \rangle})^{\langle m_1 \rangle * ... * \langle m_n \rangle} ... ((x_n)^{\langle m_n \rangle})^{\langle m_1 \rangle * ... * \langle m_{n-1} \rangle} = [ee...e] = e.$$

Од хомогеноста на $(G,[\,])$ следува дека $G = \bigcup_{e \in E} G_e$.

Конечно, нека $x_1 \in G_{e_1}$, $x_2 \in G_{e_2}$, . . ., $x_n \in G_{e_n}$, каде што $e_1, e_2, ..., e_n \in E$ се такви што $x_1^{\langle m_1 \rangle} = e_1$, $x_2^{\langle m_2 \rangle} = e_2$, . . ., $x_n^{\langle m_n \rangle} = e_n$ за некои ненегативни цели броеви $m_1, m_2, ..., m_n$. Тогаш

$$[x_1 x_2 ... x_n]^{\langle m_1 \rangle * \langle m_2 \rangle * ... * \langle m_n \rangle} = ((x_1)^{\langle m_1 \rangle})^{\langle m_2 \rangle * ... * \langle m_n \rangle} ((x_2)^{\langle m_2 \rangle})^{\langle m_1 \rangle * ... * \langle m_n \rangle} ... ((x_n)^{\langle m_n \rangle})^{\langle m_1 \rangle * ... * \langle m_{n-1} \rangle} = [e_1 e_2 ... e_n].$$

Оттука следува и резултатот дека $[G_{e_1} G_{e_2} ... G_{e_n}] \subseteq G_{[e_1 e_2 ... e_n]}$. □

Една n-полугрупа $(G,[\,])$ е *силно реверзибилна* ако и само ако за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ постојат ненегативни цели броеви $m, m_1, m_2, ..., m_n$ такви што

$$[x_1 x_2 ... x_n]^{\langle m \rangle} = [x_{\varphi(1)}^{\langle m_{\varphi(1)} \rangle} x_{\varphi(2)}^{\langle m_{\varphi(2)} \rangle} ... x_{\varphi(n)}^{\langle m_{\varphi(n)} \rangle}]$$

за секоја пермутација φ на броевите $1, 2, ..., n$.

Забележи дека секоја комутативна n-полугрупа е силно реверзибилна.

Теорема 1.4. *Силно реверзибилна и хомогена* n*-полугрупа* $(G,[\,])$ *е дисјунктна унија од максимални унипотентни* n*-потполугрупи* $(G_e,[\,])$. *Притоа, секоја од нив содржи само еден идемпотент* e *таков што* $[G_{e_1}G_{e_2}...G_{e_n}]\subseteq G_{[e_1e_2...e_n]}$, *за кое било множество* $e_1,e_2,...,e_n$ *од идемпотенти во* G.

Доказ. Јасно е дека силната реверзибилност повлекува дека идемпотентите во G формираат n-потполугрупа E.

Нека $G_e=\{x: x^{\langle m\rangle}=e$ за некој цел број $m\geq 0\}$ е дефинирано како во Теоремата 1.3 и нека $x_1,x_2,...,x_n\in G_e$ така што $x_1^{\langle s_1\rangle}=x_2^{\langle s_2\rangle}=...=x_n^{\langle s_n\rangle}=e$ за некои ненегативни цели броеви $s_1,s_2,....,s_n$. Силната реверзибилност повлекува дека постојат ненегативни цели броеви $m,m_1,m_2,...,m_n$ такви што

$$[x_1x_2...x_n]^{\langle m\rangle}=[x_{\varphi(1)}{}^{\langle m_{\varphi(1)}\rangle}x_{\varphi(2)}{}^{\langle m_{\varphi(2)}\rangle}...x_{\varphi(n)}{}^{\langle m_{\varphi(n)}\rangle}]$$

за секоја пермутација φ на броевите $1,2,...,n$. Имајќи предвид дека елементите на десната страна комутираат добиваме дека

$$[x_1x_2...x_n]^{\langle m\rangle*\langle s_1\rangle*\langle s_2\rangle*...*\langle s_n\rangle}=[x_{\varphi(1)}{}^{\langle m_{\varphi(1)}\rangle}x_{\varphi(2)}{}^{\langle m_{\varphi(2)}\rangle}...x_{\varphi(n)}{}^{\langle m_{\varphi(n)}\rangle}]^{\langle s_1\rangle*\langle s_2\rangle*...*\langle s_n\rangle}=$$
$$=x_1^{\langle m_1\rangle*\langle s_1\rangle*...*\langle s_n\rangle}x_2^{\langle m_2\rangle*\langle s_1\rangle*...*\langle s_n\rangle}...\,x_n^{\langle m_n\rangle*\langle s_1\rangle*...*\langle s_n\rangle}=[ee...e]=e.$$

Доказот на остатокот од теоремата е ист како во Теоремата 1.3 освен што се користи комутативноста на одредени степени на елементи од G. □

Задачи

1. Покажи (со индукција по $k\geq 0$) дека $a^{\langle r\rangle}=a^{\langle r+kp\rangle}$, каде што $p=s-r$ и s е најмалиот можен ненегативен цел број за кој важи $a^{\langle r\rangle}=a^{\langle s\rangle}$.

2. Покажи дека $a^{\langle x\rangle}=a^{\langle y\rangle}$ ако и само ако $x\equiv y \pmod{p(n-1)}$, каде што $p=s-r$ и s е најмалиот можен ненегативен цел број за кој важи $a^{\langle r\rangle}=a^{\langle s\rangle}$.

3. Покажи дека G_a е идеал во $\langle a\rangle$.

4. Покажи дека G_a е максимална n-подгрупа од G.

5. Ако една n-полугрупа е i-кратлива за кој било фиксен $i=1,2,...,n$, тогаш секој елемент со конечен ред има индекс 0.

4.2. Генераторни множества и циклични n-групи

Слично како во претходниот параграф, ќе започнеме со поимот за n-арен степен на елемент од n-арна група.

Нека s е цел број и a е елемент од n- група $(G,[\,])$. Тогаш *s-ти n-арен степен на елементот a* го нарекуваме оној елемент од G, што ќе го означуваме со $a^{[s]}$, за кој:

1) ако $s=0$, тогаш $a^{[s]}=a$;

2) ако $s>0$, тогаш $a^{[s]}=\left[\overset{s(n-1)+1}{a}\right]$;

3) ако $s<0$, тогаш $a^{[s]}$ е решение на равенката $\left[x\ \overset{-s(n-1)}{a}\right]=a$ односно

$$\left[a^{[s]}\ \overset{-s(n-1)}{a}\right]=a \qquad (2.1)$$

Лема 2.1. *За секој цел број k и секој елемент $a\in G$, низите $a^{[k]}a$ и $aa^{[k]}$ се еквивалентни.*

Доказ. Ги разгледуваме следниве случаи:

1) $k=0$. Тогаш $a^{[k]}=a^{[0]}=a$ и затоа $a^{[k]}a$ и $aa^{[k]}$ се еквивалентни.

2) $k>0$. Го разгледуваме производот $\left[a^{[k]}a\ \overset{n-2}{a}\right]$, кој според (2.1) можеме да го запишеме како:

$$\left[a^{[k]}a\ \overset{n-2}{a}\right]=\left[\left[\overset{k(n-1)+1}{a}\right]a\ \overset{n-2}{a}\right]=\left[a\left[\overset{k(n-1)+1}{a}\right]\overset{n-2}{a}\right]=\left[aa^{[k]}\ \overset{n-2}{a}\right].$$

Оттука, следува дека $a^{[k]}a$ и $aa^{[k]}$ се еквивалентни.

3) $k<0$. Според (3.1), $\left[a^{[k]}\ \overset{-k(n-1)}{a}\right]=a$ или $\left[a^{[k]}\ \overset{-k(n-1)-1}{a}\ a\right]=a$. Затоа, согласно со Св. 1.5 од Гл.3, следува дека $a^{[k]}\ \overset{-k(n-1)-1}{a}$ е неутрална $-k(n-1)$-низа. Тоа значи дека $\left[aa^{[k]}\ \overset{-k(n-1)-1}{a}\right]=a=\left[a^{[k]}a\ \overset{-k(n-1)-1}{a}\right]$. Оттука следува дека $a^{[k]}a$ и $aa^{[k]}$ се еквивалентни. □

Својство 2.1. *За произволни цели броеви k_1 и k_2 и секој елемент a од n-група $(G,[\,])$, низите $a^{[k_1]}a^{[k_2]}$ и $a^{[k_2]}a^{[k_1]}$ се еквивалентни.*

Доказ. Ако $k_2=0$, тогаш, според Лема 2.1, тврдењето е точно. Затоа, нека $k_2\neq 0$. Нека $k_2>0$. Тогаш, со оглед на (3.2), добиваме:

$$\left[a^{[k_1]}a^{[k_2]}\ \overset{n-2}{a}\right]=\left[a^{[k_1]}\ \overset{k_2(n-1)+1}{a}\ \overset{n-2}{a}\right]=\left[aa^{[k_1]}\ \overset{k_2(n-1)}{a}\ \overset{n-2}{a}\right]=\ldots=\left[a^{[k_2]}a^{[k_1]}\ \overset{n-2}{a}\right]$$

и затоа $a^{[k_1]}a^{[k_2]}$ и $a^{[k_2]}a^{[k_1]}$ се еквивалентни.

Нека $k_2<0$. Тогаш, од дефиницијата на n-арен степен во n-група, $\left[a^{[k_2]}\overset{-k_2(n-1)}{a}\right]=a$. Оттука и од Св.1.5 од Гл. 3, заклучуваме дека $a^{[k_2]}\overset{-k_2(n-1)-1}{a}$ е неутрална $-k_2(n-1)$-низа. Според тоа,

$$\left[a^{[k_1]}a^{[k_2]}\overset{-k_2(n-1)-1}{a}\right]=\left[a^{[k_2]}\overset{-k_2(n-1)-1}{a}\,a^{[k_1]}\right]=a^{[k_1]}.$$

Оттука и од Лема 2.1, имаме:

$$\left[a^{[k_1]}a^{[k_2]}\overset{-k_2(n-1)-1}{a}\right]=\left[a^{[k_2]}\overset{-k_2(n-1)-2}{a}\,a^{[k_1]}a\right]=\dots=\left[a^{[k_2]}a^{[k_1]}\overset{-k_2(n-1)-1}{a}\right],$$

од каде што следува дека низите $a^{[k_1]}a^{[k_2]}$ и $a^{[k_2]}a^{[k_1]}$ се еквивалентни. □

Својство 2.2. *За произволни цели броеви* $k_1,k_2,\dots,k_n$ *и секој елемент* a *од* n*-арната група* $(G,[\,])$ *важи равенството*

$$\left[a^{[k_1]}a^{[k_2]}\dots a^{[k_n]}\right]=a^{[k_1+k_2+\dots+k_n+1]}.$$

Доказ. Од Св.2.1 произлегува дека можеме да сметаме дека низата k_1^n е неопаѓачка. Нека бројот на сите негативни (нули, позитивни) членови на низата k_1^n е i (соодветно j, t). Тогаш $i+j+t=n$, каде што $0\le i\le n$, $0\le j\le n$, $0\le t\le n$ и низата k_1^n можеме да ја претставиме вака: $k_1^i k_{i+1}^{i+j} k_{i+j+1}^n$ – низа на негативни, нули и позитивни членови на низата k_1^n, соодветно. Јасно, k_1^i (k_{i+1}^{i+j}, k_{i+j+1}^n) е празна кога $i=0$ (соодветно $j=0$, $t=0$).

