д-р Костадин Тренчевски **д-р Билјана Крстеска**

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Скопје, 2018

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј" во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
д-р Костадин Тренчевски и д-р Билјана Крстеска
Природно – математички факултет

Рецензенти
1. Проф. д-р Марија Оровчанец
   редовен професор на ПМФ, Скопје
2. Проф. д-р Валентина Миовска
   редовен професор на ПМФ, Скопје

Техничка обработка
д-р Костадин Тренчевски и д-р Билјана Крстеска
Природно – математички факултет

Лектура на македонски јазик:
Виолета Јовановска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

514.12(075.8)

ТРЕНЧЕВСКИ, Костадин
Аналитичка геометрија / Костадин Тренчевски, Билјана Крстеска. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј" - Скопје, 2018. - 403 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 402-403

ISBN 978-9989-43-420-4
1. Крстеска, Билјана [автор]
а) Аналитичка геометрија - Високошколски учебници COBISS.MK-ID 109021962

Со љубов на Марија, Ирина и Марија

Предговор

Оваа книга е наменета за студентите од прва година на Природно математичкиот факултет во Скопје, запишани на студиската програма математика–физика и студиската програма математика–информатика.

Учебникот се состои од четири поглавја. Во рамките на секое поглавје се обработени предвидените содржини, кои по правило се илустрирани со решени примери и цртежи. Низ секое поглавје се дадени задачи за самостојна работа, а на крајот од секое поглавје се дадени задачи за вежбање. На крајот од учебникот се дадени кратки одговори или решенија на дел од задачите, при што по избор на авторите, некаде има и упатство за нивно решавање.

Првото поглавје се однесува на поими и проблеми во врска со детерминанти и системи линеарни равенки кои се потребна алатка за понатамошно решавање на проблеми во аналитичката геометрија. Совладувањето на материјалот изложен во второто поглавје дава можност за проширување на знаењата во врска со поимот вектор. Поточно, се дефинира поимот вектор во простор, а потоа во множеството вектори се воведени операциите собирање и одземање, како и операциите множење на вектор со број, скаларно и векторско множење на вектори.

Третото поглавје е посветено на обработка на делови од аналитичка геометрија во рамнина, што подразбира воведување на концепти за алгебарско задавање на геометриските објекти. Така, на пример во избран координатен систем, точките и векторите се задаваат со нивните координати, а правите и кривите од втор ред со нивните равенки. На тој начин геометриските задачи може да се решаваат со алгебарски методи и обратно, алгебарските задачи да се интерпретираат геометриски.

Четвртото поглавје е посветено на обработка на делови од аналитичка геометрија во простор, што подразбира извесна генерализација на претходно воведените концепти.

Посебна благодарност им должиме на рецензентите на овај учебник, проф. д-р Марија Оровчанец и проф. д-р Валентина Миовска, кои внимателно го прочитаа ракописот за учебникот и со своите сугестии и забелешки значително придонесоа за подобрување на неговиот квалитет.

Авторите однапред ќе бидат благодарни за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, и веруваат дека оваа книга ќе придонесе студентите побрзо и полесно да ги совладаат целите предвидени со предметните програми во рамките на соодветните студиски програми.

Јули, 2018 Од авторите

Содржина

1. Детерминанти и системи линеарни равенки

1.1. Детерминанти од втор ред

Нека a, b, c и d се дадени реални броеви и $ad,\ bc$ се соодветните производи.

Дефиниција 1. Вредноста на изразот $ad - bc,$ запишан шематски

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

се нарекува **детерминанта од втор ред**; значи

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Броевите a, b, c и d се нарекуваат **елементи на детерминантата**. Тие се распоредени во две **редици** (хоризонтално) и во две **колони** (вертикално), а накрсно формираат две **дијагонали**.

Првата редица ја сочинуваат броевите a и b, а втората броевите c и d. Првата колона ја сочинуваат броевите a и c, а втората броевите b и d. Броевите a и d ја формираат **главната дијагонала**, а броевите b и c ја формираат **споредната дијагонала**.

Согласно со горекажаното може да заклучиме дека детерминантата од втор ред е еднаква на разликата од производите на елементите од главната и од споредната дијагонала.

Пример 1. Детерминантата $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ го претставува бројот -23, бидејќи

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = -8 - 15 = -23;$$

се вели дека детерминантата има вредност -23. ♦

Детерминантите од втор ред ги имаат следниве својства:

Својство 1. Вредноста на детерминантата не се менува, ако редиците се заменат со колони, запазувајќи го редниот број; значи

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Својство 2. Детерминанта со две еднакви редици (колони) има вредност нула; значи

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \ \left(\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0 \right).$$

Својство 3. Со замена на местата на двете редици (колони), вредноста на детерминантата го менува знакот во спротивен; значи

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \ \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \right).$$

Својство 4. Ако елементите на една редица (колона) се еднакви на нула, тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула; значи

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0, \ \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0, \ \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Својство 5. Вредноста на детерминантата се множи со број, кога со тој број ќе се помножат сите елементи од една редица (колона); значи

$$k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} \ \left(k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} \right).$$

Својство 6. Ако соодветните елементи од двете редици (колони) се пропорционални, вредноста на детерминантата е еднаква на нула; значи

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\begin{vmatrix} a & ka \\ b & kb \end{vmatrix} = 0 \right).$$

Својство 7. Вредноста на детерминантата не се менува, ако кон елементите на една редица (колона) ги додадеме соодветните елементи од другата редица (колона) помножени претходно со ист број k; значи

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} \quad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix} \right).$$

Својство 8. Ако секој елемент на некоја редица (колона) на детерминантата е збир од два собирока, тогаш детерминантата може да се претстави како збир од две детерминанти, во која сите елементи, со исклучок на елементите од односната редица (колона), се исти како во детерминантата. Во првата детерминанта – собирок, односната редица (колона) се состои од првите собироци, а во втората детерминанта се состои од вторите собироци, односно

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} \quad \left(\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} \right).$$

Секое од горниве својства на детерминантите од втор ред, лесно може да се провери со пресметување на вредноста на секоја детерминанта од двете страни на соодветното равенство. За илустрација ќе го изведеме својството 8.

$$L = \begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = (a+a')d-(c+c')\cdot b = ad + a'd - bc - bc' =$$

$$= (ad-bc)+(a'd-bc') = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} = D.$$

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги вредностите на следниве детерминанти:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.

2. Пресметај ја вредноста на детерминантата

$$\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a+a^2 & ab-ac \end{vmatrix}$$

користејќи некои од познатите својства на детерминанта.

3. Реши ги равенките:

а) $\begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2-x & x^2 \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x+2 & (x+2)^2 \end{vmatrix} = 0.$

4. Реши ги неравенките:

а) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 4x & 2 \end{vmatrix} > 5$; б) $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 3 & x+2 \end{vmatrix} > 8$;

в) $\begin{vmatrix} 3x & x \\ 2x & -4 \end{vmatrix} > -14$.

1.2. Систем од две линеарни равенки

За две линерани равенки, за кои бараме заедничко решение, велиме дека претставуваат систем од линеарни равенки. Да се реши даден систем линеарни равенки значи да се најдат вредности на непознатите, кои ги задоволуваат двете равенки на системот. Во продолжение ќе го разгледаме решавањето на систем од две линеарни равенки со примена на поимот детерминанта од втор ред.

1.2.1. Систем од две линеарни равенки со две непознати

Нека a_i, b_i, c_i, $i=1,2$ се дадени реални броеви, а x, y се непознати. Тогаш

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}, \qquad (1)$$

претставува **систем од две линеарни равенки со две непознати**; a_1, b_1, a_2, b_2 се **коефициенти на системот**, а c_1, c_2 се **слободни членови**.

Решение на системот (1) е секој подреден пар броеви (x_0, y_0), за којшто двете равенки преминуваат во идентитети кога x ќе се замени со x_0, а y со y_0 во (1).

Ако системот (1) има барем едно решение, велиме дека тој е **решлив**, а ако тој нема ниту едно решение, тогаш за него велиме дека е **противречен**. Решливиот систем којшто има единствено решение се вика **еднозначно решлив** или **определен**, ако пак тој има повеќе од едно решение, велиме дека е **неопределен**.

Нека системот (1) има решение (x_0, y_0). Тогаш, точни се равенствата

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases}. \tag{1'}$$

Да претпоставиме дека

$$a_i \neq 0,\ \ b_i \neq 0,\ \ i = 1{,}2$$

и барем еден од слободните членови е различен од нула, односно

$$c_1 \neq 0 \text{ или } c_2 \neq 0.$$

Тогаш нема да бидат нарушени горните равенства, ако двете страни на првото равенство се помножат со b_2, а на второто со $(-b_1)$. Значи, точни се равенствата

$$b_2(a_1x_0 + b_1y_0) = b_2c_1$$

$$(-b_1)(a_2x_0 + b_2y_0) = (-b_1)c_2$$

Земајќи ги предвид својствата на операциите множење и собирање на реални броеви овие равенства се сведуваат на равенствата

$$(a_1b_2)x_0 + (b_1b_2)y_0 = b_2c_1$$

$$(-a_2b_1)x_0 - (b_1b_2)y_0 = -b_1c_2$$

Со собирање на левите и на десните страни на погорните равенства се добива равенството

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x_0 = b_2c_1 - b_1c_2. \qquad (2)$$

Аналогно, ако првото равенство на (1’) се помножи со $-a_2$, а второто со a_1 и така добиените равенства се соберат ќе се добие равенството

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y_0 = a_1c_2 - a_2c_1. \qquad (3)$$

Имајќи ја предвид дефиницијата на детерминанта од втор ред, изразот во заградата од левата страна на равенствата (2) и (3), може да се замени со детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

којашто има вредност еднаква на $a_1b_2 - a_2b_1$.

Аналогно на ова, изразите од десната страна на (2) и (3) може да се заменат соодветно со детерминантите

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} (= c_1b_2 - c_2b_1) \quad \text{и} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} (= a_1c_2 - a_2c_1).$$

Значи, за решението (x_0, y_0) на системот (1) точни се равенствата

$$\Delta \cdot x_0 = \Delta_x \quad \text{и} \quad \Delta \cdot y_0 = \Delta_y. \tag{4}$$

Сега, може да настанат следниве три случаи, кои заемно се исклучуваат:

Случај I. Ако **детерминантата на системот**

$$\boxed{\Delta \neq 0}$$

тогаш (x_0, y_0) е единствено решение на системот (1).

Навистина, за ненултиот број Δ постои инверзниот број (реципрочната вредност) $\frac{1}{\Delta}$ така што равенствата (4) со множење со $\frac{1}{\Delta}$ се сведуваат на равенствата

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{5}$$

Значи, од $\Delta \neq 0$ следува дека решението (x_0, y_0) е единствено.

Погорната дискусија може да ја резимираме во следнава теорема:

Теорема 1. Ако детерминантата Δ на системот (1) е различна од нула, тогаш тој систем има единствено решение, определено со формулите (5).

Вообичаено, равенствата (5) се нарекуваат **Крамерови формули**.

Пример 1. За системот равенки

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$$

имаме дека

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

што значи дека тој има единствено решение (x_0, y_0). Со наоѓање на детерминантите

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -7 \text{ и } \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14,$$

се добива решението на системот

$$x_0 = \frac{-7}{7} = -1, \quad y_0 = \frac{14}{7} = 2. \blacklozenge$$

Случај II. Ако за детерминантата на системот и за споредните детерминанти имаме дека

$$\boxed{\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0}$$

тогаш системот има бескрајно многу решенија.

Навистина, равенствата

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \quad c_1b_2 - c_2b_1 = 0 \text{ и } a_1c_2 - a_2c_1 = 0$$

согласно со претпоставката $a_i \neq 0,\ b_i \neq 0,\ i = 1,2$ се сведуваат на

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ или, } \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Земајќи, на пример,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k\,(\neq 0)$$

се добива дека

$$a_2 = ka_1,\ b_2 = kb_1 \text{ и } c_2 = kc_1,$$

што значи дека системот (1) има облик

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ ka_1x + kb_1y = kc_1 \end{cases}$$

којшто укажува дека равенките се еквивалентни, односно секое решение на едната е решение и на другата. Затоа, едната равенка е излишна и може да се изостави, без да се изгуби некое решение на системот. Со изоставување, на пример, на втората равенка системот се сведува на една равенка,

$$a_1x + b_1y = c_1.$$

Тогаш, со избор на произволно t за една од непознатите, на пример, $y = t$ се добива точно определена вредност за x:

$x = \frac{1}{a_1}(c_1 - b_1 \cdot t)$, така што подредените парови

$$\left(\frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}t, t\right), \text{ за секој реален број } t,$$

го претставуваат множеството решенија на системот.

Пример 2. За системот равенки

$$\begin{cases} 3x - 6y = -15 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$$

имаме дека

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0,$$

од каде што заклучуваме дека подредените парови

$(2t-5, t)$, за секој реален број t,

го претставуваат множеството решенија на системот. ♦

Но, не секој систем од две равенки со две непознати мора да има решение.

Пример 3. Системот

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

е противречен, односно нема ниту едно решение бидејќи втората равенка може да се запише во вид $-(x-y)=1$ и постоењето на решение (x_0, y_0) би значело постоење на реален број $x_0 - y_0$ и на неговиот спротивен $-(x_0 - y_0)$, коишто истовремено се еднакви на 1, што претставува противречност.

Анализата на овој систем укажува дека имаме ситуација кога

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ и } \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. ♦$$

Значи, за системот (1) заслужува внимание и случајот:

Случај III. Ако за детерминантата на системот и за споредните детерминанти имаме дека

$\boxed{\Delta = 0}$ и $\boxed{\Delta_x \neq 0}$ или $\boxed{\Delta_y \neq 0,}$

тогаш системот е противречен.

Навистина, $\Delta = 0$ како и во вториот случај повлекува дека

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k,$$

додека $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ значи дека

$$\frac{c_2}{c_1} \neq k \text{ односно } \frac{c_2}{c_1} = k + m, \; m \neq 0.$$

Тогаш системот (1) има облик

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ ka_1x + kb_1y = kc_1 + mc_1 \end{cases}.$$

Значи, имаме дека

$$a_1x + b_1y - c_1 = 0$$

и истовремено

$$0 = k(a_1x + b_1y - c_1) = c_1m \neq 0,$$

што претставува контрадикција.

Пример 4. За системот равенки

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$$

имаме дека

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -6 \end{vmatrix} = -6; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = -4$$

што значи дека тој е противречен. Во тоа може лесно да се убедиме, ако втората равенка ја замениме со еквивалентната равенка (делејќи ги двете страни со 2) $2x - 6y = 5.$ За ниеден подреден пар $(\overline{x}, \overline{y})$, $2\overline{x} - 6\overline{y}$ не може истовремено да е еднакво на 5 и на 6.♦

Да се потсетиме, на почетокот од дискусијата претпоставивме дека $a_i \neq 0,\ b_i \neq 0,\ i = 1{,}2$ и барем еден од слободните членови е различен од нула, односно $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Во продлжение ќе разгледаме некои специјални случаи:

1^0 Нека двата слободни члена се еднакви на нула, односно

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Тогаш системот (1) го добива обликот

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases},$$

и се нарекува **хомоген систем** од две линеарни равенки со две непознати.

Не тешко да се воочи дека хомогениот систем секогаш има решение $x_0 = 0,\ y_0 = 0,$ кое се нарекува **тривијално решение**. Затоа се поставува прашањето дали постои нетривијално решение $(\overline{x}, \overline{y})$ различно од тривијалното $(0{,}0)$?

Ако $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ тогаш секој подреден пар реални броеви $(\overline{x}, \overline{y})$ претставува решение на системот.

Ако барем еден од коефициентите е различен од нула, на пример, $a_1 \neq 0$ тогаш првата равенка може да се замени со еквивелентна равенка

$$x = -\frac{b_1}{a_1} y.$$

Користејќи го ова втората равенка добива облик

$$\left(b_2-\frac{a_2b_1}{a_1}\right)y=0 \text{ или } (a_1b_2-a_2b_1)y=0$$

односно имаме дека $\Delta\cdot y=0,$ каде $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}.$

Оттука следува дека ако

$$\Delta=0$$

тогаш за секоја вредност $\overline{y}$ на непознатата y и за вредност $\overline{x}=-\frac{b_1}{a_1}\overline{y}$ на непознатата $x,$ парот $(\overline{x},\overline{y})$ претставува решение на хомогениот систем

$$(\overline{x}=-\frac{b_1}{a_1}\overline{y},\overline{y})$$

и ако

$$\Delta\neq 0$$

тогаш решение на равенката $\Delta\cdot y=0$ е само $y_0=0$ и тогаш првата равенка е исполнета само за $x_0=0$ што значи дека системот има само тривијално решение $(0,0)$.

2^0 Нека барем еден од коефициентите на системот (1) е еднаков на нула, односно

$$a_i=0 \text{ или } b_i=0,\ i=1,2.$$

Без губење на општоста може да се претпостави дека $a_1=0.$ Со аналогна дискусија направена за системот (1) се добива дека системот:

✓има единствено решение ако $\Delta\neq 0;$

✓бескрајно многу решенија ако $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$;

✓е противречен ако $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$.

Задачи за самостојна работа

1. Со помош на детерминанти реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} 8x - 3y = 13 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - 10y = 35 \\ 3x + 16y = -33 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 10y = 1 \end{cases}$.

2. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} x\sqrt{2} - 2y = \sqrt{2} \\ x - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - y\sqrt{3} = 1 \\ x\sqrt{3} + 3y = \sqrt{3} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ bx + 4y = k \end{cases}$.

3. Најди ги вредностите на параметрите a и b за кои системот равенки

$$\begin{cases} 4x + 6y = a \\ 2x - by = 1 \end{cases}:$$

а) има единствено решение; б) е неопределен;

в) е противречен.

4. За кои вредности на параметарот k системот равенки

$$\begin{cases} kx - 6y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

има само тривијално решение?

5. За која вредност на k системот равенки

$$\begin{cases} kx - y = 4 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$$

е противречен?

6. Даден е системот равенки

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - my = n \end{cases}.$$

Најди вредности за m и $n,$ за коишто системот:

а) има единствено решение; б) е противречен;

в) е неопределен.

1.2.2. Систем од две линеарни равенки со три непознати

Со помош на детерминанти може да се решава и систем од две равенки со три непознати:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}.$$

Можни се следниве случаи:

Случај I. Барем една од детерминантите

$$\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta_{xz} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix};\ \Delta_{yz} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

е различна од $0,$ на пример $\Delta_{yz} \neq 0.$ Тогаш дадениот систем го запишуваме во облик

$$\begin{cases} b_1y + c_1z = d_1 - a_1x \\ b_2y + c_2z = d_2 - a_2x \end{cases}.$$

Овој систем има единствено решение (y_0, z_0) за произволна вредност x_0 на $x,$ имено,

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - a_1x_0 & c_1 \\ d_2 - a_2x_0 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta_{yz}}; \qquad z_0 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 - a_1x_0 \\ b_2 & d_2 - a_2x_0 \end{vmatrix}}{\Delta_{yz}},$$

така што $x_0,\ y_0, z_0$ претставува едно решение на системот. Со избор на друга вредност x_1 за непознатата x, добиваме друго решение на системот, $x_1,\ y_1, z_1.$

Бидејќи x може да прима произволна реална вредност (секој реален број t може да биде вредност за непознатата $x,$ системот може да има бескрајно многу решенија и

$$t, \quad \frac{\begin{vmatrix} d_1 - a_1t & c_1 \\ d_2 - a_2t & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta_{yz}}, \quad \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 - a_1t \\ b_2 & d_2 - a_2t \end{vmatrix}}{\Delta_{yz}}$$

е општиот облик на овие решенија.

Пример 1. За системот

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{cases},$$

имаме дека

$$\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ и } \Delta_{xz} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Затоа системот го запишуваме во облик

$$\begin{cases} 2x + z = 1 + 2y \\ 3x + z = 3y \end{cases}.$$

Со избор на произволна вредност t за y и со пресметување на

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+2t & 1 \\ 3t & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-t+1}{-1} = t-1 \text{ и } z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+2t \\ 3 & 3t \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3,$$

може да го запишиме општото решение

$$x = t-1, \quad y = t, \quad z = 3. \blacklozenge$$

Случај II. Трите детерминанти

$$\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \ \Delta_{xz} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \ \Delta_{yz} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

се еднакви на нула, и при тоа

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k.$$

II₁. Ако имаме дека

$$k = \frac{d_1}{d_2},$$

тогаш системот се сведува на

$$\begin{cases} k(a_1x + b_1y + c_1z) = kd_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

така што едната равенка е излишна. Тогаш дадениот систем има бесконечно многу решенија, бидејќи за секој избор на две непознати може да се одреди вредноста на третата непозната така што ќе важи равененство на левата и на десната страна.

Пример 2. Очигледно системот

$$\begin{cases} 2x-4y+3z=6 \\ 4x-8y+6z=12 \end{cases}$$

може да се запише во вид

$$\begin{cases} 2x-4y+3z=6 \\ 2(2x-4y+3z)=2\cdot 6 \end{cases}.$$

Притоа, имаме дека

$$\Delta_{xy}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}=0,\ \Delta_{xz}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=0,\ \Delta_{yz}=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}=0$$

и важи

$$\frac{2}{4}=\frac{-4}{-8}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Општото решение на дадениот систем може да се запише во вид

$$2x=4y-3z+6,\ y \text{ и } z,$$

кој укажува дека за y и z може да избереме произволни реални вредности, $y=u,\ z=v,$ а за x вредност $\frac{4u-3v+6}{2}$.♦

II₂. Ако

$$k\neq\frac{d_1}{d_2},$$

тогаш системот е противречен.

Пример 3. Ако првата равенка на системот

$$\begin{cases} 2x-4y+3z=6 \\ 4x-8y+6z=10 \end{cases}$$

се помножи со 2 добиваме дека $4x-8y+6z=12$, а тоа противречи на втората равенка $4x-8y+6z=10$. Според тоа системот е противречен.♦

Задачи за самостојна работа

1. Да се реши системот равенки со три променливи:

а) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x+5y+3z=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y-z=2 \\ 4x-2y-2z=-3 \end{cases}$.

2. Реши го системот хомогени равенки:

а) $\begin{cases} 3x-5y+2z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 6x-4y+3z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x-y+az=0 \end{cases}$.

3. Покажи дека ако (x_1,y_1,z_1) и (x_2,y_2,z_2) се две различни решенија на системот равенки

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases},$$

тогаш

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

е исто така решение на дадениот систем.

1.3 Детерминанти од трет ред

1.3.1. Дефиниција и основни поими

Нека $a_i, b_i, c_i \quad (i=1,2,3)$ се дадени реални броеви.

Дефиниција 1. Вредноста на изразот

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

запишан шематски

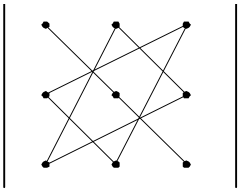
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

се нарекува **детерминанта од трет ред**; значи

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

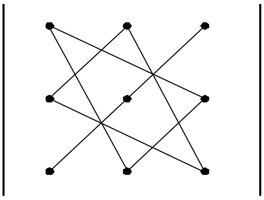
Броевите $a_i, b_i, c_i \quad (i=1,2,3)$ се нарекуваат **елементи на детерминантата**. Елементите се распоредени во **три редици** (хоризонтално) и во **три колони** (вертикално). Елементите $a_1, \ b_2, \ c_3$ ја сочинуваат **главната дијагонала**, а a_3, b_2, c_1 ја сочинуваат **споредната дијагонала** на детерминантата.

Во изразот претставен со детерминантата од трет ред, првите три собироци претставуваат производи од по три елементи, кои лежат на главната дијагонала (a_1, b_2, c_3) и во темињата на триаголниците, чии основи се паралелни со главната дијагонала $(a_2, b_3, c_1$ и $a_3, b_1, c_2)$, (цртеж 1). Следниве три члена од равенството што се земени со негативен знак, претставуваат производи од по три елементи, кои лежат на споредната дијагонала (a_3, b_2, c_1) и во темињата на триаголниците чии основи се паралелни со споредната дијагонала $(a_2, b_1, c_3$ и $a_1, b_3, c_2)$, (цртеж 2).



знак (+)

Цртеж 1



знак (-)

Цртеж 2

За пресметување на вредноста на детерминанта од трет ред го користиме и такареченото **Сарусово правило**.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \searrow & \searrow & \searrow & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ - & - & - & & \end{array}$$

Цртеж 3

Според ова правило, за да ја пресметаме вредноста на детерминантата, десно од неа ги допишуваме првата и втората колона, при што тие се четврта и петта колона на нова правоаголна шема. Потоа производите на елементите (по три), што лежат на главната дијагонала и на двете дијагонали паралелни на неа ги земаме со позитивен знак, а производот на елементите (по три) што лежат на споредната дијагонала и на двете дијагонали паралелни на неа ги земаме со негативен знак и овие шест производи ги собираме (цртеж 3).

Пример 1. Вредноста на детерминантата

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

со помош на Сарусовото правило се пресметува на следниов начин

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{matrix} =$$

$$= 2\cdot 2\cdot 4+(-1)\cdot 5\cdot(-3)+3\cdot 0\cdot 1-3\cdot 2\cdot(-3)-2\cdot 5\cdot 1-(-1)\cdot 0\cdot 4=$$

$$=39.\ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги вредностите на детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

2. Реши ги равенките по непознатата x:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & (x+1)^3 \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ x & b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0.$

3. Пресметај ги вредностите на детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$,

каде што x, y, a, b се произволно дадени реални броеви.

1.3.2. Развивање на детерминанта по елементите на дадена редица (колона)

Елементите на детерминанта кои се произволно дадени реални броеви (општи броеви) понекогаш е позгодно да се запишуваат со една буква, ставајќи до неа два индекса што ќе ни го покажуваат редниот број на редицата и редниот број на колоната на кои им припаѓа дадениот елемент. По договор, првиот индекс секогаш ќе го означува редниот број на редицата, а вториот индекс – редниот број на колоната. Така, на пример,

a_{ij}, за $i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3$

е елемент од $i -$та редица и $j -$та колона на детерминантата од трет ред:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Оваа детерминанта ќе ја сметаме за општа дадена детерминанта од трет ред и кратко ќе ја означуваме со Δ. За неа ќе воведеме два нови поима кои се однесуваат на сите детерминанти од трет ред. Тоа се поимите **минор** и **алгебарски комплемент** соодветни на даден елемент на детерминантата.

Дефиниција 1. За произволно избрани индекси $i, j \ (1 \le i, j \le 3)$, ако ја прецртаме $i -$тата редица и $j -$тата колона на детерминанта од трет ред, преостанатите елементи формираат детерминанта од втор ред Δ_{ij}, која се нарекува **минор** на елементот a_{ij}.

Забелешка 1. Бидејќи секој елемент има свој минор, може да заклучиме дека една детерминанта од трет ред има девет различни минори. Еве три од нив кои одговараат на елементите a_{12}, a_{23}, a_{31}, соодветно:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \blacklozenge$$

Дефиниција 2. Алгебарски комплемент на елементот a_{ij} на детерминанта од трет ред се вика бројот $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, каде што Δ_{ij} е минорот на елементот a_{ij}.

Забелешка 2. Алгебарските комплементи на елементите a_{31} и a_{21} се соодветно:

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\Delta_{31} = \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\Delta_{23} = -\Delta_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \blacklozenge$$

Вредноста на детерминантата од трет ред може да се добие со помош на елементите на една редица (колона) и нејзе соодветните минори, односно со **развивање на детерминантата** по елементите на избрана редица (колона) што се гледа од следнава теорема:

Теорема 1. Вредноста на детерминантата од трет ред е еднаква на збирот од производите на елементите на која било $i-$та редица ($j-$та колона) помножени со нивните соодветни алгебарски комплементи; значи

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3},\ \ 1 \le i \le 3$$

$$(\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j}\ \ 1 \le j \le 3).$$

Доказ. Доказот ќе го изведеме за втората редица $(i=2)$, односно ќе го докажеме равенството

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

Од дефиницијата на детерминанта Δ од трет ред, имајќи ги предвид својствата на операциите собирање и множење на реални броеви, добиваме

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ &- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} = \\ &= a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + \\ &+ a_{23}(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}) = \\ &= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.\end{aligned}$$

Случаите за $i=1,3$ и $j=1,2,3$ се докажуваат аналогно.■

Горната теорема може да ја користиме за пресметување на вредноста на детерминанта од трет ред.

Пример 1. Развивајќи ја детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

по елементите на првата редица добиваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$=3\cdot 10+2\cdot(-11)+1\cdot(-17)=-9.\ \blacklozenge$$

Развивањето на детерминантата е корисно да се врши по онаа редица или колона која содржи нулти елементи.

Пример 2. Имаме дека

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{12}+8\cdot A_{22}+0\cdot A_{32}=8(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=56.\ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Избери една детерминанта од трет ред и запиши ги сите нејзини минори и алгебарски комплементи.

2. Пресметај ги детерминантите со развивање по елементите на некоја од редиците:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

3. Пресметај ги детерминантите со развивање по елементите на некоја од колоните:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$,

каде $x,\ y,\ z$ се произволно дадени реални броеви.

1.3.3. Својства на детерминантите од трет ред

Детерминантите од трет ред ги имаат следниве својства:

Својство 1. Детерминантата не ја менува вредноста, ако редиците се заменат со колони, запазувајќи го редниот број; значи

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Навистина, да ја означиме со Δ детерминанатата од левата страна на равенството, а со $\overline{\Delta}$ – детерминантата од десната страна на равенството. Ако детерминантата Δ ја развиеме по елементите на првата редица, а $\overline{\Delta}$ – по елементите на првата колона, добиваме

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad \text{и} \quad \overline{\Delta} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

од каде што следува $\Delta = \overline{\Delta}$. ■

Својство 2. При замена на местата на две редици (колони), вредноста на детерминантата го менува својот знак во спротивен.

На пример, ако

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

тогаш може да се смета дека

$$\bar{\Delta}=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

е добиена од детерминантата Δ со замена на местата на првата и на третата колона. Развивајќи ја детерминантата $\bar{\Delta}$ по елементите на првата колона, добиваме

$$\bar{\Delta}=a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}=$$

$$=-a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})+a_{23}(a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12})-a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=$$

$$=-a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}-a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Развивајќи ја сега детерминантата Δ по елементите на третата колона, добиваме

$$\Delta=a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Значи, $\bar{\Delta}=-\Delta.$

Точноста на останатите случаи се проверува аналогно.■

Својство 3. Детерминанта со две еднакви редици (колони) има вредност нула.

Навистина, ако во детерминантата Δ двете еднакви редици си ги заменат местата, вредноста на детерминантата останува иста, но според својството 2, вредноста на детерминантата мора да го промени знакот во спротивен. Затоа, мора да биде $\Delta = -\Delta$, или $2 \cdot \Delta = 0$. Оттука, следува дека

$$\Delta = 0. \blacksquare$$

Својство 4. Ако сите елементи на една редица (колона) се нулти, тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

Навистина, со развивање на детерминантата Δ по редицата (колоната), во која сите елементи се нула, добиваме

$$\Delta = 0. \blacksquare$$

Својство 5. Детерминанта се множи со број кога со тој број ќе се помножат сите елементи на една иста редица (колона).

На пример, ако елементите од првата колона имаат заеднички множител k, тогаш имаме дека

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Навистина, со развивање на детерминантата Δ по елементите на првата колона добиваме дека

$$\Delta = ka_{11}A_{11} + ka_{21}A_{21} + ka_{31}A_{31} = k(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}). \blacksquare$$

Својство 6. Ако соодветните елементи на две редици (колони) се пропорционални, тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

Навистина, без губење на општоста може да претпоставиме

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix}.$$

Повикувајќи се прво на својството 5, а потоа на својството 3, добиваме

$$\Delta = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

Својство 7. Ако секој елемент на некоја редица (колона) на детерминантата Δ е збир од (конечен број) n собироци, тогаш Δ може да се претстави како збир

$$(\Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_n)$$

од n детерминанти, во кои сите елементи со исклучок на елементите од односната редица (колона) се исти како во Δ. Во првата детерминанта – собирок (Δ_1) односната редица (колона) се состои од првите собироци, во втората се состои од вторите, итн. и во $n-$тата се состои од $n-$тите собироци.

На пример за да се утврди равенството

$$\begin{vmatrix} a_1+s_1+p_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+s_2+p_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+s_3+p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

доволно е почетната детерминанта да ја развиеме по елементите на првата колона.■

Својство 8. Ако кон елементите на една редица (колона) на детерминантата се додадат соодветните елементи на друга редица (колона) претходно помножени со еден ист број k, тогаш не се менува вредноста на детерминантата.

На пример, со последователно користење на својството 7, на својството 5 и на својството 3, имаме дека

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.■$$

Својство 9. Ако елементите на една редица (колона) на детерминантата се линеарни комбинации на соодветните елементи на другите две редици (колони), тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

На пример, со примена на својството 7 и на Својството 6, добиваме дека

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & xa_{11}+ya_{12} \\ a_{21} & a_{22} & xa_{21}+ya_{22} \\ a_{31} & a_{32} & xa_{31}+ya_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & xa_{11} \\ a_{21} & a_{22} & xa_{21} \\ a_{31} & a_{32} & xa_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ya_{12} \\ a_{21} & a_{22} & ya_{22} \\ a_{31} & a_{32} & ya_{32} \end{vmatrix} =$$

$$=0+0=0. \blacksquare$$

Својство 10. Збирот на производите на елементите на која било редица (колона) со соодветните алгебарски комплементи на елементите од друга редица (колона) е еднаков на нула.

За проверка на ова својство, елементите на третата колона ќе ги помножиме соодветно со алгебарските комплементи на елементите од првата колона, односно ќе покажеме дека важи равенството

$$a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=0.$$

Бидејќи алгебарските комплементи на елементите од првата колона се формираат без употреба на елементите од таа колона, за кои било броеви $x,\ y,\ z$ важи равенството

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = xA_{11}+yA_{21}+zA_{31}.$$

Посебно за $x=a_{13},\ \ y=a_{23},\ \ z=a_{33},$ добиваме дека

$$a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0. \blacksquare$$

Задачи за самостојна работа

1. Користејќи ги својствата на детерминанта од трет ред, најди ги вредностите на следниве детерминанти:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

2. Детерминанта од облик

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

се нарекува **горнотриаголна**. Покажи дека вредноста на оваа детерминанта е еднаква на $a_{11}a_{22}a_{33}$.

3. Користејќи ги својствата на детерминанта, следните детерминанти доведи ги до горнотриаголна форма, а потоа пресметај ги нивните вредности:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.4. Систем од три линеарни равенки со три непознати

Детерминантите од трет ред, аналогно на детерминантите од втор ред, може да ги користиме за поедноставно запишување на сложени формули и услови, како и за решавање на системи од три линеарни равенки со три непознати.

1.4.1. Решение на системот и Крамерови формули

Нека е даден општ систем од три линеарни равенки со три непознати, x, y, z, во кој што коефициентите на системот од практични причини се означени со иста буква и два индекси, a_{ij}, $i,j=1,2,3,$ а слободните членови со b_i, $i=1,2,3$:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2. \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Коефициентите пред x, y, z образуваат **детерминанта на системот**, означена со Δ,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Детерминантите

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

се нарекуваат **детерминанти на непознатите** x, y, z, соодветно.

Да се реши системот значи да се најдат вредности на непознатите, ако постојат, кои ги задоволуваат трите равенки на системот и претставуваат негово решение или да се утврди противречност на системот.

Да претпоставиме дека системот (1) има решение (x_0, y_0, z_0). Тогаш равенствата

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 &= b_1 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 &= b_2 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 &= b_3 \end{aligned} \qquad (1')$$

претставуваат идентитети.

Нека A_{11}, A_{21}, A_{31} се алгебарски комплементи на елементите a_{11}, a_{21} и a_{31}, соодветно. Со множење на двете страни во првото равенство во (1') со A_{11}, на второто равенство со A_{21}, а третото со A_{31}, и со собирање на нивните соодветни страни, добиваме дека

$$\begin{aligned} x_0(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) + y_0(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) + \\ + z_0(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) = \\ = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}. \end{aligned}$$

Согласно со својствата на детерминанта, имаме дека

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \Delta,$$

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0,$$

$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0 \text{ и}$$

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_x .$$

Со тоа покажавме дека

$$x_0 \cdot \Delta = \Delta_x .$$

Аналогно, множејќи ги равенствата на (1') соодветно со алгебарските комплементи на елементите од втората колона на детерминантата Δ и потоа собирајќи ги нивните соодветни страни, доаѓаме до равенството

$$y_0 \cdot \Delta = \Delta_y .$$

Слично, множејќи ги равенствата на (1') соодветно со алгебарските комплементи на елементите од третата колона на Δ и собирајќи ги соодветните страни на добиените равенства, го добиваме и равенството

$$z_0 \cdot \Delta = \Delta_z .$$

Според тоа, тројката броеви (x_0, y_0, z_0), за којашто претпоставивме дека е решение на дадениот систем (1), претставува решение и на системот равенки

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y . \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases} \qquad (2)$$

Да преминеме на утврдување на решенијата на дадениот систем линеарни равенки.

Случај I Нека

$\Delta \neq 0.$

Тогаш системот (2) има единствено решение така што мора да биде

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{3}$$

Значи, за $\Delta \neq 0$ следува дека решението (x_0, y_0, z_0) е единствено и е еднакво на

$$\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

што значи дека и (1) има единствено решение. Тогаш (1) и (2) се еквивалентни системи.