Да ги означиме со x и y, соодветно, левата и десната страна на равенството $\left[a^{[k_1]}a^{[k_2]}\dots a^{[k_n]}\right]=a^{[k_1+k_2+\dots+k_n+1]}$.

Ако $i=0$, тогаш $j+t=n$. Ако $j=0$ или $t=0$, тогаш непосредно од дефиницијата на n-арен степен во n-група, следува дека $x=y$. Јасно е, исто така, дека $x=y$ и при $j>0$, $t>0$. Навистина, во овој случај имаме:

$$x=\left[\overset{j}{a}\ \overset{k_{j+1}(n-1)+1}{a}\ \dots\ \overset{k_{j+t}(n-1)+1}{a}\right]=\left[\overset{(k_{j+1}+..+k_{j+t})(n-1)+(j+t)}{a}\right]=\left[\overset{(k_{j+1}+..+k_{j+t})(n-1)+n}{a}\right]=$$

$$=\left[\overset{(k_{j+1}+..+k_{j+t}+1)(n-1)+1}{a}\right]=a^{[k_{j+1}+\dots+k_{j+t}+1]}.$$

Бидејќи $k_1=k_2=\dots=k_j=0$, имаме дека $y=a^{[(k_1+k_2+\dots+k_j)+k_{j+1}+\dots+k_{j+t}+1]}=a^{[k_{j+1}+\dots+k_{j+t}+1]}$. Следствено, $x=y$.

Натаму ќе сметаме дека $i>0$. Го разгледуваме равенството:

$$z=\left[x\ \overset{-k_1(n-1)}{a}\ \overset{-k_2(n-1)}{a}\ \dots\ \overset{-k_i(n-1)}{a}\right].$$

Со замена на x во ова равенство, а имајќи ја предвид дефиницијата на n-арен степен во n-група, добиваме дека

$$z=\begin{cases}\left[\left[a^{[k_1]}\overset{-k_1(n-1)}{a}\right]\ldots\left[a^{[k_i]}\overset{-k_i(n-1)}{a}\right]\overset{j}{a}\right] & ,\quad j\geq 0,\ t=0\\ \left[\left[a^{[k_1]}\overset{-k_1(n-1)}{a}\right]\ldots\left[a^{[k_i]}\overset{-k_i(n-1)}{a}\right]\overset{j}{a}\,a^{[k_{i+j+1}]}\ldots a^{[k_{i+j+t}]}\right] & ,\quad j\geq 0,\ t>0\end{cases}$$

Оттука и од дефиницијата на n-арен степен во n-група, следува дека

$$z=\begin{cases}\left[\overset{i+j}{a}\right] & ,\quad j\geq 0,\ t=0\\ \left[\overset{i+j}{a}\ \overset{k_{i+j+1}(n-1)+1}{a}\ \ldots\ \overset{k_{i+j+t}(n-1)+1}{a}\right] & ,\quad j\geq 0,\ t>0\end{cases}.$$

Бидејќи $i+j+t=n$, добиваме дека

$$z=\begin{cases}a^{[1]} & ,\quad j\geq 0,\ t=0\\ a^{[k_{i+j+1}+\ldots+k_n+1]} & ,\quad j\geq 0,\ t>0\end{cases}.$$

Нека $u=\left[y\ \overset{-k_1(n-1)}{a}\ \overset{-k_2(n-1)}{a}\ \ldots\ \overset{-k_i(n-1)}{a}\right]$. Да ставиме $m=k_1+k_2+\ldots+k_n+1$. Тогаш:

$$m=\begin{cases}k_1+k_2+\ldots+k_i+1 & ,\quad j\geq 0,\quad t=0\\ (k_1+k_2+\ldots+k_i)+(k_{i+j+1}+\ldots+k_n+1) & ,\quad j\geq 0,\quad t>0\end{cases}\tag{2.2}$$

Ги разгледуваме следниве можности:

1) $m=0$. Тогаш $y=a^{[0]}=a$ и $u=\left[\overset{-(k_1+k_2+\ldots+k_i)(n-1)+1}{a}\right]$. Од (2.2) следува дека:

$$k_1+k_2+\ldots+k_i=\begin{cases}-1 & ,\quad j\geq 0,\quad t=0\\ -(k_{i+j+1}+\ldots+k_n+1) & ,\quad j\geq 0,\quad t>0\end{cases}.$$

Затоа, според дефиниција на n-арен степен во n-група добиваме:

$$u=\begin{cases}a^{[1]} & ,\quad j\geq 0, t=0\\ a^{[k_{i+j+1}+\ldots+k_n+1]} & ,\quad j\geq 0, t>0\end{cases}.$$

Оттука и од претходните равенства заклучуваме дека $z=u$ и следствено $x=y$.

2) $m>0$. Тогаш $y=a^{[m]}=\left[\overset{m(n-1)+1}{a}\right]$ и од (2.2) имаме дека

$$u=\left[\overset{(m-k_1-\ldots-k_i)(n-1)+1}{a}\right]=\begin{cases}a^{[1]} & ,\quad j\geq 0,\quad t=0\\ a^{[k_{i+j+1}+\ldots+k_n+1]} & ,\quad j\geq 0,\quad t>0\end{cases}.$$

Затоа, $z=u$ и следствено $x=y$.

3) $m<0$. Врз основа на равенството (2.1) и тоа што $y=a^{[m]}$, имаме дека $\left[y\ \overset{-m(n-1)}{a}\right]=a$. Затоа, очигледно

$$\left[u\ \overset{-m(n-1)}{a}\right]=\left[\left[y\ \overset{-k_1(n-1)}{a}\ \ldots\ \overset{-k_i(n-1)}{a}\right]\overset{-m(n-1)}{a}\right]=$$

$$=\left[\left[y\ \overset{-m(n-1)}{a}\right]\overset{-(k_1+\ldots+k_i)(n-1)}{a}\right]=\left[a\ \overset{-(k_1+\ldots+k_i)(n-1)}{a}\right]=\left[\overset{-(k_1+\ldots+k_i)(n-1)+1}{a}\right].$$

Оттука и од (2.2) следува дека

$$\left[u\ \overset{-m(n-1)}{a}\right]=\begin{cases}\left[\overset{(1-m)(n-1)+1}{a}\right] &, \quad j\geq 0,\ \ t=0\\ \left[\overset{((k_{i+j+1}+\ldots+k_n+1)-m)(n-1)+1}{a}\right] &, \quad j\geq 0,\ \ t>0\end{cases}$$

од каде што добиваме

$$\left[u\ \overset{-m(n-1)}{a}\right]=\begin{cases}\left[a^{[1]}\ \overset{-m(n-1)}{a}\right] &, \quad j\geq 0,\ \ t=0\\ \left[a^{[k_{i+j+1}+\ldots+k_n+1]}\ \overset{-m(n-1)}{a}\right] &, \quad j\geq 0,\ \ t>0.\end{cases}$$

Според тоа, $\left[u\ \overset{-m(n-1)}{a}\right]=\left[z\ \overset{-m(n-1)}{a}\right]$ и оттука $z=u$, односно $x=y$. □

Со индукција по m се покажува следнава последица.

Последица 2.1. *За произволни цели броеви* $k_1,k_2,\ldots,k_{m(n-1)+1}$ *и за секој елемент* a *од* n*-група* $(G,[\ ])$ *важи равенството:*

$$\left[a^{[k_1]}a^{[k_2]}\ldots a^{[k_{m(n-1)+1}]}\right]=a^{[k_1+k_2+\ldots+k_{m(n-1)+1}+m]}.$$

Својство 2.3. *За произволни цели броеви* k_1 *и* k_2 *и секој елемент* a *од* n*-арната група* G *важи равенството:*

$$(a^{[k_1]})^{[k_2]}=a^{[k_1k_2(n-1)+k_1+k_2]}. \tag{2.3}$$

Доказ. Нека x и y се соодветно левата и десната страна на равенството (2.3). За $k_2=0$, равенството (2.3) е очигледно, па затоа нека $k_2\neq 0$.

1) $k_2>0$. Од Посл. 2.1 имаме:

$$(a^{[k_1]})^{[k_2]}=(\underbrace{a^{[k_1]}\ldots a^{[k_1]}}_{k_2(n-1)+1})=a^{[(\underbrace{k_1+\ldots+k_1}_{k_2(n-1)+1})+k_2]}=a^{[k_1k_2(n-1)+k_1+k_2]}$$

2) $k_2<0$. Од (2.1) имаме:

$$\left[(a^{[k_1]})^{[k_2]}\underbrace{a^{[k_1]}\ldots a^{[k_1]}}_{-k_2(n-1)}\right]=a^{[k_1]}.$$

Од горново равенство добиваме дека важи равенството

$$\left[x\underbrace{a^{[k_1]}\ldots a^{[k_1]}}_{-k_2(n-1)}\right]=a^{[k_1]}. \tag{2.4}$$

Да го разгледаме сега изразот $\left[y\underbrace{a^{[k_1]}\ldots a^{[k_1]}}_{-k_2(n-1)}\right]$. Со замена на y и примената на Посл. 2.1 добиваме дека

$$\left[a^{[k_1k_2(n-1)+k_1+k_2]}\underbrace{a^{[k_1]}\ldots a^{[k_1]}}_{-k_2(n-1)}\right]=a^{[k_1k_2(n-1)+k_1+k_2-k_1k_2(n-1)-k_2]}=a^{[k_1]}.$$

Оттука и од (2.4) заклучуваме дека $\left[x\underbrace{a^{[k_1]}...a^{[k_1]}}_{-k_2(n-1)} \right] = \left[y\underbrace{a^{[k_1]}...a^{[k_1]}}_{-k_2(n-1)} \right]$, т.е. $x = y$. □

Последица 2.2. *Нека a е елемент од n-група $(G,[\ ])$ и нека s е произволен цел број. Тогаш низата*

$$a^{[-sk(n-1)+s-k]}\underbrace{a^{[s]}...a^{[s]}}_{k(n-1)-2},$$

каде што k е произволен природен број различен од 1, е обратна низа за елементот $a^{[s]}$. Специјално, обратна за $a^{[s]}$ е низата

$$a^{[s(3-2n)-2]}\underbrace{a^{[s]}...a^{[s]}}_{2n-4}.$$

Всушност, од (2.1) имаме дека $\left[(a^{[s]})^{[-k]}\underbrace{a^{[s]}...a^{[s]}}_{k(n-1)} \right] = a^{[s]}$, од каде што заклучуваме дека $(a^{[s]})^{[-k]}\underbrace{a^{[s]}...a^{[s]}}_{k(n-1)-1} = a^{[s]}$ е неутрална $k(n-1)$-низа. Имајќи го предвид равенството (2.3), заклучуваме дека низата $a^{[-sk(n-1)+s-k]}\underbrace{a^{[s]}...a^{[s]}}_{k(n-1)-2}$ е обратна низа за елементот $a^{[s]}$. □

Сега ќе го разгледаме прашањето за генерирани подгрупи од n-групи.

Нека $(G,[\ ])$ е n-група и нека H е непразно подмножество од множеството G на кое е дефинирана n-арната операција $[\ ]$. Алгебрата $(H,[\ ])$ се нарекува *n-подгрупа* од n-групата $(G,[\ ])$ ако и само ако $(H,[\ ])$ е n-група.

За пократко искажување, натаму наместо да велиме n-подгрупа од n-група, просто ќе велиме *подгрупа од n-група*.

Очигледно важи следново тврдење:

Својство 2.4. *Нека $(G,[\ ])$ е n-група и нека H е непразно подмножество од множеството G. Тогаш:*

1) ако $(H,[\ ])$ е алгебра за која е исполнет условот: за секоја низа $a_1^{n-1}a \in H^n$, секоја од равенките $[xa_1^{n-1}] = a$ и $[a_1^{n-1}y] = a$ е решлива во H, тогаш $(H,[\ ])$ е подгрупа од $(G,[\ ])$.

2) Ако $|H| < \infty$ и *$(H,[\ ])$ е алгебра, тогаш $(H,[\ ])$ е подгупа од $(G,[\ ])$.* □

Со помош на ова својство лесно се докажува следното

Својство 2.5. *Нека $\{H_\alpha \mid \alpha \in I\}$ е дадена фамилија подгрупи на n-група $(G,[\ ])$ и нека $D = \bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha$. Ако $D \neq \varnothing$, тогаш D е подгрупа од n-групата $(G,[\ ])$.* □

Нека M е непразно подмножество од n-група $(G,[\ ])$. Пресекот на сите подгрупи на n-група $(G,[\ ])$, што го содржат множеството M е подгрупа која ја нарекуваме *подгрупа генерирана од множеството M*, а M го нарекуваме *генераторно множество на таа подгрупа*. Подгрупата генерирана од множеството M ќе ја означуваме со $\langle M \rangle$.

Теорема 2.1. *Ако* M *е непразно подмножество од* n*-арната група* $(G,[\ ])$, *тогаш*

$$\langle M \rangle = \{ \left[a_1^{[k_1]} a_2^{[k_2]} \dots a_{m(n-1)+1}^{[k_{m(n-1)+1}]} \right] \mid a_j \in M,\ k_j \neq 0,\ m \in \mathbf{N} \}.$$

Доказ. Нека H е десната страна на горното равенство. Ќе докажеме дека H е подгрупа на n-групата $(G,[\ ])$. Нека $h_1^n \in H^n$. Тогаш:

$$h_i = \left[a_{i1}^{[k_{i1}]} a_{i2}^{[k_{i2}]} \dots a_{i(m_i(n-1)+1)}^{[k_{i(m_i(n-1)+1)}]} \right],\ a_{ij} \in M\ ,\ i = 1,2,\dots,n.$$

Според тоа,

$$\left[h_1^n \right] = \left[\left[a_{11}^{[k_{11}]} a_{12}^{[k_{12}]} \dots a_{1(m_1(n-1)+1)}^{[k_{1(m_1(n-1)+1)}]} \right] \dots \left[a_{n1}^{[k_{n1}]} a_{n2}^{[k_{n2}]} \dots a_{n(m_n(n-1)+1)}^{[k_{n(m_n(n-1)+1)}]} \right] \right]$$

$$= \Big[\underbrace{a_{11}^{[k_{11}]} a_{12}^{[k_{12}]} \dots a_{1(m_1(n-1)+1)}^{[k_{1(m_1(n-1)+1)}]} \dots a_{n1}^{[k_{n1}]} a_{n2}^{[k_{n2}]} \dots a_{n(m_n(n-1)+1)}^{[k_{n(m_n(n-1)+1)}]}}_{(m_1+m_2+\dots+m_n+1)(n-1)+1} \Big],$$

од каде што се добива дека $\left[h_1^n \right] \in H$. Натаму ќе ја разгледуваме равенката $\left[x h_1^{n-1} \right] = h$, каде што $h_1^{n-1} h \in H^n$. Тогаш, очигледно е дека

$$h_i = \left[a_{i1}^{[k_{i1}]} a_{i2}^{[k_{i2}]} \dots a_{i(m_i(n-1)+1)}^{[k_{i(m_i(n-1)+1)}]} \right],\ a_{ij} \in M\ ,\ i = 1,2,\dots,n-1;$$

$$h = \left[a_1^{[k_1]} a_2^{[k_2]} \dots a_{m(n-1)+1}^{[k_{m(n-1)+1}]} \right],\ a_j \in M\ .$$

Равенката $\left[x h_1^{n-1} \right] = h$ во G има единствено решение и него да го означиме со c. Имајќи ги предвид претходните равенства, добиваме:

$$\left[c a_{11}^{[k_{11}]} a_{12}^{[k_{12}]} \dots a_{1(m_1(n-1)+1)}^{[k_{1(m_1(n-1)+1)}]} \dots a_{(n-1)1}^{[k_{(n-1)1}]} a_{(n-1)2}^{[k_{(n-1)2}]} \dots a_{(n-1)(m_{n-1}(n-1)+1)}^{[k_{(n-1)(m_{n-1}(n-1)+1)}]} \right] = \left[a_1^{[k_1]} a_2^{[k_2]} \dots a_{m(n-1)+1}^{[k_{m(n-1)+1}]} \right].$$

Ако низата $a^{[s(3-2n)-2]} \underbrace{a^{[s]} \dots a^{[s]}}_{2n-4}$ е обратна за елементот $a^{[s]}$ од n-арната група $(G,[\ ])$, тогаш елементот c од горното равенство, можеме да го определиме на следниов начин:

$$c = \Big[a_1^{[k_1]} \dots a_{m(n-1)+1}^{[k_{m(n-1)+1}]} \underbrace{a_{(n-1)(m_{n-1}(n-1)+1)}^{[k_{(n-1)(m_{n-1}(n-1)+1)}(3-2n)-2]} a_{(n-1)(m_{n-1}(n-1)+1)}^{[k_{(n-1)(m_{n-1}(n-1)+1)}]} \dots a_{(n-1)(m_{n-1}(n-1)+1)}^{[k_{(n-1)(m_{n-1}(n-1)+1)}]}}_{2n-3} \dots$$

$$\dots \underbrace{a_{(n-1)1}^{[k_{(n-1)1}(3-2n)-2]} a_{(n-1)1}^{[k_{(n-1)1}]} \dots a_{(n-1)1}^{[k_{(n-1)1}]}}_{2n-3} \dots \underbrace{a_{1(m_1(n-1)+1)}^{[k_{1(m_1(n-1)+1)}(3-2n)-2]} a_{1(m_1(n-1)+1)}^{[k_{1(m_1(n-1)+1)}]} \dots a_{1(m_1(n-1)+1)}^{[k_{1(m_1(n-1)+1)}]}}_{2n-3} \dots$$

$$\dots \underbrace{a_{11}^{[k_{11}(3-2n)-2]} a_{11}^{[k_{11}]} \dots a_{11}^{[k_{11}]}}_{2n-3} \Big].$$

Бројот на сите елементи кои се на десната страна на ова равенство е еднаков на

$$m(n-1)+1+(m_{n-1}(n-1)+1)(2n-3)+\dots+(m_1(n-1)+1)(2n-3) =$$
$$= (m+(2n-3)(m_{n-1}+\dots+m_1+1))(n-1)+1.$$

Следствено, $c \in H$. Слично се докажува решливоста на равенката $\left[h_1^{n-1}y\right] = h$ во H. Дека H е подгрупа на n-арната групата $(G,[\ ])$ заклучуваме од Св.2.4.

Останува да се докаже дека $\langle M \rangle = H$. Бидејќи секој елемент $a \in M$, согласно Св.2.2, можеме да го претставиме во облик $a = a^{[0]} = (\underbrace{a^{[0]}...a^{[0]}}_{n-1}a^{[-1]})$, тогаш $a \in H$, па според тоа, M се содржи во H. Тоа значи дека $\langle M \rangle \subseteq H$. Бидејќи $\langle M \rangle$ е подгрупа, следува дека $\langle M \rangle$ ги содржи сите елементи од облик $\left[a_1^{[k_1]}a_2^{[k_2]}...a_{m(n-1)+1}^{[k_{m(n-1)+1}]}\right]$, каде што $a_j \in M$. Затоа, $H \subseteq \langle M \rangle$. □

Нека a е елемент од n-група $(G,[\ ])$. Подгрупата генерирана од едноелементното множество $\{a\}$ ја нарекуваме *циклична подгрупа на* n*-групата* $(G,[\ ])$ *генерирана од елементот* a и ќе ја означуваме со $\langle a \rangle$; елементот a го нарекуваме *генераторен елемент* на таа подгрупа. Ако $G = \langle a \rangle$, тогаш G се нарекува *циклична* n*-група генерирана со елементот* a.

Од Св.2.2 и Теоремата 2.1 следува:

Последица 2.3. *Ако* a *е елемент од* n*-група* $(G,[\ ])$, *тогаш*

$$\langle a \rangle = \{a^{[s]} \mid s \in \mathbf{Z}\}. \quad \square$$

Ќе го воведеме поимот n-арен ред на елемент од n-арна група. Претходно ќе покажеме неколку тврдења за n-арните степени на елемент од n- група.

Својство 2.6. *Нека* a *е елемент од* n*-група. Тогаш:*

1) *Ако* $a^{[s_1]} = a^{[s_2]}$, *тогаш* $a^{[s_1-s_2]} = a$, $a^{[s_2-s_1]} = a$;

2) *Ако е исполнето најмалку едно од равенствата* $a^{[s_1-s_2]} = a$ *или* $a^{[s_2-s_1]} = a$, *тогаш е исполнето и равенството* $a^{[s_1]} = a^{[s_2]}$.

Доказ. 1) Од $a^{[s_1]} = a^{[s_2]}$ добиваме дека $\left[\underbrace{a^{[s_1]}a^{[-s_2-1]}a^{[0]}...a^{[0]}}_{n}\right] = \left[\underbrace{a^{[s_2]}a^{[-s_2-1]}a^{[0]}...a^{[0]}}_{n}\right]$, а користејќи го Св.2.2 го добиваме равенството $a^{[s_1-s_2]} = a$. На сличен начин докажуваме дека важи и $a^{[s_2-s_1]} = a$.

2) Нека е исполнето најмалку едно од равенствата $a^{[s_1-s_2]} = a$ или $a^{[s_2-s_1]} = a$. Нека е тоа на пример $a^{[s_1-s_2]} = a$.

Тогаш $\left[\underbrace{a^{[s_1-s_2]}a^{[s_2-1]}a^{[0]}...a^{[0]}}_{n}\right] = \left[\underbrace{aa^{[s_2-1]}a^{[0]}...a^{[0]}}_{n}\right]$. Од Св.2.2 произлегува равенството $a^{[s_1]} = a^{[s_2]}$. Слично се докажува дека ако е исполнето $a^{[s_2-s_1]} = a$, тогаш важи $a^{[s_1]} = a^{[s_2]}$. □

Последица 2.4. *Нека* a *е елемент од* n*-група* $(G,[\ ])$. *Ако* $a^{[s_1]} = a^{[s_2]}$ *при* $s_1 \neq s_2$, *тогаш постои природен број* r, *таков што* $a^{[r]} = a$. □

Последица 2.5. *Нека* a *е елемент од* n*-група* $(G,[\ ])$. *Ако* $a^{[l]}=a$ *тогаш и* $a^{[-l]}=a$.