Според тоа, точна е следнава **теорема на Крамер** за систем од три линеарни равенки со три непознати:

Теорема 1. Ако детерминантата Δ на системот (1) е различна од нула, тогаш тој систем има единствено решение, определено со формулите

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Формулите (3) се нарекуваат **Крамерови формули**, а решение добиено со примена на овие формули се вели дека е добиено со Крамерово правило.

Пример 1. Системот равенки

$$\begin{cases} -2x+3y-4z=1 \\ 3x-y+z=2 \\ x-4y+5z=-3 \end{cases}$$

има единствено решение $(1,1,0)$, бидејќи $\Delta=4\neq 0$, $\Delta_x=4$, $\Delta_y=4$ и $\Delta_z=0$, така што добиваме

$$x_0=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{4}{4}=1,\ y_0=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{4}{4}=1,\ z_0=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{0}{4}=0.\ ♦$$

Случај II Нека

$$\Delta=0.$$

II$_1$ Барем една од детерминантите

$$\Delta_x\neq 0 \text{ или } \Delta_y\neq 0 \text{ или } \Delta_z\neq 0.$$

Нека, на пример $\Delta_x\neq 0$. Ако системот (1) има решение (x_0,y_0,z_0) тогаш тоа би морало да биде решение и на системот (2), односно

$$0=x_0\cdot\Delta=\Delta_x\neq 0,\ y_0\cdot\Delta=\Delta_y,\ z_0\cdot\Delta_z=\Delta_z.$$

Првото равенство претставува противречност, што значи дека не е можно постоење на решение на (1), односно системот (1) е противречен.

Пример 2. Системот равенки

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

е противречен бидејќи $\Delta = 0,$ а $\Delta_x = 1 \neq 0.$ ♦

II$_2$ Нека

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.$$

Ќе покажеме дека во овој случај системот равенки (1) има бескрајно многу решенија или е противречен.

Да ги испитаме сите случаи во кои четирите детерминанти на системот ќе имаат вредност нула.

✓ Очигледна ситуација настанува ако сите коефициенти и слободниот член на барем една равенка се еднакви на нула. Нека, на пример, без губење на општоста во (1)

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = b_3 = 0.$$

Тогаш третата равенка има облик

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$$

и е исполнета за секоја тројка реални броеви (x, y, z). Притоа решение на (1) е секое решение на системот од првите две равенки

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$$

за којшто знаеме дека има бесконечно многу решенија или е противречен.

✓ Нека барем еден коефициент во барем една равенка на системот (1) е различен од нула, на пример,

$$a_{33} \neq 0.$$

Тогаш третата равенка може да се реши по z, односно да се запише во вид

$$z = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x - \frac{a_{32}}{a_{33}} y$$

и користејќи го ова, z може да се елиминира од првата и од втората равенка на (1). Притоа, овие две равенки се сведуваат во равенки од облик

$$\left(a_{11} - a_{13} \frac{a_{31}}{a_{33}} \right) x + \left(a_{12} - a_{13} \frac{a_{32}}{a_{33}} \right) y = b_1 - a_{13} \frac{b_3}{a_{33}}$$

$$\left(a_{21} - a_{23} \frac{a_{31}}{a_{33}} \right) x + \left(a_{22} - a_{23} \frac{a_{32}}{a_{33}} \right) y = b_2 - a_{23} \frac{b_3}{a_{33}}$$

и двете заедно претставуваат систем од две линеарни равенки со две непознати, кој може да се запише како што следува:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})y = b_1 a_{33} - a_{13}b_3 \\ (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})x + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})y = b_2 a_{33} - a_{23}b_3 \end{cases}$$

или користејќи детерминанти

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} b_1 & a_{13} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \end{cases}.$$

Детерминантата на овој систем се сведува на $a_{33}\Delta$ и од претпоставката $\Delta = 0$ следува дека $a_{33}\Delta = 0$. Оттука системот или е противречен и тогаш и (1) е противречен, или има бескрајно многу решенија (x, y) и за секое конкретно (x_0, y_0) тројката (x_0, y_0, z_0), односно

$$x_0, \ y_0, \ z_0 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_0 - \frac{a_{32}}{a_{33}} y_0$$

претставува конкретно решение на (1), што значи дека (1) има бескрајно многу решенија.

Погорната дискусија може да се резимира во следнава теорема:

Теорема 2. Ако детерминантата на системот (1) е нула, тогаш тој систем има или бескрајно многу решенија или е противречен.

Пример 3. Вредноста на детерминантата на системот

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 2x + 6y + 2z = 4 \\ 3x + 9y + 3z = 6 \end{cases}$$

е еднаква на нула, што значи дека системот има бескрајно многу решенија или е противречен. Уочувајќи дека притоа системот може да се запише како

$$\begin{cases} x+3y+z=2 \\ 2(x+3y+z)=2\cdot 2 \\ 3(x+3y+z)=2\cdot 3 \end{cases}$$

заклучуваме дека двете последни равенки се излишни и тогаш решенијата на системот се решенијата равенката на $x+3y+z=2$ којашто има бескрајно многу решенија; тројката

$$x,\ \ y,\ \ z=2-x-3y$$

може да се смета за општо решение на системот за произволно избрани реални броеви $x,\ y$. ♦

Пример 4. Системот

$$\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 6x-3y+3z=6 \\ 8x-4y+4z=4 \end{cases}$$

може да се запише во вид

$$\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 3(2x-y+z)=3\cdot 2, \\ 4(2x-y+z)=4\cdot 1 \end{cases}$$

кој што е еквивалентен со

$$\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 2x-y+z=2. \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$$

Последниот систем очигледно е противречен, што значи дека и дадениот систем е противречен. Притоа, имаме дека

$$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$$

бидејќи секоја од овие детерминанти има барем две пропорционални колони.

Пример 5. Непосредно за системот

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 8 \\ x + y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 10 \end{cases}$$

се добива дека $\Delta = 0,$ но веднаш не може да се уочи дали тој е противречен или има бескрајно многу решенија. За да го утврдиме тоа може да постапиме на следниов начин. Бидејќи коефициентите на системот се различни од нула, избирајќи го, на пример, бројот (-1) пред z во првата равенка, таа може да се запише во еквивалентен вид $z = 3x + 2y - 8,$ којшто може да се искористи за елиминирање на непознатата z од втората и во третата равенка на системот. Така се добива систем од две равенки со две непознати

$$\begin{cases} 7x + 5y = 17 \\ 14x + 10y = 34 \end{cases}$$

или, еквивалентно

$$\begin{cases} 7x + 5y = 17 \\ 2(7x + 10y) = 2 \cdot 17 \end{cases}$$

којшто очигледно има бескрајно многу решенија. Како општо решение може да се земе, на пример

$$x = t, \; y = \frac{17 - 7t}{5}, \; z = \frac{t - 6}{5}. \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги системите линеарни равенки:

а) $\begin{cases} 2x-3y+z=9 \\ x+2y-3z=-6 \\ 4x-5y-2z=12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 3x-y+4z=2 \\ 2x-3y+5z=1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x-y+3z=1 \\ 3x+2y-z=3 \\ x-3y+4z=-2 \end{cases}$.

2. Докажи дека системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=0 \\ 2x+ay+z=2 \end{cases}$$

за секоја вредност на параметарот a има единствено решение. Најди го тоа решение.

3. Испитај за кои вредности на параметарот a системот равенки

$$\begin{cases} 2x+ay-z=8 \\ ax+2y+z=20 \\ x+y-2z=-5 \end{cases}$$

а) има бескрајно многу решенија;

б) е противречен;

в) има единствено решение.

4. При претпоставка дека системите имаат решение и притоа сите изрази во именителите се различни од нула, со воведување соодветна смена, најди ги решенијата

а) $$\begin{cases} \dfrac{3}{x+y+z}-\dfrac{6}{y-2x}-\dfrac{1}{3z-y}=1 \\ \dfrac{6}{x+y+x}-\dfrac{4}{y-2x}+\dfrac{1}{3z-y}=3 \\ \dfrac{15}{x+y+z}+\dfrac{2}{y-2x}+\dfrac{3}{3z-y}=5 \end{cases};$$

б) $$\begin{cases} \dfrac{12}{x+y}-\dfrac{4}{x-2z}=0 \\ \dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{y+3z}=2 \\ \dfrac{10}{y+3z}-\dfrac{6}{x-2z}=-1 \end{cases}.$$

1.4.2. Гаусов метод

За нумеричко решавање на систем линеарни равенки со две непознати, познати се **методот на спротивни коефициенти** и **методот на замена**. И двата метода може да се применат и за системи линеарни равенки со три непознати, но практиката покажала дека во тој случај најефикасно е да се користи метод кој е комбинација на овие два метода, и се нарекува **Гаусов метод**, во чест на славниот германски математичар Карл Фридрих Гаус.

Нека е даден систем од три линеарни равенки со три променливи

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} . \qquad (1)$$

✓ Може да претпоставиме дека $a_{11} \neq 0,$ бидејќи во спротивно, првата равенка може да си го замени местото со втората или со третата така што коефициентот пред x да биде ненулти. Ако сите коефициенти пред x се еднакви на нула, тогаш би имале систем со две непознати.

✓ Првата равенка помножена со $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ја додаваме на втората равенка, а потоа помножена со $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ ја додаваме на третата равенка.

Тогаш коефициентите пред x во втората и во третата равенка стануваат нула, односно добиваме еквивалентен систем од облик

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \ + a_{13}z \ = b_1 \\ \qquad a'_{22}\,y + a'_{23}\,z = b'_2 . \\ \qquad a'_{32}\,y + a'_{33}z = b'_3 \end{cases}$$

✓ Ако $a'_{22} \neq 0,$ тогаш втората равенка помножена со $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ ја додаваме на третата равенка.

Со тоа добиваме еквивалентен систем на погорниот, но и на почетниот, од облик

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \;\; + a_{13}z \; = b_1 \\ \qquad a'_{22}\, y + a'_{23}\, z = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}\, z = b''_3 \end{cases} . \qquad (2а)$$

Ако $a'_{22} = 0,$ но $a'_{32} \neq 0,$ тогаш втората и третата равенка си ги менуваат своите места, па повторно можеме системот да го доведеме до обликот (2а).

Ако пак, $a'_{22} = a'_{32} = 0,$ тогаш го имаме системот

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \;\; + a_{13}z \; = b_1 \\ \qquad\qquad a'_{23}\, z = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}\, z = b''_3 \end{cases} ,$$

па гледаме кој од коефициентите a'_{23} и a'_{33} е различен од нула. Ако на пример, $a'_{23} \neq 0,$ втората равенка помножена со соодветен коефициент ја додаваме на третата равенка и притоа добиваме еквивалентен систем од облик

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \;\; + a_{13}z \; = b_1 \\ \qquad\qquad a'_{23}\, z = b'_2 \\ \qquad\qquad\quad 0z = b'''_3 \end{cases} . \qquad (2б)$$

Ако пак $a'_{22} = a'_{23} = a'_{32} = a'_{33} = 0,$ тогаш го имаме следниот еквивалентен систем

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \;\; + a_{13}z \; = b_1 \\ \qquad\qquad\quad 0z = b'_2 \\ \qquad\qquad\quad 0z = b'''_3 \end{cases} . \qquad (2в)$$

Во секој случај, системот (1) е еквивалентен со еден од системите (2а), (2б) и (2в).

✓ Решение на системот (2а):

Случај 1. Ако $a''_{33} \neq 0,$ тогаш од третата равенка еднозначно се определува $z,$ а потоа така добиената вредност на z се заменува во втората равенка. Бидејќи $a'_{22} \neq 0,$ y еднозначно се определува од втората равенка, па така најдените y и z се заменуваат во првата равенка. Бидејќи $a'_{11} \neq 0,$ и x се определува еднозначно. Значи, системот (1) има единствено решение.

Случај 2. Ако $a''_{33} = 0,$ но $b''_3 \neq 0,$ системот (2) е противречен.

Случај 3. Ако $a''_{33} = b''_3 = 0,$ последната равенка на системот (2а) е излишна и ја отфрламе бидејќи се сведува на $0 = 0.$ Земајќи потоа произволна вредност t за z во втората равенка, добиваме еднозначно решение за y бидејќи $a'_{22} \neq 0,$

$$y = \frac{b_2' - a'_{23}\, t}{a'_{22}} = u.$$

Потоа се враќаме на првата равенка од која се добива еднозначно

$$x = \frac{b_1 - a_{12}u - a_{13}t}{a_{11}};$$

бидејќи $a_{11} \neq 0.$ Значи во овој случај системот (1) има бескрајно многу решенија.

✓ Решение на системот (2б):

Случај 1. Ако $b'''_3 \neq 0,$ тогаш системот е противречен.

Случај 2. Ако $b'''_3 = 0,$ тогаш третата равенка ја отфрламе како излишна, од втората добиваме

$$z = \frac{b'_2}{a'_{23}} = z_0$$

и избирајќи за y произволна вредност t од првата равенка наоѓаме еднозначно решение за x,

$$x = \frac{b_1 - a_{12}t - a_{13}z_0}{a_{11}}.$$

✓ Решение на системот (2в):

Случај 1. Ако $b'_2 \neq 0$ или $b'''_3 \neq 0,$ тогаш системот е противречен.

Случај 2. Ако

$$b'_2 = b'''_3 = 0,$$

тогаш втората и третата равенка се излишни. Во првата равенка земаме произволни вредности t и u за y и $z,$ соодветно, а потоа x се определува еднозначно бидејќи $a_{11} \neq 0,$

$$x = \frac{b_1 - a_{12}t - a_{13}u}{a_{11}}.$$

Не е тешко да се насети дека погорниот тек на одвивање на пресметувањата (алгоритам) на Гаусовиот метод не е единствен. Изборот на алгоритамот често го вршиме користејќи ја спецификата на системот.

Пример 1. За да се реши системот

$$\begin{cases} 2x + y \quad + z \;= 1 \\ x \qquad\quad + z \;= 0 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$

забележуваме дека тој е еквивалентен со

$$\begin{cases} x \quad\quad + z \ = 0 \\ 2x + y + z \ = 1 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$

којшто со примена на опишаниот алгоритам од своја страна е еквивалентен ($\Leftrightarrow$) со

$$\begin{cases} x \quad\quad + z \ = 0 \\ \quad\ y - z \ = 1 \\ \quad 3y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad\quad + z = 0 \\ \quad\ y - z = 1 \\ \quad\quad 4z = -4 \end{cases}.$$

Од последниот систем последователно добиваме $z = -1,\ y = 0,$ $x = 1$. Притоа, ги променивме местата на првите две равенки, за да добиеме $a_{11} = 1,$ и да го избегнеме делењето со a_{11}. ♦

Пример 2. Решавањето на системот

$$\begin{cases} \quad y + 2z = -1 \\ x - y + z \ = 2 \\ x + y + 5z = 4 \end{cases}$$

се одвива како што следува

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ \quad y + 2z = -1 \\ x + y + 5z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ \quad y + 2z = -1 \\ \quad 2y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ \quad y + 2z = -1 \\ \quad 0y + 0z = 4 \end{cases}.$$

Третата равенка во последниот систем е противречна и затоа разгледуваниот систем е противречен. ♦

Пример 3. Применувајќи го Гаусовиот метод за системот

$$\begin{cases} \ \ x \quad + y + 2z = 3 \\ -2x - 2y + 4z = 2 \\ \ \ 3x \ + 3y + 9z = 12 \end{cases}$$

добиваме еквивалентни системи

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ \qquad 8z=8 \\ \qquad 3z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=3 \\ \qquad 8z=8 \end{cases}.$$

Од последната равенка на последниот систем добиваме $z=1$. Потоа, избирајќи произволна вредност $y=t$ за x добиваме $x=1-t$. Значи, системот има бескрајно многу решенија:

$x=1-t,\ \ y=t,\ \ z=1$, за секој реален број t. ♦

Задачи за самостојна работа

Со помош на Гаусовиот метод реши ги следните системи:

1. $\begin{cases} 2x-y+3z=9 \\ 3x-5y+z=-4. \\ 4x-7y+z=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y+5z=10 \\ 3x+7y+4z=3\ . \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x-6y+4z=3 \\ 3x-3y+2z=1. \\ 4x-5y+2z=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x-3y+2z=-4 \\ 6x-2y+3z=-1. \\ 5x-3y+2z=-3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x+2y+3z=-2 \\ 3x+4y+2z=-10. \\ 2x-2y+5z=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-3y+z=9 \\ x+2y-3z=-6\ . \\ 4x-5y-2z=12 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-2y+3z=10 \\ 4x+y-2z=8\ . \\ 2x+3y+5z=5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 2x \qquad -z=11. \\ 3x-4y \qquad =7 \end{cases}$

1.5. Хомоген систем од три линеарни равенки со три непознати

Системот линеарни равенки

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

во кој слободните членови во сите равенки се еднакви на нула, се вика **хомоген систем од три линеарни равенки со три непознати**.

Очигледно е дека секој хомоген линеарен систем (1) секогаш има таканаречено **нулто** или **тривијално решение** $x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$ Затоа е од интерес да испитаме во кои случаи хомогениот систем линеарни равенки (1) има и ненулти решенија.

Ќе покажеме дека важи следнава теорема:

Теорема 1. Хомогениот систем (1) од три линеарни равенки со три непознати има ненулти решенија, ако и само ако детерминантата на системот (1) е еднаква на нула;

$$\Delta = 0.$$

Доказ. Нека системот (1) има ненулто решение (x_1, y_1, z_1). Ако детерминантата на системот (1) е различна од нула, односно ако $\Delta \neq 0,$ тогаш согласно со теоремата на Крамер системот (1) има единствено решение и тоа мора да биде нултото решение. Според тоа, при $\Delta \neq 0$ доаѓаме до противречност со претпоставката дека системот (1) има ненулто решение. Значи, $\Delta = 0.$

Обратно, нека $\Delta = 0.$ Во тој случај, бидејќи системот (1) не е противречен (има нулто решение), може да заклучиме дека системот (1) има бесконечно многу ненулти решенија. Не е тешко да се уочи, дека заедно со секое ненулто решение $x_o,\ y_0,\ z_0$ на системот (1), за секој реален број t и тројката $tx_o,\ ty_0,\ tz_0$ претставува решение на (1). ■

Се поставува прашањето при услов $\Delta = 0$ како да дојдеме до ненултите решенија на хомогениот систем (1).

Секако, барем еден коефициент на системот (1) е различен од нула (во спротивно секоја тројка реални броеви претставува решение за системот). Без губење на општоста може да претпоставиме дека $a_{11} \neq 0.$ Тогаш првата равенка може да се запише во обликот

$$x = -\frac{a_{12}}{a_{11}}y - \frac{a_{13}}{a_{11}}z$$

и користејќи го ова равенство, x може да се елиминира од втората и од третата равенка и така да се добие систем од две линеарни равенки со две непознати y и z,

$$\begin{cases} \left(a_{22} - a_{21}\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right)y + \left(a_{23} - a_{21}\dfrac{a_{13}}{a_{11}}\right)z = 0 \\ \left(a_{32} - a_{31}\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right)y + \left(a_{33} - a_{31}\dfrac{a_{13}}{a_{11}}\right)z = 0 \end{cases}$$

којшто се сведува во облик

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} z = 0 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} z = 0 \end{cases}$$

или, кратко

$$\begin{cases} \Delta_{33} y + \Delta_{32} z = 0 \\ \Delta_{23} y + \Delta_{22} z = 0 \end{cases}.$$

Ако сите коефициенти на последниот систем (детерминантите Δ_{33}, Δ_{32}, Δ_{23}, Δ_{22}) се еднакви на нула, тогаш за произволно избрани реални броеви t и u, од кои барем еден е ненулти, тројката

$$x = -\frac{a_{12}}{a_{11}} t - \frac{a_{13}}{a_{11}} u, \; y = t, \; z = u$$

претставува ненулто решение на почетниот систем (1).

Ако барем еден коефициент, на пример $\Delta_{33} \neq 0,$ тогаш за секоја ненулта вредност u на z, за

$$y_0 = -\frac{\Delta_{32}}{\Delta_{33}} u, \;\; x_0 = \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{\Delta_{32}}{\Delta_{33}} u - \frac{a_{13}}{a_{11}} u \;, \;\; u$$

x_0, y_0, u претставува нетривијално решение на системот (1).

Пример 1. Системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

нема ненулто решение бидејќи $\Delta = 2 \neq 0.$ ♦

Пример 2. Системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

има бескрајно многу решенија бидејќи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

За да ги најдеме ненултите решенија постапуваме на следниов начин: Од втората равенка на системот се добива $z = -2x - y$ и со замена на z со изразот $-2x - y$ првата и третата равенка се сведуваат на равенките $2x + y = 0$ и $-2x - y = 0$. Оттука за произволно избран реален број t тројката

$$x = t, \quad y = -2t, \quad z = 0$$

претставува решение на системот.♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ги сите решенија на системот хомогени линеарни равенки:

а) $\begin{cases} 3x + 7y + 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 7y - z = 0 \\ 3x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$.

2. За кои вредности на параметарот a, системот хомогени линеарни равенки:

$$\begin{cases} x + 3 + az = 0 \\ 4x + 5y - z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

ќе има ненулти решенија?

3. Докажи дека за произволни вредности на a, b и $c,$ системот

$$\begin{cases} \qquad ay + bz = 0 \\ -ax \qquad + cz = 0 \\ -bx - cy \qquad = 0 \end{cases}$$

има бесконечно многу решенија.

4. За која вредност на параметарот $a,$ системот

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

има барем две решенија?

Задачи за вежбање

1. Пресметај ја вредноста на детерминантата:

а) $\begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}.$

2. Реши го системот линеарни равенки:

а) $\begin{cases} 3x+7y=2 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$;　　　　б) $\begin{cases} 4x+7y=-13 \\ 5x+8y=-14 \end{cases}$.

3. Докажи дека ако a, b и c се реални броеви, тогаш равенката

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$$

има реални корени.

4. Докажи го равенството:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3+a^2 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a^2+a \end{vmatrix} = 0.$$

5. Докажи го идентитетот:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1+x_2) & \frac{1}{2}(y_1+y_2) & 1 \\ \frac{1}{2}(x_1-x_2) & \frac{1}{2}(y_1-y_2) & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

6. Со примена на својствата на детерминанта пресметај:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s+1 & s+2 & s+3 \\ s+4 & s+5 & s+7 \end{vmatrix}.$$

7. Реши ја неравенката:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & x+2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & x & -3 \end{vmatrix} < 0.$$

8. За која вредност на a, системот

$$\begin{cases} 3x+5y=5 \\ 2x-y=a \\ x+2y=1 \end{cases}$$

има решение?

9. Реши ги следните системи равенки со три непознати:

а) $\begin{cases} x+y-z=a \\ x-y+z=b \\ -x+y+z=c \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b. \\ z+x=c \end{cases}$

10. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \\ x+y+az=a^2 \end{cases} .$$

11. Со помош на Гаусовиот метод реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} x-2y+3z=10 \\ 4x+y-2z=8 \\ 2x+3y+5z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 3x-4y \quad =11. \\ 2x \quad -z=11 \end{cases}$

12. Ако даден број се подели со збирот на неговите цифри, се добива количник $22.$ Ако цифрите на десетките и на единиците си ги заменат местата, ќе се добие број што е за 18 помал од дадениот, а ако цифрите на стотките и на десетките си ги заменат местата, ќе се добие број за 360 поголем од дадениот број. Кој е тој број?

13. Најди ги должините на страните на еден триаголник, ако сумите на паровите од неговите страни се 8cm, 9cm и 11cm.

14. Бројот a претстави го како збир од три броја, така што првиот е за m (единици) поголем од вториот, а n пати помал од третиот број.

15. Во кој случај системот равенки

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \\ ax - by = ab \end{cases}$$

има решение?

16. Докажи дека функцијата $\frac{ax + b}{cx + d}$ е константна (прима иста вредност за секое x за кое $cx + d \neq 0$) ако и само ако

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

17. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2ax - 3by + \ cz = 0 \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc \end{cases}$$

за произволно дадени реални броеви a, b, c.

Користејќи ги својствата на детерминанта, докажи ги идентитетите (18-20):

18. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c)(b - a)(c - a)(c - b).$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab + bc + ca)(b - a)(c - a)(c - b).$

2. Вектори

Во математика, во физиката и во другите природни науки се среќаваме се величини кои се наполно определени со својот мерен број, при избрана единица мера. Такви се величините: должина на отсечка, плоштина на геометриска фигура, маса на физичко тело, температура, време итн. Овие величини се викаат **скаларни величини** или накусо, **скалари.**

Покрај скаларните величини среќаваме и такви величини кои не се наполно определени само со својот мерен број. Такви се на пример, величините: сила, брзина, забрзување, јачина на магнетно поле и други. За нивно определување покрај мерниот број треба да ги знаеме и нивниот правец и насока. Навистина, ако речеме: ветерот се движи со брзина од $30\,km/h$, само со тој податок неговата брзина не е целосно определена, бидејќи таа се карактеризира уште и со својата насока: север-југ, југ-север, исток-запад или некоја друга насока. Овие величини се викаат **векторски величини** или накусо, **вектори**.

Со скаларните величини, бидејќи тие се наполно определени само со реалните броеви, ќе сметаме како со реални броеви. Меѓутоа, операциите со векторските величини ќе ги дефинираме посебно. Операциите над векторските величини ќе имаат аналогни својства со својствата на соодветните операции над реалните броеви. Делот од математиката што се занимава со изучување на векторите, нивните својства и операциите над нив се вика **векторска алгебра**.

2.1. Основни поими

Нека (A,B) е подреден пар точки во просторот. Точката A ја нарекуваме почетна точка, а точката B крајна точка на подредениот пар. **Правецот** на парот (A,B) е определен со правата AB, односно правата која што минува низ точките A и B. Два пара (A,B) и (C,D) се паралелни ако нивните правци се паралелни. Да забележиме дека во тој случај точките A, B, C и D лежат во иста рамнина. Два паралелни пара (A,B) и (C,D) имаат иста **насока** ако точките B и D се на иста страна од правата AC, додека тие имаат спротивни насоки ако точките B и D се на различни страни од правата AC. Ако точките A и C се совпаѓаат, тогаш дадените парови имаат иста насока ако точките B и D од правата AB се на иста страна од точката A, додека тие имаат различни насоки ако точките B и D се на различни страни од точката A. Ако точките

A, B, C и D се колинеарни тогаш паровите (A,B) и (C,D) имаат иста **насока** ако постои пар точки (E,F) (точките E и F не лежат на правата AB), така што паровите (E,F) и (A,B) како и паровите (E,F) и (C,D) имаат иста **насока.**

Подреден пар (A,B) кај којшто почетната и крајната точка се совпаѓаат, $A=B,$ се нарекува **нула-пар**. Правецот и насоката на нула-парот не се определени. Затоа нула-парот може да се смета паралелен и со иста насока со секој подреден пар точки.

Два подредени пара (A,B) и (C,D) се **еквиполентни** ако и само ако имаат иста насока и $\overline{AB}=\overline{CD},$ и пишуваме $(A,B)\sim(C,D).$ Да забележиме дека секои два нула-пара се еквиполентни. Дефинираната реалација во множеството од подредени парови точки во просторот е еквиваленција, односно таа е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Така множеството од подредени парови точки е разбиено на дисјунктни класи од меѓусебе еквиполентни парови. Сега може да ја усвоиме следнава дефиниција:

Дефиниција 1. Една класа од меѓусебно еквиполентни подредени парови точки се нарекува **вектор**.

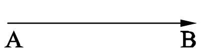
Согласно со дефиницијата, ако е даден произволен вектор, тогаш секоја точка во просторот е почетна точка на еден пар точки кој припаѓа на дадениот вектор. Според тоа, секој вектор претставува бесконечно множество од подредени парови точки кои се паралелни, имаат иста насока и определуваат складни отсечки.

Векторите дефинирани како класа еквиполентни подредени парови точки се нарекуваат уште и **слободни вектори**, а подредените парови точки **врзани вектори** или вектори врзани за точка. За врзан вектор (A, B) во иднина ќе ја користиме ознаката (AB). Слободните вектори ќе ги означуваме со малите латинични букви со стрелка: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ...$ Покрај оваа ознака слободниот вектор $\vec{a}$ којшто го содржи врзаниот вектор (AB) ќе го означуваме со $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Значи ако $\vec{a} = \{(\mathrm{AB}), (\mathrm{CD}), ...\}$ тогаш $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} = ...$ Векторот чиишто елементи се сите нула-паровите се вика **нулти вектор** и се означува со $\vec{0}$.

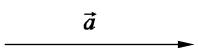
Правец и **насока** на слободен вектор е правецот и насоката на кој било врзан вектор кој припаѓа на дадениот слободен вектор. Два вектори со ист правец се нарекуваат **колинеарни вектори**.

При дадена единица должина, мерниот број на отсечката AB се вика модул или должина на врзаниот вектор (AB). **Модул** или **должина** на слободен вектор $\vec{a}$ е модулот на кој било врзан вектор којшто е елемент на $\vec{a}$ и се означува со $|\vec{a}|$. Слободен (врзан) вектор со должина 1 се вика **единечен слободен (врзан) вектор**.

Заради полесно разбирање на поимите поврзани со вектори, векторите вообичаено се претставуваат графички. Во таа смисла, врзан вектор (AB) се претставува со отсечка, чиишто крајни точки се A и B, која завршува со стрелка во точката B (цртеж 1).



Цртеж 1

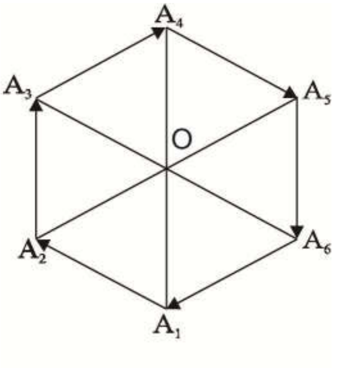


Цртеж 2

Бидејќи сите елементи на даден слободен вектор $\vec{a}$ (бесконечно многу врзани вектори) не може да ги претставиме графички, слободниот вектор ќе го претставуваме со еден од врзаните вектори кој му припаѓа, ставајќи ја притоа ознаката на слободниот вектор (цртеж 2).

Пример 1. Во правилниот шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ со центар во точката O (цртеж 3) се претставени векторите $\overrightarrow{OA_i}$, $i=1,2,...,6$, $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, $i=1,2,...,5$, и $\overrightarrow{A_6A_1}$. Меѓу себе еднакви се следниве парови вектори:

$$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_5A_6},\quad \overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{A_6A_1},\quad \overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{A_1A_2},$$
$$\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{A_2A_3},\quad \overrightarrow{OA_5}=\overrightarrow{A_3A_4},\quad \overrightarrow{OA_6}=\overrightarrow{A_4A_5}.$$ ♦



Цртеж 3

Задачи за самостојна работа

1. Ако отсечките AB и CD не лежат на една права, тогаш $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ако и само ако четриаголникот $ABCD$ е паралелограм. Докажи!

2. Докажи ја импликацијата: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.$

3. Нека O, A и B се три различни точки. Ако точката O е средина на отсечката $AB,$ тогаш $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BO}.$ Докажи!

4. Нека ABC е даден триаголник и нека $M,$ N и P се средини на страните $AB,$ BC и $CA,$ соодветно. Точно ли е дека:

а) $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM},$ б) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BN},$ в) $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{BN},$

г) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{MN},$ д) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CP}$?

5. Нека е даден квадрат $ABCD$ чиишто дијагонали се сечат во точката O и нека $(AB)\in\vec{a},$ $(BO)\in\vec{b},$ $(DA)\in\vec{c},$ $(CD)\in\vec{d}.$ Кои од следните искази се точни:

а) $(DC)\in\vec{a},$ б) $(CD)\in\vec{a},$ в) $(OD)\in\vec{b},$ г) $(BC)\in\vec{c},$

д) $(CB)\in\vec{c},$ ѓ) $(AO)\in\vec{d},$ е) $(AD)\in\vec{c}$?

6. Нека е даден правоаголник $ABCD$ чиишто дијагонали се сечат во точката $O.$ Кои од следниве вектори се меѓу себе еднакви?

а) $(AB)\in\vec{a},$ б) $(BC)\in\vec{b},$ в) $(DC)\in\vec{c},$ г) $(DA)\in\vec{d},$

д) $(AO)\in\vec{m},$ ѓ $(BO)\in\vec{n},$ е) $(OC)\in\vec{p},$ и) $(DO)\in\vec{q}$

2.2. Собирање на вектори

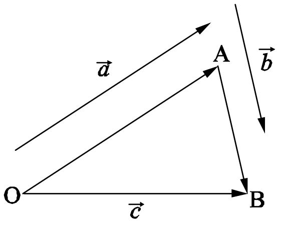
Во множеството слободни вектори ќе дефинираме операција собирање на вектори со својства аналогни на својствата на операцијата собирање на реални броеви.

2.2.1 Дефиниција на операцијата собирање на вектори

Нека O, A и B се три произволни точки во просторот. Врзаниот вектор (OB) се нарекува збир на врзаните вектори (OA) и (AB) и пишуваме $(\mathrm{OB}) = (\mathrm{OA}) + (\mathrm{AB})$.

Нека се дадени векторите $\vec{\mathrm{a}}$ и $\vec{\mathrm{b}}$ (цртеж 1). За да го определиме нивниот збир, постапуваме на следниов начин:

- ✓ Избираме произволна точка O во просторот.
- ✓ Го конструираме векторот $(\mathrm{OA}) \in \vec{\mathrm{a}}$.
- ✓ Земајќи ја точката A како почетна, го конструираме векторот $(\mathrm{AB}) \in \vec{\mathrm{b}}$.



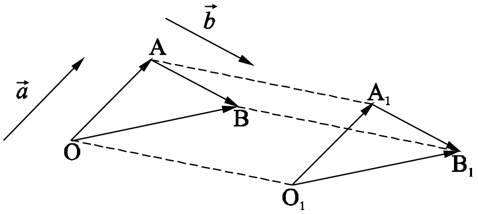
Цртеж 1

Векторот $\vec{\mathrm{c}}$ којшто го содржи врзаниот вектор (OB) се нарекува **збир** на векторите $\vec{\mathrm{a}}$ и $\vec{\mathrm{b}}$, наречени **собироци**, и пишуваме

$$\vec{\mathrm{c}} = \vec{\mathrm{a}} + \vec{\mathrm{b}}.$$

За да покажеме дека операцијата собирање вектори е добро дефинирана ќе покажеме дека векторот $\vec{\mathrm{c}}$ е независен од изборот на точката O. За таа цел ќе ја повториме конструкцијата поаѓајќи од која било друга точка O_1, различна од точката O (цртеж 2).

Тогаш $(O_1A_1)\in\vec{a},\ (A_1B_1)\in\vec{b}$ и збирот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторот $\overrightarrow{c_1}$



Цртеж 2

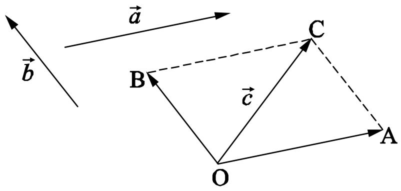
којшто го содржи врзаниот вектор (O_1B_1). Бидејќи четириаголникот OO_1B_1B е паралелограм, добиваме дека $(OB)\sim(O_1B_1)$, односно имаме дека $\vec{c}=\overrightarrow{c_1}$.

Гореизложената постапка за собирање на два вектори се вика **правило на триаголник**. Во продолжение ќе го проучиме **правилото на паралелограм** за собирање на два вектора.

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. За да го определиме нивниот збир постапуваме на следниов начин:

- ✓ Избираме произволна точка O во просторот.
- ✓ Ги конструираме векторите $(OA)\in\vec{a},\ (OB)\in\vec{b}$.
- ✓ Низ точката A конструираме права паралелна со правата OB, а низ точката B конструираме права паралелна со правата OA. Пресечната точка на така добиените прави ја означуваме со C (цртеж 3).

Векторот $\vec{c}$ којшто го содржи врзаниот вектор (OC) се нарекува **збир** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вообичаено се нарекуваат **компоненти**, а векторот $\vec{c}$ се нарекува **резултантен вектор** или **резултанта**.

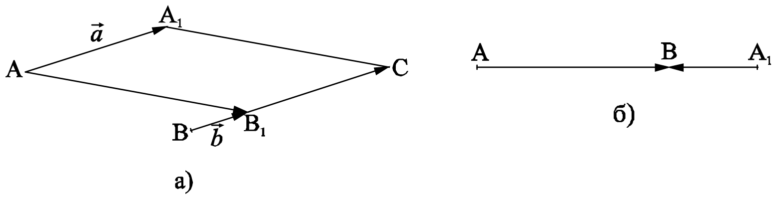


Цртеж 3

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш можни се следниве два случаја (цртеж 4).

а) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат иста насока. Во тој случај збирот $\vec{a}+\vec{b}$ има правец и насока како векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а за модулот важи равенството

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$



$(AA_1)\in\vec{a},\ (BB_1)\in\vec{b},\ (BC)\in\vec{a}+\vec{b}$ $\qquad$ $(AA_1)\in\vec{a},\ (A_1B)\in\vec{b},\ (AB)\in\vec{a}+\vec{b}$

Цртеж 4

б) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат спротивни насоки. Во тој случај збирот $\vec{a}+\vec{b}$ има правец како и векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, насока на векторот со поголем модул, а за модулот важи равенството

$$|\vec{a}+\vec{b}|=||\vec{a}|-|\vec{b}||.$$

Два колинеарни вектори со еднакви модули, а спротивни насоки се нарекуваат **спротивни** вектори. Спротивниот вектор на векторот $\vec{a}$ ќе го означуваме со $-\vec{a}$. Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ се спротивни, за произволно избрани точки A и B. Непосредно од дефиницијата за спротивен вектор следуваат равенствата

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0} \text{ и } -(-\vec{a})=\vec{a}, \text{ за секој вектор } \vec{a}.$$

Задачи за самостојна работа

1. Дадени се два произволни ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конструирај ги векторите:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+(-\vec{b})$; в) $\vec{b}+(-\vec{a})$;

г) $(-\vec{a})+(-\vec{b})$; д) $-(\vec{a}+\vec{b})$.