Доказ. Ако $a^{[l]}=a$, тогаш $a^{[l]}=a^{[0]}$, па од $a^{[s_2-s_1]}=a$, имаме дека $a^{[-l]}=a$. □

Нека a е елемент од n-група $(G,[\ ])$. Да претпоставиме дека е исолнето равенството $a^{[s_1]}=a^{[s_2]}$ при $s_1\neq s_2$ (очигледно, ова секогаш важи кога $(G,[\ ])$ е конечна n-група). Тогаш, согласно со Посл.2.4, постои природен број r за кој важи $a^{[r]}=a$. Најмалиот природен број m, за кој е исполнето равенството $a^{[m]}=a$, го нарекуваме *конечен* n*-арен ред на елементот* a. Ако сите n-арни степени на елементот a се различни, односно при произволни два различни s_1 и s_2 $a^{[s_1]}\neq a^{[s_2]}$, тогаш a го нарекуваме *елемент со бесконечен* n*-арен ред.* n-арниот ред на елемент a ќе го означуваме со $|a|$. *Елемент од* n*-група чијшто* n*-арен ред е* 1, *се нарекува идемпотентен елемент.*

Својство 2.7. *Ако елемент* a *од* n*-арна група* $(G,[\ ])$ *има конечен* n*-арен ред* m, *тогаш* $a^{[s]}=a$ *ако и само ако* m *е делител на* s.

Доказ. $\Leftarrow$: Ќе докажеме дека ако m е делител на s, односно ако $s=mt$, тогаш важи $a^{[s]}=a$. Ќе ги разгледаме следниве случаи:

1.1) Нека $s>0$. Јасно, ако $t=1$, тогаш важи $a^{[s]}=a$. Да претпоставиме дека постои такво t, за кое равенството $a^{[s]}=a$ не е исполнето. Го избираме најмалото од сите такви t. Јасно е дека $t>1$. Според Посл. 3.1, добиваме

$$a^{[s]}=a^{[mt]}=\left[\underbrace{a^{[m(t-1)]}a^{[0]}...a^{[0]}}_{m(n-1)+1}\right]=\left[\overset{m(n-1)+1}{a}\right]=a^{[m]}=a,$$

што е противречност.

1.2) Нека $s<0$. Тогаш $-s>0$, при што m е делител на $-s$. Од случајот 1.1) заклучуваме дека $a^{[-s]}=a$. Од Посл.2.5, следува дека важи равенството $a^{[s]}=a$.

$\Rightarrow$: Нека е исполнето равенството $a^{[s]}=a$. Ќе покажеме дека m е делител на s. Од $s=mt+r$, каде што $0\leq r<m$ и од Посл.2.1 добиваме дека

$$a=a^{[s]}=a^{[mt+r]}=\left[\underbrace{a^{[mt]}a^{[0]}...a^{[0]}}_{r(n-1)+1}\right]=\left[\overset{r(n-1)+1}{a}\right]=a^{[r]}.$$

Бидејќи $0\leq r<m$ и m е ред на елементот a, следува дека $r=0$, па $s=mt$. □

Од Св. 2.6 и Св. 2.7 произлегува:

Последица 2.7. *Ако еден елемент* a *од* n*-група* $(G,[\ ])$ *има конечен* n*-арен ред* m, *тогаш* $a^{[s]}=a^{[l]}$ *ако и само ако* m *е делител на* $s-l$. □

Својство 2.8. *Ако* a *е елемент со конечен* n*-арен ред* m *од* n*-арна група* G *и* s *е произволен цел број, тогаш постои цел број* $0\leq r<m$ *таков што* $s=mq+r$ *и* $a^{[s]}=a^{[r]}$. □

Својство 2.9. *Ако a е елемент со конечен n-арен ред m од n-арна група G, тогаш $|\langle a\rangle| = m$ и $\langle a\rangle = \{a^{[0]} = a, a^{[1]}, ..., a^{[m-1]}\}$.*

Доказ. Нека $Z = \{a^{[0]} = a, a^{[1]}, ..., a^{[m-1]}\}$. Не е тешко да се покаже дека сите елементи од Z се меѓусебе различни, па $Z \subseteq \langle a\rangle = \{a^{[s]} | s \in \mathbf{Z}\}$. Нека $a^{[i]} = a^{[j]}$, каде што $0 \le i < m$ и $0 \le j < m$. Да претпоставиме дека $i > j$. Тогаш, од Посл. 2.7 заклучуваме дека m е делител на $i - j$, што не е можно бидејќи $0 < i - j < m$.

Од Посл. 2.3 следува дека $\langle a\rangle$ се состои од сите n-арни степени на елементот a. Но, според Св. 2.8, секој таков степен се совпаѓа со некој елемент од Z и затоа $\langle a\rangle \subseteq Z$. Значи, $Z = \langle a\rangle$. □

Теорема 2.2. *Сите бесконечни циклични n-групи се изоморфни меѓу себе. Изоморфни меѓу себе се и сите конечни циклични n-арни групи од ист ред.*

Доказ. 1) Нека $(G,[\ ]) = \langle a\rangle$ е бесконечна циклична n-арна група. Нека

$$G' = \{s(n-1)+1 | s \in \mathbf{Z}\}.$$

На множеството G' дефинираме n-арна операција $[\ ]'$ со:

$$\left[x_1^n\right]' = x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Лесно се докажува дека $(G',[\ ]')$ е n-група.

G и G' се изоморфни n-групи. Имено, од Посл. 2.3 следува дека $G = \{a^{[s]} | s \in \mathbf{Z}\}$. Дефинираме пресликување $\varphi : G \to G'$ на следниов начин:

$$\varphi(a^{[s]}) = s(n-1)+1.$$

Јасно, φ е биекција од G во G'. Останува да покажеме дека φ е хомоморфизам од $(G,[\ ])$ во $(G',[\ ]')$. Нека, $a^{[s_1]}$, $a^{[s_2]}$, ..., $a^{[s_n]}$ се произволни елементи од G. Од Св. 2.2 и горните две равенства имаме дека

$$\begin{aligned}\varphi(a^{[s_1]}a^{[s_2]}...a^{[s_n]}) = \varphi(a^{[s_1+s_2+...+s_n+1]}) &= (s_1+s_2+...+s_n+1)(n-1)+1 = \\ &= (s_1(n-1)+1)+(s_2(n-1)+1)+...+(s_n(n-1)+1) = \\ &= [(s_1(n-1)+1)(s_2(n-1)+1)...(s_n(n-1)+1)]' \\ &= \left[\varphi(a^{[s_1]})\varphi(a^{[s_2]})...\varphi(a^{[s_n]})\right]',\end{aligned}$$

а оттука заклучуваме дека φ е изоморфизам од G во G'.

2) Нека $(G,[\ ]) = \langle a\rangle$ и $(G',[\ ]') = \langle b\rangle$ се конечни циклични n-групи, такви што $|\langle a\rangle| = |\langle b\rangle| = m$. Јасно, a и b се елементи со конечен n-арен ред. Од Св. 2.9 имаме дека $|\langle a\rangle| = |a| = m$, $|\langle b\rangle| = |b| = m$ и дека

$$G = \left\{a^{[0]} = a, a^{[1]}, ..., a^{[m-1]}\right\} \quad \text{и} \quad G' = \left\{b^{[0]} = b, b^{[1]}, ..., b^{[m-1]}\right\}.$$

Ќе покажеме дека $(G,[\ ])$ и $(G',[\ ]')$ се изоморфни n-групи. Дефинираме пресликување ψ од $(G,[\ ])$ во $(G',[\ ]')$ со:

$$\psi(a^{[s]}) = b^{[s]}.$$

Ако $a^{[s_1]} = a^{[s_2]}$, тогаш од Посл. 2.7 имаме дека $s_1 = s_2 + tm$, па затоа $b^{[s_1]} = b^{[s_2]}$. Значи, ψ е добро дефинирано пресликување. Уште повеќе, ψ е биекција.

Нека $a^{[s_1]}$, $a^{[s_2]}$, ..., $a^{[s_n]}$ се произволни елементи од G. Од Св. 2.2 имаме:

$$(a^{[s_1]}a^{[s_2]}...a^{[s_n]}) = a^{[s_1+s_2+...+s_n+1]}.$$

Ако $s_1 + s_2 + ... + s_n + 1 = mq + r$, каде што $0 \le r < m$, тогаш според Посл. 2.7, дефиницијата на ψ и Св. 2.2 добиваме:

$$\begin{aligned}\psi(a^{[s_1]}a^{[s_2]}...a^{[s_n]}) &= \psi(a^{[s_1+s_2+...+s_n+1]}) = \psi(a^{[mq+r]}) = \psi(a^{[r]}) = b^{[r]} = b^{[mq+r]} = \\ &= b^{[s_1+s_2+...+s_n+1]} = \left[b^{[s_1]}b^{[s_2]}...b^{[s_n]}\right]' = \left[\psi(a^{[s_1]})\psi(a^{[s_2]})...\psi(a^{[s_n]})\right]'.\end{aligned}$$

Значи, ψ е изоморфизам од $(G,[\ ])$ во $(G',[\ ]')$. □

Задачи

1. Нека $(G,[\ ])$ е n-група и нека H е непразно подмножество од множеството G. Ако $(H,[\ ])$ е алгебра за која е исполнет условот: за секоја низа $a_1^{n-1}a \in H^n$, секоја од равенките $[xa_1^{n-1}] = a$ и $[a_1^{n-1}y] = a$ е решлива во H, тогаш $(H,[\ ])$ е подгрупа од $(G,[\ ])$. Докажи!

2. Нека $(G,[\ ])$ е n-група и нека H е непразно подмножество од множеството G. Ако $|H| < \infty$ и $(H,[\ ])$ е алгебра, тогаш $(H,[\ ])$ е подгупа од $(G,[\ ])$. Докажи!

3. Докажи дека ако $\{H_\alpha \mid \alpha \in I\}$ е дадена фамилија подгрупи на n-група $(G,[\ ])$ и $D = \bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha$ таков што $D \ne \varnothing$, тогаш D е подгрупа од n-групата $(G,[\ ])$.

4. Докажи дека $(G,[\ ])$ е n-група, каде што $G = \{s(n-1)+1 \mid s \in \mathbf{Z}\}$, а операција-та $[\ ]$ е дефинирана со $\left[x_1^n\right] = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Глава V Прилог

5.1. Идеали во сурјективни n-полугрупи

Секое подмножество S од n-полугрупа $(G,[\ ])$ коешто формира n-полугрупа во однос на истата n-арна операција дефинирана на G, го викаме n-*подполугрупа.*

За едно подмножество I од носителот на n-полугрупа $(G,[\ ])$ велиме дека е i-*идеал*, при што $i\in\{1,2,...,n\}$, ако $\left[\overset{i-1}{G}\,I\,\overset{n-i}{G}\right]\subseteq I$. Да напоменеме дека $\overset{i}{G}$ ја означува низата $\underbrace{GG...G}_{i}$ (аналогна ознака на ознаката $\overset{i}{x}$). Исто така, по договор, $[\overset{0}{G}\,I\,\overset{m}{G}]=[I\,\overset{m}{G}]$, $[\overset{m}{G}\,I\,\overset{0}{G}]=[\overset{m}{G}\,I]$ како и $[\overset{0}{G}\,I\,\overset{0}{G}]=I$. За множеството I велиме дека е *идеал во* $(G,[\ ])$ ако тоа е i-идеал за секој $i\in\{1,2,...,n\}$.

Најмалиот i-идеал на n-полугрупа што го содржи елементот $a\in G$ го викаме *главен* i-*идеал* генериран од a и ќе го означуваме со $(a)_i$. Конструктивно, ова е дадено со:

$$(a)_i=\bigcup_{k=0}^{\infty}X_k \tag{1.1}$$

каде што $X_0=\{a\},X_k=\left[\overset{i-1}{G}\,X_{k-1}\,\overset{n-i}{G}\right]$. Ќе покажеме дека вака дефинираниот главен i-идеал е навистина i-идеал и дека е подмножество од секој друг i-идеал кој го содржи елементот $a\in G$.

$$X_0=\{a\},\ X_1=\left[\overset{i-1}{G}\,a\,\overset{n-i}{G}\right],\ X_2=\left[\overset{i-1}{G}\left[\overset{i-1}{G}\,a\,\overset{n-i}{G}\right]\overset{n-i}{G}\right],\ ...,\ X_k=\underbrace{\left[\overset{i-1}{G}\left[...\left[\overset{i-1}{G}\right.\right.\right.}_{k}\,a\,\underbrace{\left.\left.\left.\overset{n-i}{G}\right]...\right]\overset{n-i}{G}\right]}_{k}.$$

Нека $x\in\left[\overset{i-1}{G}(a)_i\,\overset{n-i}{G}\right]$. Тогаш x е од облик $x=\left[a_1^{i-1}ya'^{\,n-i}_1\right]$, каде што $a_1,...,a_{i-1},a'_1,...,a'_{n-i}$ се произволни елементи од G, а $y\in(a)_i$, т.е. постои $n_0\in\mathbf{N}$

така што $y \in X_{n_0} = \underbrace{\left[\overset{i-1}{G}\left[\ldots\left[\overset{i-1}{G}\right.\right.\right.}_{n_0} a \underbrace{\left.\left.\left.\overset{n-i}{G}\right]\ldots\right]\overset{n-i}{G}\right]}_{n_0}$. Оттука, $y = \left[a_{11}^{i-1}\ldots\left[a_{n_0 1}^{i-1} a a'^{n-i}_{11}\right]\ldots a'^{n-i}_{n_0 1}\right]$,

каде што $a_{j1}^{i-1} \in \overset{i-1}{G}$, $a'^{n-1}_{j1} \in \overset{n-i}{G}$, $j = 1,2,\ldots,n_0$. Тогаш, јасно е дека $x \in X_{n_0+1} \subseteq (a)_i$ т.е. $\left[\overset{i-1}{A}(a)_i\overset{n-i}{A}\right] \subseteq (a)_i$, па навистина $(a)_i$ е i-идеал.

Сега, нека $I \subseteq G$ е i-идеал таков што $a \in I$. Нека $x \in (a)_i$. Значи, постои $n_0 \in \mathbf{N}$ така што $x \in X_{n_0} = \underbrace{\left[\overset{i-1}{G}\left[\ldots\left[\overset{i-1}{G}\right.\right.\right.}_{n_0} a \underbrace{\left.\left.\left.\overset{n-i}{G}\right]\ldots\right]\overset{n-i}{G}\right]}_{n_0}$, т.е. $x = \left[a_{11}^{i-1}\ldots\left[a_{n_0 1}^{i-1} a a'^{n-i}_{11}\right]\ldots a'^{n-i}_{n_0 1}\right]$,

каде што $a_{j1}^{i-1} \in \overset{i-1}{G}$, $a'^{n-i}_{j} \in \overset{n-i}{G}$, $j = 1,2,\ldots,n_0$. Бидејќи $a \in I$ и I е i-идеал следува дека $\left[a_{n_0 1}^{i-1} a a'^{n-i}_{11}\right] \in I$. Од тоа (и од фактот дека I е i-идеал) следува дека $\left[a_{(n_0-1)1}^{i-1}\left[a_{n_0 1}^{i-1} a a'^{n-i}_{11}\right] a'^{n-i}_{21}\right] \in I$. Со продолжување на оваа постапка се добива дека и $x \in I$, т.е. дека $(a)_i \subseteq I$, со што покажавме дека $(a)_i$ е навистина најмалиот i-идеал што го содржи елементот a.

За една n-полугрупа $(G, [\ ])$ велиме дека е *сурјективна* ако $G^{<1>} = G$, при што $G^{<1>} = \left[\overset{n}{G}\right]$.

Очигледно е дека потребен и доволен услов за една n-полугрупа да е сурјективна е операцијата $[\ ]$ да е сурјективна.

Ако $(G, [\ ])$ е сурјективна n-полугрупа, тогаш главните i-идеали имаат малку поинаков облик. Имено, $X_k = \underbrace{\left[\overset{i-1}{G}\left[\ldots\left[\overset{i-1}{G}\right.\right.\right.}_{k} a \underbrace{\left.\left.\left.\overset{n-i}{G}\right]\ldots\right]\overset{n-i}{G}\right]}_{k} = \left[\overset{\overline{k(i-1)}}{G}\ a\ \overset{\overline{k(n-i)}}{G}\right]$, каде што $\overline{k(i-1)}$ и $\overline{k(n-i)}$ се остатоци при делењето на броевите $k(i-1)$ и $k(n-i)$ со $n-1$, соодветно. Затоа,

$$(a)_i = \bigcup_{k=0}^{\infty}\left[\overset{\overline{k(i-1)}}{G}\ a\ \overset{\overline{k(n-i)}}{G}\right] \cup \left[\left[\overset{n-1}{G}\, a\right]\overset{n-1}{G}\right]. \qquad (1.2)$$

Членот $\left[\left[\overset{n-1}{G}\, a\right]\overset{n-1}{G}\right]$ се појавува зашто ако $k = n-1$, тогаш соодветниот елемент во унијата од (1.2) ќе биде $\left[\overset{0}{G}\, a\, \overset{0}{G}\right] = \{a\}$, додека соодветниот елемент во унијата од (1.1) ќе биде

$$X_k = \underbrace{\Big[\overset{i-1}{G}\Big[\ldots\Big[\overset{i-1}{G}}_{k}\, a\, \underbrace{\overset{n-i}{G}\Big]\ldots\Big]\overset{n-i}{G}\Big]}_{k},\ \text{т.е.}\ \Big[\Big[\overset{(n-1)(i-1)}{G}\quad a\Big]\overset{(n-1)(n-i)}{G}\Big] = \Big[\Big[\overset{n-1}{G}\, a\Big]\overset{n-1}{G}\Big].$$

Да забележиме дека дека формулата (1.2) не важи во случајот кога $n = 3$.

$$(a)_1 = \{a\} \cup \Big[a\overset{2}{G}\Big],\ (a)_2 = \{a\} \cup [GaG] \cup \big[G[GaG]G\big],\ (a)_3 = \{a\} \cup \Big[\overset{2}{G}a\Big].$$

Ако $S \subseteq G$ тогаш i-идеалот генериран од S е даден со $(S)_i = \bigcup\limits_{x\in S}(x)_i$.

Слични забелешки може да се кажат и за идеал (a) генериран од елементот $a \in G$.

Наредната теорема ни кажува дека овие различни идеали генерирани од еден елемент не се независни.

Теорема 3.1. *Нека* $(G, [\ ])$ *е сурјективна* n*-полугрупа. Ако* НЗД$(i-1, n-1)$ *е делител на* НЗД$(j-1, m-1)$*, тогаш* $(a)_j \subseteq (a)_i$ *за секој* $a \in G$ *и* $(a)_i$ *е* j*-идеал.*

Доказ. Да претпоставиме дека НЗД$(i-1, n-1)$ е делител на НЗД$(j-1, m-1)$. За да докажиме дека $(a)_j \subseteq (a)_i$, доволно е да докажеме дека за секој природен број m, постои природен број k, таков што $m(j-1) \equiv k(i-1) (\mathrm{mod}\,(n-1))$, зашто од ова ќе следува дека $\overset{\overline{m(j-1)}}{G} = \overset{\overline{k(i-1)}}{G}$. Да ја разгледаме равенката

$$(i-1)x \equiv j-1 (\mathrm{mod}\,(n-1)).$$

Од теорија на броеви познато е дека оваа конгруенциска равенка има решение, зашто НЗД$(i-1, n-1)$ е делител на $j-1$. Нека едно од решенијата е $x = x_0$. Тогаш

$$m(j-1) \equiv (mx_0)(i-1) (\mathrm{mod}\,(n-1)).$$

Значи, $(a)_j \subseteq (a)_i$. Останa уште да се докаже дека $(a)_i$ е j-идеал, т.е. треба да се провери инклузијата $\Big[\overset{j-1}{G}(a)_i\overset{n-j}{G}\Big] \subseteq (a)_i$. Нека $x \in \Big[\overset{j-1}{G}(a)_i\overset{n-j}{G}\Big]$. Тогаш x е од облик $x = \big[b_1^{j-1} y b_1'^{\,n-j}\big]$, каде што $b_1^{j-1} \in \overset{j-1}{A}$, $b_1'^{\,n-j} \in \overset{n-j}{A}$. Од $y \in (a)_i$ следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ така што

$$y \in X_{n_0} = \underbrace{\Big[\overset{i-1}{G}\Big[\ldots\Big[\overset{i-1}{G}}_{n_0}\, a\, \underbrace{\overset{n-i}{G}\Big]\ldots\Big]\overset{n-i}{G}\Big]}_{n_0}, \quad \text{т.е.}\quad y = \Big[a_{11}^{i-1}\ldots\Big[a_{n_0 1}^{i-1} a a_1'^{\,n-i}\Big]\ldots a_{n_0 1}'^{\,n-i}\Big]$$

каде што $a_{j1}^{i-1} \in \overset{i-1}{G}$, $a_j'^{\,n-i} \in \overset{n-i}{G}$, $j = 1,2,\ldots,n_0$. Оттука добиваме дека $x = \Big[b_1^{j-1}\big[a_{11}^{i-1}\ldots\big[a_{n_0 1}^{i-1} a a_{11}'^{\,n-i}\big]\ldots a_{n_0 1}'^{\,n-i}\big] b_1'^{\,n-j}\Big]$. Бидејќи станува збор за n-полугрупа, со прегрупирање и преименување на елементите во заградите, x може да се запише во следниот облик:

$$x = \left[b_1^{j-1} \left[a_{11}^{i-1} \ldots \underbrace{\left[a_{n_0 1}^{j-1} a a_1'^{n-j} \right]}_{\in (a)_j} \ldots a_{n_0 1}'^{n-i} \right] b_1'^{n-i} \right] \in (a)_j \subseteq (a)_i ,$$

што значи дека $(a)_i$ е j-идеал. □

Од оваа теорема има повеќе интересни последици.

Последица 3.1. *Во сурјективна* n*-полугрупа* $(G,[\ ])$, $(a)_j = (a)_i$ *за секое* $a \in G$ *акко* НЗД$(i-1, n-1) =$ НЗД$(j-1, n-1)$.

Доказ. Ако НЗД$(i-1, n-1) =$ НЗД$(j-1, n-1)$, тогаш знаеме дека НЗД$(i-1, n-1)$ го дели НЗД$(j-1, n-1)$, но и обратно, па затоа $(a)_j \subseteq (a)_i$ и $(a)_j \supseteq (a)_i$, т.е. $(a)_j = (a)_i$. □

Последица 3.2. *Секој* i*-идеал во сурјективна* n*-полугрупа* $(G,[\ ])$ *е* j*-идеал акко* НЗД$(i-1, n-1) =$ НЗД$(j-1, n-1)$.