2. Докажи дека за кои било три точки A, B и C важи равенството $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

3. Нека се дадени два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кои не се колинеарни. Конструирај го векторот $\vec{c}$, така што $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{0}$.

4. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два вектори со спротивни насоки. Одреди ја насоката и должината на збирот $\vec{a}+\vec{b}$, ако

а) $|\vec{a}|>|\vec{b}|$; б) $|\vec{a}|<|\vec{b}|$; в) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

5. Нека $ABCD$ е паралелограм. Ако $(AC) \in \vec{a}$, $(DC) \in \vec{b}$, $(BC) \in \vec{c}$, најди по еден претставник на векторите

а) $\vec{a} + (-\vec{c})$; б) $\vec{a} + (-\vec{b})$; в) $\vec{b} + (-\vec{a})$;

г) $\vec{b} + (-\vec{c})$; д) $\vec{c} + (-\vec{b})$.

2.2.2. Својства на операцијата собирање на вектори

Да го означиме со V множеството слободни вектори. Ќе докажеме некои својства на операцијата собирање на вектори кои произлегуваат од самата дефиниција.

Теорема 1. Нека V е множеството слободни вектори. Точни се следниве тврдења:

(i) За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $\vec{a} + \vec{b} \in V$.

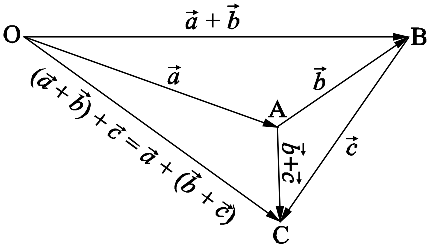
(ii) За секои три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

(iii) За секој вектор $\vec{a} \in V$ и за нултиот вектор $\vec{0}$ важи $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

(iv) Секој вектор $\vec{a} \in V$ има (единствен) спротивен вектор $-\vec{a} \in V$, така што важи $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

(v) За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Доказ. (i) следува непосредно од дефиницијата на операцијата собирање на вектори и го искажува фактот дека збир од два вектори е вектор.



Цртеж 1

(ii) го искажува фактот дека операцијата собирање на вектори е асоцијативна. Нека $(\mathrm{OA})\in\vec{\mathrm{a}},\ (\mathrm{AB})\in\vec{\mathrm{b}}$ и $(\mathrm{BC})\in\vec{\mathrm{c}}$ (цртеж 1). Тогаш од правилото на триаголник, имаме дека

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},\ \text{и}$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

(iii) Ако $(\mathrm{AB})\in\vec{\mathrm{a}},$ тогаш добиваме дека

$$\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \text{и}$$

$$\vec{0}+\vec{a}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a},$$

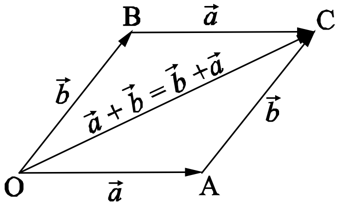
од каде што следува дека нултиот вектор е неутрален елемент во однос на операцијата собирање на вектори.

(iv) Како што веќе спомнавме, за кој било вектор $\vec{\mathrm{a}}$ нему спротивниот вектор $-\vec{\mathrm{a}}$ ги има својствата

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}\ \text{и}$$

$$-(-\vec{a})=\vec{a}.$$

Ова својство го искажува фактот дека секој слободен вектор има инверзен вектор во однос на операцијата собирање на вектори.



Цртеж 2

(v) Нека $(OA),(BC)\in\vec{a}$ и $(OB),(AC)\in\vec{b}$ (цртеж 2). Тогаш наоѓаме дека

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},\text{ и}$$

$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}.$$

Според тоа,

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$

односно собирањето на вектори е комутативно.

Од теоремата непосредно следува дека множеството V во однос на операцијата собирање на вектори е комутативна група. Асоцијативноста и комутативноста дозволуваат при собирањето на вектори:

✓назначените операции да ги изведуваме по произволен редослед,

✓повеќе вектори да се заменат со својот збир или еден вектор да се замени со неговиот збир.

Пример 1. За секои $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\in V$ важи $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{c}+(\vec{b}+\vec{a})$.

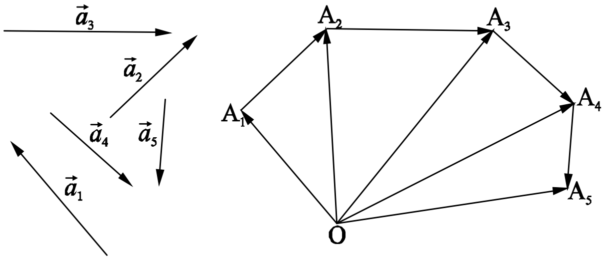
Навистина, од асоцијативноста и од комутативноста на операцијата собирање на вектори, имаме дека

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}+(\vec{b}+\vec{a}).\ \blacklozenge$$

Со повеќекратна примена на правилото на триаголник може да се најде векторот-збир на секој конечен број вектори. Постапката ќе ја илустрираме со следниот пример.

Пример 2. За да го најдеме збирот на векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$ и $\overrightarrow{a_5}$, прво ќе ги собереме векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$. Нека O е произволна точка и нека $(OA_1)\in\overrightarrow{a_1}$ и $(A_1A_2)\in\overrightarrow{a_2}$ (цртеж 3). Тогаш векторот $\overrightarrow{OA_2}$ е збир на векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$, односно

$$\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}.$$



Цртеж 3

Ако од крајната точка A_2 на векторот (OA_2), земена како почетна точка, го конструираме векторот $(A_2A_3)\in\overrightarrow{a_3}$ добиваме дека

$$\overrightarrow{OA_3}=(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})+\overrightarrow{a_3}.$$

Сега, ако од точката A_3 го конструираме векторот $(A_3A_4)\in\overrightarrow{a_4}$ имаме дека

$$\overrightarrow{OA_4}=((\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})+\overrightarrow{a_3})+\overrightarrow{a_4}.$$

На крај, го конструираме векторот $(A_4A_5)\in\overrightarrow{a_5}$ и го добиваме збирот на векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$ и $\overrightarrow{a_5}$:

$$\overrightarrow{OA_5}=(((\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2})+\overrightarrow{a_3})+\overrightarrow{a_4})+\overrightarrow{a_5}.$$

Согласно со асоцијативноста и со комутативноста на операцијата собирање вектори погорниот збир ќе се добие и при секој друг редослед на собироците. Затоа, тој може да се запише како

$$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_5}$$

и го претставува векторот (OA_5), односно

$$\overrightarrow{OA_5}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_5}.$$

којшто ја затвора полигоналната линија $OA_1A_2A_3A_4A_5$, конструирана со помош на векторите

$$(OA_1)\in\overrightarrow{a_1},\ (A_1A_2),\in\overrightarrow{a_2},\ (A_2A_3)\in\overrightarrow{a_3},$$

$$(A_3A_4)\in\overrightarrow{a_4} \text{ и } (A_4A_5)\in\overrightarrow{a_5}.\blacklozenge$$

На сличен начин, може да го најдеме збирот на конечно многу вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$. Постапката со која се определува збирот на повеќе вектори се вика **правило на многуаголник**.

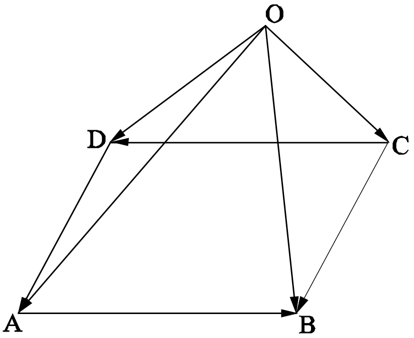
Пример 3. Ќе покажеме дека четриаголникот $ABCD$ е паралелограм, ако и само ако за произволна точка O важи равенството

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}.$$

Прво да претпоставуваме дека четриаголникот ABCD е паралелограм и O е избрана точка (цртеж 4). Тогаш важат следниве равенства

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad \text{и}\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{CD}},$$

од каде што следува дека $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{0}.$



Цртеж 4

Понатаму, од равенствата

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}},$$

добиваме дека

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}.$$

Обратно, претпоставуваме дека важи равенството

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}.$$

Од равенствата

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB} \text{ и } \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OA},$$

следува дека

$$\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA})+\overrightarrow{OB},$$

односно, добиваме дека

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}. \text{ Тогаш } \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA},$$

што значи дека четриаголникот ABCD е паралелограм. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Покажи дека за секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V$ важи равенството

$$(\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}))+\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{c}+\vec{d}).$$

2. Нека ABCDEF е правилен шестаголник со центар во точката O. Најди го збирот на векторите: $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OF}$.

3. Докажи дека четриаголникот ABCD е паралелограм ако и само ако неговите дијагонали се преполовуваат.

4. Нека ABCD е паралелограм и нека S е пресекот на неговите дијагонали. Упрости ги изразите:

а) $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{SA})+\overrightarrow{SC}$; б) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DS})+\overrightarrow{SA}$;

в) $\overrightarrow{DS}+(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{BC})$; г) $(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB})$.

5. Даден е правилен шестаголник ABCDEF. Изрази ги векторите $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{FE}$ преку векторите $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AF}$.

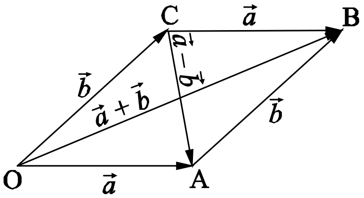
2.3. Одземање на вектори

Во множеството на слободни вектори ќе воведеме нова операција која е инверзна на операцијата собирање на вектори. Аналогно, како кај реалните броеви, инверзната операција на операцијата собирање, ќе ја викаме **одземање**.

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (цртеж 1). **Разлика** на векторот $\vec{a}$ со векторот $\vec{b}$ се нарекува векторот $\vec{c}$ така што $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, и се пишува

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}.$$

Векторот $\vec{a}$ е **намаленик**, а векторот $\vec{b}$ е **намалител**.



Цртеж 1

Од цртеж 1 се гледа дека од паралелограмот $OABC$ може да се определи и збирот $\vec{a}+\vec{b}$ и разликата $\vec{a}-\vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Навистина, од $\vec{b}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ добиваме дека

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{CA}.$$

Операцијата одземање на вектори е добро дефинирана, односно, векторот $\vec{c}$ е еднозначно определен. Навистина, ако претпоставиме дека постојат два вектори $\vec{c}$ и $\overrightarrow{c_1}$ коишто се еднакви на разликата на векторот $\vec{a}$ со векторот $\vec{b}$, тогаш $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ и

$\vec{a} = \vec{b} + \overrightarrow{c_1}$, и оттука добиваме дека $\vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{c_1}$. Бидејќи множеството слободни вектори е група во однос на операцијата собирање, имаме дека

$$(\vec{b} + \vec{c}) + (-\vec{b}) = (\vec{b} + \vec{c}_1) + (-\vec{b})$$

$$(\vec{c} + \vec{b}) + (-\vec{b}) = (\overrightarrow{c_1} + \vec{b}) + (-\vec{b}) \qquad \text{(комутативност)}$$

$$\vec{c} + (\vec{b} + (-\vec{b})) = \overrightarrow{c_1} + (\vec{b} + (-\vec{b})) \qquad \text{(асоцијативност)}$$

$$\vec{c} + \vec{0} = \overrightarrow{c_1} + \vec{0}$$ (збирот на спротивни вектори е $\vec{0}$)

$$\vec{c} = \overrightarrow{c_1}$$ ($\vec{0}$ е неутрален елемент во однос на собирањето).

Операцијата одземање на вектори ќе ја доведеме во врска со операцијата собирање на вектори.

Теорема 1. Разликата на вектор $\vec{a}$ со вектор $\vec{b}$ е еднаква на збирот на векторот $\vec{a}$ со векторот $-\vec{b}$ (спротивниот вектор на векторот $\vec{b}$).

Доказ. Поради асоцијативноста и комутативноста на операцијата собирање на вектори, имаме

$$\vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{b})) = \vec{b} + ((-\vec{b}) + \vec{a}) = (\vec{b} + (-\vec{b})) + \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

Оттука следува

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

Од теорема 1 следува дека во една векторска равенка може одредени членови од равенката да ги префрламе од едната на другата страна, без да се наруши равенството, исто како кај равенките со реални броеви.

Пример 1. Од векторската равенка $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$ со примена на теорема 1 ги добиваме следниве еквивалентни равенки:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}-\vec{c}$,

$\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}-\vec{b}$,

$\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}-\vec{a}$, и

$\vec{a}=\vec{d}-\vec{b}-\vec{c}$. ♦

Пример 2. Во правилен шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ векторите $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$ и $\overrightarrow{A_5A_6}$ може да се изразат преку векторите $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{A_6A_1}$.

Навистина, непосредно заклучуваме дека

$\overrightarrow{A_4A_5}=-\overrightarrow{A_1A_2}=-\vec{a}$ и

$\overrightarrow{A_3A_4}=-\overrightarrow{A_6A_1}=-\vec{b}$.

Поради $\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{A_6A_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}$, од триаголникот OA_2A_3 следува дека $\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{OA_3}$ (правило на триаголник), односно $\vec{b}+\overrightarrow{A_2A_3}=\vec{a}$. Оттука добиваме дека

$\overrightarrow{A_2A_3}=\vec{a}-\vec{b}$.

На сличен начин од триаголникот OA_5A_6 следува дека

$\overrightarrow{A_5A_6}=\vec{b}-\vec{a}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конструирај ги векторите:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$;

в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $-\vec{a}-\vec{b}$.

2. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се заемно нормални вектори и $|\vec{a}|=6$ и $|\vec{b}|=8$, пресметај ги

а) $|\vec{a}+\vec{b}|$ б) $|\vec{a}-\vec{b}|$.

3. Кои услови треба да ги исполнуваат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ за да важи:

а) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; б) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$;

в) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$?

4. Реши ги векторските равенки:

а) $\vec{a}+\vec{x}-\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$; б) $\vec{a}-\vec{x}=\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}$.

5. Нека $ABCD$ е даден паралелограм и нека S е пресекот на неговите дијагонали. Изрази ги векторите $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ преку векторите $\vec{a}=\overrightarrow{SA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{SB}$.

2.4. Множење на вектор со скалар

Нека $\mathbf{R}$ е множеството реални броеви. Неговите елементи вообичаено се нарекуваат скалари. Во множеството слободни вектори ќе дефинираме надворешна бинарна операција наречена множење на вектор со скалар.

Нека $\vec{a}$ е даден вектор и p даден скалар.

Производ на векторот $\vec{a}$ со скаларот p се нарекува векторот

$$\vec{b} = p\vec{a}$$

којшто е колинеарен со векторот $\vec{a}$, има должина $|p||\vec{a}|$, иста насока како векторот $\vec{a}$, ако $p > 0$, а спротивна насока ако $p < 0$. Ако $p = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, тогаш $p\vec{a} = \vec{0}$.

Количник на векторот $\vec{a}$ со ненулти скалар p се нарекува векторот

$\frac{1}{p}\vec{a}$; (запишуваме $\frac{\vec{a}}{p}$).

Непосредно од горните дефиниции следува дека за секој вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ векторот $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ е единичен вектор со ист правец и насока како и векторот $\vec{a}$. Според тоа, добиваме дека $\vec{a} = |\vec{a}|\overrightarrow{a_0}$.

Теорема 1. Нека V е множеството слободни вектори. Точни се следниве тврдења:

(i) За секој $p \in \mathbf{P}$ и секој $\vec{a} \in V$ важи $p\vec{a} \in V$.

(ii) За секој $\vec{a} \in V$ и реалниот број 1 важи $1\vec{a} = \vec{a}$.

(iii) За секои $p, q \in \mathbf{P}$ и секој $\vec{a} \in V$ важи $p(q\vec{a}) = (pq)\vec{a}$.

(iv) За секои $p, q \in \mathbf{P}$ и секој $\vec{a} \in V$ важи $(p+q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$.

(v) За секој $p \in \mathbf{P}$ и секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$.

Доказ. (i) и (ii) следуваат непосредно од дефиницијата на операцијата множење на вектор со скалар.

(iii) Тврдењето е очигледно точно во случај кога $p=0$ или $q=0$ или $\vec{a}=\vec{0}.$ Ако $p\neq 0,$ $q\neq 0$ и $\vec{a}\neq 0$ тогаш векторите $p(q\vec{a})$ и $(pq)\vec{a}$ имаат ист модул $|p||q||\vec{a}|$ и иста насока. Поточно, ако p и q имаат ист знак, тогаш двата вектори имаат иста насока со векторот $\vec{a},$ додека ако p и q имаат спротивен знак, тогаш двата вектори имаат спротивна насока од насоката на векторот $\vec{a}.$

(iv) Да уочиме дека векторите $(p+q)\vec{a}$ и $p\vec{a}+q\vec{a}$ се колинеарни. Ако p и q имаат ист знак, тогаш двата вектори имаат иста насока. Во тој случај тие имаат еднакви модули, односно

$$|p\vec{a}+q\vec{a}|=|p\vec{a}|+|q\vec{a}|=|p||\vec{a}|+|q||\vec{a}|=(|p|+|q|)|\vec{a}|=|p+q||\vec{a}|.$$

Ако p и q имаат спротивни знаци, на пример $p>0$ и $q<0,$ тогаш векторите $p\vec{a}$ и $q\vec{a}$ имаат спротивни насоки. Во тој случај имаме дека

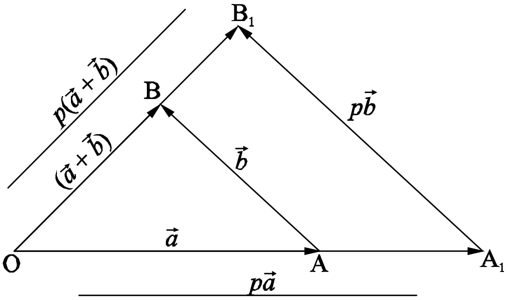
$$|p\vec{a}+q\vec{a}|=\Big||p|\vec{a}-|q|\vec{a}\Big|=\Big||p||\vec{a}|-|q||\vec{a}|\Big|=$$

$$=\big||p|-|q|\big||\vec{a}|=|p+q||\vec{a}|=|(p+q)\vec{a}|.$$

Според тоа, може да заклучиме дека векторите $(p+q)\vec{a}$ и $p\vec{a}+q\vec{a}$ имаат еднакви модули. Тие имаат исто така и иста насока, имено насоката на оној од векторите $p\vec{a}$ и $q\vec{a},$ пред кој скаларот е поголем по апсолутна вредност. Аналогно се докажува и случајот кога $p<0$ и $q>0.$

Тврдењето е очигледно точно во случај кога $p=0$ или $q=0$ или $\vec{a}=\vec{0}.$

(v) Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни и нека $p > 0$. Ги конструираме триаголниците OAB и OA_1B_1 така што $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1} = p\vec{a}$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = p\vec{b}$ (цртеж 1).



Цртеж 1

Од сличноста на триаголниците OAB и OA_1B_1 следува дека векторите $\vec{a}+\vec{b}$, $p(\vec{a}+\vec{b})$ и $p\vec{a}+p\vec{b}$ се колинеарни. Тие имаат иста насока, бидејќи $p > 0$.

Од сличноста на триаголниците OAB и OA_1B_1 добиваме дека

$$\overline{OB_1} : \overline{OB} = \overline{OA_1} : \overline{OA}, \text{ односно}$$

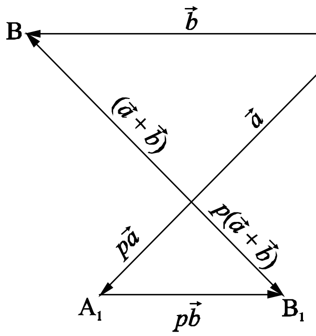
$$|p\vec{a}+p\vec{b}| : |\vec{a}+\vec{b}| = |p\vec{a}| : |\vec{a}|,$$

од каде што следува дека

$$|p\vec{a}+p\vec{b}| = |p||\vec{a}+\vec{b}| = |p(\vec{a}+\vec{b})|.$$

Според тоа, векторите $p\vec{a}+p\vec{b}$ и $p(\vec{a}+\vec{b})$ имаат еднакви модули.

Случајот $p < 0$ се докажува аналогно со таа разлика што тогаш векторите $p(\vec{a}+\vec{b})$ и $p\vec{a}+p\vec{b}$ се колинеарни, но имаат спротивна насока од насоката на векторот $\vec{a}+\vec{b}$ (цртеж 2).



Цртеж 2

Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни и нека $p>0.$ Тогаш векторите $p\vec{a}+p\vec{b}$ и $p(\vec{a}+\vec{b})$ се колинеарни. Уште повеќе, тие имаат иста насока, бидејќи $p>0.$ Од

$$|p(\vec{a}+\vec{b})|=|p||\vec{a}+\vec{b}|=|p|(|\vec{a}|+|\vec{b}|)=$$
$$=|p\vec{a}|+|p\vec{b}|=|p\vec{a}+p\vec{b}|$$

заклучуваме дека векторите $p\vec{a}+p\vec{b}$ и $p(\vec{a}+\vec{b})$ имаат еднакви модули.

Случајот $p<0$ се докажува аналогно со таа разлика што тогаш векторите $p(\vec{a}+\vec{b})$ и $p\vec{a}+p\vec{b}$ се колинеарни, но имаат спротивна насока од насоката на векторот $\vec{a}+\vec{b}.$

Пример 1. Збирот на два скалара се множи со збирот на два вектори како што се множи бином со бином:

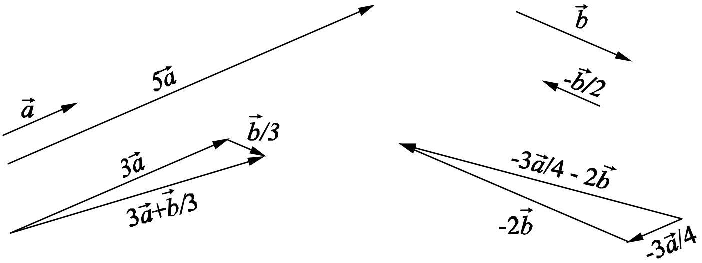
$$(p+q)(\vec{a}+\vec{b})=p(\vec{a}+\vec{b})+q(\vec{a}+\vec{b})= \qquad \text{(својство (iv))}$$
$$=p\vec{a}+p\vec{b}+q\vec{a}+q\vec{b}. \qquad \text{(својство (v)). ♦}$$

Пример 2. За да се конструираат векторите:

а) $5\vec{a}$;   б) $-\frac{\vec{b}}{2}$;

в) $3\vec{a}+\frac{\vec{b}}{3}$;   г) $\frac{-3\vec{a}}{4}-2\vec{b}$

забележуваме дека согласно со дефиницијата за множење на вектор со скалар, векторите $5\vec{a}$, $3\vec{a}$ и $-\frac{3\vec{a}}{4}$ се колинеарни со векторот $\vec{a}$, додека векторите $-\frac{\vec{b}}{2}$, $\frac{\vec{b}}{3}$ и $-2\vec{b}$ се колинеарни со векторот $\vec{b}$ (цртеж 3).♦



Цртеж 3

Пример 3. Ако е даден триаголникот ABC и A_1, B_1 и C_1 се средини на страните BC, CA и AB соодветно, тогаш е точно дека

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}.$$

Навистина, од равенствата

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{BC}}{2},$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2}$$ и

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

добиваме дека

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}}{2} =$$

$$= \overrightarrow{AA} + \frac{\overrightarrow{BB}}{2} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Задачи за самостојна работа

1. Избери произволен вектор $\vec{a}$ и конструирај ги векторите:

а) $2\vec{a}$; б) $-3\vec{a}$; в) $\frac{3\vec{a}}{2}$;

г) $\sqrt{2}\ \vec{a}$; д) $-\sqrt{3}\ \vec{a}$.

2. Избери два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коишто не се колинеарни и конструирај ги векторите:

а) $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}$;

в) $-\frac{3\vec{a}}{2} + \vec{b}$; г) $\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}$.

3. Избери четири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ и конструирај ги векторите:

а) $2\vec{a} - 3\vec{b} - (\vec{c} - 2\vec{d})$; б) $\vec{a} + 2(\vec{b} - 3\vec{c})$;

в) $\vec{b} - (2\vec{a} + \vec{d}) - \vec{c}$.

4. Упрости ги изразите:

а) $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(3\vec{a}-\vec{b})+4(\vec{a}+\vec{b});$

б) $2(\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c})+4\vec{b}-2(\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}).$

5. Реши ја векторската равенка по непознатиот вектор $\vec{x}$:

а) $2\vec{x}-\vec{a}+\vec{b}=2(\vec{a}+\vec{b})+\vec{x};$

б) $2(\vec{a}-\vec{x})+3\vec{b}+\vec{a}-\vec{x}=3(\vec{a}+\vec{b}-\vec{x}).$

6. Докажи дека три ненулти вектори формираат триаголник ако и само ако $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$

7. Докажи дека ако A, B, C и D се темиња на паралелограм, и O е пресечната точка на неговите дијагонали, тогаш важи равенството

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}.$$

8. Нека точките A, B, C и D се произволни точки и нека M и N се средини на отсечките AB и $CD,$ соодветно. Докажи дека

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.$$

2.5. Делење на колинеарни вектори

Според дефиницијата за множење на вектор со скалар, векторите $\overrightarrow{a_1}=p\overrightarrow{a_2}$ $(p\neq 0,\ \overrightarrow{a_2}\neq\vec{0})$ и $\overrightarrow{a_2}$ се колинеарни. Кога $p=0$ векторот $\overrightarrow{a_1}=p\overrightarrow{a_2}$ е нултиот вектор. За да може да зборуваме за колинеарност на векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$, за секој скалар p ќе сметаме дека нултиот вектор е колинеарен со секој вектор.

Обратно, ако векторот $\overrightarrow{a_1}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{a_2}$ ($\overrightarrow{a_2} \neq \vec{0}$), тогаш постои скалар p така што $\overrightarrow{a_1} = p\overrightarrow{a_2}$.

Навистина, ако векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ имаат иста насока, тогаш бројот $\frac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{a_2}|}$ избран како скалар p го исполнува условот $\left|\frac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{a_2}|}\overrightarrow{a_2}\right| = \frac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{a_2}|}|\overrightarrow{a_2}| = |\overrightarrow{a_1}|$ што значи дека векторите $\frac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{a_2}|}\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_1}$ се еднакви, односно $\overrightarrow{a_1} = p\overrightarrow{a_2}$.

Ако векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ имаат спротивни насоки, тогаш бројот $-\frac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{a_2}|}$ го избираме за скалар p со којшто се множи $\overrightarrow{a_2}$. Повторно добиваме дека $\overrightarrow{a_1} = p\overrightarrow{a_2}$.

Во секој случај бројот p, за којшто $\overrightarrow{a_1} = p\overrightarrow{a_2}$ се нарекува **количник** на колинеарните вектори $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ ($\overrightarrow{a_2} \neq \vec{0}$) и се пишува $p = \frac{\overrightarrow{a_1}}{\overrightarrow{a_2}}$.

Значи, ако векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ ($\overrightarrow{a_2} \neq \vec{0}$) се колинеарни, тогаш

$\frac{\overrightarrow{a_1}}{\overrightarrow{a_2}} = \frac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{a_2}|}$, при иста насока на $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$, и

$\frac{\overrightarrow{a_1}}{\overrightarrow{a_2}} = -\frac{|\overrightarrow{a_1}|}{|\overrightarrow{a_2}|}$, при спротивни насоки на $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$.

Ако векторот $\vec{a}$ е колинеарен со единичниот вектор $\vec{e}$, тогаш количникот $\frac{\vec{a}}{\vec{e}}$ се нарекува **алгебарска вредност** на векторот $\vec{a}$.

За произволно дадени вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и произволни скалари p и q да ја разгледаме равенката

$$p\vec{a}+q\vec{b}=\vec{0}.$$

Забележуваме дека равенството секогаш е можно, бидејќи за $p=0$ и $q=0$ имаме $0\vec{a}+0\vec{b}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.$ Значи, парот скалари $(0,0)$ може да се нарече тривијално решение на равенката за секој избор на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}.$

Се поставува прашањето дали постојат скалари p и q од кои што барем еден е ненулти (нетривијално решение (p,q)) така што векторот $p\vec{a}+q\vec{b}$ ќе биде еднаков на нултиот вектор. Одговорот секако зависи од изборот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

(i) За $\vec{a}=\vec{b}=\vec{0},$ јасно е дека секој подреден пар $(p,q)\in\mathbf{R}^2$ ја задоволува рагледуваната равенка, значи $\mathbf{R}^2$ е множеството решенија на равенката.

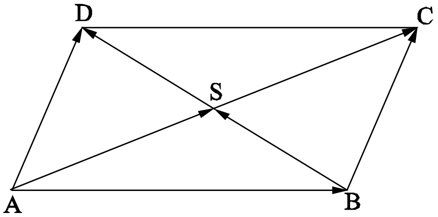
(ii) За $\vec{a}=\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$ се воочува дека $\{(p,0)\,|\,p\in\mathbf{R}\}$ е множеството решенија на равенката, додека за $\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}=\vec{0}$ се воочува дека $\{(0,p)\,|\,p\in\mathbf{R}\}$ е множеството решенија на равенката.

(iii) За $\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$ и $\vec{a}=k\vec{b},$ за некој скалар $k,$ равенката се сведува во еквивалентна форма $(kp+q)\vec{b}=\vec{0}.$ Нејзиното множество решенија $\{(p,-kp)\,|\,p\in\mathbf{R}\}$ се добива од равенство $kp+q=0,$ коешто мора да биде исполнето за да биде еднаков на нултиот вектор векторот $(kp+q)\vec{b},$ согласно со претпоставката дека $\vec{b}\neq\vec{0}.$

(iv) За вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кои не се колинеарни (значи и ненулти) тривијалното решение $(0,0)$ е единственото решение на разгледуваната равенка. Претпоставката за постоење на нетривијално решение (p,q) во кое без губење на општоста на пример, $p \neq 0$ повлекува точност на равенката $\vec{a}+\frac{q}{p}\vec{b}=\vec{0}$ или $\vec{a}=-\frac{q}{p}\vec{b}$ што противречи на претпоставката дека векторите не се колинеарни.

Задача 1. Покажи дека пресечната точка на дијагоналите во секој паралелограм е нивна средина.

Нека $ABCD$ е паралелограм и нека S е пресечната точка на неговите дијагонали (цртеж 1).



Цртеж 1

Векторот $\overrightarrow{AS}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, па имаме дека

$$\overrightarrow{AS}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}), \text{ за некој скалар } \lambda.$$

Слично, векторот $\overrightarrow{BS}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, па имаме дека

$$\overrightarrow{BS}=\mu(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}), \text{ за некој скалар } \mu.$$

Од равенството $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}$, добиваме дека

$$(\lambda+\mu-1)\overrightarrow{AB}+(\lambda-\mu)\overrightarrow{AD}=\vec{0}.$$

Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ не се колинеарни, па го добиваме системот и

$$\begin{cases} \lambda+\mu-1=0 \\ \lambda-\mu=0, \end{cases}$$

од каде што следува дека $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинаеарни. Најди ги x и y, ако важи условот

а) $(2x-y)\vec{a}+(x+2y-5)\vec{b}=\vec{0};$

б) $(3x+y)(\vec{a}+\vec{b})-(y+5)\vec{b}=(x-1)\vec{a}-(x+2y)\vec{b}.$

2. Докажи дека средните линии во произволен четриаголник се преполовуваат.

3. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинаеарни. За која вредност на параметарот p векторите $\vec{c}=(p-1)\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d}=(2+3p)\vec{a}-2\vec{b}$ се колинеарни?

4. Нека четриаголникот $ABCD$ е паралелограм и нека N е средина на страната AB, а M е средина на страната AD. Изрази го векторот $\overrightarrow{AT}$ преку векторите $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, ако T е пресечна точка на правите MB и ND.

2.6. Линеарна комбинација на вектори

За кој било природен број $k \geq 1$, за произволно дадени вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ и скалари $p_1, p_2, \ldots, p_k$ изразот

$$p_1 \overrightarrow{a_1} + p_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + p_k \overrightarrow{a_k}$$

претставува еднозначно определен вектор $\vec{s}$, согласно со својствата на операциите собирање на вектори и множење на вектор со скалар. Вака претставениот вектор $\vec{s}$ се нарекува **линеарна комбинација** на векторите $\overrightarrow{a_i}$, $i = 1, \ldots, k$, со коефициенти p_i, $i = 1, \ldots, k$, соодветно.

За векторот

$$\vec{s} = p_1 \overrightarrow{a_1} + p_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + p_k \overrightarrow{a_k}$$

уште се вели дека е **разложен** по векторите $\overrightarrow{a_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Пример 1. На пример, векторот $\vec{s} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k}$ е линеарна комбинација на векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ со коефициенти $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ и -1 соодветно. За векторот $\vec{s}$ се вели дека е разложен по векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. ♦

Дефиниција 1. Векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ се нарекуваат **линеарно зависни** ако постојат скалари $p_1, p_2, \ldots, p_k$ од кои барем еден е различен од нула, така што

$$p_1 \overrightarrow{a_1} + p_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + p_k \overrightarrow{a_k} = \vec{0}.$$

Пример 2. На пример, векторите $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{d}=\frac{1}{3}(-\vec{a}+2\vec{b})$ се линеарно зависни бидејќи $2\vec{c}+3\vec{d}=\vec{0}$ и при тоа коефициентите се различни од нула.♦

Векторите $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_k}$ се нарекуваат **линеарно независни** ако не се линеарно зависни. Непосредно од дефиницијата следува дека векторите $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_k}$ се линеарно независни ако од равенството

$$p_1\overrightarrow{a_1}+p_2\overrightarrow{a_2}+...+p_k\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$$

следува дека $p_1=p_2=...=p_k=0.$

Теорема 1. Векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ се линеарно зависни ако и само ако се колинеарни.

Доказ. Ако векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ се линеарно зависни, тогаш постојат скалари p_1 и p_2 од кои барем еден е различен од нула така што $p_1\overrightarrow{a_1}+p_2\overrightarrow{a_2}=\vec{0}$. Оттука, на пример за $p_1\neq 0$, имаме дека $\overrightarrow{a_1}=-\frac{p_2}{p_1}\overrightarrow{a_2}$, што значи векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ се колинеарни.

Обратно, нека векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ се колинеарни. Тогаш постои скалар p, така што $\overrightarrow{a_1}=p\overrightarrow{a_2}$, без да се изгуби општоста. Последното равенство може да го запишеме во облик $1\cdot\overrightarrow{a_1}-p\overrightarrow{a_2}=\vec{0}$, што значи дека векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ се линеарно зависни, бидејќи барем 1 пред $\overrightarrow{a_1}$ е различен од нула.

Задача 1. Нека векторите $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ не се колинеарни. За која вредност на параметарот λ векторите $\vec{a}=\lambda\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$ и $\vec{b}=3\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$ се колинеарни?

Забележуваме дека $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, па затоа може да се претпостави дека $\vec{a} = p\vec{b}$, односно

$$\lambda\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} = p(3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}),$$

или еквивалентно

$$(\lambda - 3p)\overrightarrow{e_1} + (2 - p)\overrightarrow{e_2} = \vec{0}.$$

Но, векторите $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ не се колинеарни и затоа мора да биде

$$\begin{cases} \lambda - 3p = 0 \\ 2 - p = 0 \end{cases}.$$

Значи за $p = 2$ и $\lambda = 6$ векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни.♦

За три вектори велиме дека се **компланарни** ако се паралелни на една рамнина.

Теорема 2. Векторите $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ се линеарно зависни ако и само ако се компланарни.

Доказ. Нека векторите $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ се линеарно зависни. Тогаш постојат скалари p_1, p_2 и p_3 од кои барем еден е различен од нула, така што

$$p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2} + p_3\overrightarrow{a_3} = \vec{0}.$$

Нека, на пример $p_1 \neq 0$ така што е точно равенството

$$\overrightarrow{a_1} = -\frac{p_2}{p_1}\overrightarrow{a_2} - \frac{p_3}{p_1}\overrightarrow{a_3}.$$

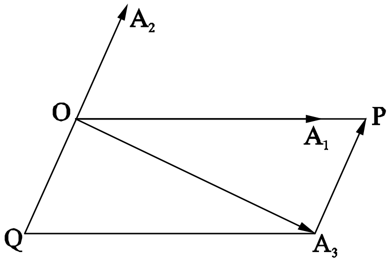
Тогаш векторите $-\frac{p_2}{p_1}\overrightarrow{a_2}$ и $-\frac{p_3}{p_1}\overrightarrow{a_3}$ се колинеарни со векторите $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$, соодветно, а векторот $\overrightarrow{a_1}$ како нивен збир е компланарен со векторите $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ (лежи во рамнината определена со $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$).