Доказ. Ако секој i-идеал е j-идеал во сурјективната n-полугрупа $(G,[\ ])$, тогаш и $(a)_j$ е i-идеал, а и $(a)_i$ е j-идеал. Бидејќи $(a)_i$ е најмалиот i-идеал што го содржи елементот $a \in G$, а $(a)_j$ е друг таков i-идеал, тогаш $(a)_j \supseteq (a)_i$. Слично добиваме дека $(a)_j \subseteq (a)_i$, па значи $(a)_j = (a)_i$ за произволен елемент $a \in G$. Од тоа и од претходната последица имаме дека НЗД$(i-1, n-1) =$ НЗД$(j-1, n-1)$.

Обратно, нека НЗД$(i-1, n-1) =$ НЗД$(j-1, n-1)$. Тогаш од претходната последица следува дека за секој елемент $a \in G$ важи $(a)_j = (a)_i$.

Сега, нека I е произволен i-идеал. Од тоа што $I = \bigcup_{x \in I} (x)_i = \bigcup_{x \in I} (x)_j$, добивме дека произволен i-идеал е унија на j-идеали, па и самиот тој е j-идеал. Обратното се покажува слично. Значи, секој i-идеал е j-идеал. □

Последица 3.3. *Ако* $n-1$ *е прост број, тогаш секој* i*-идеал на сурјективната* n*-полугрупа* $(G,[\ ])$ *е исто така и* j*-идеал за секои* $i, j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

Доказ. Ова следува од фактот што, ако $i, j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ и $n-1$ е прост број, тогаш НЗД$(i-1, n-1) =$ НЗД$(j-1, n-1) = 1$. □

Последица 3.4. *Секој* i*-идеал во сурјективна* n*-полугрупа* $(G,[\ ])$ *е* $(n-i+1)$*-идеал за секое* $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ *и обратно.*

Доказ. Ова следува од фактот дека НЗД$(i-1,n-1)=$ НЗД$((n-i+1)-1,n-1)$ и од Посл.3.2. Ова е точно, зашто важи својството: *Ако* $x<y$, *тогаш* НЗД$(x,y)=$ НЗД$(y-x,y)$. □

Последица 3.5. *Секој* i*-идеал во сурјективна* n*-полугрупа* $(G,[\ ])$ *е подмножество од некој 2-идеал (па и од некој* $(n-1)$*-идеал) за* $i\in\{2,3,...,n-1\}$*. Исто така, секој 2-идеал е* i*-идеал за* $i\in\{2,3,...,n-1\}$.

Доказ. Дека секој i-идеал е подмножество од некој 2-идеал (а и дека секој 2-идеал е i-идеал), следува од фактот што НЗД$(1,n-1)=1$ е делител на НЗД$(i-1,n-1)$, од Теорема 3.1 и Посл. 3.1. □

Еден елемент z од n-полугрупа $(G,[\ ])$ го викаме i*-нула* ако $\left[\overset{i-1}{G}\,z\,\overset{n-i}{G}\right]=z$, а *нула* ако тој е i-нула за секој $i\in\{1,2,...,n\}$.

За i-идеалот I велиме дека е *минимален* ако не постои i-идеал кој е вистинско подмножество од I.

Една n-полугрупа $(G,[\ ])$ којашто не содржи други идеали освен самата себе и можеби множеството кое се состои од нулти елементи, ја викаме *проста* n-полугрупа.

Ако проста n-полугрупа $(G,[\ ])$ не е изоморфна со n-полугрупа со ред 2 со нулти елемент (т.е. двоелементна нула n-полугрупа), тогаш таа полугрупа ја викаме *нула-проста.*

Теорема 3.2. *Секој минимален* i*-идеал* M *од сурјективна* n*-полугрупа* $(G,[\ ])$ *без нулти елемент може да се запише во облик*

$$M=\bigcup_{k\geq 0}\left[\overset{\overline{k(i-1)}}{G}\;x\;\overset{\overline{k(n-i)}}{G}\right]\cup\left[\left[\overset{n-1}{G}\,x\right]\overset{n-1}{G}\right]$$

каде што $x\in M$*, а унијата се бара по сите ненегативни цели броеви* k *такви што* $k(i-1)\neq 0$ *и* $k(n-i)\neq 0\ (\mathrm{mod}(n-1))$*. Од друга страна, секој минимален* 1*-идеал (*n*-идеал) на произволна* n*-полугрупа (не мора да биде сурјективна) е од облик* $\left[x\overset{n-1}{G}\right]$, односно $\left[\overset{n-1}{G}x\right]$, *каде што* x *е кој било елемент од идеалот.*

Доказ. Нека M е произволен минимален i-идеал за $i\in\{1,2,...,n-2\}$ и нека $x\in M$. Тогаш за сите ненегативни цели броеви k такви што $k(i-1)\neq 0$ и $k(n-i)\neq 0\ (\mathrm{mod}(n-1))$ унијата

$$I=\bigcup\left[\overset{\overline{k(i-1)}}{G}\;x\;\overset{\overline{k(n-i)}}{G}\right]\cup\left[\left[\overset{n-1}{G}\,x\right]\overset{n-1}{G}\right]$$

е i-идеал. Исто така, $I \subseteq (x)_i \subseteq M$, па заради минималноста на M следува дека $I = M$.

Вториот дел од теоремата е очигледен (само се проверува дека тие множества се минимални идеали). □

Последица 3.6. *Секој минимален 2-идеал ($(n-1)$-идеал) од сурјективна n-полугрупа $(G,[\ ])$ без нули е минимален идеал.*

Доказ. Од Посл. 3.5 имаме дека секој 2-идеал е i-идеал за $i \in \{2,3,...,n-1\}$. Значи, треба да се покаже дека минимален 2-идеал е 1-идеал и n-идеал. Од Теорема 3.2 имаме дека секој минимален 2-идеал M е од облик

$$M = \bigcup_{i=1}^{n-1}\left[\overline{\overset{k(i-1)}{G}}\ x\ \overline{\overset{k(n-i)}{G}}\right] \cup \left[\left[\overset{n-1}{G}\, x\right]\overset{n-1}{G}\right].$$

Лесно се проверува дека $\left[M\,\overset{n-1}{G}\right] \subseteq M$ и $\left[\overset{n-1}{G}\,M\right] \subseteq M$. □

5.2. $\{i,j\}$-неутрални операции во n-групоиди

Во овој раздел ќе го воведеме поимот за $\{i,j\}$-неутрална операција во n-групоид ($n \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$, $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$) како обопштување на поимот неутрален елемент на групоид.

Нека $n \geq 2$, $(G;[\ ])$ е n-групоид, а $e_{(i,j)}$, $e_{(j,i)}$ и $e_{\{i,j\}}$ се пресликувања од множеството G^{n-2} во множеството G, каде што $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ и $i<j$. Тогаш дефинираме:

1) $e_{(i,j)}$ е *лева $\{i,j\}$-неутрална операција на n-групоидот $(G;[\ ])$* ако и само ако важи равенството

$$\left(\forall a_1^{n-2} \in G^{n-2}\right)(\forall x \in G)\quad \left[a_1^{i-1} e_{(i,j)}\left(a_1^{n-2}\right) a_i^{j-2} x a_{j-1}^{n-2}\right] = x$$

2) $e_{(j,i)}$ е *десна $\{i,j\}$-неутрална операција на n-групоидот $(G;[\ ])$* ако и само ако важи равенството

$$\left(\forall a_1^{n-2} \in G^{n-2}\right)(\forall x \in G)\quad \left[a_1^{i-1} x a_i^{j-2} e_{(j,i)}\left(a_1^{n-2}\right) a_{j-1}^{n-2}\right] = x$$

3) $e_{\{i,j\}}$ е *$\{i,j\}$-неутрална операција на n-групоидот $(G;[\ ])$* ако и само ако за секоја низа $a_1^{n-2} \in G^{n-2}$ и за секој $x \in G$ важат равенствата

$$\left[a_1^{i-1} e_{\{i,j\}}\left(a_1^{n-2}\right) a_i^{j-2} x a_{j-1}^{n-2}\right] = x \quad \text{и} \quad \left[a_1^{i-1} x a_i^{j-2} e_{\{i,j\}}\left(a_1^{n-2}\right) a_{j-1}^{n-2}\right] = x.$$

Забелешка. За $n=2$, $e_{\{i,j\}}\left(a_1^{n-2}\right)=e(\varnothing)$ е неутрален (лев, десен) елемент на 2-групоидот $(G;[\ ])$.

Својство 2.1. *Нека* $(G;[\ ])$ *е* n*-групоид,* $n\geq 2$, $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ *и* $i<j$. *Тогаш постои најмногу една* $\{i,j\}$*-неутрална операција на* n*-групоидот* $(G;[\ ])$.

Доказ. Нека $e_{\{i,j\}}$ и $\overline{e}_{\{i,j\}}$ се две $\{i,j\}$-неутрални операции на n-групоидот $(Q;[\ ])$. Тогаш за секој $a_1^{n-2}\in G^{n-2}$ важат равенствата:

$$\left[a_1^{i-1}e_{\{i,j\}}\left(a_1^{n-2}\right)a_i^{j-2}\overline{e}_{\{i,j\}}\left(a_1^{n-2}\right)a_{j-1}^{n-2}\right]=\overline{e}_{\{i,j\}}\left(a_1^{n-2}\right) \text{ и}$$

$$\left[a_1^{i-1}e_{\{i,j\}}\left(a_1^{n-2}\right)a_i^{j-2}\overline{e}_{\{i,j\}}\left(a_1^{n-2}\right)a_{j-1}^{n-2}\right]=e_{\{i,j\}}\left(a_1^{n-2}\right).$$

Оттука следува дека $e_{\{i,j\}}=\overline{e}_{\{i,j\}}$. □

Својство 2.2. *Нека* $(G;[\ ])$ *е* n*-групоид,* $n\geq 2$, $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, $i<j$ *и нека* $e_{(i,j)}$ *е лева* $\{i,j\}$*-неутрална операција, а* $e_{(j,i)}$ *е десна* $\{i,j\}$*-неутрална операција на* n*-групоидот* $(G;[\ ])$. *Тогаш* $e_{(i,j)}=e_{(j,i)}=e_{\{i,j\}}$ *е* $\{i,j\}$*-неутрална операција на* n*-групоидот* $(G;[\ ])$.

Доказ. Од дефиницијата следува дека за секоја низа $a_1^{n-2}\in G^{n-2}$ важат равенствата:

$$\left[a_1^{i-1}e_{(i,j)}\left(a_1^{n-2}\right)a_i^{j-2}e_{(j,i)}\left(a_1^{n-2}\right)a_{j-1}^{n-2}\right]=e_{(j,i)}\left(a_1^{n-2}\right) \quad \text{и}$$

$$\left[a_1^{i-1}e_{(i,j)}\left(a_1^{n-2}\right)a_i^{j-2}e_{(j,i)}\left(a_1^{n-2}\right)a_{j-1}^{n-2}\right]=e_{(i,j)}\left(a_1^{n-2}\right).$$

Оттука следува дека $e_{(i,j)}=e_{(j,i)}$, односно $e_{(i,j)}=e_{(j,i)}=e_{\{i,j\}}$. □

Теорема 2.1. *Нека* $(G;[\ ])$ *е* n*-групоид,* $n\geq 2$ *и нека важат следниве искази:*

(i) *во* $(G;[\ ])$ *важи* $(1,n)$*-асоцијативниот закон;*

(ii) *за секоја низа* $a_1^{n-2}\in G^{n-2}$ *и за секои* $a,b\in G$, *постои барем еден* $x\in G$, *таков што* $\left[aa_1^{n-2}x\right]=b$;

(iii) *за секоја низа* $a_1^{n-2}\in G^{n-2}$ *и за секои* $a,b\in G$, *постои барем еден* $y\in G$, *таков што* $\left[ya_1^{n-2}a\right]=b$.

Тогаш $(G;[\ ])$ *има* $\{1,n\}$*-неутрална операција.*

Доказ. Прво ќе покажеме дека $(G;[\ ])$ има лева $\{1,n\}$-неутрална операција, а потоа, слично, дека $(G;[\ ])$ има десна $\{1,n\}$-неутрална операција.

Од (iii) имаме дека за секоја низа $a_1^{n-2}\in G^{n-2}$ и за секој $a\in G$ постои барем еден $e_{(1,n)}^{(a)}\left(a_1^{n-2}\right)\in G$ за кој важи $\left[e_{(1,n)}^{(a)}\left(a_1^{n-2}\right)a_1^{n-2}a\right]=a$. Од ($ii$) имаме дека за секој $b\in G$ и за секој $k_1^{n-2}\in G^{n-2}$, постои барем еден $k\in G$ за кој важи дека $b=\left[ak_1^{n-2}k\right]$. Од последните две равенства и (i) ја добиваме следнава низа равенства:

$$\left[e_{(1,n)}^{(a)}\left(a_1^{n-2}\right)a_1^{n-2}b\right]=\left[e_{(1,n)}^{(a)}\left(a_1^{n-2}\right)a_1^{n-2}\left[ak_1^{n-2}k\right]\right]\overset{(i)}{=}\left[\left[e_{(1,n)}^{(a)}\left(a_1^{n-2}\right)a_1^{n-2}a\right]k_1^{n-2}k\right]=$$

$$=\left[ak_1^{n-2}k\right]=b,$$

од што заклучуваме дека $e_{(1,n)}^{(a)}$ е лева $\{1,n\}$-неутрална операција во n-групоидот $(G;[\ ])$.

Ако го искористиме условот (ii), имаме дека за секој $a_1^{n-2}\in G^{n-2}$ и секој $a\in G$ постои барем еден $e_{(n,1)}^{(a)}\left(a_1^{n-2}\right)\in G$ за кој важи $\left[aa_1^{n-2}e_{(n,1)}^{(a)}\left(a_1^{n-2}\right)\right]=a$. Од (iii) имаме дека за секој $c\in G$ и за секој $l_1^{n-2}\in G^{n-2}$, постои барем еден $l\in G$ за кој важи $c=\left[ll_1^{n-2}a\right]$. Од последните две равенства и (i) ја добиваме следнава низа равенства:

$$\left[ca_1^{n-2}e_{(n,1)}^{(a)}\left(a_1^{n-2}\right)\right]=\left[\left[ll_1^{n-2}a\right]a_1^{n-2}e_{(n,1)}^{(a)}\left(a_1^{n-2}\right)\right]\overset{(i)}{=}\left[ll_1^{n-2}\left[aa_1^{n-2}e_{(n,1)}^{(a)}\left(a_1^{n-2}\right)\right]\right]=\left[ll_1^{n-2}a\right]=c.$$

Според тоа, $e_{(n,1)}^{(a)}$ е десна $\{1,n\}$-неутрална операција во n-групоидот $(G;[\ ])$.

Од Св. 2.2 следува дека $(G;[\ ])$ има $\{1,n\}$-неутрална операција $e_{\{1,n\}}=e_{(1,n)}^{(a)}=e_{(n,1)}^{(a)}$. □

Како последица од дефиницијата за n-група и Теорема 2.1 ја добиваме следната

Теорема 2.2. *Секоја n-група ($n\geq 2$) има $\{1,n\}$-неутрална операција.*

Доказ. Ако n-групоидот $(G;[\ ])$ е n-група тогаш во него важат условите (i), (ii) и (iii) од Теорема 2.1 а оттука следува дека $(G;[\ ])$ има $\{1,n\}$-неутрална операција. □

Лема 2.1. *Нека $(G;[\ ])$ е n-полугрупа и нека $(G;[\ ])$ има $\{1,n\}$-неутрална операција $e_{\{1,n\}}$. Ако $n\geq 3$, тогаш $(G;[\ ])$ е кратлива n-полугрупа.*

Доказ. Нека i е елемент од множеството $i\in\{2,3,\dots,n-1\}$. Нека $a_1^{n-1}\in G^{n-1}$ и $b,c\in G$ го задоволуваат равенството:

$$\left[a_1^{i-1}ba_i^{n-1}\right]=\left[a_1^{i-1}ca_i^{n-1}\right].$$

Од дефиницијата за $\{1,n\}$-неутрална операција, следува дека важат следниве импликации:

$$\left[a_1^{i-1}ba_i^{n-1}\right]=\left[a_1^{i-1}ca_i^{n-1}\right]\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1} \right) \overset{n-i-1}{a_1} \left[a_1^{i-1} b a_i^{n-1} \right] \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}} \right) \right] =$$

$$= \left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1} \right) \overset{n-i-1}{a_1} \left[a_1^{i-1} c a_i^{n-1} \right] \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1} \right) \overset{n-i-1}{a_1}\, a_1^{i-1} b \right] a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}} \right) \right] =$$

$$= \left[\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1} \right) \overset{n-i-1}{a_1}\, a_1^{i-1} c \right] a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1} \right) \overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1} b \right] a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}} \right) \right] =$$

$$= \left[\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1} \right) \overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1} c \right] a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[b a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}} \right) \right] = \left[c a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad b = c.$$

Нека $i = 1$. Нека $a_1^{n-1} \in G^{n-1}$ и $b, c \in G$ го задоволуваат равенството:

$$[ba_1^{n-1}] = [ca_1^{n-1}].$$

Тогаш:

$$\left[ba_1^{n-1} \right] = \left[ca_1^{n-1} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left[ba_1^{n-1} \right] e_{\{1,n\}}\left(a_2^{n-1} \right) \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] = \left[\left[ca_1^{n-1} \right] e_{\{1,n\}}\left(a_2^{n-1} \right) \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[b\left[a_1^{n-1} e_{\{1,n\}}\left(a_2^{n-1} \right) \right] \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] = \left[c\left[a_1^{n-1} e_{\{1,n\}}\left(a_2^{n-1} \right) \right] \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[b\left[a_1 a_2^{n-1} e_{\{1,n\}}\left(a_2^{n-1} \right) \right] \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] = \left[c\left[a_1 a_2^{n-1} e_{\{1,n\}}\left(a_2^{n-1} \right) \right] \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[ba_1\, \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] = \left[ca_1\, \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[b\, \overset{n-2}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] = \left[c\, \overset{n-2}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad b = c.$$

Нека $i = n$, а $a_1^{n-1} \in G^{n-1}$ и $b, c \in G$ го задоволуваат равенството:

$$\left[a_1^{n-1} b \right] = \left[a_1^{n-1} c \right].$$

Тогаш:

$$\left[a_1^{n-1} b \right] = \left[a_1^{n-1} c \right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-3}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_1^{n-2}\right)\left[a_1^{n-1}b\right]\right]=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-3}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_1^{n-2}\right)\left[a_1^{n-1}c\right]\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-3}{a_{n-1}}\left[e_{\{1,n\}}\left(a_1^{n-2}\right)a_1^{n-1}\right]b\right]=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-3}{a_{n-1}}\left[e_{\{1,n\}}\left(a_1^{n-2}\right)a_1^{n-1}\right]c\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-3}{a_{n-1}}\left[e_{\{1,n\}}\left(a_1^{n-2}\right)a_1^{n-2}a_{n-1}\right]b\right]=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-3}{a_{n-1}}\left[e_{\{1,n\}}\left(a_1^{n-2}\right)a_1^{n-2}a_{n-1}\right]c\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-3}{a_{n-1}}\, a_{n-1}b\right]=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-3}{a_{n-1}}\, a_{n-1}c\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-2}{a_{n-1}}\, b\right]=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-2}{a_{n-1}}\, c\right] \quad \Rightarrow \quad b=c\,. \ \square$$

Својство 2.3. *Нека* $(G;[\ ])$ *е* n*-полугрупа и нека* $(G;[\ ])$ *има* $\{1,n\}$*-неутрална операција* $e_{\{1,n\}}$. *Ако* $n\geq 3$, *тогаш* $(G;[\ ])$ *е* n*-квазигрупа и притоа важат еквиваленциите*:

$$\left[a_1^{i-1}x_i a_i^{n-1}\right]=a_n \quad\Leftrightarrow\quad x_i=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1}\right)\overset{n-i-1}{a_1}\, a_n\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\right)\right],\ i\in\{2,\ldots,n-1\};$$

$$\left[xa_1^{n-1}\right]=a_n \quad\Leftrightarrow\quad x=\left[a_n e_{\{1,n\}}\left(a_2^{n-1}\right)\overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_1}\right)\right] \qquad и$$

$$\left[a_1^{n-1}y\right]=a_n \quad\Leftrightarrow\quad y=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-2}{a_{n-1}}\right)\overset{n-3}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_1^{n-2}\right)a_n\right].$$

Доказ. Нека $i\in\{2,\ldots,n-1\}$, $a_1^n\in G^n$ и $x_i\in G$. Тогаш од дефиницијата за $\{1,n\}$-неутрална операција, точни се следниве еквиваленции:

$$\left[a_1^{i-1}x_i a_i^{n-1}\right]=a_n \Leftrightarrow \left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1}\right)\overset{n-i-1}{a_1}\left[a_1^{i-1}x_i a_i^{n-1}\right]\overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\right)\right]=$$

$$=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1}\right)\overset{n-i-1}{a_1}\, a_n\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1}\right)\overset{n-i-1}{a_1}\, a_1^{i-1}x_i\right]a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\right)\right]$$

$$=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1}\right)\overset{n-i-1}{a_1}\, a_n\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1}\right)\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1}x_i\right]a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\right)\right]$$

$$=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1}\right)\overset{n-i-1}{a_1}\, a_n\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[x_i a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\right)\right]=\left[e_{\{1,n\}}\left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1}\right)\overset{n-i-1}{a_1}\, a_n\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}}\left(a_i^{n-1}\,\overset{i-2}{a_{n-1}}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i = \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-i}{a_1}\, a_2^{i-1} \right) \overset{n-i-1}{a_1}\, a_n\, \overset{i-2}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}} \left(a_i^{n-1}\, \overset{i-2}{a_{n-1}} \right) \right].$$

Оттука добиваме дека $\left[a_1^{i-1} x_i a_i^{n-1} \right] = a_n$, за $i \in \{2, \dots, n-1\}$, има единствено решение.

Нека $i = 1$, $a_1^n \in G^n$ и $x \in G$. Тогаш:

$$\begin{aligned}
& \left[x a_1^{n-1} \right] = a_n \\
\Leftrightarrow \quad & \left[\left[x a_1^{n-1} \right] e_{\{1,n\}} \left(a_2^{n-1} \right) \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] = \left[a_n e_{\{1,n\}} \left(a_2^{n-1} \right) \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] \\
\Leftrightarrow \quad & \left[x \left[a_1^{n-1} e_{\{1,n\}} \left(a_2^{n-1} \right) \right] \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] = \left[a_n e_{\{1,n\}} \left(a_2^{n-1} \right) \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] \\
\Leftrightarrow \quad & \left[x \left[a_1 a_2^{n-1} e_{\{1,n\}} \left(a_2^{n-1} \right) \right] \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] = \left[a_n e_{\{1,n\}} \left(a_2^{n-1} \right) \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] \\
\Leftrightarrow \quad & \left[x a_1 \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] = \left[a_n e_{\{1,n\}} \left(a_2^{n-1} \right) \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] \\
\Leftrightarrow \quad & \left[x \overset{n-2}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] = \left[a_n e_{\{1,n\}} \left(a_2^{n-1} \right) \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right] \\
\Leftrightarrow \quad & x = \left[a_n e_{\{1,n\}} \left(a_2^{n-1} \right) \overset{n-3}{a_1}\, e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_1} \right) \right].
\end{aligned}$$

Оттука добиваме дека $\left[x a_1^{n-1} \right] = a_n$ има единствено решение.