Обратно, нека векторите $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ се компланарни. Ако два од нив се колинеарни, на пример, $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ тогаш $\overrightarrow{a_1}=p\overrightarrow{a_2}$ за некој скалар p, па имаме дека

$$1\cdot\overrightarrow{a_1}-p\overrightarrow{a_2}+0\cdot\overrightarrow{a_3}=\vec{0},$$

значи дека векторите $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ се линеарно зависни.

Ако меѓу векторите нема колинеарни, ги конструираме векторите $(OA_1)\in\overrightarrow{a_1}$, $(OA_2)\in\overrightarrow{a_2}$ и $(OA_3)\in\overrightarrow{a_3}$ (цртеж 1).



Цртеж 1

Низ точката A_3 повлекуваме прави паралелни со правите OA_1 и OA_2. Да ги означиме со P и Q пресечните точки на конструираните прави со правите OA_2 и OA_1, соодветно. Тогаш имаме дека

$$\overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_3}.$$

Векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ се колинеарни со векторите $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{PA_3}$, па според тоа $\overrightarrow{a_1} = p_1\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{a_2} = p_2\overrightarrow{PA_3}$, за некои скалари p_1 и p_2. Тогаш $\overrightarrow{a_3} = p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2}$, од каде што следува дека

$$p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2} + (-1)\overrightarrow{a_3} = \vec{0},$$

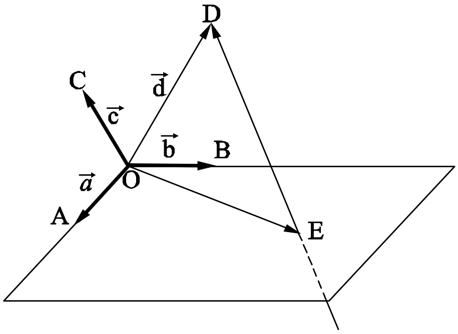
односно векторите $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ се линеарно зависни.

Задача 2. Докажи дека кои било четири вектори се линеарно зависни.

Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ се кои било четири вектори. Ако кои било три од нив се компланарни, на пример $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ тогаш $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$, за некои скалари p и q, па ќе имаме

$$p\vec{a} + q\vec{b} + (-1)\vec{c} + 0 \cdot \vec{d} = \vec{0},$$

од каде што следува дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ се линеарно зависни.



Цртеж 2

Ако кои било три од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не се компланарни, ги конструираме векторите $(OA) \in \vec{a}$, $(OB) \in \vec{b}$, $(OC) \in \vec{c}$ и $(OD) \in \vec{d}$

(цртеж 2). Низ точката D повлекуваме права паралелна со правата OC која што ја прободува рамнината определена со точките O, A и B во точката E. Ставаме $(\mathrm{OE}) \in \vec{e}$ и $(\mathrm{ED}) \in \vec{f}$. Тогаш векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{e}$ се компланарни, па $\vec{e} = p\vec{a} + q\vec{b}$, за некои скалари p и q. Векторот $\vec{f}$ е колинеарен со векторот $\vec{c}$, па имаме дека $\vec{f} = r\vec{c}$, за некој скалар r. Тогаш $\vec{d} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ од каде што добиваме

$$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} + (-1)\vec{d} = \vec{0},$$

односно векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ се линеарно зависни.♦

Задачи за самостојна работа

1. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно независни. Дали векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се линеарно зависни или независни, ако

а) $\vec{p} = 2\vec{a} + 6\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{0}$;

б) $\vec{p} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{q} = 6\vec{a} - 24\vec{b}$?

2. Нека векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни. Дали векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се линеарно зависни или независни, ако

а) $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ и $\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{a} - 3\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$;

б) $\vec{p} = 4\vec{a} - \vec{b} + 7\vec{c}$ и $\vec{q} = -\vec{a} + 2\vec{c}$?

3. Дадени се векторите $(\mathrm{OA}) \in \vec{a}$, $(\mathrm{OB}) \in \vec{b}$ и $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$. Под кои услови точките A, B и C припаѓаат на иста права?

4. Нека $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$ се три линеарно независни вектори. За кои вредности на параметрите λ и μ, векторите

$$\vec{a} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3} \text{ и } \vec{b} = 3\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$$

се колинеарни?

5. Нека векторите $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ се линеарно независни. Покажи дека векторите

$$\vec{p} = \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} + 2\overrightarrow{a_3},\ \vec{q} = \overrightarrow{a_1} + 2\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3} \text{ и } \vec{r} = 3\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$$

се линеарно независни.

6. Најди ја вредноста на параметарот p за која векторите

$$\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = p\vec{i} + \vec{j} \text{ и } \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k},$$

се компланарни, ако $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ не се компланарни вектори.

Задачи за вежбање

1. Дадени се векторите

$$\vec{a} = -2\vec{p} + 3\vec{q} - \vec{r},\ \ \vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r} \text{ и } \vec{c} = -\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}.$$

Најди вектор $\vec{d}$ така што векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ да формираат четириаголник.

2. Дадени се векторите $(OA) \in \vec{a}$, $(OB) \in \vec{b}$ и $(OC) \in \vec{c}$, каде што OC е тежишна линија на триаголникот AOB. Разложи го

а) векторот $\vec{c}$ по векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) векторот $\vec{a}$ по векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

3. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Изрази ги векторите $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{EF}$ преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

4. Даден е правилен шестаголник ABCDEF. Покажи дека

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}.$

5. Во тетраедарот OABC дадени се рабовите $(\mathrm{OA})\in\vec{a}$, $(\mathrm{OB})\in\vec{b}$ и $(\mathrm{OC})\in\vec{c}$. Со помош на дадените вектори изрази ги преостанатите рабови на тетраедарот, тежишната линија $\overrightarrow{CM}$ на страната ABC и векторот $\overrightarrow{OT}$, каде што T е тежиштето на страната ABC.

6. Докажи дека векторите $q\vec{a}-p\vec{b}$, $r\vec{b}-q\vec{c}$, $p\vec{c}-r\vec{a}$ се компланарни за произволни вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и произволни скалари p, q, r.

7. Разложи го векторот $\vec{x}=a\vec{p}+b\vec{q}$ по векторите $\vec{y}=b\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{z}=c\vec{p}+d\vec{q}$, каде што $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се дадени единични вектори.

8. Нека се дадени векторите $\vec{a}=x\vec{p}-4\vec{q}-6\vec{r}$ и $\vec{b}=-3\vec{p}+2\vec{q}+y\vec{r}$, каде што $\vec{p},\vec{q}$ и $\vec{r}$ не се компланарни. Најди ги вредностите на параметрите x и y за кои векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ќе бидат колинеарни.

9. Испитај дали се линеарно зависни или независни следниве вектори:

а) $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}+3\vec{r}$, $\vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}-2\vec{r}$,

б) $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{c}=\vec{p}+\vec{r}$,

ако $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ не се компланарни вектори.

3. Аналитичка геометрија во рамнина

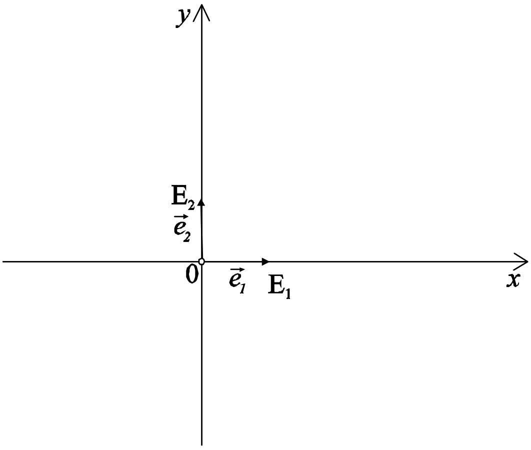
Основна цел на аналитичката геометрија, како математичка дисциплина, е воведувањето концепти за алгебарско задавање на геометриските објекти. Така, на пример, во даден координатен систем точките и векторите се задаваат со нивните координати, а кривите со нивните равенки. На тој начин е овозможено геометриски задачи да се решаваат со алгебарски методи и, обратно, алгебарски задачи да се интерпретираат геометриски.

3.1. Точка во рамнина

Во ова заглавје ќе воведеме аналитички начин на задавање на еден од основните поими во геометријата, поимот точка. Со координатното претставување на точките во рамнината може лесно да го пресметаме растојанието меѓу две точки, како и да ја определиме положбата на точката во рамнината која дадена отсечка ја дели во даден однос.

3.1.1. Координати на вектор во рамнина

Како основна алатка во решавањето на бројните проблеми во аналитичката геометрија се користат векторите. Нив досега ги задававме графички со помош на насочени отсечки како нивни претставници. Во ова поглавје ќе го воведеме координатниот начин на задавање на векторите кој претставува основа за користење на алгебарски методи во решавањето на геометриските проблеми.



Цртеж 1

Нека во рамнината се дадени два заемно нормални вектора $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, такви што $\left|\overrightarrow{e_1}\right| = \left|\overrightarrow{e_2}\right| = 1,$ и една фиксирана точка O. Како што веќе знаеме, поимот вектор е синоним на поимот слободен вектор. Според тоа, постојат единствени точки E_1 и E_2, такви што $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{OE_2}$. На секоја од правите OE_1 и OE_2 ја избираме за позитивна насока насоката на векторите $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, соодветно (цртеж 1).

Вака добиените прави ги викаме **координатни оски**, првата се нарекува $x-$оска или апсцисна оска, а втората $y-$оска или ординатна оска.

Со изборот на точката O и векторите $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ велиме дека сме избрале **правоаголен Декартов координатен систем**, кој ќе го означуваме со $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ или само со $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$. Точката O се нарекува **координатен почеток**, а векторите $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ **координатни вектори**. На двете бројни оски за единица мерка за должина ја избираме должината на координатните вектори. Од тие причини координатните вектори ги нарекуваме уште и **единични вектори**. Рамнина во која е определен правоаголен Декартов координатен систем се нарекува **координатна рамнина** и се означува со xOy.

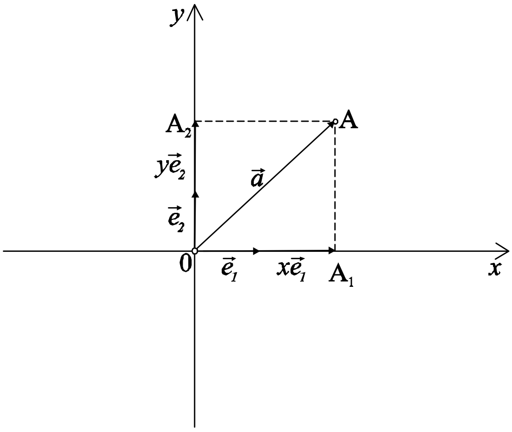
Нека $\vec{a}$ е произволен вектор во кординатна рамнина определена со координатниот систем $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, (цртеж 2). Тогаш постои единствена точка A, така што $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$. Нека A_1 и A_2 се ортогоналните проекции на точката A на $x-$оската, односно $y-$оската, соодветно.

Векторите $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{e_1}$ се колинеарни, па според тоа постои единствен реален број x, така што

$$\overrightarrow{OA_1}=x\overrightarrow{e_1}.$$

Аналогно, векторите $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{e_2}$ се колинеарни, па според тоа постои единствен реален број y, така што

$$\overrightarrow{OA_2} = y\overrightarrow{e_2}.$$



Црт. 2

Бидејќи четриаголникот OA_1AA_2 е правоаголник, од правилото на паралелограм за собирање вектори имаме дека

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}.$$

Според тоа, на секој вектор $\vec{a}$ може да му придружиме единствен подреден пар реални броеви (x, y) така што важи:

$$\boxed{\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}} \qquad (1)$$

Во тој случај велиме дека со формулата (1) е дадено разложувањето на векторот $\vec{a}$ по координатните вектори $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$.

Важи и обратното, односно на секој подреден пар реални броеви (x, y) соодветствува единствен вектор $\vec{a}$, определен со формулата (1).

Од горекажаното може да заклучиме дека постои биекција помеѓу множеството од вектори во кординатната рамнина и множеството подредени парови реални броеви. Според тоа, секој вектор во рамнината е еднозначно определен со еден подреден пар реални броеви. Тоа ни дава за право да ја прифатиме следнава дефиниција.

Дефиниција 1. Коефициентите во разложувањето на даден вектор $\vec{a}$ се нарекуваат **координати** на векторот во однос на избран координатен систем $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ и пишуваме $\vec{a} = (x, y)$. Притоа, x се нарекува **прва координата**, а y **втора координата** на векторот $\vec{a}$.

Координатите на единичните вектори се $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ и $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$, додека за нултиот вектор важи $\vec{0} = (0,0)$.

Задача 1. Најди ги координатите на векторот $\overrightarrow{AS}$, ако S е пресечната точка на дијагоналите на даден квадрат $ABCD$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AD}$ и координатниот почеток е во точката A.

Имаме дека

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

Според тоа, заклучуваме дека $\overrightarrow{AS} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. ♦

Следната теорема искажува критериум за еднаквост на два вектора зададени преку своите координати.

Теорема 1. Два вектора $\vec{a}=(x_1,y_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2)$ се еднакви ако и само ако им се еднакви соодветните координати, односно $\vec{a}=\vec{b}$ ако и само ако $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

Доказ. Ако $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$ тогаш $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, од каде што следува дека $\vec{a}=\vec{b}$.

Обратно, нека $\vec{a}=\vec{b}$. Тогаш имаме дека

$$x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}=x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2},$$

односно

$$(x_1-x_2)\overrightarrow{e_1}+(y_1-y_2)\overrightarrow{e_2}=\vec{0}.$$

Бидејќи единичните вектори не се колинеарни, следува $x_1-x_2=0$ и $y_1-y_2=0$, односно $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.■

Под конструкција на вектор во координатна рамнина ќе ја подразбереме конструкцијата на претставникот од класата на слободниот вектор, врзан за координатниот почеток.

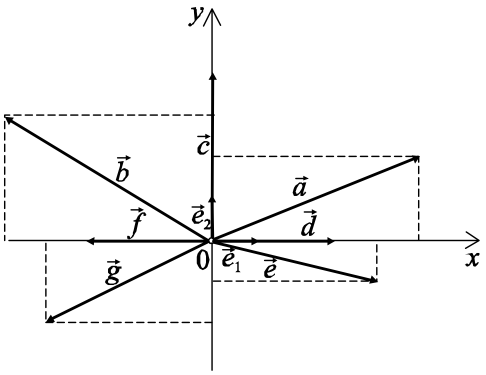
Задача 2. Конструирај ги следниве вектори во координатна рамнина:

а) $\vec{a}=(5,2)$ б) $\vec{b}=(-5,3)$

в) $\vec{c}=(0,4)$ г) $\vec{d}=(3,0)$

г) $\vec{e}=(4,-1)$ д) $\vec{f}=(-3,0)$

ѓ) $\vec{0}=(0,0)$ е) $\vec{g}=(-4,-2)$.



Цртеж 3

Конструкцијата е дадена на цртеж 3.♦

Задачи за самостојна работа

1. Даден е квадрат $ABCD$. Нека $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{AD}$ и нека координатниот почеток е во точката A. Запиши ги координатите на векторите $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, во однос на избраниот координатен систем.

2. Нека отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишни линии на рамнокрак правоаголен триаголник ABC, со прав агол кај темето A. Нека $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{AC}$ и нека координатниот почеток е во точката A. Запиши ги координатите на векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ во однос на избраниот координатен систем.

3. Конструирај ги во координатна рамнина векторите:

а) $\vec{a}=(4,2)$ б) $\vec{b}=(-1,3)$ в) $\vec{c}=(2,-3)$ г) $\vec{d}=(-1-3)$

д) $\vec{e}=(2,0)$ ѓ) $\vec{f}=(0,3)$ е) $\vec{g}=(-4,0)$ ж) $\vec{h}=(0-2)$.

4. Каква е заемната положба на векторите $\vec{a}=(x,y)$ и $\vec{b}=(y,x)$?

3.1.2. Операции со вектори зададени преку нивните координати

Како што споменавме во претходното поглавје пресликувањето кое на секој вектор му придружува подреден пар реални броеви е биекција. Од тие причини операциите со вектори може да ги замениме со операции со нивните координати.

Нека се дадени векторите $\overrightarrow{a_1}=(x_1,y_1)$ и $\overrightarrow{a_2}=(x_2,y_2)$. Тогаш имаме дека

$$\overrightarrow{a_1}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2} \text{ и } \overrightarrow{a_2}=x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2},$$

од каде што добиваме дека

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}&=\left(x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}\right)+\left(x_2\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2}\right)=\\&=\left(x_1+x_2\right)\overrightarrow{e_1}+\left(y_1+y_2\right)\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

Според тоа, за координатите на збирот на дадените вектори имаме дека

$$\boxed{\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=(x_1+x_2,y_1+y_2)}.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. Секоја координата на збирот на два вектора е еднаква на збирот на соодветните координати на векторите собироци.

Задача 1. Најди ги координатите на векторот $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}$, ако $\overrightarrow{a_1}=(2,1)$ и $\overrightarrow{a_2}=(-1,4)$.

Имаме дека

$$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=(2,1)+(-1,4)=(2+(-1),1+4)=(1,5). \ \blacklozenge$$

Аналогно се покажува дека

$$\boxed{\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}=(x_1-x_2,y_1-y_2)},$$

односно, важи следнава теорема:

Теорема 2. Секоја координата на разликата на еден вектор со друг е еднаква на разликата на соодветните координати на намаленикот и намалителот.

Задача 2. Најди ги координатите на векторот $\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}$, ако $\overrightarrow{a_1}=(3,2)$ и $\overrightarrow{a_2}=(-2,2)$.

$$\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}=(3,2)-(-2,2)=(3-(-2),2-2)=(5,0). \ \blacklozenge$$

Да ги определиме координатите на производот на вектор со реален број. Имено, ако $\vec{a}=(x,y)$ е произволен вектор и λ произволен реален број, тогаш имаме дека

$$\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$$

од каде што следува дека

$$\lambda\vec{a} = \lambda\left(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}\right) = \lambda x\overrightarrow{e_1} + \lambda y\overrightarrow{e_2}.$$

Според тоа, добиваме дека

$$\boxed{\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y)},$$

односно важи теоремата:

Теорема 3. Секоја координата на производот на еден вектор со реален број е еднаква на производот на соодветната координата на векторот со дадениот реален број.

Задача 3. Најди ги координатите на дадениот вектор, ако $\vec{a} = (-1,2)$.

а) $2\vec{a}$ б) $-3\vec{a}.$

Имаме дека

а) $2\vec{a} = 2(-1,2) = (2\cdot(-1), 2\cdot 2) = (-2,4)$

б) $-3\vec{a} = -3(-1,2) = (-3\cdot(-1), (-3)\cdot 3) = (3,-9).$ ♦

Нека $\overrightarrow{a_1} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{a_2} = (x_2, y_2), ..., \overrightarrow{a_k} = (x_k, y_k)$ се дадени вектори и нека λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_k$ се дадени реални броеви. Заради својствата на операциите собирање на вектори и множење на вектор со реален број, како и својствата на операциите собирање и множење реални броеви, од равенствата

$$\overrightarrow{a_1} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2},$$

$$\overrightarrow{a_2} = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2},$$

....

$$\overrightarrow{a_k} = x_k\overrightarrow{e_1} + y_k\overrightarrow{e_2},$$

следува дека

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_k} =$$

$$= \lambda_1\left(x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2}\right) + \lambda_2\left(x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}\right) + \cdots + \lambda_k\left(x_k\overrightarrow{e_1} + y_k\overrightarrow{e_2}\right) =$$

$$= (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_kx_k)\overrightarrow{e_1} + (\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 + \cdots + \lambda_ky_k)\overrightarrow{e_2}.$$

Според тоа, добиваме дека

$$\boxed{\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_k} = \left(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_kx_k, \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 + \cdots + \lambda_ky_k\right)}$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема која е обопштување на претходните теореми.

Теорема 4. Ако векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ се зададени со своите координати $\overrightarrow{a_i} = (x_i, y_i),\ i = 1,2,\ldots,k$ и ако $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ се реални броеви, тогаш векторот $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_k}$ има координати

$$\left(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_kx_k, \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 + \cdots + \lambda_ky_k\right).$$

Задача 4. Најди ги координатите на векторите:

а) $2\overrightarrow{a_1} + 3\overrightarrow{a_2}$ б) $4\overrightarrow{a_1} - 3\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3}$

в) $\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2} + 3\overrightarrow{a_3} - 2\overrightarrow{a_4}$.

ако $\overrightarrow{a_1} = (0,2)$, $\overrightarrow{a_2} = (1,3)$, $\overrightarrow{a_3} = (3,0)$ и $\overrightarrow{a_4} = (1,1)$.

Имаме дека

а) $2\overrightarrow{a_1}+3\overrightarrow{a_2}=(2\cdot 0+3\cdot 1,2\cdot 2+3\cdot 3)=(3,13)$

б) $4\overrightarrow{a_1}-3\overrightarrow{a_2}-\overrightarrow{a_3}=(4\cdot 0-3\cdot 1-3,4\cdot 2-3\cdot 3-0)=(-6,-1)$

в) $\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2}+3\overrightarrow{a_3}-2\overrightarrow{a_4}=(0-2\cdot 1+3\cdot 3-2\cdot 1,2-2\cdot 3+3\cdot 0-2\cdot 1)=$

$=(5,-6)$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ги координатите на збирот на векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$, ако:

а) $\overrightarrow{a_1}=(4,-1)$ и $\overrightarrow{a_2}=(3,0)$ б) $\overrightarrow{a_1}=(-1,2)$ и $\overrightarrow{a_2}=(3,-1)$.

2. Запиши ги координатите на разликата на векторот $\overrightarrow{a_1}$ со векторот $\overrightarrow{a_2}$, ако:

а) $\overrightarrow{a_1}=(5,-2)$ и $\overrightarrow{a_2}=(-4,1)$ б) $\overrightarrow{a_1}=(-2,2)$ и $\overrightarrow{a_2}=(-4,7)$.

3. Дадени се векторите $\overrightarrow{a_1}=\left(\frac{1}{2},3\right)$ и $\overrightarrow{a_2}=(2,-3)$. Најди ги координатите на векторите:

а) $3\overrightarrow{a_1}-4\overrightarrow{a_2}$ б) $-2\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}$ в) $\overrightarrow{a_1}-6\overrightarrow{a_2}$.

4. Дадени се векторите $\overrightarrow{a_1}=(6,0)$, $\overrightarrow{a_2}=(3,-4)$, $\overrightarrow{a_3}=(-1,5)$ и $\overrightarrow{a_4}=(2,-3)$. Запиши ги координатите на векторите:

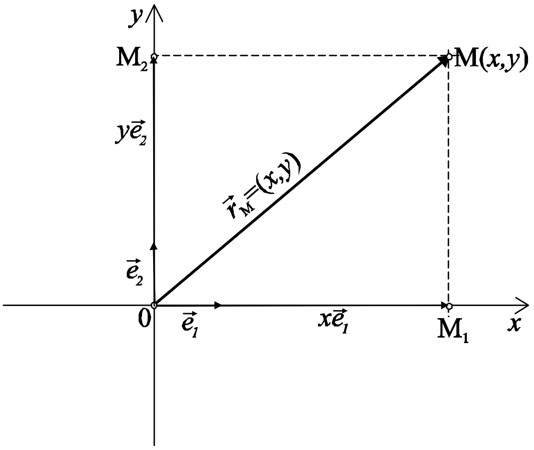
а) $\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2}+4\overrightarrow{a_3}$ б) $2\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}$

в) $-\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_2}+3\overrightarrow{a_3}-4\overrightarrow{a_4}$.

5. Нека ABC е даден триаголник и нека $\overrightarrow{AB}=(2,6)$ и $\overrightarrow{AC}=(4,2)$. Најди ги координатите на векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$, ако AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишните линии во дадениот триаголникот.

3.1.3. Координати на точка во рамнина

Нека M е произволна точка во кординатна рамнина определена со правоаголен Декартов координатен систем $(\mathrm{O}; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.



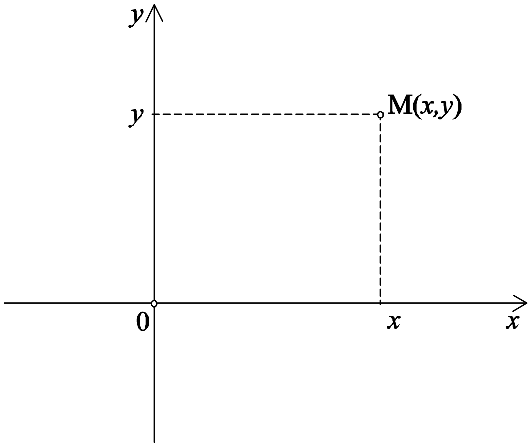
Цртеж 1

Векторот $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$ со почеток во координатниот почеток и крај во точката M се нарекува **радиусвектор** на точката M. Положбата на точката M е наполно определена со нејзиниот радиусвектор $\overrightarrow{r_M}$, а тој, пак, е наполно определен со своите координати во однос на избраниот координатен систем, кои претставуваат подредени парови реални броеви, односно $\vec{r} = (x, y)$.

Според тоа, може да заклучиме дека постои биекција меѓу множеството точки во координатната рамнина и множеството подредени парови реални броеви (цртеж 1). Направената дискусија ја допушта следнава дефиниција:

Дефиниција 1. Координати на точка M во однос на избран координатен систем $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ се нарекуваат координатите на нејзиниот радиусвектор $\vec{r}=(x,y)$ во однос на избраниот координатен систем и пишуваме $M(x,y)$. Притоа, x се нарекува **прва координата** или **апсциса**, а y **втора координата** или **ордината** на точката M.

Согласно со дефиницијата, конструкцијата на дадена точка $M(x,y)$ се сведува на конструкција на радиусвекорот $\overrightarrow{r_M}=(x,y)$. Крајната точка на добиениот радиусвектор е бараната точка $M(x,y)$.



Цртеж 2

За таа цел поаѓаме од равенството $\overrightarrow{r_M}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$. Ги конструираме точките M_1 и M_2 такви што $\overrightarrow{OM_1}=x\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}=y\overrightarrow{e_2}$, а потоа по правилото на паралелограм за собирање на вектори го добиваме векторот $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$.

Конструкцијата на дадената точка може да се упрости ако имаме предвид дека паралелограмот OM_1MM_2 е правоаголник таков што $\overline{OM_1} = |x|$ и $\overline{OM_2} = |y|$. Точката M ја добиваме како пресечна точка на нормалите на координатните оски подигнати од точките M_1 и M_2, соодветно (цртеж 2).

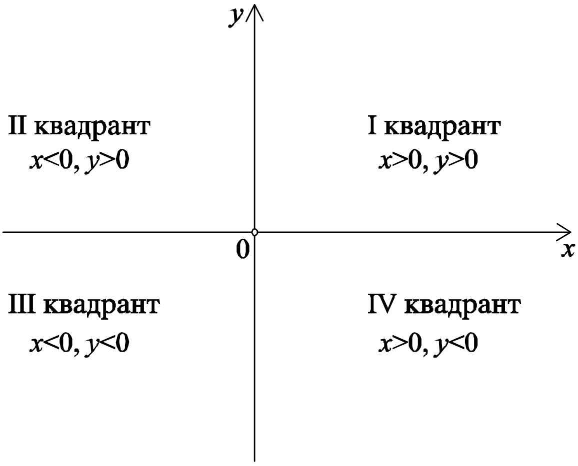
Притоа, ако $x > 0$, векторите $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{OM_1}$ имаат иста насока, па според тоа точката M_1 ја конструираме на растојание $|x|$ од координатниот почеток во насока на координатниот вектор $\overrightarrow{e_1}$. Ако, пак, $x < 0$, тогаш векторите $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{OM_1}$ имаат спротивни насоки, па точката M_1 ја конструираме на растојание $|x|$ од координатниот почеток во насока спротивна од насоката на првиот координатен вектор.

Аналогно се спроведува конструкцијата на точката M_2 на $y-$оската.

Координатните оски ја разделуваат рамнината на четири дела наречени **квадранти** (цртеж 3). Знаците на координатите на дадена точка определуваат во кој квадрант лежи точката. Според тоа, дадена точка $M(x, y)$ лежи:

- ✓ во I квадрант, ако $x > 0$ и $y > 0$;
- ✓ во II квадрант, ако $x < 0$ и $y > 0$;
- ✓ во III квадрант, ако $x < 0$ и $y < 0$;
- ✓ во IV квадрант, ако $x > 0$ и $y < 0$;
- ✓ на $x-$оската, ако $y = 0$;

- ✓ на $y-$оската, ако $x=0$.
- ✓ се совпаѓа со координатниот почеток ако $x=0$ и $y=0$.



Цртеж 3

Задача 1. Определи во кој квадрант или на која оска припаѓаат следниве точки:

а) $A(1-4)$ б) $B(0,2)$ в) $C(-1,3)$

г) $D(1,2)$ д) $E(-4,-5)$ ѓ) $F(-3,0)$.

Имаме дека

а) $A(1-4)$ лежи во IV-от квадрант

б) $B(0,2)$ лежи на $y-$оската

в) $C(-1,3)$ лежи во II-от квадрант

г) $D(1,2)$ лежи во I-от квадрант

д) $E(-4,-5)$ лежи во III-от квадрант

ѓ) $B(-3,0)$ лежи на $x-$оската.♦

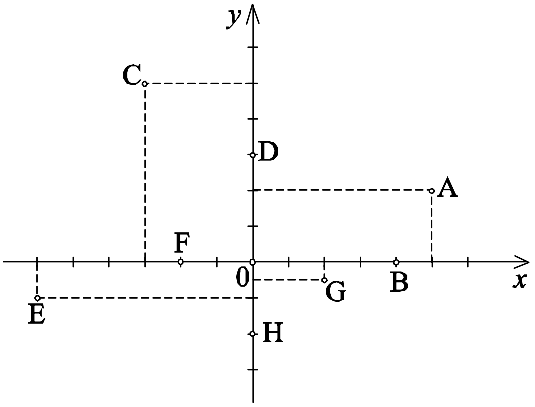
Задача 2. Конструирај ги во координатна рамнина точките:

а) $A(5,2)$ б) $B(4,0)$ в) $C(-3,5)$ г) $D(0,3)$

д) $E(-6,-1)$ ѓ) $F(-2,0)$ е) $G\left(2,-\frac{1}{3}\right)$ ж) $H(0,-2)$

а потоа определи во кој квадрант или на која координатна оска припаѓаат.

Имаме дека



Цртеж 4

а) $A(5,2)$ лежи во I-от квадрант

б) $B(4,0)$ лежи на $x-$оската

в) $C(-3,5)$ лежи во II-от квадрант

г) $D(0,3)$ лежи на $y-$оската

д) $E(-6,-1)$ лежи во III-от квадрант

ѓ) $F(-2,0)$ лежи на $x-$оската

е) $G\left(2,-\frac{1}{3}\right)$ лежи во IV-от квадрант

ж) $H(0,-2)$ лежи на $y-$оската (цртеж 4). ♦

Задачи за самостојна работа

1. Определи во кој квадрант или на која координатна оска припаѓаат точките:

а) $A(3,-4)$ б) $B(-1,1)$ в) $C(-3,-5)$ г) $D(2,3)$

д) $E(2,0)$ ѓ) $B(0,-3)$ е) $G(0,2)$ ж) $H(-6,0)$.

2. Конструирај ги во координатна рамнина точките:

а) $A(-2,4)$ б) $B\left(3,\frac{1}{2}\right)$ в) $C\left(3,-\frac{1}{4}\right)$ г) $D\left(-7,-\frac{3}{4}\right)$

д) $E(-6,0)$ ѓ) $B\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ е) $G\left(\frac{1}{2},0\right)$ ж) $H(0,-1)$

и определи во кој квадрант или на која оска припаѓаат.

3. Најди ги координатите на проекциите M, N, P и Q на точките $A(1,3)$, $B(-2,4)$, $C(5,-2)$ и $D(-3,-1)$ на:

а) $x-$оската б) $y-$оската.

4. Дадена е точка $M(3,5)$. Најди ги координатите на точката N која е симетрична на дадената точка во однос на:

а) $x-$оската б) $y-$оската

в) координатниот почеток.

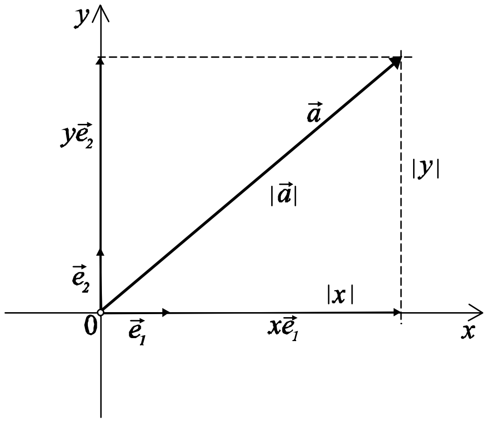
5. Конструирај ја отсечката AB ако се познати координатите на нејзините крајни точки $A(1,4)$ и $B(5,2)$. Потоа најди ги должините m_x и m_y на нејзините ортогонални проекции на $x-$оската и $y-$оската, соодветно.

6. Конструирај го триаголникот ABC, ако се познати координатите на неговите темиња: $A(1,-3)$, $B(5,2)$ и $C\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

3.1.4. Растојание меѓу две точки

Во ова поглавје со помош на аналитички метод ќе го решиме проблемот на пресметување на растојанието меѓу две точки во координатна рамнина. За таа цел е потребно претходно да ја докажеме формулата за пресметување на должина на вектор зададен преку своите координати.

Нека во рамнината е определен правоаголен Декартов координатен систем $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ и нека $\vec{a}=(x,y)$ е произволно избран вектор (цртеж 1). Тогаш $\vec{a}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$. Векторот $x\overrightarrow{e_1}$ е колинеарен со единичниот вектор $\overrightarrow{e_1}$, векторот $y\overrightarrow{e_2}$ е колинеарен со единичниот вектор $\overrightarrow{e_2}$. Бидејќи единичните вектори се заемно нормални, тогаш такви се и векторите $x\overrightarrow{e_1}$ и $y\overrightarrow{e_2}$. Според тоа триаголникот со страни $|\vec{a}|=|x\overrightarrow{e_1}|=|x||\overrightarrow{e_1}|=|x|$ и $|y\overrightarrow{e_2}|=|y||\overrightarrow{e_2}|=|y|$ е правоаголен триголник со хипотенуза $|\vec{a}|$ и катети $|x|$ и $|y|$.



Цртеж 1

Заради Питагоровата теорема, добиваме дека $|\vec{a}|^2 = |x|^2 + |y|^2$. Бидејќи $|\vec{a}|^2$ е ненегативно, за секој вектор $\vec{a}$, и $|a|^2 = a^2$, за секој реален број a, добиваме дека

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. Должината на произволен вектор $\vec{a} = (x, y)$ е еднаква на квадратниот корен од збирот на квадратите на неговите координати, односно

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Задача 1. Пресметај ја должината на следниве вектори:

а) $\vec{a} = (3,2)$ б) $\vec{b} = (-1,2)$ в) $\vec{c} = (-2,-5)$

г) $\vec{d} = (4,0)$ д) $\vec{e} = (1,0)$.

Имаме дека

а) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ б) $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

в) $|\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$ г) $|\vec{d}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

д) $|\vec{e}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$. ♦

Под растојание d меѓу две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ во координатната рамнина го подразбираме мерниот број на должината на отсечката M_1M_2. Од друга страна, пак, должината на отсечката M_1M_2 е, всушност, должината на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Според тоа, проблемот на пресметување на растојание меѓу две точки можеме да го разгледуваме како проблем на определување должина на векторот со почеток во едната точка и крај во другата точка. Притоа, редоследот во изборот на точките е небитен бидејќи $|\overrightarrow{M_1M_2}| = |\overrightarrow{M_2M_1}|$.

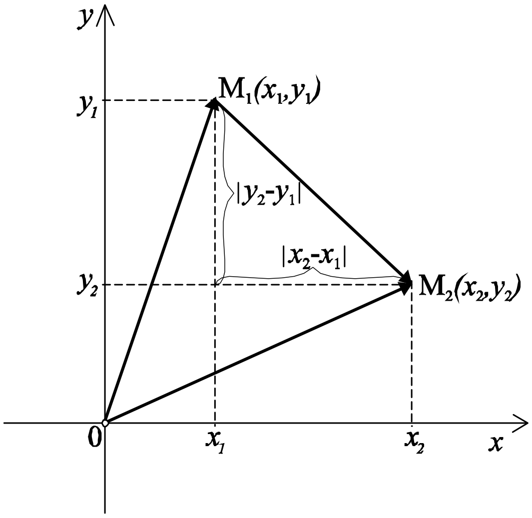
Најнапред да ги определиме координатите на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$. Бидејќи координатите на една точка во кординатната рамнина се еднакви со координатите на нејзиниот радиусвектор, од $M_1(x_1, y_1)$ следува дека нејзниот радиусвектор $\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1)$.

Слично, од $M_2(x_2, y_2)$ добиваме дека нејзиниот радиусвектор $\overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2)$. Од равенството $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2}$ следува дека $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ (цртеж 2). Според тоа, имаме дека

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Конечно,

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$



Цртеж 2

Сега векторот чијашто должина треба да ја определиме, е зададен со неговите координати. Ако на векторот

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

ја примениме Теорема 1 добиваме:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Како што веќе рековме, бараното растојание d меѓу дадените точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ е еднакво на должината на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$, односно $d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$. Според тоа

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 2. Растојанието d помеѓу две зададени точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ се пресметува според формулата

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Задача 2. Пресметај го растојанието меѓу точките $M_1(-2,3)$ и $M_2(0,-2)$.

Имаме дека

$$d=\sqrt{(0-(-2))^2+((-2)-3)^2}=\sqrt{29}. \blacklozenge$$

Задача 3. Провери дали точките $A(3,-6)$, $B(-2,4)$ и $C(1,-2)$ лежат на една иста права.

I начин. Ќе провериме дали векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни. Имаме дека

$$\overrightarrow{AB}=(-5,10) \text{ и } \overrightarrow{AC}=(-2,4),$$

од каде што заклучуваме дека $\overrightarrow{AB}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$. Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни, од каде што следува дека точките A, B и C лежат на една иста права.

II начин. Ќе ги пресметаме должините $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ и ќе провериме дали едната од нив е збир на другите две:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+10^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5},$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5},$$

$$\overline{BC}=\sqrt{3^2+(-6)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}.$$

Од $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{BC}$ следува дека дадените точки лежат на една иста права.♦

4. Да се определи видот на триаголникот според страните, ако $A(1,1),\ B(2,3)$ и $C\left(1,\frac{9}{4}\right)$.

Да ги пресметаме должините на страните $\overline{AB},\ \overline{AC}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},$$

$$\overline{AC}=\sqrt{0^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{5}{4},$$

$$\overline{BC}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}.$$

Од $\overline{AB}=\overline{BC}\neq\overline{AB}$ може да заклучиме дека дадениот триаголник е рамнокрак.♦

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај го растојанието d меѓу точките:

а) $M_1(1,-3)$ и $M_2(2,6)$ б) $M_1(0,2)$ и $M_2(0,-2)$

в) $M_1(-1,-2)$ и $M_2(2,4)$ г) $M_1(1,3)$ и $M_2(7,0)$.

2. Провери дали точките $A(1,-3),\ B(3,-5)$ и $C(-5,7)$ се темиња на триаголник.

3. Најди ја ординатата на точката B, ако нејзината апсцисата е еднаква на 7, а нејзиниото растојание до точката $A(-1,5)$ е еднакво на 10.

4. Дадени се точките $A(5,8)$ и $B(-11,-2)$. Најди ги координатите на точката C која е симетрична на точката B во однос на точката A.

5. Дадени се точките $A(1,4)$, $B(3,-9)$ и $C(-5,2)$. Докажи дека тие се темиња на триаголник и најди ја должината на медијаната повлечена од темето B.

6. Најди ја точката B на апсцисната оска која е еднакво оддалечена од координатниот почеток и од точката $A(9,-3)$.

7. Дадени се точките $A(3,5)$ и $B(6,4)$. Најди точка C на ординатната оска којашто е еднакво оддалечена од точките A и B.

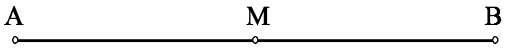
3.1.5. Делење на отсечка во даден однос

Дефиниција 1. За точката M велиме дека ја дели отсечката AB $(A \neq B)$ во однос λ, сметано од A кон B, ако $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

Пример 1. Ако M е средина на отсечката AB, тогаш

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB},$$

односно точката M ја дели отсечката AB во однос $\lambda = 1$, сметано од A кон B (цртеж 1). ♦



Цртеж 1

Пример 2. Нека точките P и Q ја делат отсечката AB на три еднакви дела и нека $\overline{\mathrm{AP}} < \overline{\mathrm{AQ}}$. Тогаш

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PB}} \text{ и } \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{QB}},$$

од каде што заклучуваме дека точката P ја дели отсечката AB во однос $\frac{1}{2}$, а точката Q во однос 2, сметано од A кон B (цртеж 2).♦

Цртеж 2

Често наместо да велиме ,,точката M ја дели отсечката AB во однос λ, сметано од A кон B”, велиме само ,,точката M ја дели отсечката AB во однос λ”, сметајќи притоа дека ознаката AB, а не BA, ни означува дека делењето е од A кон B.

Бројот λ е поголем од нула ако и само ако точката M лежи меѓу точките A и B. Специјално, $\lambda = 1$ ако и само ако точката M е средина на отсечката AB. Понатаму, $\lambda = 0$ ако и само ако точката M се совпаѓа со точката A.

Ако $\lambda = -1$, односно ако $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = -\overrightarrow{\mathrm{MB}}$, тогаш $\overrightarrow{\mathrm{MA}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}}$, од каде следува дека $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, што не е можно. Според тоа $\lambda \neq -1$. Бројот λ е помал од нула и $\lambda \neq -1$ ако и само ако точката M лежи на правата AB, надвор од отсечката AB.

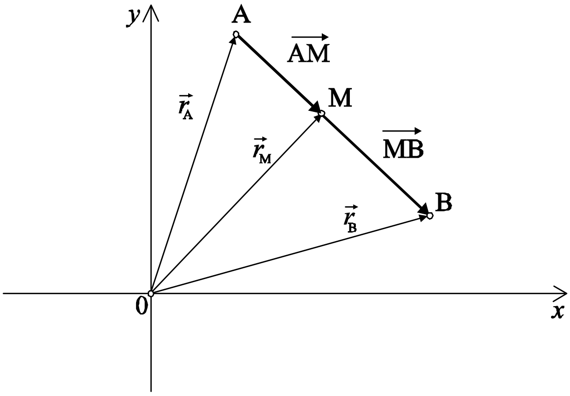
Во следните чекори ќе го откриеме радиусвекторот, а потоа и координатите на точката M која ја дели отсечката AB во однос

λ. Да уочиме дека $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$. Тогаш имаме дека $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ ако и само ако $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)$. Последното равенство е еквивалентно со равенството $(1+\lambda)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, односно со равенството

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}.$$

Заради $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{OB}$, последното равенство добива облик

$$\boxed{\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \lambda\overrightarrow{r_B}}{1+\lambda}}$$



Цртеж 3

Ако $\lambda = \frac{p}{q}$, тогаш $\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \frac{p}{q}\overrightarrow{r_B}}{1+\frac{p}{q}} = \frac{q\overrightarrow{r_A} + p\lambda\overrightarrow{r_B}}{p+q}$ односно,

$$\boxed{\overrightarrow{r_M} = \frac{q\overrightarrow{r_A} + p\overrightarrow{r_B}}{p+q}}.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. Точката M ја дели отсечката AB во однос λ ако и само ако важи

$$\overrightarrow{r_M}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\lambda\overrightarrow{r_B}}{1+\lambda}.$$

Специјално ако $\lambda=\frac{p}{q}$, тогаш

$$\overrightarrow{r_M}=\frac{q\overrightarrow{r_A}+p\overrightarrow{r_B}}{p+q}.$$

Пример 3. Дадена е отсечка AB, $A\neq B$. Точките P и Q ја делат отсечката AB на три еднакви дела. Изрази ги радиусвекторите $\overrightarrow{r_P}$ и $\overrightarrow{r_Q}$ преку радиусвекторите $\overrightarrow{r_A}$ и $\overrightarrow{r_B}$.

Од условот на задачата имаме дека

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \text{ и } \overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QB}.$$

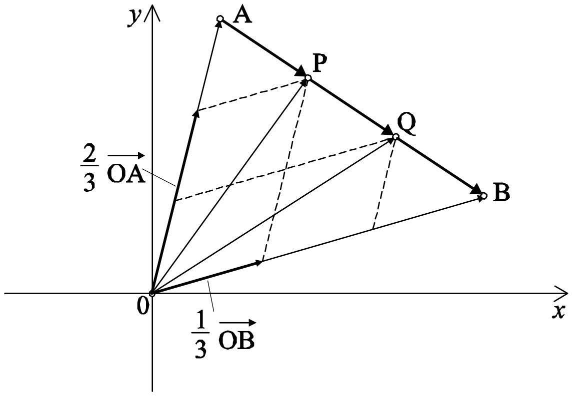
Според горедокажаната теорема имаме:

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3},$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{1+2}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}.$$

Бидејќи $\overrightarrow{r_P}=\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{r_Q}=\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{r_A}=\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{r_B}=\overrightarrow{OB}$, добиваме дека

$$\overrightarrow{r_P}=\frac{2\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}}{3} \text{ и } \overrightarrow{r_Q}=\frac{\overrightarrow{r_A}+2\overrightarrow{r_B}}{3}. \blacklozenge$$



Цртеж 4

Нека се дадени точките $A(x_1,y_1)$ и $B(x_1,y_2)$, и нека точката $M(m_1,m_2)$ ја дели отсечката AB во однос λ. Координатите на точките A, B и M во координатната рамнина се еднакви на координатите на радиусвекторите $\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_B}$ и $\overrightarrow{r_M}$. Од горната теорема имаме

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \lambda\overrightarrow{r_B}}{1+\lambda},$$

од каде што следува дека

$$(m_1,m_2) = \frac{(x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2)}{1+\lambda} = \frac{(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2)}{1+\lambda},$$

или

$$\boxed{m_1 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}} \qquad \boxed{m_2 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}}$$

Ако $\lambda = \frac{p}{q}$, тогаш имаме дека

$$m_1=\frac{a_1+\frac{p}{q}b_1}{1+\frac{p}{q}}=\frac{qa_1+pb_1}{p+q} \quad \text{и} \quad m_2=\frac{a_2+\frac{p}{q}b_2}{1+\frac{p}{q}}=\frac{qa_2+pb_2}{p+q},$$

односно

$$\boxed{m_1=\frac{qx_1+px_2}{p+q}} \qquad \boxed{m_2=\frac{qy_1+py_2}{p+q}}$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 2. Нека се дадени точките $A(x_1y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Ако точката $M(m_1,m_2)$ ја дели отсечката AB во однос λ тогаш

$$m_1=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \text{ и } m_2=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Специјално, ако $\lambda=\frac{p}{q}$, тогаш

$$m_1=\frac{qx_1+px_2}{p+q} \text{ и } m_2=\frac{qy_1+py_2}{p+q}.$$

Задача 4. Нека е даден триаголникот ABC чиишто темиња имаат координати $A(-2,-3)$, $B(6,1)$ и $C(-4,5)$. Најди ги координатите на тежиштето на триаголникот.

За определување на координатите на тежиштето ќе го користиме условот дека тежиштето ја дели секоја од тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 во однос 2.

Бидејќи имаме дека

$$x_{A_1}=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-2+6}{2}=2 \text{ и } y_{A_1}=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1$$

Следува дека $A_1(2,-1)$. Тогаш наоѓаме дека

$$x_T = \frac{x_A + 2x_{A_1}}{1+2} = \frac{-4+4}{3} = 0 \text{ и } y_T = \frac{y_A + 2y_{A_1}}{1+2} = \frac{5-2}{3} = 1,$$

па според тоа $T(0,1)$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Нека $A(3,-7)$, $B(5,2)$ и $C(-1,0)$ се темиња на триаголник. Најди ги координатите на средините на неговите страни.

2. Дадени се точките $A(9,-2)$ и $B(12,10)$. На правата AB најди ја точката M, така што

а) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$ б) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$.

3. Нека $A(1,1)$, $B(5,11)$ и $C(3,-1)$ се темиња на триаголник. Најди ја должината на медијаната повлечена од темето A.

4. Дадени се точките $A(-3,-2)$ и $B(7,3)$. Најди ги координатите на точките кои отсечката AB ја делат на пет еднакви делови.

5. Дадени се точките $A(3,1)$ и $B(8,3)$. Најди ги координатите на точката M која отсечката AB ја дели во однос:

а) $2:3$ б) $3:2$ в) $-2:3$ г) $-3:2$.

6. Најди ги координатите на темињата на триаголникот ABC ако се познати средините на неговите страни $P(3,-2)$, $Q(1,6)$ и $R(-4,2)$.

7. Нека точките $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ и $C(c_1,c_2)$ се темиња на триаголник. Докажи дека за тежиштето на триаголникот ABC важи

$$T\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).$$

8. Дадени се две соседни темиња $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ на паралелограмот $ABCD$ и пресечната точка на неговите дијагонали $S(s_1, s_2)$. Најди ги координатите на другите две темиња.

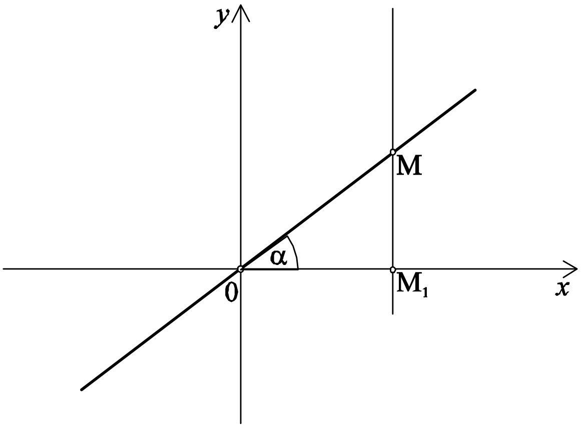
3.2. Права во рамнина

Правата е една од наједноставните геометриски фигури, но низа геометриски фигури се состојат од прави или од делови од прави. Од тие причини нашето изучување ќе го продолжиме со задавање и изучување на разни видови равенки на права во однос на избрана координатна рамнина xOy.

3.2.1. Експлицитен облик на равенка на права

Бидејќи правата е основен геометриски поим кој не се дефинира, за да дојдеме до нејзината равенка, потребно е да искористиме некое нејзино својство. Да ја изведеме најнапред равенката на права која минува низ координатниот почеток и е различна од координатните оски (цртеж 1).

Нека $M(x, y)$ е произволна точка од правата различна од координатниот почеток. Да ги означиме со M_1 ортогоналната проекција на точката M на $x-$оската, и со α аголот што го зафаќа правата со позитивната насока на $x-$оската. Тогаш односот



Цртеж 1

$$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\alpha$$

е константен за произволна положба на точката $M.$ Тој се означува со k и се нарекува **аглов коефициент** или **коефициент на правец** на правата. Оттука следува дека координатите на секоја точка од правата ја задоволуваат равенката

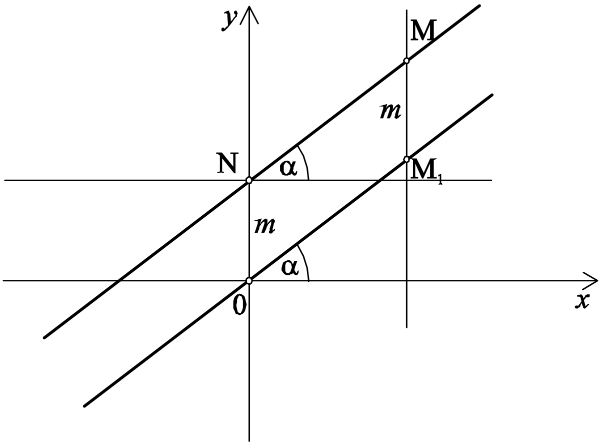
$$\boxed{y = kx}.$$

Според тоа, последната равенка претставува равенка на права која минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha,$ каде што $k = \mathrm{tg}\alpha.$

Бидејќи правата минува низ координатниот почеток, нејзината равенка е од облик $y = kx$. Од условот на задачата имаме дека $k = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Според тоа, бараната равенка гласи $y = x$. ♦

Нека е дадена произволна права во координатната рамнина. Тогаш можни се следниве три случаи:

✓правата ги сече двете координатни оски (цртеж 2). Нека $N(0, m)$ е пресечната точка на правата со $y-$оската. Притоа, ординатата на секоја точка од правата е поголема за m, ако m е позитивно, или намалена за m, ако m е негативно, во однос на точките од правата што минува низ координатниот почеток и е паралелна на дадената.



Цртеж 2

Задача 1. Запиши ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Двете разгледувани прави зафаќаат еднакви агли со позитивната насока на $x-$оската, па според тоа нивните аглови коефициенти се еднакви. Бидејќи правата којашто минува низ координатниот почеток е зададена со равенката

$$y = kx,$$

за равенката на дадената права добиваме

$$\boxed{y = kx + m},$$

каде што k е коефициентот на правецот на дадената права, а m е отсечокот на $y-$оската. Добиената равенка се нерекува **експлицитен облик на равенка на права**, а за правата велиме дека е зададена во **експлицитен облик**.

Задача 2. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M(2,-3)$ и $N(5,6)$.

Дадените точки имаат различни апсциси и ординати, па според тоа бараната равенка на права има облик $y = kx + m,$ каде што k е аглoвиот коефициент на правата, а m отсечокот на $y-$оската. Според условот на задачата, точките $M(2,-3)$ и $N(5,6)$ се точки од правата, па нивните координати ја задоволуваат равенката $y = kx + m.$ На тој начин доаѓаме до системот

$$\begin{cases} -3 = 2k + m \\ 6 = 5k + m \end{cases}$$

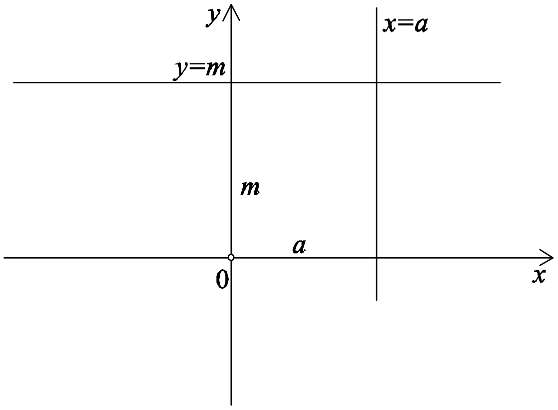
чиишто решенија се $k = 3$ и $m = -9.$ Според тоа, бараната равенка гласи $y = 3x - 9.$ ♦

Имајќи го предвид геометриското значење на агловиот коефициент и отсечокот на ординатната оска во експлицитниот облик на равенка на права може да заклучиме дека:

а) две прави имаат еднакви аглови коефициенти ако и само ако се паралелни;

б) две прави имаат еднакви отсечоци на ординатните оски ако и само ако ја сечат ординатната оска во една иста точка;

✓ правата е паралелна со $x-$оската или се совпаѓа со $x-$оската (цртеж 3). Тогаш сите точки од правата се на еднакво растојание од $x-$оската.



Цртеж 3

Бидејќи растојанието од $x-$оската на една точка, всушност, е нејзината ордината, може да заклучиме дека сите точки од дадената права имаат меѓусебно еднакви ординати. Ако тоа растојание го означиме со m, за равенката на правата добиваме:

$$\boxed{y = m}$$

Оваа положба на правата може да се третира како специјален случај на претходниот. Имено, во овој случај правата зафаќа агол $\alpha = 2k\pi,\ \ k = 0,1,2,...$ со позитивната насока на $x-$оската, па според тоа агловиот коефициент $k = 0$. Специјално, равенката на $x-$оската е $y = 0$;

✓ правата е паралелна со $y-$оската или се совпаѓа со $y-$оската (црт. 3). Тогаш сите точки од правата се на еднакво растојание од $y-$оската. Бидејќи растојанието од $y-$оската на една точка, всушност, е нејзината ордината, може да заклучиме дека сите точки од дадената права имаат меѓусебно еднакви ординати. Ако тоа растојание го означиме со a, за равенката на правата добиваме

$$\boxed{x = a}$$

Специјално $y-$оската е зададена со равенката $x = 0$.

Задача 3. Каква е положбата на правите $x = 2$ и $y = 3$ во координатната рамнина?

Правата $x = 2$ е паралелна на $y-$оската и секоја нејзина точка е на растојание од 2 единици од неа, додека правата $y = 3$ е паралелна на $x-$оската и секоја нејзина точка е на растојание од 3 единици од неа.♦

Од сето досега кажно следува дека равенката на една права во координатната рамнината е равенка од прв степен по променливите x и y.

Задачи за самостојна работа

1. Провери дали точките $M(-1,1)$, $N(2,-3)$ и $P(2,2)$ се точки од правата $y=-x+4$.

2. Најди ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол

а) $\alpha=\frac{\pi}{4}$ б) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ в) $\alpha=\pi$.

3. Најди ги агловиот коефициент и отсечокот на $y-$оската на правата зададена со:

а) $y=2x-3$ б) $y=-x+3$ в) $y=-2$ г) $y=\sqrt{3}x$.

4. Запиши ја равенката на правата која со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha=\frac{\pi}{3}$ и отсечокот на ординатната оска и е еднаков на $-\frac{1}{2}$.

5. Запиши ја равенката на правата што минува низ точката $A(-3,2)$ и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha=135^0$.

6. Најди ги агловиот коефициент и отсечокот на ординатната оска што го отсекува правата што минува низ точките $A(2,-1)$ и $B(-3,5)$.

7. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M(2,-8)$ и $N(-1,7)$.

8. Најди ги равенките на правите на кои лежат страните на квадратот чиишто дијагонали лежат на координатните оски, ако должината на неговата страна е 4 единици.

3.2.2. Општ облик на равенка на права

Во претходното поглавје за равенка на права во координатната рамнина добивме равенка од прв степен по променливите x и y. Во ова поглавје ќе испитаме што претставува општа равенка од прв степен со две променливи x и y, односно равенка од обликот:

$$Ax+By+C=0. \qquad (1)$$

Природно е да претпоставуваме дека $A\neq 0$ или $B\neq 0$. Навистина, ако $A=B=0$, тогаш дадената равенката се сведува на равенката $C=0$. Во тој случај, ако $C\neq 0$ не постојат точки во рамнината кои ја задоволуваат равенката, додека, ако $C=0$, сите точки во рамнината ја задоволуваат равенката.

✓Ако $A=0$, тогаш $B\neq 0$, па равенката (1) е еквивалентна на равенката $y=-\frac{C}{B}$. Како што знаеме, геометриското место на точки во рамнината коишто ја задоволуваат последната равенка е права паралелна со $x-$оската и минува низ точката $M\left(0,-\frac{C}{B}\right)$.

✓Ако $B=0$, тогаш $A\neq 0$, па равенката (1) е еквивалентна на равенката $x=-\frac{C}{A}$. Геометриското место на точки во рамнината кои ја задоволуваат последната равенка е права која е паралелна со $x-$оската и минува низ точката $N\left(-\frac{C}{A},0\right)$.

✓Ако $A\neq 0$ и $B\neq 0$, тогаш равенката (1) е еквивалентна на равенката $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ којашто е равенка на права во експлицитен облик со аглов коефициент $k=-\frac{A}{B}$ и отсечок на $y-$оската $m=-\frac{C}{B}$.

Од направената дискусија може да заклучиме дека равенката од облик

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

е равенка на права, наречена **општ облик на равенка на права**.

Задача 1. Доведи ја во општ облик равенката на правата

$$y=-\frac{1}{2}x+3.$$

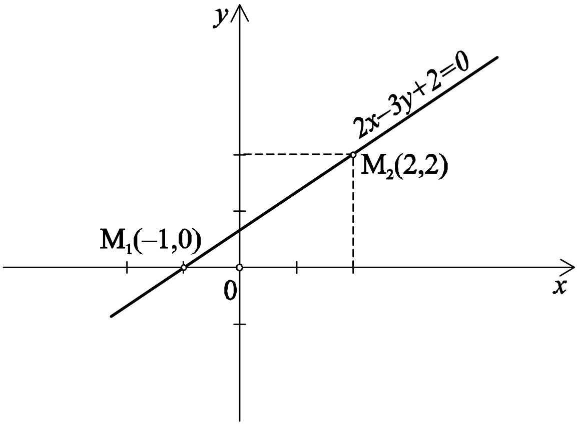
Дадената равенка е еквивалентна на равенката $\frac{1}{2}x+y-3=0,$ односно со равенката $x+2y-6=0.$

Задача 2. Дадена е равенката на права $3x+3y-5=0.$ Најди ги аголот што го зафаќа дадената права со позитивната насока на $x-$оската и отсечокот на $y-$оската.

Ако дадената равенка ја решиме според y ја добиваме равенката $y=-x+\frac{5}{3}$, која е еквивалентна на дадената, односно претставува равенка на една иста права во рамнината. Од $k=\operatorname{tg}\alpha=-1$ следува дека $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ и $m=\frac{5}{3}$. ♦

Задача 3. Конструирај ја правата зададена со равенката

$$2x-3y+2=0.$$



Цртеж 1

За да ја решиме поставената задача, доволно е да конструираме две точки од правата а потоа низ нив да ја конструираме правата (цртеж 1). Избираме две произволни вредности за x, а потоа ги пресметуваме соодветните вредности за y. Во овој случај згодно е една избрана вредност да биде, на пример, $x_1 = 2$, бидејќи во тој случај добиваме целобројна вредност за y, $y_1 = 2$. Слично, можеме да избереме вредност за x, $x_2 = -1$, од каде добиваме дека $y_2 = 0$. Притоа, треба да водиме сметка разликата меѓу избраните вредности за x да биде доволно голема, така што добиените точки да се доволно раздалечени.♦

Задачи за самостојна работа

1. Доведи ги во општ облик следниве равенки на права:

а) $y = 2x - 3$ б) $y = -4$ в) $x = 3$.

2. Најди ги коефициентот на правецот и отсечокот на ординатната оска на правите:

а) $2x-y+3=0$ б) $5x+2y-3=0$ в) $3x+8y+16=0.$

3. Дадена е равенката на права $x+y-3=0.$ Најди ги аголот што го зафаќа дадената права со позитивната насока на $x-$оската и отсечокот на $y-$оската.

4. Конструирај ги правите зададени со равенките:

а) $y=3x+1$ б) $x=\sqrt{2}$ в) $y=\pi$

г) $y=2x+2$ д) $y=\frac{1}{3}x-2$ ѓ) $x=0{,}5y-1.$

5. Дали равенките $Ax+By+C=0$ и $\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0,$ каде што $\lambda\neq 0$ се равенки на една иста права во координатната рамнина.

6. Најди ги знаците на коефициентите A и B во равенката на правата $Ax+By+C=0,$ ако таа зафаќа остар агол со $x-$оската.

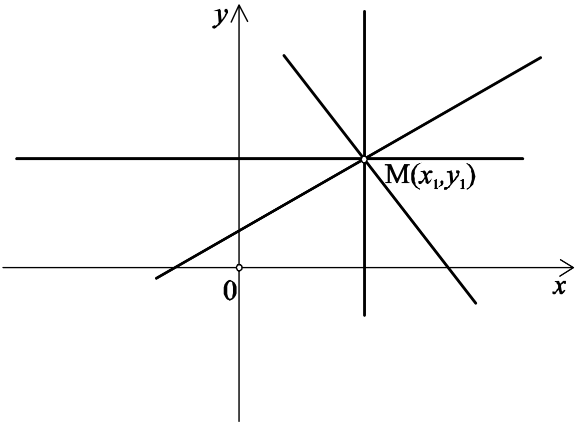
3.2.3. Равенка на сноп прави низ една точка

Нека $M(x_1,y_1)$ е фиксирана точка во координатната рамнина. Низ дадената точка минуваат безброј прави за кои велиме дека формираат **сноп прави** со центар во точката M (цртеж 1).

Секоја права низ точката M има општа равенка

$$Ax+By+C=0.$$

Бидејќи точката M лежи на правата, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството



Цртеж 1

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Ако добиеното равенство го одземеме од равенката на правата, добиваме дека

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0}$$

Секоја равенка од овој облик е равенка на права којашто минува низ точката M бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката. Со задавање на различни вредности на коефициентите A и B ги добиваме равенките на различните прави низ точката M.

Од сите прави во снопот прави низ M постои единствена права која е паралелна на y – оската. Нејзината равенка гласи

$$x = x_1.$$

Единствено таа права нема аглов коефициент и нема отсечок на $y-$оската, па според тоа оваа права не може да се зададе во експлицитен облик.

Секоја друга права низ точката M има експлицитна равенка

$$y = kx + n.$$

Бидејќи точката M лежи на правата, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството

$$y_1 = kx_1 + n.$$

Ако добиеното равенство го одземеме од равенката на правата, добиваме дека

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$$

Секоја равенка од овој облик е равенка на права која минува низ точката M бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката. Со задавање на различни вредности на коефициентот k, ги добиваме равенките на различните прави низ точката M, освен правата паралелна со $y-$оската.

Задача 1. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-3,2)$ и со позитивната насока на $x-$ оската зафаќа агол $\alpha = 135^0$.

Снопот на прави со центар во точката M има равенка

$$y - 2 = k(x + 3).$$

Бидејќи бараната права од снопот со $x-$оската зафаќа агол $\alpha=135^0$, таа има аглов коефициент $k=tg135^0=-1$. Тогаш бараната равенка на права гласи $y-2=-(x+3)$, или

$$x+y+1=0. \blacklozenge$$

Задача 2. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(4,6)$ и е паралелна со правата $3x+2y-25=0$.

Дадената равенка на права е во општ облик. Ако ја трансформираме во експлицитен облик, ја добиваме равенката на права

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{25}{2},$$

со аглов коефициент $k=-\frac{3}{2}$. Бидејќи бараната права и дадената права се паралелни тие зафаќаат еднакви агли со позитивната насока на $x-$оската, па нивните аглови коефициенти се еднакви. Според тоа, равенката на бараната права гласи $y-6=-\frac{3}{2}(x-4)$, односно,

$$3x+2y-24=0. \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја равенката на снопот прави што минуваат низ точките:

а) $M(2,-3)$ б) $M(-1,4)$.

2. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-2,1)$ и има аглов коефициент $k=-3$.

3. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(4,-7)$ и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha = 120^0$.

4. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(7,-3)$ и е паралелна со правата:

а) $y = -2x + 1$ б) $y = x + \frac{1}{2}$ в) $y = \frac{3}{2}x + 1.$

5. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(3,-1)$ и е паралелна на

а) апсцисната оска б) правата $y = 3x$ в) правата $y = x.$

6. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(1,-2)$ и е паралелна на правата

а) $x + y - 5 = 0$ б) $3x + 6y - 1 = 0$ в) $x - 3y = 0.$

7. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(2,1)$ и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол двапати поголем од аголот што го зафаќа правата $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$ со $x-$оската.

3.2.4. Равенка на права низ две точки

Користејќи ја равенката на сноп прави низ една точка, може лесно да ја најдеме равенката на права која минува низ две дадени точки.

Задача 1. Запиши ја равенката на правата која минува низ точките $M_1(-12,5)$ и $M_2(8,-3).$

Снопот прави со центар во M_1 има равенка

$$y-5=k(x+12).$$

Бидејќи бараната права минува низ точката M_2, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството $-3-5=k(8+12)$, од каде што добиваме дека $k=-\frac{2}{5}$. Според тоа, бараната равенка на права гласи $y-5=-\frac{2}{5}(x+12)$, или

$$2x+5y-1=0. \blacklozenge$$

Примерот што го разгледавме ни ја открива постапката за наоѓање равенка на права определена со две точки. Нека се дадени точките $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, (цртеж 1). Ќе ја најдеме равенката на правата што минува низ дадените точки, односно правата M_1M_2.

✓ Ако $x_1=x_2$, тогаш правата M_1M_2 е нормална на $y-$оската, па нејзината равенка во тој случај гласи

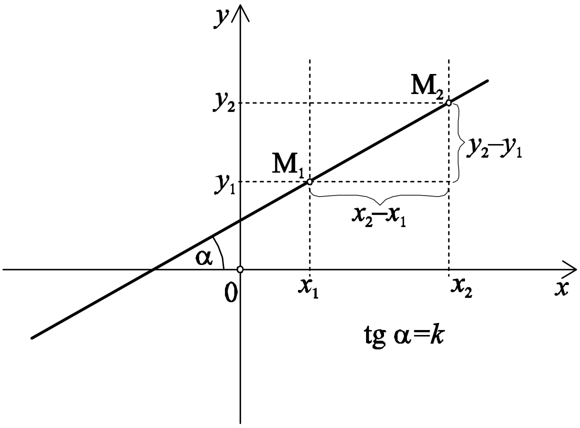
$$\boxed{x=x_1}$$

✓ Ако $x_1\neq x_2$, тогаш снопот прави со центар во M_1 има равенка

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Бидејќи правата M_1M_2 минува низ точката M_2 нејзините координати го задоволуваат равенството

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$



Цртеж 1

Тогаш агловиот коефициент на правата M_1M_2 изнесува

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Ако вредноста за k ја замениме во равенката на снопот прави, ја добиваме **равенката на права низ двете дадени точки**

$$\boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

Од равенката на права низ две дадени точки можеме да го изведеме **условот за колинеарност на три точки**. Имено, трета точка $M_3(x_3,y_3)$ лежи на правата определена со точките M_1 и M_2 ако и само ако нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата определена со двете дадени точки, односно равенката

$$\boxed{y_3-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_1)}$$

Задача 2. Точките $A(-1,-2)$, $B(1,3)$ и $C(-2,4)$ се темиња на даден триаголник. Најди ги равенките на медијаните на триаголникот.

Да ги означиме со L, M и N средините на страните BC, CA и AB соодветно. Тогаш за нивните координати добиваме

$$L\left(\frac{x_B+x_C}{2}=-\frac{1}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}=\frac{7}{2}\right),$$

$$M\left(\frac{x_C+x_A}{2}=-\frac{3}{2}, \frac{y_C+y_A}{2}=1\right) \text{ и}$$

$$N\left(\frac{x_A+x_B}{2}=0, \frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1}{2}\right).$$

Медијаната AL има аглов коефициент

$$k_{AL}=\frac{y_L-y_A}{x_L-x_A}=\frac{\frac{7}{2}-(-2)}{-\frac{1}{2}-(-1)}=11.$$

Тогаш нејзината равенка гласи $y-y_A=11(x-x_A)$ или

$$11x-y+9=0.$$

На сличен начин добиваме дека медијаната BM има равенка

$$4x-5y+11=0,$$

а медијаната CN има равенка

$$7x+4y-2=0.$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди го коефициентот на правецот на правата која минува низ точките:

а) $M_1(-1,4)$ и $M_2(4;-3)$ б) $M_1(0,-2)$ и $M_2(-1;3)$

в) $M_1(1,4)$ и $M_2(-2,4)$.

2. Запиши ја равенката на правата која минува низ точките $M_1(-1,4)$ и $M_2(4,-3)$.

3. Дали точките $M_1(0,3)$, $M_2(2,6)$ и $M_3(-1,-3)$ се колинеарни?

4. Запиши ја равенката на правата која минува низ координатниот почеток и тежиштето на триаголникот ABC, ако $A(2,-1)$, $B(4,5)$ и $C(-3,2)$.

5. Точките $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ и $C(0,4)$ се темиња на даден триаголник. Најди ги равенките на правите, од кои секоје минува низ едно теме и е паралелна на спротивната страна.

6. Точките $A(6,-7)$, $B(2,11)$ и $C(-3,13)$ се темиња на даден триаголник. Најди ги равенките на медијаните на триаголникот.

7. Дијагоналите на еден ромб лежат на координатните оски, а неговите должини се 6 и 8 единици. Најди ги равенките на правите на кои лежат страните на ромбот.

8. Средините на страните на еден триаголник се $L(-1,-2)$, $M(3,-1)$ и $N(0,4)$. Запиши ги равенките на правите на кои лежат неговите страни.

9. Дадени се две темиња $A(-3,-1)$, $B(2,2)$ на паралелограмот $ABCD$ и пресечната точка на неговите дијагонали $Q(3,0)$. Да се определат равенките на страните на паралелограмот.

3.2.5. Сегментен облик на равенка на права

Како што веќе видовме, равенката

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

претставува равенка на права во координатната рамнина. Притоа, правата минува низ координатниот почеток ако и само ако $C = 0$. Коефициентот $A = 0$ ако и само ако правата е паралелна на $x-$оската, додека коефициентот $B = 0$ ако и само ако правата е паралелна на $y-$оската.

Претпоставуваме дека дадената права не минува низ координатниот почеток и не е паралелна со ниту една координатна оска. Тогаш за коефициентите од нејзината равенка важи: $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$. Ако равенката (1) ја помножиме со бројот $-\frac{1}{C}$, таа го добива обликот

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$$

или

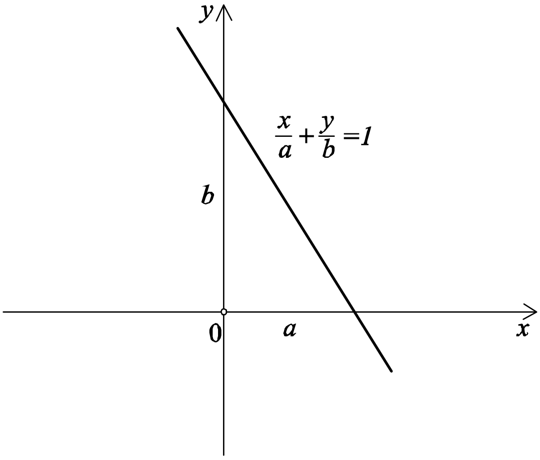
$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Ако ставиме $a=-\frac{C}{A}$ и $b=-\frac{C}{B}$, тогаш равенката го добива облик

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \qquad (2)$$

наречен **сегментен облик на равенка на права**.

Да го испитаме геометриското значење на параметрите a и b. Ако во равенката (2) ставиме $y=0,$ а потоа $x=0$, ги добиваме пресечните точки $P(a,0)$ и $Q(0,b)$ на правата со $x-$оската, односно $y-$оската. Според тоа броевите a и b по апсолутна вредност се еднакви на должините на отсечките што ги отсекува правата од $x-$оската и $y-$оската, соодветно. Нив ги нарекуваме **отсечоци** или **сегменти** на оските (цртеж 1).



Цртеж 1

Задача 1. Запиши ги во сегментен облик следниве равенки на права:

а) $x-3y-6=0$ б) $y=3x-4$

а потоа најди ги должините на сегментите на секоја од координатните оски.