Нека $i = n$, $a_1^n \in G^n$ и $y \in G$. Слично како претходно, следува дека важат следниве еквиваленции:

$$\begin{aligned}
& \left[a_1^{n-1} y \right] = a_n \\
\Leftrightarrow \quad & \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-3}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}} \left(a_1^{n-2} \right) \left[a_1^{n-1} y \right] \right] = \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-3}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}} \left(a_1^{n-2} \right) a_n \right] \\
\Leftrightarrow \quad & \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-3}{a_{n-1}} \left[e_{\{1,n\}} \left(a_1^{n-2} \right) a_1^{n-1} \right] y \right] = \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-3}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}} \left(a_1^{n-2} \right) a_n \right] \\
\Leftrightarrow \quad & \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-3}{a_{n-1}} \left[e_{\{1,n\}} \left(a_1^{n-2} \right) a_1^{n-2} a_{n-1} \right] y \right] = \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-3}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}} \left(a_1^{n-2} \right) a_n \right] \\
\Leftrightarrow \quad & \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-3}{a_{n-1}}\, a_{n-1} y \right] = \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-3}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}} \left(a_1^{n-2} \right) a_n \right] \\
\Leftrightarrow \quad & \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-2}{a_{n-1}}\, y \right] = \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-3}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}} \left(a_1^{n-2} \right) a_n \right] \\
\Leftrightarrow \quad & y = \left[e_{\{1,n\}} \left(\overset{n-2}{a_{n-1}} \right) \overset{n-3}{a_{n-1}}\, e_{\{1,n\}} \left(a_1^{n-2} \right) a_n \right].
\end{aligned}$$

Оттука добиваме дека $\left[a_1^{n-1} y \right] = a_n$ има единствено решение. □

Последица 2.1. *Ако* $(G;[\ ])$ *е* n*-полугрупа,* $n \geq 3$*, која има* $\{1,n\}$*-неутрална операција, тогаш* $(G;[\ ])$ *е* n*-група.* □

Од Теорема 2.2 и Посл. 2.1 ја добиваме следнава

Теорема 2.3. *Ако* $n \geq 3$*, тогаш* n*-полугрупата* $(G;[\ ])$ *е* n*-група ако и само ако* $(G;[\ ])$ *е* n*-полугрупа која има* $\{1,n\}$*-неутрална операција.* □

Забелешка. $\{i,j\}$-неутралните операции ги разгледувал Ј. Ушан во повеќе свои трудови (убава прегледна литература е неговата монографија [29]). Подолу ќе ги наведеме само формулациите на теоремата на Брак-Хјуз за бинарен случај (Bruck, 1946 – Hughes, 1957) и на n-арниот случај на теоремата на Брак-Хјуз, а којашто ја формулирал и докажал Ј. Ушан во 1999, и двете прилагодени кон ознаките во оваа книга. Доказите на овие две теореми може подетално да се проследат во [29].

Теорема 2.4. (*Брак-Хјуз*) *Нека* $(G,\cdot)$ *е групоид со неутрален елемент* e *и нека* $(G,\circ)$ *е полугрупа. Нека* α,β,γ *се пермутации на множеството* G *такви што за секои* $x,y \in G$, $x \circ y = \gamma(\alpha(x)\cdot\beta(y))$. *Тогаш* $(G,\circ)$ *е полугрупа со неутрален елемент.*

Теорема 2.5. (*Ушан*) *Нека* $(G,[\ ])$ *и* $(G,[\ ]')$ *се* n*-групоиди,* α,β,γ *се* $(n-1)$*-арни операции на множеството* G *и нека* $n \geq 3$. *Уште повеќе, нека важат следниве услови:*

(1_1) $(G,[\ ])$ *е* $(1,n)$*-асоцијативен* n*-групоид;*

(1_2) $(G,[\ ])$ *е* $(1,2)$*-асоцијативен* n*-групоид (или* $(n-1,\ n)$*-асоцијативен* n*-групоид);*

(2) $(G,[\ ]')$ *има* $\{1,n\}$*-неутрална операција* $\mathbf{e}$*;*

(3) *За секоја низа* a_1^{n-1} *од* G*, постојат точно еден* x*, точно еден* y *и точно еден* z*, такви што*

$$\alpha(a_1^{n-2}x) = a_{n-1}, \quad \beta(a_1^{n-2}y) = a_{n-1} \quad и \quad \gamma(a_1^{n-2}z) = a_{n-1}$$

(4) *За секои* $x,y \in G$ *и за секоја низа* a_1^{n-1} *од* G *важи равенството*

$$[xa_1^{n-2}y] = \gamma(a_1^{n-2}[\alpha(a_1^{n-2}x)]'a_1^{n-2}\beta(a_1^{n-2}y)).$$

Тогаш $(G,[\ ])$ *е* n*-група.* □

Литература

[1] В. Д. Белоусов, *n-арни квазигрупи,* Кишинев, 1972

[2] A. Borowiec, W. Dudek, S. Duplij, *Basic concepts of ternary Hopf algebras*, Journal of Krakov National University, ser. Nuclei, Particles and Fields, 529, N 3 (15) (2001), 21–29

[3] А. М. Гальмак, Г.Н. Воробьев, *О теореме Роста-Глускина-Хоссу,* Проблемы физики, математики и техники, № 1 (14), (2013), 55–60

[4] A. M. Gal'mak, *Remarks on polyadic groups*, Quasigroups and Related Systems 7 (2000), 67–70

[5] A.M. Gal'mak, V. Balan, G.N. Vorobiev, I.R. Nicola, *On n-ary operations and their applications,* Applied Sciences, Vol. 13, (2011), 40–64

[6] W. Dudek, K. Glazek, *Around the Hossz⁂-Gluskin Theorem for n-ary groups,* ArXiv: math/0510185v1 [math. GR] 10 Oct. 2005

[7] W.A. Dudek, *On some old and new problems in n-ary groups*, Quasigroups and Related Systems, 8 (2001), 15–36

[8] V. Devidé, *Einige beziehungen der Kommutativitäts- und der Assoziativitäts-eigenschaft*, Glasnik Mat.–Fiz. Astr. Ser. II. t. 6 (1951), 33–48

[9] W. Dörnte, *Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff*, Math. Z. 29 (1928), 1–19

[10] W. A. Dudek, V. V. Mukhin, *On n-ary semigroups with adjoint neutral element*, Quasigroups and Related Systems, 14 (2006), 163–168

[11] W. A. Dudek, *Idempotents in n-ary semigroups,* Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Springer-Veralg (2001), 97–104

[12] S. Duplij, *Ternary Hopf algebras*, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Vol. 43. Part 2 (2002), 439–448

[13] B. Janeva, *Word problem for n-groups*, Proceed. of the symposium n-ary structures, Skopje (1982), 157-159

[14] B. Janeva, *Congruences on n-groups*, Мат. Билт. СДМИМ, 19 (XLV) (1995), 85-90

[15] B. Janeva, V. Miovska, V. Celakoska-Jordanova, *On a class of n-groupoids*, Зборник на трудови, Втор конгрес на матем. и инф. на Македонија, Охрид 2000 (Сојуз на матем. и инф., Скопје 2003), 25-30

[16] P. Kržovski, *On commutative n-semigroups*, Proc. Symp. n-ary Structures, Skopje 1982, 141-148

[17] С. Марковски, *Сместување на n-групоиди во n-квазигрупа*, Год. зб. Мат. фак. Скопје, 28 (1977), 27-31

[18] С. Марковски: *За една класа полугрупи*, Мат. билт. СДМ СРМ, 2 (28) (1978), 29–36

[19] S. Markovski, *n-Subgroupoids of cancellative groupoids*, Год. збор. Матем. фак, 32, (1981), 45-51

[20] E. L. Post, *Polyadic groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 208–350

[21] A. Petrescu, *Skew elements in n-semigroups*, Proceedings of the International Conference on Theory and Application of Mathematics and Informatics ICTAMI 2005 – Alba Iulia, Romania, Acta Universitatis Apulensis, No. 10 (2005), 39–48

[22] M. S. Pop, A. Pop, *On some relations on n-monoids*, Carpathian J. Math. 20 No. 1, (2004), 87–94

[23] С. А. Русаков, *Алгебраические n-арные системы* , Минск, 1992

[24] F. M. Sioson, *Cyclic and Homogenous m-semigroups*, Proceedings of the Japan Academy Series A Mathematical Sciences, Vol.39 (1963), No. 7, 444–449

[25] F. M. Sioson, *Ideals in* $(m+1)$*-semigroups*, Annali di Matematica Pura ed Aplcata, 68 (1) (1965), 161–200

[26] Б. Трпеновски, *Делумно асоцијативни n-групоиди со неутрални елементи*, Билтен ДМФ НРМ, 14 (1963), 5–16

[27] Б. Трпеновски, *За n-групоидите со централни неутрални елементи*, Билтен ДМФ НРМ, 14 (1963), 31–39

[28] Б. Трпеновски, Ѓ. Чупона, *Финитарни асоцијативни операции со неутрални елементи*, Билтен ДМФ НРМ, 12 (1961), 15–24

[29] J. Ušan, *n-groups in the light of neutral operations*, Monograph, Mathematica Moravica, Special Vol., 2003

[30] J. Ušan, *n-groups as n-groupoids with laws*, Quasigroups and Related Systems, 4 (1997), 67–76

[31] J. Ušan, *On Hossz⁂-Gluskin algebras corresponding to the same n-group*, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. PMF, Ser. Mat. 25, 1 (1995), 101–119

[32] V. Celakoska-Jordanova, *On quaternary associative operations*, Math. Moravica, Vol. 11 (2007), 17–25

[33] N. Celakoski, *On some axiom systems for n-groups*, Мат. билт. СДМ СРМ, 27 (1977), 5–14

[34] Ѓ. Чупона, Б. Трпеновски, *Предавања по алгебра*, кн. II, Скопје, 1973

[35] Ѓ. Чупона, *За тернарните асоцијативни операции*, Билтен ДМФ НРМ Скопје, 9 (1958), 5–10

[36] Ѓ. Чупона, *За финитарните операции*, Годишен зборник на ПМФ, Скопје, 12 (1959), 7–49

[37] Ѓ. Чупона, *За n-арните полугрупи*, Билтен ДМФ НРМ, 12 (1961), 5–13

[38] G. Čupona, *Finitarne asocijativne operacije*, Matematicka biblioteka Beograd, 39 (1969), 135–149

[39] G. Čupona, *On topological n-groups*, Билтен ДМФ СРМ, 22 (1971), 5-10

[40] *Избрани трудови на Ѓорѓи Чупона*, МАНУ, 2010 (зборник на трудови), Уредници: Д. Димовски, Н. Целакоски

Показател на поими