а) **I начин**: дадената равенка на права е равенка од општ облик. Ако равенката ја помножиме со

$$-\frac{1}{C}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6},$$

ја добиваме равенката $\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1$ која е еквивалентна со равенката

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1.$$

Последната равенка е запишана во сегментен облик и е еквивалентна на дадената.

II начин: во дадената равенка $A=1,\ B=-3$ и $C=-6.$ Тогаш

$$a=-\frac{C}{A}-\frac{-6}{1}=6 \text{ и } b=-\frac{C}{B}=-\frac{-6}{-3}=-2,$$

од каде што го добиваме сегментниот облик на равенката

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1.$$

Должината на сегментот на $x-$оската изнесува 6 единици, додека должината на сегментот на $y-$оската изнесува 2 единици.

б) Дадената равенка ја доведуваме во општ облик $2x-y-4=0,$ а потоа постапувајќи како во претходниот случај, го добиваме нејзиниот сегментен облик

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1.$$

Должината на сегментот на $x-$оската изнесува 2 единици, додека должината на сегментот на $y-$оската изнесува 4 единици.♦

Задача 2. Пресметај ја плоштината на триаголникот заграден со координатните оски и правата $2x-5y-10=0$.

Бидејќи координатните оски се сечат под прав агол, бараниот триаголник е правоаголен со теме при правиот агол во координатниот почеток, катетите лежат на координатните оски, а хипотенузата на дадената права. Знаеме дека плоштината на правоаголен триаголник е еднаква на полупроизводот од должините на неговите катети, а тоа се токму должините на сегментите отсечени на координатните оски. Ако равенката на правата ја трансформираме до сегментен облик, ја добиваме равенката

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1.$$

Според тоа, должините на сегментите се 5 единици и 2единици од каде што следува дека бараниот правоаголен триаголник има катети 5 единици и 2 единици. Тогаш неговата плоштина изнесува

$$\frac{5\cdot 2}{2}=5$$ квадратни единици.♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ги во сегментен облик следниве равенки на права:

а) $3x-2y+12=0$ б) $y=-x+1$ в) $y=4x-2$

а потоа најди ги должините на сегментите на секоја од координатните оски.

2. Најди ја вредноста на параметарот k за која збирот на сегментите на координатните оски што ги отсекува правата $2x+5ky-3=0$ е еднаков на 10.

3. Најди ја вредноста на параметарот k за која производот на сегментите на координатните оски што ги отсекува правата $6x+5y-12k=0$ е еднаков на $\frac{5}{6}$.

4. Пресметај ја плоштината на триаголникот заграден со координатните оски и правата $x+2y-6=0$.

5. Низ точката $M(4,-3)$ повлечи права која со координатните оски заградува триаголник со плоштина еднаква на 3 квадратни единици.

6. Низ точката $M(3,2)$ повлечи права која отсекува еднакви по должина сегменти од координатните оски.

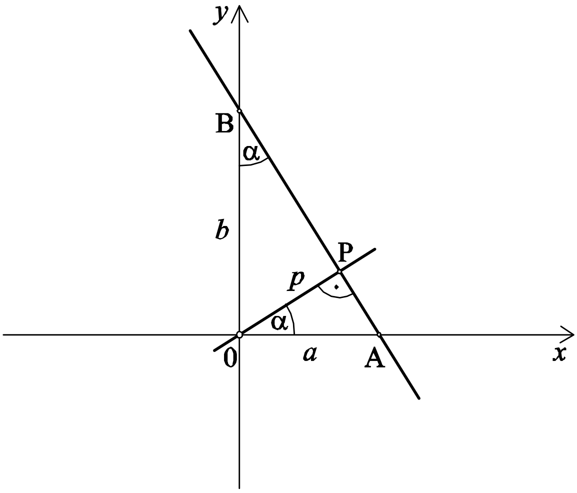
7. Спореди ги сегментите a и b што на координатните оски ги отсекува правата $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ која со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол

а) $\frac{\pi}{4}$ б) $\frac{3\pi}{4}$ в) $\frac{\pi}{3}$.

3.2.6. Нормален облик на равенка на права

Во ова поглавје ќе изучиме уште еден начин на задавање права во координатната рамнина која не минува низ координатниот почеток и не е паралелна со ниедна координатна оска.

Од координатниот почеток спуштаме нормала на дадената права и со p ја означуваме должината на отсечката OP, а со α аголот што го зафаќа таа нормала со $x-$оската (цртеж 1).



Цртеж 1

Од правоаголните триаголници OAP и BOP добиваме дека

$$a\cos\alpha = p \text{ и } b\sin\alpha = p.$$

Ако во сегментниот облик на равенката на правата

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

замениме

$$a = \frac{p}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad b = \frac{p}{\sin\alpha},$$

по средувањето равенката добива облик

$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0}$$

наречен **нормален облик на равенка на права**.

Аголот α е аголот што го зафаќа нормалата на правата со позитивната насока на $x-$оската, а p е растојанието на правата од координатниот почеток. Ако аголот α е константен, тогаш за различни вредности на p добиваме фамилија паралелни прави кои се нормални на правата која зафаќа агол α со позитивната насока на $x-$оската.

Се поставува прашањето како да го определиме нормалниот облик на равенка на права ако правата е зададена со равенка во општ облик

$$Ax + By + C = 0.$$

Дадената равенката ќе ја помножиме со реален број $M \neq 0,$ наречен **нормирачки множител** за кој важи:

$$M \cdot A = \cos\alpha \quad \text{и} \quad M \cdot B = \sin\alpha.$$

Ако последните две равенства ги квадрираме, а потоа ги собереме, добиваме дека

$$(M \cdot A)^2 + (M \cdot B)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

од каде што следува дека $M^2(A^2 + B)^2 = 1,$ односно

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знакот на нормирачкиот множител M го определуваме од условот $M \cdot C = -p.$ Последното равенство ќе го запишеме во облик $p = -M \cdot C.$ Бидејќи p е позитивно, знакот на M треба да го избираме така што изразот $-M \cdot C$ да биде позитивен. Според тоа, знакот на нормирачкиот множител M треба да биде спротивен од знакот на $C.$ На тој начин го добиваме нормалниот облик на равенката на права:

$$\boxed{\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0}$$

Задача 1. Запиши ја во нормален облик равенката на правата $3x - 4y + 10 = 0.$

Дадената равенка на права е равенка од општ облик со коефициенти $A = 3,\ B = -4$ и $C = 10.$ Бидејќи коефициентот C е позитивен, равенката ја множиме со бројот

$$M = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Тогаш нормалниот облик на равенката на дадената права гласи

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0. \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Која од следниве равенки на права претставува равенка на права во нормален облик:

а) $3x-2y+7=0$ б) $x+\frac{1}{2}y-3=0$

в) $\frac{2}{3}x-\frac{4}{7}y-1=0$ г) $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-3=0$

д) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-2=0$ ѓ) $x-5=0$?

2. Најди го нормирачкиот множител на равенките:

а) $2x-y-3=0$ б) $x+10y-33=0$ в) $x+4y+10=0$.

3. Запиши ги во нормален облик следниве равенки на права:

а) $4x-3y+10=0$ б) $5x+12y-39=0$

в) $6x+8y-15=0$ г) $x-2y+3=0$

д) $y-\sqrt{3}x=4$ ѓ) $x\cos 10^0+y\sin 10^0+4=0$.

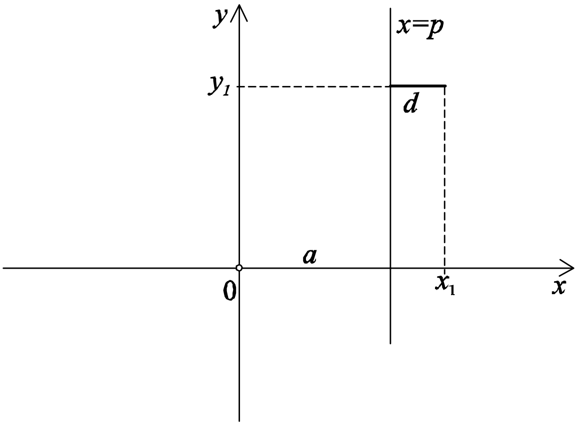
4. Запиши ги во нормален облик следниве равенки на права:

а) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ б) $\frac{x}{5}=y-2$ в) $y=x-3$.

3.2.7. Растојание од точка до права

Наша следна задача е да научиме да пресметуваме растојание од дадена точка до дадена права во координатната рамнина. Како што знаеме, растојанието од точка до права е еднакво на должината на нормалата спуштена од точката кон правата.

✓ Ако правата е нормална на $x-$оската, тогаш растојанието d од точката $M(x_1, y_1)$ до правата $x=p$ изнесува $d=|x_1-p|$ (цртеж 1).



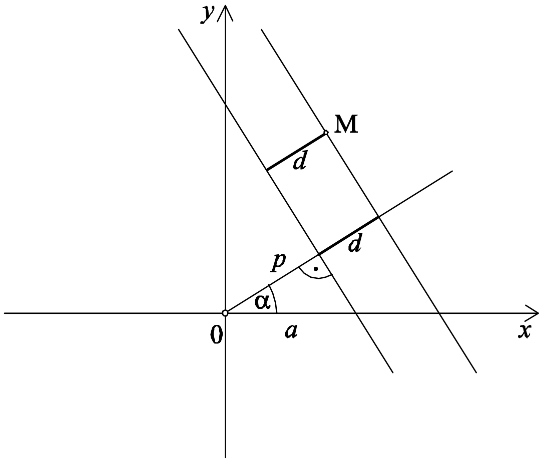
Цртеж 1

✓ Нека правата е во општа положба (цртеж 2). Низ дадената точка $M(x_1, y_1)$ поставуваме права паралелна на дадената. Тогаш растојанието од точката M до правата ќе биде еднакво на растојанието меѓу паралелните прави.

Ако равенката на дадената права ја запишеме во нормален облик

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

тогаш равенката на правата паралелна на неа гласи



Цртеж 2

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0,$$

каде што p_1 се определува од условот правата да минува низ точката $M(x_1, y_1)$, односно

$$p_1 = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha.$$

Растојанието од точката $M(x_1, y_1)$ до правата е еднакво на растојанието меѓу паралелните прави, односно

$$d = |p_1 - p| = |x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha - p| \text{ или}$$

$$\boxed{d = |x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha - p|}$$

Од последното равенство непосредно следува дека растојанието од дадената точка до правата се добива на тој начин што во левата страна од нормалната равенка на правата, запишана во облик

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

ги заменуваме координатите на точката, а потоа се зема апсолутна вредност од добиениот број. Притоа, знакот на изразот го има следново геометриско значење:

- ✓ ако растојанието од точката до правата пред земањето на апсолтната вредност е позитивен број, тогаш точката и координатниот почеток се на различни страни од правата;
- ✓ ако растојанието од точката до правата пред земањето на апсолутната вредност е негативен број, тогаш точката и координатниот почеток се на една иста страна од правата.

Ако равенката на правата е зададена во општ облик

$$Ax + By + C = 0,$$

тогаш равенката треба да ја трансформираме во нормален облик, односно ќе ја помножиме со нормирачкиот множител

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знакот на нормирачкиот множител се избира да биде спротивен од знакот на коефициентот C. Тогаш растојанието од дадената точка до правата се добива на тој начин што во левата страна од нормалната равенка на правата, запишана во облик

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

ги заменуваме координатите на точката, а потоа се зема апсолутна вредност од добиениот број. Конечно добиваме:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Задача 1. Најди ги растојанијата од точките $A(2,1)$ и $B(-2,4)$ до правата $4x - 3y + 15 = 0.$

За да го најдеме растојанието од дадената точка до правата, најнапред треба да ја трансформираме равенката во нормален облик. За таа цел равенката ја множиме со нормирачкиот множител

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm 5}.$$

Знакот на нормирачкиот множител се избира да биде спротивен од знакот на коефициентот $C,$ па во овој случај $M = -\frac{1}{5}.$ Тогаш нормалната равенка на правата гласи

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0.$$

Ако сега ги замениме кооринатите на дадената точка, добиваме

$$d = \left| -\frac{4}{5} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 1 - 3 \right| = |-4| = 4.$$

Бидејќи знакот на d пред земањето на апсолутната вредност беше негативен, точката A и координатниот почеток се на иста страна од правата.

Аналогно, за точката B добиваме дека

$$d = \left| -\frac{4}{5} \cdot (-2) + \frac{3}{5} \cdot 4 - 3 \right| = |1| = 1.$$

Во овој случај знакот на d пред земањето на апсолутната вредност беше позитивен, па точката B и координатниот почеток се на различни страни од правата.♦

Задача 2. Кои точки од рамнината се на растојание $d=\sqrt{2}$ од правата $x-y+1=0$.

Точката $M(x,y)$ е на растојание $d=\sqrt{2}$ од правата $x-y+1=0$, ако $\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, односно $|x-y+1|=2$ од каде што следува дека $x-y+1=-2$ или $x-y+1=2$. Според тоа, на растојание $\sqrt{2}$ од правата $x-y+1=0$ се точките од правите

$y=x-1$ и $y=x+3$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди го растојанието од точката $A(-5,-1)$ до правата $4x+3y+30=0$. Дали дадената точка и координатниот почеток се на иста страна од правата?

2. Најди го растојанието на правата $9x-12y+10=0$ од координатниот почеток.

3. Определи која од точките $M(-3,1)$ и $N(5,4)$ е на помало растојание од правата $x-2y-5=0$. Покажи дека дадената права не ја сече отсечката MN.

4. Најди ги висините на триаголникот ABC, ако $A(3,5)$, $B(7,-4)$ и $C(-11,-13)$.

5. Најди ја равенката на правата која е на растојание $d = 5$ од точката $C(4,3)$, и отсекува еднакви сегменти на координатните оски.

6. Од сите прави паралелни на правата $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$, најди ја онаа која е на растојание $d = 5$ од точката $A(2,3)$.

7. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $A(-2,1)$ и е на растојание $d = 4$ од точката $B(3,1)$.

8. Нека точките $A(1,2)$, $B(3,7)$ и $C(5,-13)$, се темиња на еден триаголник. Најди ја должината на нормалата спуштена од темето B на тежишната линија спуштена од темето A.

3.2.8. Заемна положба на две прави

Како што знаеме, две прави во рамнина може да се сечат, да се паралелни или да се совпаѓаат. Нека во координатната рамнина се дадени две прави со своите општи равенки:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Ќе ја испитаме зависноста меѓу коефициентите на дадените равенки во секој од наведените три случаи.

✓ Дадените прави се сечат, односно имаат една заедничка точка ако и само ако системот

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

има единствено решение.

Нека $(x_0 y_0)$ е единственото решение на дадениот систем. Ако правата равенка од системот (1) ја помножиме со B_2, а втората со $-B_1$ и потоа ги собереме, добиваме:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x_0 + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0 \tag{2}$$

На сличен начин, ако првата равенка од системот (1) ја помножиме со B_2, а втората со $-B_1$ и потоа ги собереме, добиваме:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y_0 + (A_1C_2 - A_2C_1) = 0 \tag{3}$$

Доволен услов за единственост на решението (x_0, y_0), односно доволен услов за да се сечат дадените прави е нејзините коефициенти да ја задоволуваат релацијата $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, или да важи условот

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}},$$

при што подразбираме дека ако некој од именителите е еднаков на нула, тогаш и соодветниот броител е еднаков на нула. Во тој случај решението на дадениот систем гласи:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1},$$

$$y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \tag{4}$$

Добиените броевите се координати на пресечната точка на дадените прави. Навистина, ако добиените вредности за x и y од изразот (4) ги замениме во (1), ќе заклучиме дека равенките (1) преминуваат во идентитети.

Задача 1. Докажи дека правите $2x-y-5=0$ и $x+3y+1=0$ се сечат.

По елиминацијата на y, добиваме $7x-14=0$, од каде што следува дека $x=2$. Тогаш за y од првата равенка добиваме дека $y=-1$. ♦

✓ За да покажеме дека условот $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ е потребен за да се сечат дадените прави, ќе го разгледаме случајот кога

$$A_1B_2-A_2B_1=0.$$

Ако во тој случај дадените прави имаат уште една зедничка точка (x_1,y_1) од равенствата (2) и (3), следува:

$$C_1B_2-C_2B_1=0 \text{ и } A_1C_2-A_2C_1=0.$$

Од последните три равенства следува егзистенција на реален број λ таков што

$$A_2=\lambda A_1,\ B_2=\lambda B_1 \text{ и } C_2=\lambda C_1.$$

Навистина, бидејќи еден од броевите A_1 или B_1 е различен од нула, без губење на општоста може да претпоставиме дека $B_1\neq 0.$ Ако ставиме

$$\lambda=\frac{B_2}{B_1}$$

од равенството $A_1B_2-A_2B_1=0$ следува дека $A_2=\lambda A_1$, а од равенството $C_1B_2-C_2B_1=0$ следува дека $C_2=\lambda C_1$. Според тоа, равенката на едната права се добива од равенката на другата права помножена со реален број $\lambda\neq 0.$ Тоа значи дека дадените прави се совпаѓаат. Условот за совпаѓање на две прави вообичаено се запишува како

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}},$$

при што подразбираме дека ако некој од именителите е еднаков на нула, тогаш и соодветниот броител е еднаков на нула.

✓ Ако $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ и еден од броевите $C_1B_2 - C_2B_1$ и $A_1C_2 - A_2C_1$ е различен од нула, тогаш системот (1) нема решение, што значи правите се паралелни. Според тоа, потребен и доволен услов дадените прави да бидат паралелни е условот

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}}.$$

Задача 2. Докажи дека правите $3x-2y+5=0$ и $4y-6x-1=0$ се паралелни.

Од $\frac{3}{-6}=\frac{-2}{4}\neq\frac{5}{1}$, следува дека правите се паралелни.♦

Задачи за самостојна работа

1. Востанови кои од следниве прави се сечат, кои се паралелни, а кои се совпааѓаат. Во случај кога правите се сечат, најди ја пресечната точка.

а) $3x-2y+1=0$ и $2x+5y-12=0$

б) $3x+y-17=0$ и $6x+2y+12=0$

в) $2x-y+3=0$ и $6x-3y+9=0.$

2. Најди ги вредностите на коефициентите A и B во равенките на правите $Ax-4y-2=0$ и $2x-By+1-B=0,$ при кои правите се совпаѓаат.

3. Најди ги пресечните точки на координатните оски со правите:

а) $x+10y-5=0$ б) $2x-3y+12=0.$

4. Дадени се две прави со своите експлицитни равенки $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2.$ Најди го потребниот и доволен услов за дадените прави:

а) да се сечат б) да се паралелни

в) да се совпаднати.

5. Најди ја равенката на правата што минува низ точката $A(-2,3)$ и е паралелна на правата $5x-6y+7=0.$

6. Равенките на правите на кои лежат страните на еден триаголник се $9x-2y-3=0,$ $3x-7y-1=0$ и $6x+5y+17=0.$ Најди ги координатите на неговите врвови.

7. Најди ги равенките на правите кои минуваат низ врвовите на триаголникот ABC и се паралелни на спротивните страни, ако $A(-5,2),$ $B(2,-3)$ и $C(-1,4).$

8. Равенките на две од страните на еден паралелограм се $x-y+1=0$ и $2x-y=0,$ а пресечната точка на дијагоналите е $S(-1,3).$ Најди ги должините на неговите страни.

3.2.9. Агол меѓу две прави.
Услов за нормалност на две прави

Во ова поглавје ќе научиме да пресметуваме агол меѓу две прави. Аголот меѓу две дадени прави наједноставно се пресметува ако правите се зададени со своите експлицитни равенки.

Нека се дадени две прави со своите експлицитни равенки:

$$y = k_1 x + m_1 \quad \text{и} \quad y = k_2 x + m_2.$$

Бидејќи аголот φ под кој се сечат правите не се менува при транслација на правите, аголот што го зафаќаат дадените прави е еднаков на аголот што го зафаќаат правите:

$$y = k_1 x \quad \text{и} \quad y = k_2 x.$$

Тогаш $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Ако на двете страни од равенството примениме тангенс добиваме

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_1 \mathrm{tg}\alpha_2},$$

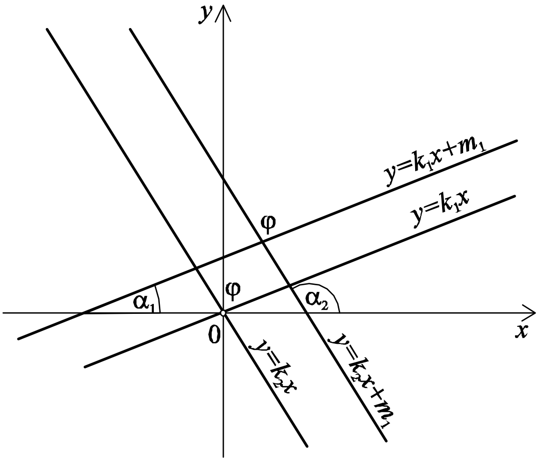
или ако знаеме дека

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = k_1 \ \text{и} \ \mathrm{tg}\alpha_2 = k_2$$

добиваме дека

$$\boxed{\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

Аголот што се добива од оваа формула е аголот што се добива со ротација на првата права во позитивна насока околу пресечната точка додека не се совпадне со втората права (цртеж 1).



Цртеж 1

Ако едната од двете прави е паралелна со $y-$оската, тогаш аголот меѓу нив е $\frac{\pi}{2}-\alpha,$ каде што α е аголот што го зафаќа другата права со позитивната насока на $x-$оската.

Задача 1. Најди го аголот меѓу правите зададени со равенките $y=2x-3$ и $3x+y-2=0.$

За првата права коефициентот на правецот $k_1=2,$ а за втората права $k_2=-3.$ Според тоа,

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{-3-2}{1+2\cdot(-3)}=1,$$

од каде што следува дека $\varphi=\frac{\pi}{4}.$ ♦

Ако правите се нормални, тогаш имаме дека

$$k_2=\mathrm{tg}\alpha_2=\mathrm{tg}\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{ctg}\alpha_1=-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha_1},$$

од каде што следува дека $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Според тоа, **условот за нормалност на две прави** гласи

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

Ако едната од двете прави е паралелна со $y-$оската, тогаш тие се нормални ако и само ако другата права е паралелна со $x-$оската.

Задача 2. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $M(-1,1)$ и е нормална на правата чија што равенка гласи $3x - y + 2 = 0$.

Равенката на снопот прави низ точката M гласи

$$y + 1 = k(x - 1).$$

Треба да ја определиме равенката на онаа права од снопот која е нормалма на дадената права, односно на правата $y = 3x - 2$.

Од условот за нормалност на две прави, добиваме дека $k = -\frac{1}{3}$.

Според тоа равенката на бараната права гласи

$$x + 3y + 2 = 0. \blacklozenge$$

Ако правите се зададени со своите општи равенки:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

тогаш изразувајќи ги коефициентите k_1 и k_2 преку коефициентите A_1, B_1, A_2 и B_2 имаме:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \text{ и } k_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

од каде што за аголот меѓу две прави добиваме дека

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}} \text{ за } A_1A_2 + B_1B_2 \neq 0 \text{ и}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}} \text{ за } A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Ако правите се зададени со своите општи равенки, условот за нормалност ќе гласи:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$$

Задача 3. Равенките на правите на кои лежат страните BC, CA и AB на триаголникот ABC се $3x - 5y + 15 = 0,$ $x + 3y + 5 = 0$ и $5x + y - 3 = 0,$ соодветно. Најди ги равенките на правите на кои лежат висините на триголникот.

Системот од равенки на страните AB и AC

$$\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

има решение $x = 1$ и $y = -2.$ Според тоа темето A има координати $A(1,-2).$ Слично добиваме дека $B(0,3)$ и $C(-5,0).$

Висината AA_1 на триаголникот спуштена од темето $A(1,-2)$ кон страната BC има равенка $y + 2 = k(x - 1).$ Правата на која лежи страната BC има аглов коефициент $k_{BC} = \frac{3}{5}.$ Таа е нормална на правата на која лежи висината $AA_1.$ Според тоа, $k = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{5}{3}.$

Тогаш равенката на висината AA_1 гласи $y+2=-\frac{5}{3}(x-1)$, односно $5x+3y+1=0.$

На сличен начин ги добиваме равенките на правите на кои лежат висините спуштени од темињата B и C. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди го аголот меѓу правите $2x-y+7=0$ и $3x+y+10=0.$

2. Најди ја правата која минува низ точката $A(-2,8)$ и зафаќа агол $\varphi=\frac{\pi}{4}$ со правата $y=3x-5.$

3. Најди ја равенката на сликата на правата $y=x+5$ при ротација околу точката $A(0,5)$ за агол $\alpha=60^0.$

4. Кои од следниве прави се заемно нормални:

а) $2x-3y=0$ и $3x+2y=0$ б) $x-2=0$ и $y+5=0$

в) $y=kx+b$ и $y=-kx$ г) $x-2y+1=0$ и $2x-y=0$

г) $5x-6y+7=0$ и $6x+5y-1=0;$ д) $x+y=2$ и $y=x+3?$

5. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $A(3,15)$ и е нормална на правата $3x-5y+8=0.$

6. Најди го агловиот коефициент на висините на триаголникот $ABC,$ ако $A(-2,1),$ $B(3,4)$ и $C(1,-2).$

7. Најди ја проекцијата на точката $A(-3,4)$ врз правата $3x-2y+8=0.$

3.3. Криви од втор ред

Крива од втор ред во рамнина се нарекува крива која во однос на избран правоаголен Декартов координатен систем е зададена со равенка од втор степен. Ова заглавје е посветено на проучување на некои карактеристични криви од втор ред во рамнина: кружница, елипса, хипербола и парабола.

3.3.1. Кружница

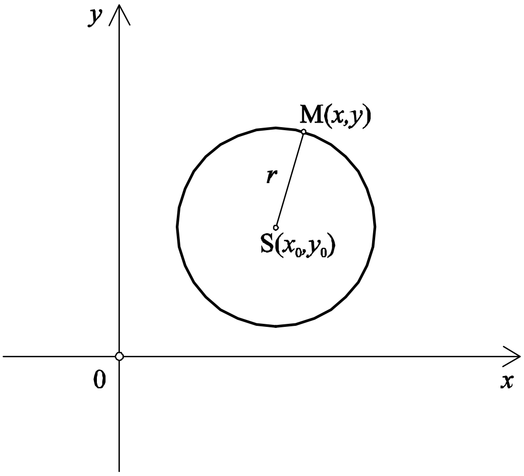
Дефиниција 1. Кружница е геометриското место на сите точки во рамнината кои се еднакво оддалечени од дадена точка S во рамнината.

Точката S се нарекува **центар на кружницата**. За произволна точка M од кружницата, отсечката SM се нарекува **полупречник** или **радиус на кружницата**. Вообичаено, и должината на отсечката SM се нарекува **полупречник** или **радиус на кружницата**.

Со помош на дефиницијата за кружница може да ја најдеме нејзината равенка во однос на избрана координатна рамнина xOy (цртеж 1).

Ако $M(x,y)$ е произволна точка од кружницата со центар во точката $S(x_0,y_0)$, тогаш $\overline{SM}=r$. Според формулата за растојание меѓу две точки, добиваме дека

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r.$$



Цртеж 1

Добиената равенка може да ја запишеме во облик:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$$

која претставува **нормална равенка на кружница** со центар во точката $S(x_0,y_0)$ и радиус r.

Специјално, ако центарот на кружницата е во координатниот почеток, тогаш равенката добива облик

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

и се нарекува **централна равенка на кружница**.

Задача 1. Најди ја равенката на кружницата со центар во точката $S(5,4)$ и радиус $r=8$.

Бараната равенка гласи $(x-5)^2+(y-4)^2=64$. ♦

Ако равенката на кружница ја запишеме во развиен облик, ја добиваме равенката

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0{}^2+y_0{}^2-r^2=0$$

или

$$x^2+y^2+lx+my+n=0,$$

каде што $l=-2x_0$, $m=-2y_0$ и $n=x_0{}^2+y_0{}^2-r^2$, што претставува равенка од втор степен.

Се поставува прашањето во кој случај равенка од втор степен од обликот

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

е равенка на кружница? Заради равенката

$$l^2+m^2-4n=4x_0{}^2+4y_0{}^2-4n=4r^2,$$

заклучуваме дека:

✓ ако $l^2+m^2-4n>0$, тогаш $4r^2>0$, односно $r>0$, од каде што следува дека дадената равенка е равенка на кружница со центар во точката $S\left(-\frac{l}{2},-\frac{m}{2}\right)$ и радиус r;

✓ ако $l^2+m^2-4n=0$, тогаш $4r^2=0$, односно $r=0$, од каде следува дека дадената равенка е равенка на точка, $S\left(-\frac{l}{2},-\frac{m}{2}\right)$;

✓ ако $l^2+m^2-4n<0$, тогаш $4r^2<0$, односно $r<0$, од каде што следува дека равенката е равенка на имагинарна кружница и невозможно е нејзино претставување во рамнината.

Задача 2. Докажи дека равенката

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$$

е равенка на кружница, а потоа најди ги центарот и радиусот.

I начин: Во дадената равенка $l = -6,\ \ m = 10$ и $n = 18.$ Од неравенството

$$l^2 + m^2 - 4n = (-6)^2 + 10^2 - 4 \cdot 18 = 64 > 0$$

заклучуваме дека дадената равенка е равенка на кружница. Од условите $l = -2x_0,\ \ m = -2y_0$ и $n = x_0{}^2 + y_0{}^2 - r^2,$ добиваме дека $x_0 = 3,\ \ y_0 = -5$ и $r = 4,$ односно дадената равенка е равенка на кружница со центар во точката $S(-3,5)$ и радиус $r = 4.$

II начин: Дадената равенка ја трансформираме на тој начин што изразите $x^2 - 6x$ и $y^2 + 10y$ ги дополнуваме до полн квадрат. Тогаш равенката го добива обликот $(x-3)^2 + (y+5)^2 - 9 - 25 + 18 = 0,$ односно

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 16,$$

од каде што заклучуваме дека центар на дадената кружница е точката $S(3,-5),$ а нејзиниот радиус е $r = 4.$ ♦

Задача 3. Најди ја равенката на кружницата која минува низ точките $A(2,-2), B(7,3)$ и $C(6,0).$

Ако координатите на дадените точки ги замениме во равенката $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0,$ го добиваме системот

$$\begin{cases} 2l - 2m + n = -8 \\ 7l + 3m + n = -58 \\ 6l + n = -36 \end{cases}$$

чие што решение е $l = -4,\ m = -6$ и $n = -12.$ Бараната равенка на кружницата гласи $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0,$ односно

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25.\ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди ја равенката на кружницата со центар во точката $S(0,0)$ и радиус $r = 5.$

2. Запиши ги координатите на центарот и радиусот на кружницата зададена со равенката:

а) $x^2 + y^2 + 14x + 40 = 0$ б) $x^2 + y^2 + 12x - 16y + 64 = 0$

в) $x^2 + y^2 - 70x - 24y = 0$ г) $x^2 + y^2 + 60x + 60y = -900.$

3. Најди ја равенката на кружницата чиј центар е во точката $S(-3,-2)$ и минува низ координатниот почеток.

4. Запиши ја равенката на кружницата чиј дијаметар е отсечокот на правата $3x - 4y + 12 = 0$ меѓу координатните оски.

5. Најди ја равенката на кружницата која е концентрична со кружницата $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$ и минува низ точката $A(-3,4).$

6. Запиши ја равенката на кружницата која што минува низ точките:

а) $A(7,1),\ B(5,5),\ C(-2,4)$ б) $A(0,1),\ B(2,0),\ C(3,-1).$

7. Најди ја равенката на кружницата опишана околу триаголникот заграден со правите

$x+2y-3=0,\ \ 3x-y-2=0$ и $2x-3y-6=0.$

8. Запиши ја равенката на кружницата која минува низ точките $A(2,3)$ и $B(-4,-1),$ додека центарот лежи на правата $x-y-2=0.$

9. За кои вредности на параметарот λ равенката

а) $\lambda x^2+\lambda y^2-4\lambda x-6\lambda y-(2\lambda+1)=0$ претставува равенка на кружница?

б) $x^2+y^2+\lambda x+3\lambda y-7=0$ претставува равенка на кружница што минува низ точката $C(1,0)$?

3.3.2. Заемна положба на права и кружница

Заеднички точки на права и кружница

Нека се дадени кружница со својата равенка

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

и права со својата општа равенка

$$Ax+By+C=0.$$

Дадената права ја сече кружницата во две точки, во една точка или нема заеднички точки со кружницата во зависност од тоа дали системот

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\\ Ax+By+C=0\end{cases}$$

има две, едно или ниедно решение. Тогаш велиме дека **правата ја сече кружницата**, **правата ја допира кружницата** или **правата не ја сече кружницата**, соодветно.

Од елементарна геометрија ни е познато дека правата ја сече кружницата, ако растојанието од центарот на кружницата до правата е помало од радиусот на кружницата; правата ја допира кружницата ако растојанието од центарот на кружницата до правата е еднакво на радиусот на кружницата; и правата не ја сече кружницата, ако растојанието од центарот на кружницата до правата е поголемо од радиусот на кружницата. Користејќи ја формулата за растојание од точка до права, добиваме дека:

✓ правата ја сече кружницата во две точки, ако важи условот

$$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}<r,$$

✓ правата ја допира кружницата, ако важи важи условот

$$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=r,$$

✓ правата не ја сече кружницата, ако важи условот

$$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}>r.$$

Задача 1. Најди ги пресечните точки на кружницата зададена со равенката $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ со правата $x+y-5=0$.

Од условот

$$\frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} < 2$$

следува дека правата ја сече кружницата. Координатите на пресечните точки ги задоволуваат двете дадени равенки како равенката на правата така и равенката на кружницата. Според тоа, тие се решенија на системот

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}.$$

Заменувајќи $y = 5 - x$ во првата равенка ја добиваме квадратната равенка $x^2 - 4x + 3 = 0$ чии корени се $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Тогаш, за y од втората равенка, добиваме $y_1 = 4$ и $y_2 = 2$. Според тоа, дадената права ја сече кружницата во точките $(1,4)$ и $(3,2)$. ♦

Тангента на кружница

Права што допира дадена кружница се вика **тангента** на кружницата. Заедничката точка на правата и кружницата се вика **допирна точка**. Од условот за тангента со квадрирање, добиваме

$$(Ax_0 + By_0 + C)^2 = r^2(A^2 + B^2).$$

Ако правата е зададена во експлицитен облик ($A = -k,\ B = 1$ и $C = -m$) условот правата да биде тангента на кружницата добива облик

$$(-kx_0 + y_0 - m)^2 = r^2(1 + k^2).$$

Нека точката $T(x_1, y_1)$ е точка од кружницата

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

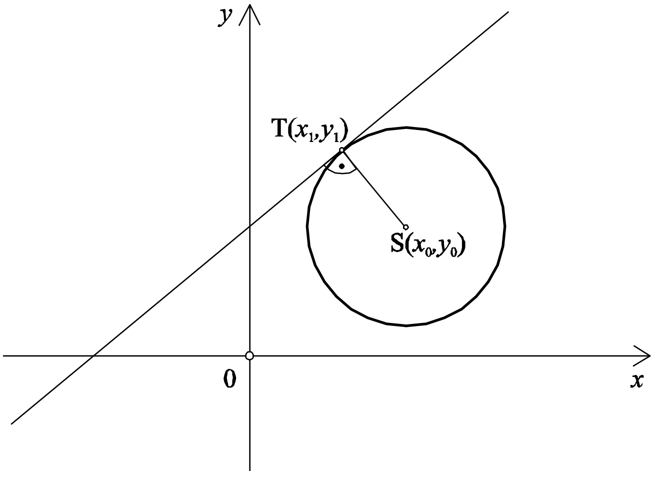
Да ја определиме равенката на тангентата на кружницата во дадената точка (цртеж 1). Претпоставуваме дека дадената точка не е пресек на кружницата со координатните оски. Равенката на произволна права која минува низ точката T гласи

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Бидејќи бараната права е тангента на кружницата во точката T, таа е нормална на правата ST. Коефициентот на правецот k' на правата ST е тангенс од аголот што го зафаќа радиусот со $x-$оската, односно

$$k' = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

каде што $x_1 - x_0 \neq 0,\ y_1 - y_0 \neq 0,$ поради претпоставката дека точката T не припаѓа на ниедна координатна оска.



Цртеж 1

Тогаш равенката на тангента гласи:

$$y-y_1=-\frac{x_1-x_0}{y_1-y_0}(x-x_1),$$

бидејќи $kk'=-1$. Ако равенката ја помножиме со y_1-y_0 а потоа го искористиме условот дека точката T лежи на дадената кружница, односно важи $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=r^2$, добиваме дека

$$yy_1-yy_0+y_1y_0-y_1^2=-x_1x-x_1x_0+xx_0+x_1^2,$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=$$
$$=x_1^2-2x_1x_0+x_0^2+y_1^2-2y_1y_0+y_0^2=r^2,$$

односно равенката на тангентата на кружницата во точката T која лежи на кружницата гласи

$$\boxed{(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=r^2}.$$

Задача 2. Најди ја равенката на тангента на кружницата $(x-2)^2+(y-3)^2=2$ во точката $T(1,2)$.

Точката $T(1,2)$ припаѓа на кружницата. Бараната равенка на тангента гласи

$$(x-2)(1-2)+(y-3)(2-3)=2,$$

или по средувањето ја добиваме равенката $x+y-3=0.$ ♦

3. Најди ги равенките на тангентите на кружницата $x^2+y^2=100$ повлечени од точката $M(-14,-2)$.

Нека $y=kx+m$ е равенката на бараната тангента. Тогаш важи $m^2=r^2(1+k^2)$. Од условот точката $M(-14,-2)$ лежи на правата $y=kx+m$, добиваме $-2=-14k+m$, односно $m=14k-2$. Ако m го замениме во равенката $m^2=100(1+k^2)$, по средувањето ја добиваме квадратната равенка $12k^2-7k-12=0$ чии што корени се

$$k_1=\frac{4}{3} \text{ и } k_2=-\frac{3}{4}.$$

Ако добиените вредности ги замениме во $m=14k-2$ добиваме

$$m_1=\frac{50}{3} \text{ и } m_2=-\frac{25}{2}.$$

Според тоа, бараните равенки на тангентите се

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{50}{3} \quad \text{и} \quad y=-\frac{3}{4}x-\frac{25}{2},$$

или $4x-3y+50=0$ и $3x+4y+50=0$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ги заедничките точки на правата зададена со равенката $x-y-4=0$ со кружницата $x^2+y^2+2x-4y-20=0$.

2. Најди ја должината на тетивата која ја отсекува правата $3x+y+2=0$ од кружницата $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

3. Запиши ја равенката на тангентата на кружницата дадена со равенката $x^2+y^2-2x-3y=0$ во точката $A(0,3)$.

4. Запиши ја равенката на кружницата која минува низ точката $A(18,-4)$ и ги допира координатните оски.

5. Најди ги равенките на тангентите на кружницата дадена со равенката $x^2+y^2-10x-4y+25=0$ повлечени од координатниот почеток.

6. Најди ги равенките на тангентите на кружницата $x^2+y^2=6$ кои се паралелни на правата $y=\frac{x}{2}-3.$

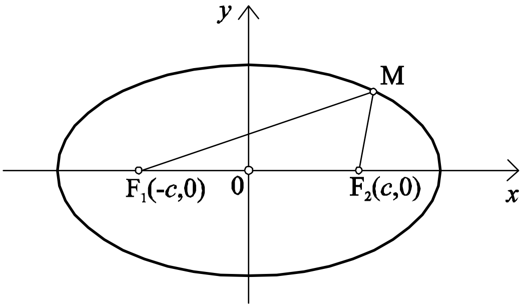
7. Запиши ја равенката на кружницата која минува низ точката $A(1,1)$ и ги допира правите $7x+y-3=0$ и $x+7y-3=0.$

3.3.3. Елипса

Дефиниција 1. Елипса е геометриското место на сите точки во рамнината чиј збир на растојанија до две дадени точки во рамнината F_1 и F_2 е константен, поголем од растојанието меѓу F_1 и F_2.

Точките F_1 и F_2 се нарекуваат **фокуси** на елипсата.

Со цел да ја најдеме равенката на елипса во рамнината избираме правоаголен Декартов координатен систем, така што координатниот почеток O е средина на отсечката F_1F_2, а $x-$оската е правата F_1F_2, со позитивна насока од F_1 кон F_2 (цртеж 1).



Цртеж 1

Ако растојанието меѓу фокусите го означиме со $2c$ тогаш $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Да го означиме со $2a$ збирот на растојанијата од произволна точка на елипсата до фокусите на елипсата.

Нека $M(x,y)$ е произволна точка од елипсата. Според формулата за растојание меѓу две точки имаме

$$\overline{MF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ и } \overline{MF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

од каде што, заради дефиницијата на елипса, следува дека

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Со цел полесно да ги проучиме особините на елипсата, последната равенка ќе ја трансформираме во поедноставен облик. Ако вториот собирок го пренесеме од левата на десната страна на равенката, добиваме дека

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

од каде што со квадрирање на двете страни доаѓаме до равенката

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Повторно со квадрирање на последната равенка, добиваме:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Според дефиницијата на елипса $2a > 2c,$ од каде што следува $a^2 - c^2 > 0.$ Ако бројот $a^2 - c^2$ го означиме со b^2, ја добиваме равенката

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (1)$$

Покажавме дека секоја точка од елипсата ја задоволува равенката (1). Ќе покажеме дека важи и обратното: секоја точка $M(x,y)$, чии координати ја задоволуваат равенката (1), припаѓа на елипсата.

Од равенката (1) добиваме дека $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$ каде што $b^2=a^2-c^2.$ Тогаш

$$\overline{F_1M}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2}=\pm\left(\frac{c}{a}x+a\right).$$

Знакот на десната страна на последното равенство го избираме така што $\overline{FM_1}$ да биде ненегативно. Од дефиницијата на елипса следува дека $a>c,$ додека од (1) следува дека $|x|\le a.$ Тогаш имаме $\left|\frac{c}{a}x\right|<a,$ што значи $\frac{c}{a}x+a>0.$ Според тоа, наоѓаме дека

$$\overline{F_1M}=a+\frac{c}{a}x.$$

Аналогно добиваме дека

$$\overline{F_2M}=a-\frac{c}{a}x.$$

Со собирање на последните две равенки, добиваме дека:

$$\overline{F_1M}+\overline{F_2M}=2a,$$

од каде што заклучуваме дека точката M припаѓа на елипсата.

Со тоа покажавме дека секоја точка што припаѓа на елипсата ја задоволува равенката (1) и обратно, секоја точка што ја задоволува равенката (1) припаѓа на елипсата. Според тоа, равенката (1) е равенка на елипса. Таа се нарекува **канонична** или **централна равенка на елипса**.

Задача 1. Најди ја равенката на геометриското место на точки чиј збир на растојанијата до точките $F_1(-3,0)$ и $F_2(3,0)$ е еднаков на 10. Дали точките $M_1(4,1)$ и $M_2(5,0)$ припаѓаат на даденото геометриско место?

Бараното геометриско место е елипса со фокуси F_1 и F_2. Од $\overline{F_1F_2}=2c,\ 10=2a$ и $b^2=a^2-c^2$, добиваме дека $a=5,\ c=3$ и $b=4$. Бараната равенка гласи

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Точката $M_1(4,1)$ не припаѓа на даденото геометриско место, односно не е точка од елипсата, бидејќи

$$\frac{4^2}{25}+\frac{1^2}{16}\neq 1,$$

додека точката $M_2(5,0)$ е точка од даденото геометриско место, односно точка од елипсата, бидејќи

$$\frac{5^2}{25}+\frac{0^2}{16}=1. \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Доведи ги во канoничен облик следниве равенки на елипса:

а) $9x^2+36y^2=324$ б) $12x^2+36y^2=432$

в) $4x^2+9y^2=36$ г) $25x^2+9y^2=225.$

2. Најди кои од следниве точки:

$M_1(3,5),\ M_2(-1,2),\ M_3(0,3),\ M_4(2,2),\ M_5(-3,1),$

$M_6(1,3),\ M_7(\sqrt{5},4),\ M_8\left(1,\sqrt{\frac{42}{5}}\right),\ M_9(5,2),\ M_{10}(1,1),$

припаѓаат на елипсата $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1.$

3. Запиши ги координатите на фокусите на елипсата

а) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ б) $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{21}=1$

в) $4x^2+9y^2=36$ г) $25x^2+169y^2=4225.$

4. Најди ја равенката на геометриското место на точки чиј збир на растојанија до точките $F_1(-5,0)$ и $F_2(5,0)$ е еднаков на 16.

5. Запиши ја каноничната равенка на елипсата која минува низ точките:

а) $M(10,6)$ и $N(-1,3)$ б) $M(2,5)$ и $N(6,-3)$

в) $M(-6,4)$ и $N(8,3)$ г) $M(\sqrt{3},-2)$ и $N(-2\sqrt{3},1)$

3.3.4. Својства на елипсата

Во ова поглавје ќе проучиме некои основни својства на елипсата. За таа цел нека во координатната рамнина е зададена елипса со равенката

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

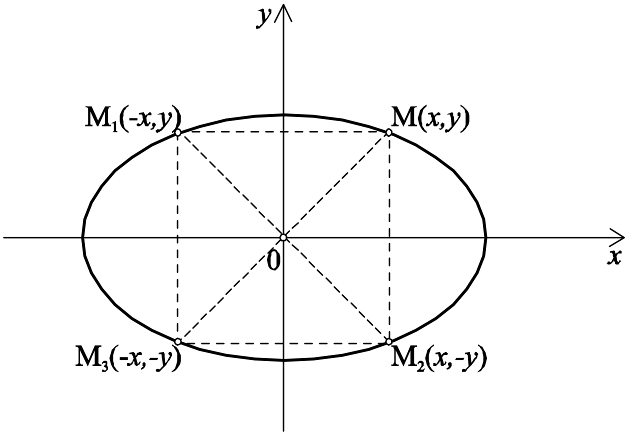
и нека растојанието меѓу незјините фокуси F_1 и F_2 е еднакво на $2c.$

✓ Ако фокусите F_1 и F_2 на дадена елипса се совпаѓаат, тогаш елипсата е кружница со центар $F_1=F_2=O$ и радиус $a.$

Навистина, ако $F_1=F_2$, тогаш $c=0,$ односно $b^2=a^2,$ од каде што следува дека равенката на елипсата добива облик

$$x^2+y^2=a^2.$$

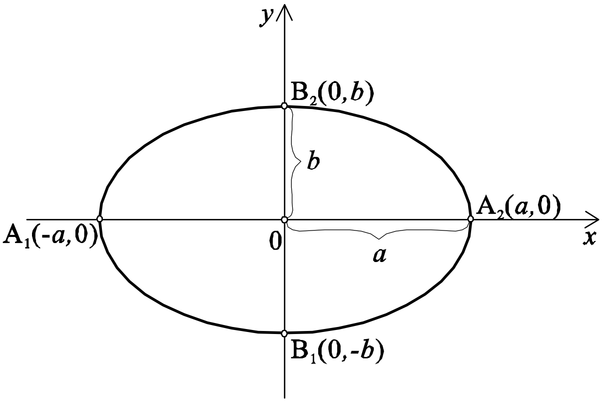
Значи, кружницата е специјален случај на елипса.



Цртеж 1

✓ Равенката на елипса ги содржи само квадратите на координатите x и y. Според тоа ако точката $M(x, y)$ лежи на елипсата, тогаш и точките $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$ и $M_3(-x, -y)$ лежат на елипсата. Тоа значи дека елипсата е **осно симетрична** во однос на двете координатни оски и **централно симетрична** во однос на координатниот почеток. Центарот на симетрија се нарекува **центар на елипсата** (цртеж 1).

✓ Пресечните точки на елипсата со координатните оски се нарекуваат **темиња на елипсата**. Ставајќи во равенката на елипсата најнапред $y = 0$, а потоа $x = 0$, ги добиваме четирите темиња на елипсата: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$.



Цртеж 2

Притоа, растојанието меѓу темињата A_1 и A_2 е еднакво на $2a$, додека растојанието меѓу темињата B_1 и B_2 е еднакво на $2b$. Бидејќи $a > b$, отсечката A_1A_2 се нарекува **голема оска**, додека отсечката B_1B_2 се нарекува **мала оска** на елипсата. Отсечката

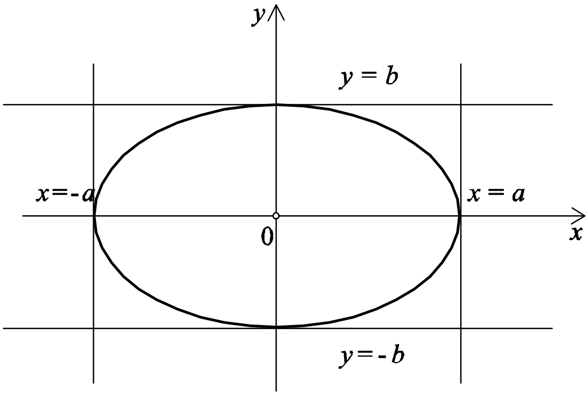
OA_1 се нарекува **голема полуоска**, додека отсечката OB_1 се нарекува **мала полуоска**. Вообичаено и броевите a и b се нарекуваат голема, односно мала полуоска (цртеж 2).

Задача 1. Најди ја централната равенка на елипсата која минува низ точката $M(2,1)$ и има голема оска 8.

Ако во равенката на елипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

замениме $2a=8,\ \ x=2$ и $y=1,$ добиваме $\frac{4}{16}+\frac{1}{b^2}=1,$ односно $b^2=\frac{4}{3}.$ Бараната равенка на елипса гласи

$$\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{4}=1.$$ ♦



Цртеж 3

✓Од равенката на елипсата следува дека $|x|\le a$ и $|y|\le b,$ од каде што заклучуваме дека нема точки од елипсата кои се надвор од правоаголникот заграден со правите $x=\pm a$ и $y=\pm b$ (цртеж 3).

✓ Бројот

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

се нарекува **ексцентрицитет на елипсата**. Бидејќи $c < a$, заклучуваме дека $\varepsilon < 1$. Ексцентрицитетот го карактеризира обликот на елипсата, колку ε е помало толку повеќе елипсата наликува на кружница. Во случај на кружница $a = b$ и $\varepsilon = 0$.

Задача 2. Најди ја каноничната равенка на елипса

а) чии темиња се $A_1(-4{,}0)$, $A_2(4{,}0)$, $B_1(0{,}-3)$, $B_2(0{,}3)$;

б) растојанието меѓу фокусите е 8, а ексцентрицитетот изнесува $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

а) Бидејќи $\overline{A_1A_2} = 2a$, $\overline{B_1B_2} = 2b$, добиваме дека $a = 4$, $b = 3$, од каде што следува дека бараната равенка гласи

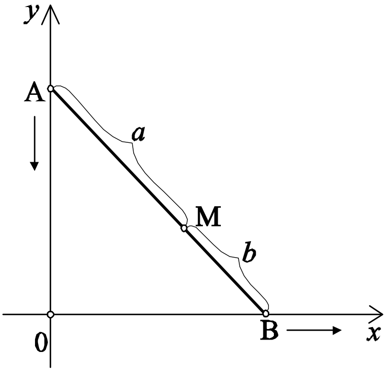
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

б) Од равенствата $2c = 8$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ следува дека $c = 4$, $a = 8$ и $b^2 = 64 - 16 = 48$. Бараната равенка гласи

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1. \ \blacklozenge$$

3. Столб со краишта A и B е потпрен на вертикален ѕид. Точката M од столбот е на растојание a и b од краиштата A и B соодветно. Најди ја траекторијата по која се движи точката M, ако столбот се лизга по вертикалниот ѕид и по хоризонталниот под се додека не падне на подот.

Избираме правоаголен Декартов координатен систем xOy, така што точката A лежи на $y-$оската, а точката B лежи на $x-$оската (црт. 4).



Цртеж 4

Точката M ја дели отсечката AB во однос $a:b$, па според тоа во секој момент од движењето важи:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}}{a+b}.$$

Ако $A(0,y_A)$, $B(x_B,0)$ и $M(x,y)$ тогаш

$$x=\frac{b\cdot 0+a\cdot x_B}{a+b}=\frac{a}{a+b}x_B,\ \ y=\frac{b\cdot y_A+a\cdot 0}{a+b}=\frac{b}{a+b}y_A.$$

Во секој момент од движењето $x_B{}^2+y_A{}^2=(a+b)^2$, од каде што следува дека $\left(\frac{a+b}{a}x\right)^2+\left(\frac{a+b}{b}y\right)^2=(a+b)^2$, односно

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Според тоа траекторијата по која се движи точката M е делот од елипса, кој се наоѓа во првиот квадрант, со полуоски a и b, и центар во координатниот почеток. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја каноничната равенка на елипсата ако:

а) $a=10,\ b=6$ б) $a=5,\ b=4$ в) $a+b=9,\ c=3.$

2. Запиши ја каноничната равенка на елипсата ако:

а) $a=3,\ \varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$ б) $b=2,\ \varepsilon=\frac{3\sqrt{5}}{7}$ в) $c=\sqrt{19},\ \varepsilon=91\sqrt{19}.$

3. Најди ги полуоските на следниве елипси:

а) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ б) $9x^2+25y^2=1$ в) $x^2+5y^2=15.$

4. Дадена е равенка на елипса $25x^2+169y^2=4225.$ Најди ги должините на нејзините оски, координатите на фокусите и нејзиниот ексцентрицитет.

5. Најди ја равенката на елипсата со фокуси $F_1(-4{,}0),\ F_2(4{,}0)$ и мала оска $6.$

6. Запиши ја каноничната равенка на елипсата ако нејзината голема оска е $6,$ а ексцентрицитетот е $\frac{1}{3}.$

7. Најди ја каноничната равенка на елипсата ако растојанието од едниот фокус до темињата на големата оска се 1 и $7.$

8. Најди го ексцентрицитетот на елипсата, ако:

а) малата оска се гледа од фокусите под прав агол,

б) растојанието меѓу фокусите е еднакво на растојанието меѓу темињата на малата и големата оска.

9. Низ еден од фокусите на елипсата

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$$

е подигната нормала на нејзината голема оска. Најди ја должината на тетивата отсечена со елипсата.

3.3.5. Заемна положба на права и елипса

Заеднички точки на права и елипса

Нека се дадени елипса со својата канонична равенка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и права со својата експлицитна равенка

$$y=kx+m.$$

Дадената права и елипсата имаат две, една или ниедна заедничка точка, во зависност од тоа дали системот

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$$

има два пара реални решенија, еден двоен пар реални решенија или нема реално решение. Ако правата и елипсата имаат две заеднички точки, велиме дека **правата ја сече елипсата**, додека ако правата и елипсата имаат една заедничка точка, велиме дека **правата ја допира елипсата**. Во случај кога правата и елипсата немаат заеднички точки, велиме дека **правата не ја сече елипсата**.

Со замена на непознатата y во равенката на елипсата, ја добиваме квадратната равенка $b^2x^2 + a^2(kx+m)^2 = a^2b^2$ по непознатата $x,$ која по средувањето добива облик:

$$\left(k^2a^2 + b^2\right)x^2 + 2kma^2x + m^2a^2 - a^2b^2 = 0.$$

Оваа квадратна равенка има две реални и различни решенија, едно двојно решение или нема реално решение во зависност од знакот на нејзината дискриминанта:

$$\begin{aligned} D &= \left(2kma^2\right)^2 - 4\left(k^2a^2+b^2\right)\left(m^2a^2-a^2b^2\right) = \\ &= 4a^2b^2\left(k^2a^2+b^2-m^2\right). \end{aligned}$$

Според тоа ако

✓ $k^2a^2 + b^2 - m^2 > 0,$ правата ја сече елипсата,

✓ $k^2a^2 + b^2 - m^2 = 0,$ правата ја допира елипсата,

✓ $k^2a^2 + b^2 - m^2 < 0,$ правата не ја сече елипсата.

Во случај кога правата е паралелна со $y-$оската, односно има равенка $x = m,$ ја разгледуваме равенката $y^2 = b^2\left(1 - \frac{m^2}{a^2}\right)$ која, во зависност од знакот на изразот $a^2 - m^2,$ има две, едно или ниедно решение. За $|m| < |a|$, правата ја сече елипсата, за $|m| = |a|$, ја допира и за $|m| > |a|$, не ја сече елипсата.

Задача 1. Најди ги заедничките точки на елипсата $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ со правата $2x - y - 9 = 0$.

Ако равенката на правата ја запишеме во експлицитен облик

$$y = 2x - 9$$

и добиениот израз за y го замениме во равенката на елипсата

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1,$$

ја добиваме квадратната равенка

$$13x^2 - 108x + 207 = 0$$

чии што корени се $x_1 = 3$ и $x_2 = \frac{69}{13}$.

Добиените вредности за x ги заменуваме во равенката на правата при што добиваме $y_1 = -3$ и $y_2 = \frac{21}{13}$.

Според тоа, правата и елипсата имаат две заеднички точки

$M_1(3,-3)$ и $M_2\left(\frac{69}{13}, \frac{21}{13}\right)$. ♦

Тангента на елипса

Права која допира дадена елипса се нарекува **тангента на елипсата**. Точката во која правата ја допира елипсата се вика **допирна точка**.

Нека правата

$$y = kx + m$$

е тангента на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Да ја определиме допирната точка. Ако дискриминантата на квадратната равенка

$$\left(k^2a^2 + b^2\right)x^2 + 2kma^2x + m^2a^2 - a^2b^2 = 0$$

е еднаква на нула, тогаш нејзиното решение е

$$x_1 = -\frac{kma^2}{k^2a^2 + b^2} = \frac{kma^2}{m^2} = -\frac{ka^2}{m}.$$

Во тој случај имаме дека

$$y_1 = kx_1 + m = -\frac{k^2a^2}{m} + m = \frac{m^2 - k^2a^2}{m} = \frac{b^2}{m},$$

од каде што следува дека допирната точка на правата со елипсата има координати

$$\left(-\frac{ka^2}{m}, \frac{b^2}{m}\right).$$

Нека е дадена точката $T(x_0, y_0)$ од елипсата. Да ја најдеме равенката на тангентата на елипсата во дадената точка. Од изразот за допирна точка добиваме

$$m = \frac{b^2}{y_0} \quad \text{и} \quad k = -\frac{mx_0}{a^2} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Според тоа, равенката на тангентата гласи

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

или помножена со a^2y_0, го добива обликот

$$a^2yy_0-a^2y_0^2=-b^2xx_0+b^2x_0^2,$$

односно

$$a^2yy_0+b^2xx_0=a^2y_0^2+b^2x_0^2=a^2b^2.$$

Ако последната равенка ја поделиме со a^2b^2, конечно добиваме дека

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

е равенка на тангента на елипсата во точката $T(x_0,y_0)$.

Задача 2. Најди ги равенките на тангентите на елипсата зададена со равенката $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ кои што се нормални на правата $x-y+5=0$.

Услов за нормалност на правите

$$y=k_1x+m_1 \text{ и } y=k_2x+m_2$$

е равенството $k_1k_2=-1$. За дадената права $y=x+5$, $k_1=1$, па според тоа $k_2=-1$, од каде што следува дека секоја нормала на дадената права има облик

$$y=-x+m.$$

Ако го искористиме условот

$$k^2a^2+b^2-m^2=0,$$

односно правата $y = kx + m$ ја допира елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ добиваме

$$6 + 3 - m^2 = 0,$$

односно $m = \pm 3,$ од каде што следува дека бараните равенки на тангенти се

$$y = -x + 3 \text{ и } y = -x - 3. \blacklozenge$$

Задача 3. Најди ја равенката на тангентата на елипсата зададена со равенката $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ во точката $T(2,2).$

Точката $T(2,2)$ припаѓа на елипсата. Бараната равенка на тангента гласи $\frac{x}{10} + \frac{2y}{5} = 1,$ односно

$$x + 4y - 10 = 0. \blacklozenge$$

Задача 4. Најди ги равенките на тангентите на елипсата зададена со равенката $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1,$ кои што се повлечени од точката $M\left(7, \frac{2}{5}\right),$ како и допирните точки.

Нека $y = kx + m$ е равенката на бараната тангента. Тогаш важи условот

$$25k^2 + 4 - m^2 = 0.$$

Од условот точката $M\left(7, \frac{2}{5}\right)$ лежи на правата $y = kx + m$ добиваме

$$\frac{2}{5} = 7k + m,$$

односно $m=\frac{2}{5}-7k.$ Ако m го замениме во добиената равенка $25k^2+4-m^2=0,$ по средувањето ја добиваме квадратната равенка

$$150k^2-35k-24=0$$

чии што корени се

$$k_1=\frac{8}{15} \text{ и } k_2=-\frac{3}{10}.$$

Ако добиените вредности ги замениме во $m=\frac{2}{5}-7k$ добиваме

$$m_1=-\frac{10}{3} \text{ и } m_2=\frac{5}{2}.$$

Според тоа, бараните равенки на тангентите се

$$y=\frac{8}{15}x-\frac{10}{3} \text{ и } y=-\frac{3}{10}x+\frac{5}{2},$$

односно

$$8x-15y-50=0 \text{ и } 3x+10y-25=0.$$

За добивање на допирните точки го користиме условот за допирна точка

$$\left(-\frac{ka^2}{m},\frac{b^2}{m}\right),$$

од каде што добиваме дека правата

$$8x-15y-50=0$$

ја допира елипсата во точката $\left(4,\frac{6}{5}\right),$ а правата

$$3x+10y-25=0$$

ја допира елипсата во точката $\left(3,\frac{8}{5}\right).$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ги заедничките точки на елипсата $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ со правата $2x-y-3=0$.

2. Најди ја допирната точка на правата $4x-5y-40=0$ со елипсата $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$.

3. Дадена е елипсата $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Запиши ја равенката на правата која отсекува од елипсата тетива чија што средина е во точката $A(1,1)$.

4. Запиши ја равенката на тангентата на елипсата $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ во точката $T(2,-3)$.

5. Најди ја равенката на тангентата на елипсата $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ која е паралелна на правата $2x-y+17=0$.

6. Најди ги равенките на тангентите на елипсата $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$ повлечени од точката $M(-6,3)$, како и допирните точки.

7. Правата $x-4y-10=0$е тангента на елипса со канонична равенка која минува низ точката $A(4,-1)$. Запиши ја равенката на елипсата.

8. Правите $x+y=5$ и $x-4y=10$ се тангенти на елипса. Запиши ја каноничната равенка на елипсата.

3.3.6. Хипербола

Дефиниција 1. Хипербола е геометриско место на точки во рамнината чија апсолутна вредност од разликата на растојанијата до две дадени точки во рамнината F_1 и F_2 е константна, помала од растојанието меѓу F_1 и F_2.

Точките F_1 и F_2 се нарекуваат **фокуси** на хиперболата. Со цел да ја запишеме равенката на хипербола, во рамнината избираме правоаголен Декартов координатен систем, така што координатниот почеток O е средина на отсечката F_1F_2, а $x-$оската е правата F_1F_2, со позитивна насока од F_1 кон F_2. Ако растојанието меѓу фокусите го означиме со $2c$, тогаш $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ (цртеж 1). Да ја означиме со $2a,\ a>0,$ апсолутната вредност на разликата на растојанијата од произволна точка на хиперболата до фокусите на хиперболата. Тогаш заради дефиницијата на хипербола $0<a<c.$

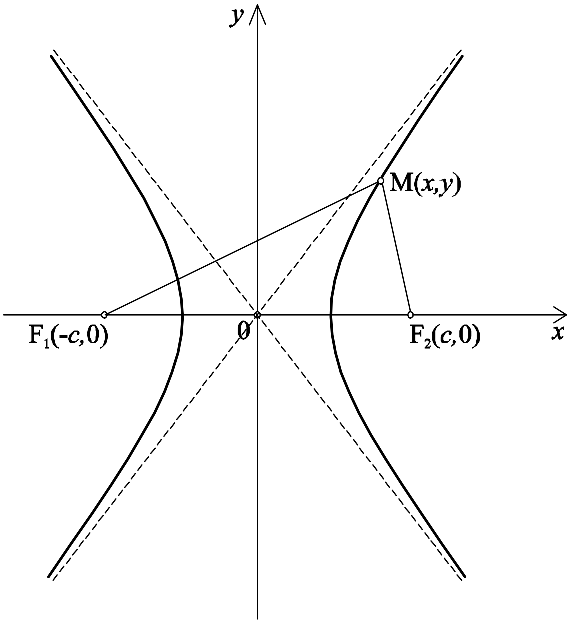
Нека $M(x,y)$ е произволна точка од хиперболата. Тогаш имаме дека

$$\overline{MF_1}=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \text{ и } \overline{MF_2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

од каде што заради дефиницијата на хипербола следува дека:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

Со цел полесно да ги проучиме особините на хиперболата, последната равенка ќе ја трансформираме во поедноставен облик



Цртеж 1

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$

од каде што со квадрирање на двете страни доаѓаме до равенката

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc.$$

Со квадрирање на последната равенка добиваме

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

Според дефиницијата за хипербола $a<c,$ од каде што следува дека $c^2-a^2>0.$ Ако бројот c^2-a^2 го означиме со $b^2,$ ја добиваме равенката

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (1)$$

Покажавме дека секоја точка од хиперболата ја задоволува равенката (1). Ќе покажеме дека важи и обратното: секоја точка $M(x,y)$, чии координати ја задоволуваат равенката (1), припаѓа на хиперболата.

Од равенката (1), добиваме дека $y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right),$ каде што $b^2=c^2-a^2.$ Тогаш имаме дека

$$\overline{F_1M}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2}=\pm\left(\frac{c}{a}x+a\right).$$

Знакот на десната страна на последното равенство го избираме така што $\overline{FM_1}$ да биде ненегативно. Од дефиницијата за хипербола следува дека $a<c,$ додека од (1) следува дека $|x|\geq a.$ Тогаш $\left|\frac{c}{a}x\right|>a,$ што значи $\frac{c}{a}x+a<0$ за $x\leq -a.$ Според тоа,

$$\overline{F_1M}=\begin{cases}\frac{c}{a}x+a & \text{за } x\geq a\\ -\left(\frac{c}{a}x+a\right) & \text{за } x\leq -a\end{cases}.$$

Аналогно добиваме дека

$$\overline{F_2M} = \begin{cases} \frac{c}{a}x - a & \text{за } x \geq a \\ -\left(\frac{c}{a}x - a\right) & \text{за } x \leq -a \end{cases}.$$

Со собирање на последните две равенки, добиваме дека:

$$\overline{F_1M} - \overline{F_2M} = \begin{cases} 2a & \text{за } x \geq a \\ -2a & \text{за } x \leq -a \end{cases},$$

или конечно

$$\left|\overline{F_1M} - \overline{F_2M}\right| = 2a$$

што значи точката M припаѓа на хиперболата.

Со тоа покажавме дека секоја точка што припаѓа на хиперболата ја задоволува равенката (1), и обратно, секоја точка што ја задоволува равенката (1) припаѓа на хиперболата. Според тоа, равенката (1) е равенка на хипербола, наречена **канонична** или **централна равенка на хипербола**.

Задача 1. Најди ја равенката на хиперболата ако се дадени нејзините фокуси $F_1(-10,0)$ и $F_2(10,0)$ и една точка од хиперболата $M(12,3\sqrt{5})$.

Од $\overline{F_1F_2} = 2c$ следува дека $20 = 2c$, односно $c = 10$. Понатаму, од $\overline{F_1M} = 23$, $\overline{F_2M} = 7$, $\left|\overline{F_1M} - \overline{F_2M}\right| = 16 = 2 \cdot 8$, следува дека $a = 8$. Бидејќи $b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, добиваме дека $b = 6$. Бараната равенка гласи

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1. \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Дали точките $M_1(2,-1)$, $M_2(3,4)$ и $M_3\left(\frac{13}{3},6\right)$ се точки од хиперболата $9x^2-4y^2=25$?

2. Најди ги фокусите на хиперболата $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$

3. Запиши ја каноничната равенка на хиперболата која минува низ точките

а) $M(5,4)$ и $N(2\sqrt{5},2\sqrt{3})$ б) $M(-2,1)$ и $N(10,7)$

в) $M(5,4)$ и $N(2,1).$

4. Најди го геометриското место на точки чија апсолутна вредност на разликата на растојанијата до точките $F_1(-5,0)$ и $F_2(5,0)$ е еднаква на $8.$

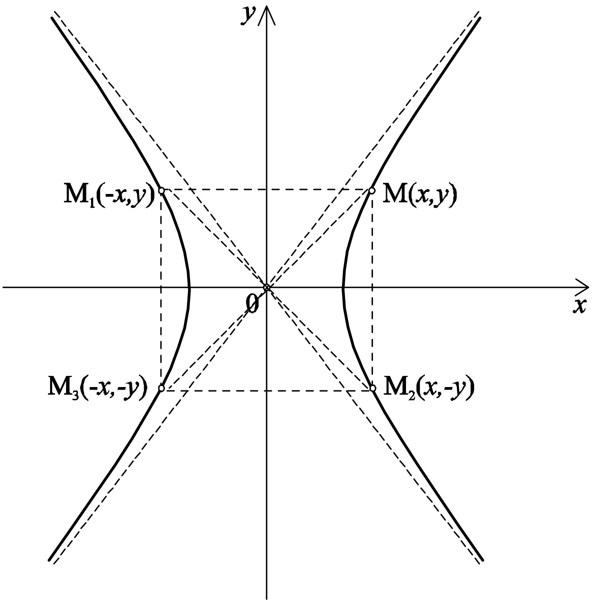
5. Запиши ги координатите на точката од хиперболата $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ чие што растојание до левиот фокус е двапати поголемо во однос на растојанието до десниот фокус.

3.3.7. Својства на хипербола. Асимптоти на хипербола

Да ги испитаме својствата на хиперболата зададена со равенката

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

✓ Равенката (1) ги содржи само квадратите на координатите x и y. Според тоа, ако точката $M(x, y)$ лежи на хиперболата, тогаш и точките $M_1(-x, y)$, $M_2(x,-y)$ и $M_3(-x,-y)$ лежат на хиперболата.



Цртеж 1

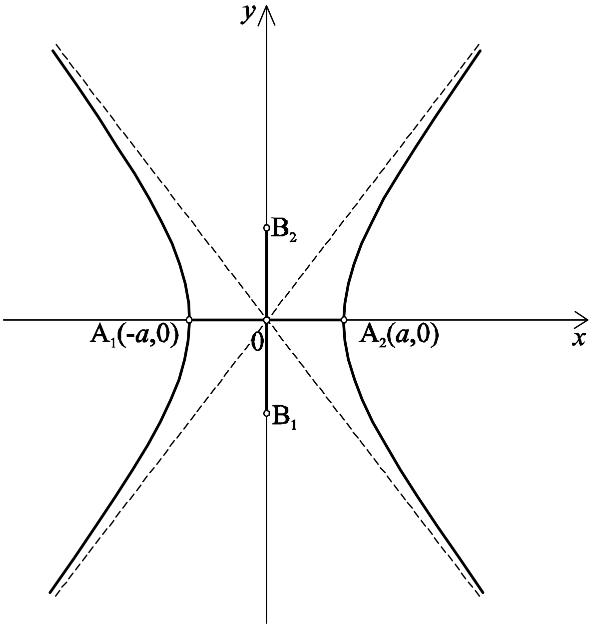
Тоа значи дека хиперболата е **осно симетрична** во однос на двете координатни оски и **централно симетрична** во однос на координатниот почеток. Центарот на симетрија се нарекува **центар на хиперболата** (цртеж 1).

✓ Пресечните точки на хиперболата со координатните оски се нарекуваат **темиња на хиперболата**.

Ставајќи во равенката на хиперболата $y = 0$, ги добиваме двете пресечни точки на хиперболата со $x -$оската: $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$.

Ако во равенката на хипербола ставиме $x = 0$, тогаш таа нема реални решенија по y, што значи хиперболата нема заеднички точки со $y -$оската.

Отсечката A_1A_2 се нарекува **реална оска на хиперболата**. Ако точките B_1 и B_2 се точки од $y -$оската такви што важи $OB_1 = OB_2 = b$, тогаш отсечката B_1B_2 се нарекува **имагинарна оска на хиперболата**.



Цртеж 2

Отсечката OA_1 се нарекува **реална полуоска**, додека отсечката OB_1 се нарекува **имагинарна полуоска**. Вообичаено и броевите a и b се нарекуваат реална односно имагинарната полуоска (цртеж 2).

Задача 1. Најди ја централната равенка на хипербола која минува низ точката $M(3,1)$ и има реална оска 4.

Ако во равенката на хипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

замениме $2a=4,\ \ x=3$ и $y=1,$ добиваме $\frac{9}{4}-\frac{1}{b^2}=1,$ односно $b^2=\frac{4}{5}.$ Тогаш бараната равенка на хипербола гласи

$$x^2-5y^2=4.\blacklozenge$$

Од равенката (1) следува дека $|x|\geq a$ од каде што заклучуваме дека за координатите на точките кои припаѓаат на хиперболата важи $x\leq -a$ или $x\geq a.$ Тоа значи дека сите точки од хипрболата се наоѓаат десно од правата $x=a$ и лево од правата $x=-a,$ па според тоа хиперболата се состои од два изолирани дела наречени, **гранки на хиперболата**.

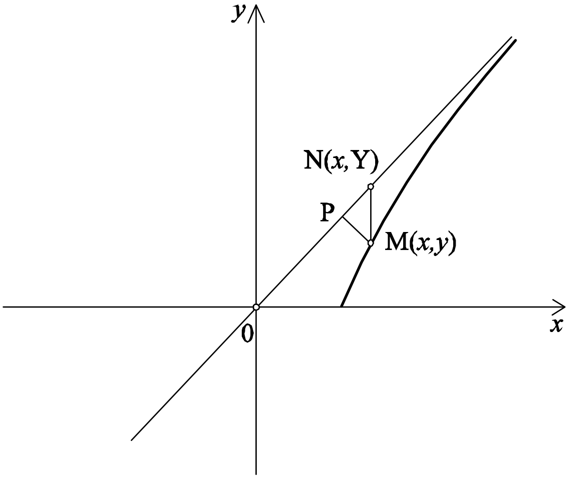
✓ Бидејќи хиперболата е осносиметрична и централно симетрична, доволно е да го испитаме нејзиното однесување во првиот квадрант. Од равенката (1) за првиот квадрант, добиваме

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Оваа функција, почнувајќи од точката $(a,0)$, монотоно расте. Да ја испитаме положбата на хиперболата во однос на правата

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Најнапред ќе ги споредиме ординатите на точките од правата и хиперболата со исти апсциси. Нека $M(x, y)$ е точка од хиперболата, а $N(x, Y)$ точка од правата.



Цртеж 3

Да ја определиме должината на отсечката MN. Од

$$Y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

добиваме дека

$$\overline{MN} = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right),$$

односно

$$\overline{MN} = Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Кога вредноста на апсцисата на разгледуваните точки расте, вредноста на именителот на десната страна на последниот израз, исто така, расте, од каде што следува дека вредноста на десната страна од изразот опаѓа, што значи должината на отсечката MN се намалува. Ако P е подножјето на нормалата спуштена од точката M на правата

$$y = \frac{b}{a}x,$$

тогаш отсечката MP има помала должина од отсечката MN. Според тоа, кога точката M се движи по делот од хиперболата во првиот квадрант, така што нејзината апсциса расте, тогаш растојанието на точката M до правата добива се помали вредности, односно точката M е се ,,поблиску'' до правата (цртеж 3). Изразот од десната страна на разгледуваното равенство за секоја вредност на x е различен од нула, што значи правата и хиперболата немаат заедничка точка. За хиперболата велиме дека асимптотски се приближува до правата, а правата се нарекува **асимптота** на хиперболата. Од причини на симетрија следува дека правите

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x} \quad \text{и} \quad \boxed{y = -\frac{b}{a}x}$$

се две асимптоти на хиперболата.

✓ Бројот

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

се нарекува **ексцентрицитет на хиперболата**. Бидејќи $c > a$, заклучуваме дека $\varepsilon > 1$. Ексцентрицитетот го карактеризира обликот на хиперболата, колку ε е поголемо толку е поголем по апсолутна вредност агловиот коефициентот на асимптотите.

Задача 2. Најди ги полуоските, координатите на фокусите, ексцентрицитетот и равенките на асимптотите на хиперболата $4x^2 - 9y^2 = 36.$

Ако дадената равенка ја запишеме во облик

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

за полуоските добиваме дека $a = 3,\ b = 2.$

Од равенството $b^2 = c^2 - a^2$ следува дека $c = \sqrt{13}.$ Според тоа координатите на фокусите се

$(-\sqrt{13},0)$ и $(\sqrt{13},0).$

За ексцентрицитетот на хиперболата добиваме

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3},$$

а равенките на асимптотите се

$y = \frac{2}{3}x$ и $y = -\frac{2}{3}x.$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ја каноничната равенка на хиперболата ако:

а) $a=6,\ b=18$ б) $a=8,\ \varepsilon=1{,}25$

в) $b=5,\ \varepsilon=\frac{13}{12}$ г) $c=5,\ \varepsilon=\frac{5}{3}$

д) равенките на асимптотите се $y=\pm\frac{5}{12}x,$ а растојанието на темињата е 48.

2. Најди ги асипмтотите и фокусите на хиперболата $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1.$

3. Најди ги оските на следниве хиперболи:

а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1;$ б) $25x^2-9y^2=1$ в) $9x^2-64y^2=1.$

4. Најди ја равенката на хиперболата која минува низ точката $M(4\sqrt{2},3)$ и има заеднички фокуси со елипсата $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1.$

5. Најди точка на хиперболата $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ чие растојание до едната асимптота е три пати поголемо од растојанието до другата асимптота.

6. Најди ги полуоските на хиперболата со канонична равенка, ако:

а) нејзини асимптоти се правите $y=\pm2x,$ а фокусите се на растојание 5 единици од центарот,

б) нејзини асимптоти се правите $y=\pm\frac{5}{3}x,$ и минува низ точката $M(6,9).$

3.3.8. Заемна положба на права и хипербола

Заеднички точки на права и хипербола

Нека се дадени хипербола со својата канонична равенка

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

и права со својата експлицитна равенка

$$y=kx+m.$$

Дадената права и хиперболата имаат две, една или ниедна заедничка точка, во зависност од тоа дали системот

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$$

има два пара реални решенија, еден двоен пар реални решенија или нема реално решение. Ако правата и хиперболата имаат две заеднички точки, велиме дека **правата ја сече хиперболата**, додека ако правата и хиперболата имаат една заедничка точка, тогаш велиме дека **правата ја допира хиперболата**. Во случај кога правата и хиперболата немаат заеднички точки, велиме дека **правата не ја сече хиперболата**.

Со замена на непознатата y во равенката на хиперболата, добиваме квадратна равенка

$$b^2x^2-a^2(kx+m)^2=a^2b^2$$

по непознатата x, која по средувањето го добива обликот

$$\left(b^2 - k^2a^2\right)x^2 - 2kma^2x - m^2a^2 - a^2b^2 = 0.$$

Оваа квадратна равенка има две реални и различни решенија, едно двојно решение или нема реално решение во зависност од знакот на нејзината дискриминанта:

$$\begin{aligned} D &= \left(2kma^2\right)^2 - 4\left(b^2 - k^2a^2\right)\left(m^2a^2 + a^2b^2\right) = \\ &= -4a^2b^2\left(k^2a^2 - b^2 - m^2\right). \end{aligned}$$

Според тоа ако :

- ✓ $k^2a^2 - b^2 - m^2 < 0,$ правата ја сече хиперболата,
- ✓ $k^2a^2 - b^2 - m^2 = 0,$ правата ја допира хиперболата,
- ✓ $k^2a^2 + b^2 - m^2 > 0,$ правата не ја сече хиперболата.

Во случај кога правата е паралелна со $y-$оската, односно има равенка

$$x = m,$$

ја разгледуваме равенката

$$y^2 = b^2\left(\frac{m^2}{a^2} - 1\right)$$

која, во зависност од знакот на изразот $m^2 - a^2$, има две, едно или ниедно решение. За $|m| > |a|,$ правата ја сече хиперболата, за $|m| = |a|,$ ја допира и за $|m| < |a|,$ не ја сече хиперболата.

Задача 1. Најди ги координатите на заедничките точки на хиперболата $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ со правата $x - 5y = 0.$

Ако равенката на правата ја запишеме во експлицитен облик

$$y=\frac{1}{5}x$$

и добиениот израз за y го замениме во равенката на хиперболата

$$\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{36}=1$$

ја добиваме квадратната равенка

$$9x^2-900=0$$

чии што корени се $x_1=10$ и $x_2=-10.$ Така добиените вредности за x ги заменуваме во равенката на правата при што добиваме $y_1=2$ и $y_2=-2.$ Според тоа, правата и хиперболата имаат две заеднички точки

$M_1(10,2)$ и $M_2(-10,-2).$ ♦

Тангента на хипербола

Права која ја допира дадена хипербола се нарекува **тангента на хиперболата**. Точката во која правата ја допира хиперболата се вика **допирна точка**.

Нека правата

$$y=kx+m$$

е тангента на хиперболата

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Да ја определиме допирната точка. Ако дискриминатата на квадратната равенка

$$\left(b^2 - k^2a^2\right)x^2 - 2kma^2x - m^2a^2 - a^2b^2 = 0$$

е еднаква на нула, тогаш нејзиното решение е

$$x_1 = -\frac{-kma^2}{b^2 - k^2a^2} = -\frac{kma^2}{m^2} = -\frac{ka^2}{m}.$$

Понатаму, од равенството

$$y_1 = kx_1 + m = -\frac{k^2a^2}{m} + m = \frac{m^2 - k^2a^2}{m} = -\frac{b^2}{m},$$

добиваме дека допирната точка на правата со хиперболата има координати

$$\left(-\frac{ka^2}{m}, -\frac{b^2}{m}\right).$$

Нека е дадена точката $T(x_0, y_0)$ од хиперболата. Да ја определиме равенката на тангентата на хиперболата во дадената точка. Од изразот за допирна точка добиваме

$$m = -\frac{b^2}{y_0},$$

од каде што следува дека

$$k = -\frac{mx_0}{a^2} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Според тоа, равенката на тангентата гласи:

$$y - y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0),$$

или помножена со a^2y_0, го добива обликот:

$$a^2yy_0 - a^2y_0^2 = b^2xx_0 - b^2x_0^2,$$

односно

$$a^2yy_0 - b^2xx_0 = a^2y_0^2 - b^2x_0^2 = -a^2b^2.$$

Ако последната равенка ја поделиме со a^2b^2, конечно добиваме дека:

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

е равенката на тангентата на дадената хипербола во точката $T(x_0, y_0)$.

Задача 2. Најди ги равенките на тангентите на хиперболата $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ паралелни на правата $x + y - 7 = 0.$

Услов за паралелност на правите

$$y = k_1x + m_1 \text{ и } y = k_2x + m_2$$

е равенството $k_1 = k_2$. За дадената права $y = -x - 7$, $k_1 = -1$, па според тоа, $k_2 = -1$, од каде што следува дека секоја права паралелна на дадената права има облик

$$y = -x + m.$$

Ако го искористиме условот за допир

$$k^2a^2 - b^2 - m^2 = 0,$$

односно правата $y = kx + m$ ја допира хиперболата $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ добиваме

$$15-6-m^2=0\,,$$

од каде што следува дека $m=\pm 3$. Бараните равенки на тангенти се

$$y=-x+3 \text{ и } y=-x-3. \blacklozenge$$

Задача 3. Најди ја равенката на тангентата на хиперболата $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ во точката $T(5,-4)$.

Точката $T(5,-4)$ припаѓа на хиперболата. Бараната равенка на тангентата гласи $\frac{5x}{5}-\frac{(-4)y}{4}=1,$ или по средувањето добиваме

$$x+y-1=0. \blacklozenge$$

Задача 4. Најди ги равенките на тангентите на хиперболата $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ повлечени од точката $M(2,0)$, како и допирните точки.

Нека

$$y=kx+m$$

е равенката на бараната тангента. Тогаш важи

$$8k^2-9-m^2=0.$$

Од условот, точката $M(2,0)$ лежи на правата $y=kx+m$, добиваме $0=2k+m,$ односно

$$m=-2k.$$

Ако m го замениме во равенката $8k^2-9-m^2=0,$ по средувањето ја добиваме квадратната равенка $4k^2-9=0$ чии корени се

$$k_1=\frac{3}{2} \text{ и } k_2=-\frac{3}{2}.$$

Ако добиените вредности ги замениме во $m=-2k$ добиваме

$m_1 = -3$ и $m_2 = 3.$

Според тоа, добиените равенки на тангентите се $y = \frac{3}{2}x - 3$ и $y = -\frac{3}{2}x + 3,$ односно

$3x - 2y - 6 = 0$ и $3x + 2y - 6 = 0.$

Ако го искористиме условот за допирна точка

$$\left(-\frac{ka^2}{m}, -\frac{b^2}{m}\right),$$

добиваме дека правата $3x - 2y - 6 = 0$ ја допира хиперболата во точката $(4,3)$, а правата $3x + 2y - 6 = 0$ ја допира хиперболата во точката $(4,-3)$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ги заедничките точки на правата со хиперболата ако:

а) $3x - 2y - 6 = 0,\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ б) $2x + y - 18 = 0,\ \frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$

в) $x - y + 5 = 0,\ \frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1.$

2. Запиши ја равенката на тангентата на хиперболата $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ во точката $A(5,-4).$

3. Кон хиперболата $25x^2 - 16y^2 = 100$ повлечи тангенти паралелни на правата $25x - 12y + 3 = 0.$

4. Кон хиперболата $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ повлечи тангенти нормални на правата $x-2y=0$.

5. Најди ја вредноста на параметарот m за која правата $y=\frac{5}{2}x+m$ ја допира хиперболата $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$.

6. Запиши ја равенката на тангентата на хиперболата $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ повлечена од точката $A\left(\frac{15}{4},\frac{3}{2}\right)$.

7. Низ точката $A(2,-5)$ повлечи прави паралелни со асимптотите на хиперболата $x^2-4y^2=4$.

3.3.9. Парабола

Дефиниција 1. Парабола е геометриското место на сите точки во рамнината за кои растојанието до дадена точка F е еднакво на растојанието до дадена права l која не ја содржи точката F.

Точката F се нарекува **фокус** на параболата, а правата l се нарекува **директриса** на параболата. Растојанието од фокусот до директрисата на параболата се вика **параметар** на параболата и се означува со p.

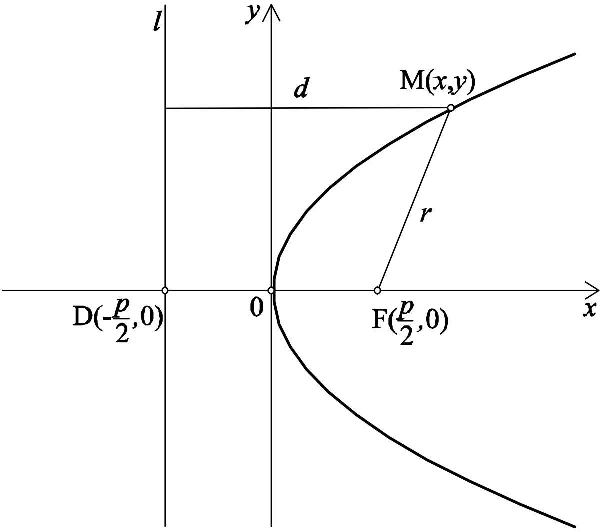
Да ја најдеме равенката на парабола. Избираме правоаголен Декартов координатен систем, така што координатниот почеток O е средина на отсечката FD, каде што D е подножјето на нормалата спуштена од точката F на директрисата, а $x-$оската е правата која минува низ точката F и е нормална на директрисата (цртеж 1). Тогаш

$$\mathrm{F}\left(\frac{p}{2},0\right), \quad \mathrm{D}\left(-\frac{p}{2},0\right),$$

а равенката на директрисата гласи

$$x=-\frac{p}{2}$$

Нека $\mathrm{M}(x,y)$ е произволна точка од параболата. Да го означиме со r растојанието од точката M до фокусот F, а со d растојанието од точката M до директрисата на параболата.



Цртеж 1

Тогаш имаме дека

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \text{ и } d=\left|\frac{p}{2}+x\right|.$$

Според дефиницијата за парабола, имаме дека $r = d$, односно

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|\frac{p}{2} + x\right|.$$

Ако последната равенка ја квадрираме, ја добиваме равенката:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2,$$

која по средувањето добива облик:

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (1)$$

Со ова покажавме дека секоја точка која припаѓа на параболата ја задоволува равенката (1). Ќе покажеме дека важи и обратното: ако точката $M(x, y)$ ја задоволува равенката (1) тогаш таа припаѓа на параболата.

Растојанието r од точката M до фокусот F, и растојанието d од точката M до директрисата можеме да ги запишеме во облик:

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} =$$

$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

и

$$d = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Бидејќи $r = d$, можеме да заклучиме дека точката M припаѓа на параболата. Со тоа покажавме дека равенката (1) е равенка на парабола и ја нарекуваме **канонична равенка на парабола**.

Задача 1. На параболата $y^2 = 16x$ најди точка чие што растојание до фокусот е еднакво на 13.

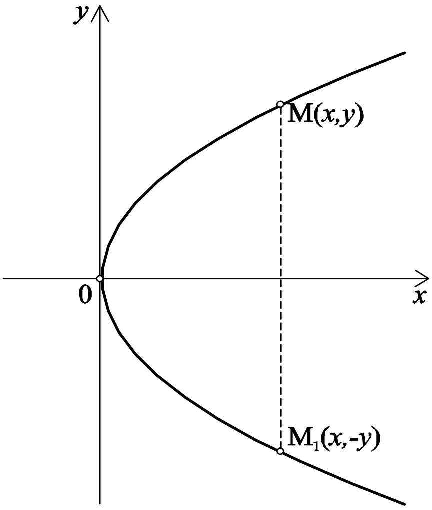
Од дефиницијата за парабола следува дека растојанието од бараната точка M од параболата до фокусот е еднакво на растојанието од точката M до директрисата на параболата. Равенката на директрисата гласи

$$x = -\frac{p}{2} = -4,$$

па според тоа апсцисата на бараната точка M е $x = 9$. Ако добиената вредност $x = 9$ ја замениме во равенката на параболата, добиваме две решенија,

$$M_1(9{,}12) \text{ и } M_2(9,-12). \blacklozenge$$

Да истакнеме некои поважни својства на параболата.



Цртеж 2

✓ Ако координатите на точката $M(x, y)$ ја задоволуваат равенката (1) тогаш равенката ја задоволуваат и координатите на точката $M_1(x,-y)$. Според тоа, параболата е **осно симетрична** во однос на $x-$оската. Оската на симетрија се вика **оска** на параболата (цртеж 2).

✓ Од равенката (1) непосредно следува дека параболата ја содржи точката $O(0,0)$. Таа е единствена заедничка точка на параболата со координатните оски и се нарекува **теме** на параболата.

✓ Од равенката (1) следува дека за секоја точка на параболата $x \geq 0$ (бидејќи $y^2 \geq 0,\ p > 0$), па според тоа параболата се наоѓа на една страна од $y-$оската, поточно од страната на која лежи фокусот.

Задачи за самостојна работа

1. Најди ја вредноста на параметарот p во каноничната равенка на параболата која минува низ точката:

а) $M(2,-4)$ б) $M(12,6)$ в) $M\left(\frac{1}{2},4\right)$.

2. Запиши ги координатите на фокусот и равенките на директрисата на параболата:

а) $y^2 = 5x$ б) $y^2 = x$ в) $y^2 = \frac{x}{2}$.

3. Најди ги точките од параболата $y^2 = 8x$ кои се на растојание 20 од директрисата на параболата.

4. Најди ја каноничната равенка на параболата, ако:

а) растојанието од темето до фокусот е еднакво на 4,

б) параболата минува низ точката $M(1,2)$.

5. Во параболата $y^2 = 10x$ е впишан рамнокрак триаголник со врв во координатниот почеток, а висината му изнесува $\frac{2}{3}$ од основата. Запиши ги координатите на темињата на триаголникот.

6. На параболата $y^2 = 4{,}5x$ е дадена точка $M(x, y)$ чие што растојание до директрисата е $d = 9{,}125$. Најди го растојанието на таа точка до темето на параболата.

7. Над една река широка 30 метри треба да се конструира параболичен мост со столбови на растојание од 5 метри. Колкава треба да биде висината на столбовите ако висината на средниот столб е $7{,}5$ метри?

3.3.10. Заемна положба на права и парабола

Заеднички точки на права и парабола

Нека се дадени парабола со својата канонична равенка

$$y^2 = 2px$$

и права со својата експлицитна равенка

$$y = kx + m.$$

Дадената права и параболата имаат две, една или ниедна заедничка точка, во зависност од тоа дали системот

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = kx + m \end{cases}$$

има два пара реални решенија, еден двоен пар реални решенија или нема реално решение. Ако правата и параболата имаат две заеднички точки, тогаш велиме дека **правата ја сече параболата**. Во случај кога правата и параболата имаат една заедничка точка, велиме дека **правата ја допира параболата**. Ако правата и параболата немаат заеднички точки, велиме дека **правата не ја сече параболата**.

Со замена на непознатата y во равенката на параболата, добиваме квадратна равенка

$$(kx + m)^2 - 2px = 0$$

по непознатата x која, по средувањето го добива обликот:

$$k^2x^2 + 2(km - p)x + m^2 = 0.$$

Оваа квадратна равенка има две реални и различни решенија, едно двојно решение или нема реално решение, во зависност од знакот на нејзината дискриминанта:

$$D = 4p(p - 2km).$$

Бидејќи p секогаш е позитивно за:

- ✓ $p - 2km > 0,$ правата ја сече параболата,

- ✓ $p-2km=0,$ правата ја допира параболата,
- ✓ $p-2km<0,$ правата не ја сече параболата.

Во случај кога правата е паралелна со $y-$оската, односно има равенка

$$x=m,$$

ја разгледуваме равенката

$$y^2=2pm$$

која што во зависност од знакот на $m,$ има две, едно или ниедно решение. За $m>0,$ правата ја сече параболата, за $m=0,$ ја допира и за $m<0,$ не ја сече параболата.

Задача 1. Најди ги координатите на заедничките точки на параболата $y^2=18x$ со правата $6x+y-6=0.$

Ако равенката на правата ја запишеме во експлицитен облик

$$y=-6x+6$$

и добиениот израз за y го замениме во равенката на параболата

$$y^2=18x,$$

ја добиваме квадратната равенка

$$36x^2-90x+36=0$$

чии корени се

$$x_1=2 \text{ и } x_2=\frac{1}{2}.$$

Така добиените вредности за x ги заменуваме во равенката на правата, при што добиваме

$y_1 = -6$ и $y_2 = 3$.

Според тоа, правата и параболата имаат две заеднички точки

$M_1(2,-6)$ и $M_2\left(\frac{1}{2},3\right)$. ♦

Тангента на парабола

Права која допира дадена парабола се нарекува **тангента на параболата**. Точката во која правата ја допира параболата се вика **допирна точка**.

Нека правата

$$y = kx + m$$

е тангента на параболата

$$y^2 = 2px.$$

Да ја определиме допирната точка. Ако дискриминантата на квадратната равенка

$$k^2x^2 + 2(km - p)x + m^2 = 0$$

е еднаква на нула, тогаш нејзиното решение е

$$x_1 = -\frac{-p + km}{k^2} = \frac{2km - km}{k^2} = \frac{m}{k}$$

од каде што добиваме дека

$$y_1 = kx_1 + m = 2m,$$

па следува дека допирната точка на правата со параболата има координати

$$\left(\frac{m}{k}, 2m\right).$$

Нека е дадена точката $T(x_0, y_0)$ од параболата. Да ја определиме равенката на тангентата на параболата во дадената точка. Од изразот за допирна точка добиваме

$$m = \frac{y_0}{2},$$

од каде што следува дека

$$k = \frac{m}{x_0} = \frac{y_0}{2x_0}.$$

Според тоа, равенката на тангентата гласи:

$$y = \frac{y_0}{2x_0}x + \frac{y_0}{2},$$

или помножена со y_0, го добива обликот:

$$yy_0 = \frac{y_0^2}{2x_0}x + \frac{y_0^2}{2} = \frac{y_0^2}{2}\left(\frac{x}{x_0} + 1\right)$$

Ако го искористиме условот, $y_0^2 = 2px_0$, добиваме дека

$$yy_0 = px_0\left(\frac{x}{x_0} + 1\right) = p(x + x_0).$$

Конечно, равенката на тангентата на параболата во дадената точка $T(x_0, y_0)$ од параболата $y^2 = 2pxy$ гласи

$$\boxed{yy_0 = p(x + x_0)}$$

Задача 2. Најди ја равенката на тангентата на параболата $y^2=12x$ паралелна на правата $3x-y+5=0.$

Услов за паралелност на правите

$$y=k_1x+m_1 \text{ и } y=k_2x+m_2$$

е равенството $k_1=k_2$. За дадената права $y=3x+5,\ k_1=3$, па според тоа $k_2=3,$ од каде што следува дека секоја права паралелна на дадената права има облик

$$y=3x+m.$$

Ако го искористиме условот

$$p-2km=0,$$

односно правата $y=kx+m$ ја допира параболата $y^2=2px,$ добиваме дека $6-2\cdot 3m=0,$ односно $m=1$. Бараната равенка на тангентата е

$$y=3x+1.\ \blacklozenge$$

Задача 3. Најди ја равенката на тангентата на параболата $y^2=6x$ во точката $T(6,-6)$.

Точката $T(6,-6)$ припаѓа на параболата. Бараната равенка на тангента гласи $y(-6)=3(x+6),$ или по средувањето добиваме

$$x+2y+6=0.\ \blacklozenge$$

Задача 4. Најди ги равенките на тангентите на параболата $y^2=8x$ повлечени од точката $M(5,-7),$ како и допирните точки.

Нека

$$y = kx + m$$

е равенката на бараната тангента. Тогаш важи

$$4 - 2km = 0.$$

Од условот, точката $M(5,-7)$ лежи на правата $y = kx + m$, добиваме

$$-7 = 5k + m,$$

односно $m = -7 - 5k.$ Ако m го замениме во равенката $4 - 2km = 0,$ по средувањето ја добиваме квадратната равенка

$$5k^2 + 7k + 2 = 0$$

чии корени се

$$k_1 = -\frac{2}{5} \text{ и } k_2 = -1.$$

Ако добиените вредности ги замениме во $m = -7 - 5k$, добиваме

$$m_1 = -5 \text{ и } m_2 = -2.$$

Според тоа, добиените равенки на тангентите се $y = -\frac{2}{5}x - 5$ и $y = -x - 2,$ односно

$$2x + 5y + 25 = 0 \text{ и } x + y + 2 = 0.$$

Ако го искористиме условот за допирна точка

$$\left(\frac{m}{k}, 2m\right)$$

добиваме дека правата $2x + 5y + 25 = 0$ ја допира параболата во точката $\left(\frac{25}{2}, -10\right),$ а правата $x + y + 2 = 0$ ја допира параболата во точката $(2,-4).$

Задачи за самостојна работа

1. Најди ги заедничките точки на параболата $y^2 = 18x$ со правата:

а) $9x - 2y + 2 = 0$ б) $4x - y + 5 = 0$ в) $y - 3 = 0.$

2. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $A(2,1)$ која е средина на тетивата што параболата $y^2 = 4x$ ја отсекува на правата.

3. Дадена е параболата $y^2 = 12x.$ Најди ја тангентата на параболата:

а) во точка од параболата со апсциса $x = 3$

б) паралелна со правата $y = 3x + 5.$

4. Дадена е параболата $y^2 = 4x.$ Најди ја тангентата на параболата која:

а) е нормална на правата $2x - y = 7$

б) со правата $4x - 2y + 9 = 0$ зафаќа агол од $\frac{\pi}{4}.$

5. Најди го параметарот на параболата $y^2 = 2px,$ ако правата $x - 2y + 5 = 0$ е нејзина тангента.

6. Најди го најкраткото растојание од параболата $y^2 = 64x$ до правата $4x + 3y + 46 = 0.$

Задачи за вежбање

1. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC ако $\mathrm{A}(-5,5)$, $\mathrm{B}(7,-3)$ и $\mathrm{C}(3,1)$.

2. Најди ги координатите на точката M која ја дели отсечката AB во однос λ, ако:

а) $\mathrm{A}(10,3)$, $\mathrm{B}(-2,-5)$ и $\lambda=\frac{1}{3}$

б) $\mathrm{A}(-2,-5)$, $\mathrm{B}(13,5)$ и $\lambda=\frac{3}{2}$.

3. Точките $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(-1,3)$ и $C(2,0)$ лежат на една права. Да се определи односот λ во кој точката A ја дели отечката CB.

4. Точките $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(9,-5)$ и $\mathrm{C}(5,4)$ се темиња на даден триаголник ABC. Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето A ја сечат страната BC во точките L и M, соодветно. Најди ги координатите на точките L и M.

5. Равенките на правите на кои лежат отсечките AB, BC и CA се $2x+3y-5=0$, $3x+2y=0$ и $4x+y-5=0$, соодветно. Точката Mја дели отсечката BC во однос $\lambda=2$. Најди ја равенката на правата AM.

6. Најди ја равенката на правата која минува низ точките $\mathrm{M}_1(-7,2)$ и $\mathrm{M}_2(3,-5)$.

7. Докажи дека точките $\mathrm{A}(1,9), \mathrm{B}(-2,3)$ и $\mathrm{C}(-5,-3)$ лежат на една права.

8. Дадени се точките $\mathrm{A}(-2,-1), \mathrm{B}(1,2)$ и $\mathrm{C}(-1,4)$. Запиши ги координатите на точката D, ако ABCDе паралелограм.

9. Дадени се темињата $A(-3,5)$ и $B(1,7)$ на паралелограмот $ABCD$ и пресечната точка $Q(1,1)$ на неговите дијагонали. Најди ги координатите на другите две темиња на паралелограмот.

10. Дадени се точките $A(3,3), B(-2,3)$ и $C(-1,0)$. Докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

11. Најди го растојанието d од точката $M(2,3)$ до правата:

а) $3x + 4y - 25 = 0$ б) $12x - 5y + 4 = 0$.

12. Запиши ги равенките на медијаните на триаголникот ABC, ако $A(3,2), B(5,4)$ и $C(1,4)$.

13. Даден е триаголник ABC. Запиши ги координатите на:

а) тежиштето T на триаголникот, ако $A(-8,1)$, $B(1,2)$ и $C(-5,-3)$

б) ортоцентарот H на триаголникот, ако $A(-4,8)$, $B(1,-7)$ и $C(7,5)$.

14. Дадени се точките $A(-2,-2), B(7,1)$ и $C(3,3)$. Најди:

а) ја должината на отсечката AB,

б) го растојанието на точката C од правата AB,

в) ја плоштината на триаголникот ABC.

15. Најди ги координатите на точката M која е симетрична на точката $N(3,2)$ во однос на правата $x - y + 5 = 0$.

16. Пресметај ја плоштината на даден квадрат, ако две негови страни лежат на правите $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$.

17. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-3,8)$ и со координатните оски заградува триаголник со плоштина $P=6.$

18. Дадени се точките $M(2,-1), G(1,1)$ и $E(-1,-3).$ Најди ги координатите на темињата на триаголникот $ABC,$ ако точката M е средина на отсечката $AB,$ точката G е тежиште на триаголникот $ABC,$ а точката E лежи на правата определена со висината низ темето $C.$

19. Основата на рамнокрак триаголник лежи на правата $x-2y+3=0,$ една негова страна лежи на правата $4x+y+5=0,$ а другата минува низ точката $P\left(\frac{6}{5},\frac{28}{5}\right).$

а) Запиши ги координатите на тежиштето на дадениот триаголник.

б) Пресметај ја плоштината на триаголникот.

20. Страните $AB,$ $BC,$ CD и DA на четриаголникот $ABCD$ се дадени со равенките $5x+y+13=0,$ $2x-7y-17=0,$ $3x+2y-13=0$ и $3x-4y+17=0,$ соодветно. Најди ги равенките на правите на кои лежат дијагоналите на дадениот четриаголник.

21. Најди ги равенките на тангентите на кружницата зададена со равенката $x^2+y^2-14y+1=0$ кои се паралелни на правата $x=13.$

22. Дадени се точките $A(0,-6)$ и $B(3,0).$

а) Најди ги координатите на центрите на кружниците кои ги допираат координатните оски и ја имаат за оска на симетрија правата AB.

б) Запиши ги равенките на тие кружници.

23. Нека OAB е триаголник определен со координатните оски и правата $3x-4y-24=0$. Запиши ја равенката на кружницата:

а) опишана околу триаголникот OAB,

б) впишана во триаголникот OAB, и

в) најди ги координатите на допирната точка со дадената права.

24. Најди ги ексцентрицитетот и координатите на фокусите на елипсата $3x^2+4y^2=12$.

25. Елипса има голема полуоска 20 и мала полуоска 5. Пресметај ја должината на тетивата која елипсата ја отсекува од правата $x+4y-28=0$.

26. Запиши ја равенката на хиперболата, ако растојанието меѓу темињата е 20, а растојанието меѓу фокусите 30.

27. За кои вредности на параметарот k правата $y=kx$ ја сече хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

28. Запиши ја равенката на хиперболата која минува низ точките $M(-6\sqrt{2},3)$ и $N\left(3\sqrt{5},-\frac{3}{2}\right)$.

29. Најди ги пресечните точки на кружницата $x^2+y^2+4y=1$ со хиперболата $x^2-y^2=1.$

30. Најди ги координатите на пресечните точки на асимптотите на хиперболата $x^2-3y^2=12$ со кружницата која минува низ центарот на хиперболата, а центарот е во десниот фокус на хиперболата.

31. Запиши ја равенката на тангентата на параболата $y^2=4x$ која на координатните оски отсекува еднакви отсечоци.

32. Ако правата $y=kx+m$ ја сече параболата $y=2px,$ тогаш тангентите на параболата повлечени во пресечните точки се сечат во точката $S\left(\frac{m}{k},\frac{p}{k}\right)$. Докажи!

33. Асимптотите на хиперболата $225x^2-144y^2=400$ отсекуваат на правата $5x+12y+80=0$ отсечка која е дијаметар на кружница. Запиши ја равенката на кружницата.

34. Малата оска на една елипса е $2b=9,$ а десниот фокус се совпаѓа со фокусот на параболата $y^2=24x.$ Да се определи равенката на тангентата на параболата паралелна со правата што минува низ заедничкиот фокус и низ пресечната точка на елипсата со негативниот дел на $x-$оската.

35. Заедничките тангенти на параболата $y^2=4x$ и кружницата $x^2+y^2+2x-8y+8=0$ заградуваат триаголник околу кој е опишана кружница. Запиши ја равенката на кружницата.

36. Запиши ги равенките на заедничките тангенти на кружницата $x^2+y^2=16$ и елипсата $9x^2+25y^2=225.$

37. Растојанието од левиот фокус на елипсата $4x^2 + 5y^2 = 20$ до десниот фокус на хиперболата $16x^2 - 9y^2 = 144$ е еднакво на апсцисата на точката A која лежи на правата повлечена низ точките $B(2,-3)$ и $C(-5,4)$. Запиши ја равенката на кружницата со центар во точката A и радиус еднаков на должината на отсечката BC.

4. Аналитичка геометрија во простор

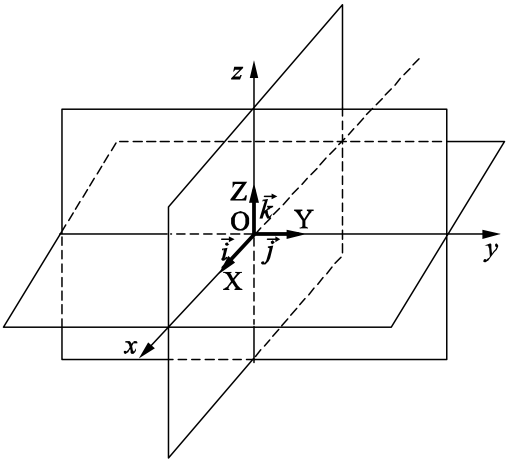
4.1. Вектори во простор

Како основна алатка во решавањето на бројни проблеми во аналитичката геометрија во простор се користат векторите. Воведувањето на координатниот начин на задавање на векторите го овозможува решавањето на геометриски проблеми преку користење алгебарски методи. Заради тоа насловената тема ја започнуваме со воведување алгебарски карактеристики на векторите во просторот.

4.1.1 Координати на вектор во простор

Нека во просторот се дадени три заемно нормални вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, такви што $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, и една фиксна точка O. Ги конструираме векторите $(OX)\in\vec{i}$, $(OY)\in\vec{j}$ и $(OZ)\in\vec{k}$. На секоја од правите OX, OY и OZ ја избираме за позитивна насока насоката на векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, соодветно (цртеж 1).

Вака добиените прави ги викаме **координатни оски**, првата се нарекува $x-$оска или апсциса, втората $y-$оска или ордината, а третата $z-$оска или апликата. Трите рамнини определени со паровите оски xy, yz и xz се нарекуваат **координатни рамнини**.

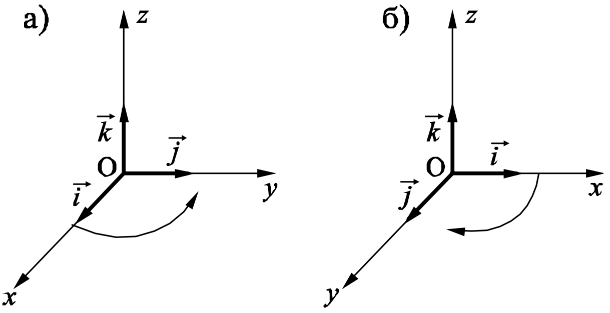


Цртеж 1

Со изборот на точката O и векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ велиме дека сме избрале **правоаголен Декартов координатен систем**, кој ќе го означуваме со $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ или само со $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Точката O се нарекува **координатен почеток**, а векторите $\vec{\mathrm{i}}$, $\vec{\mathrm{j}}$ и $\vec{\mathrm{k}}$ **координатни вектори**. На трите бројни оски за единица мера за должина ја избираме должината на координатните вектори. Од тие причини координатните вектори ги нарекуваме уште и **единични вектори**.

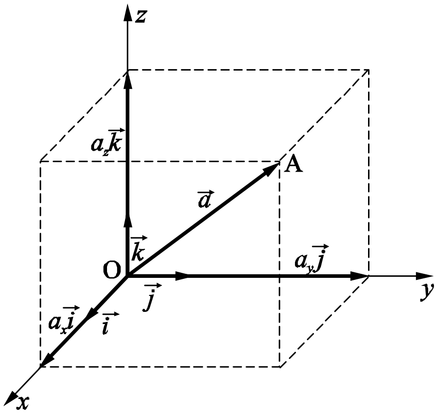
Во зависност од ориентацијата на координатните оски разликуваме десен и лев координатен систем (цртеж 2).



Цртеж 2

Поточно, координатниот систем се вика **десен координатен систем** ако сликата на x –оската при ротација околу z –оската за агол $\frac{\pi}{2}$ во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот се совпаѓа со y –оската (цртеж 2а). Во спротивно координатниот систем се вика **лев координатен систем** (цртеж 2б). Координатните оски на десниот (левиот) координатен систем во просторот може да ги претставиме и со трите прста од десната (левата) рака и тоа: $x-$оската со палецот, $y-$оската со показалецот, а $z-$оската со средниот прст.

Нека $\vec{a}$ е произволен вектор во просторот и нека $(OA)\in\vec{a}$ (цртеж 3). Познато ни е веќе дека кои било четири вектори се линеарно зависни. Уште повеќе, ако три од нив не се компланарни, тогаш четвртиот може да се изрази како нивна линеарна комбинација.



Цртеж 3

Според тоа постои разложувањето

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$

каде што $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се координатни вектори.

Разложувањето е единствено, бидејќи ако постои уште едно такво разложување

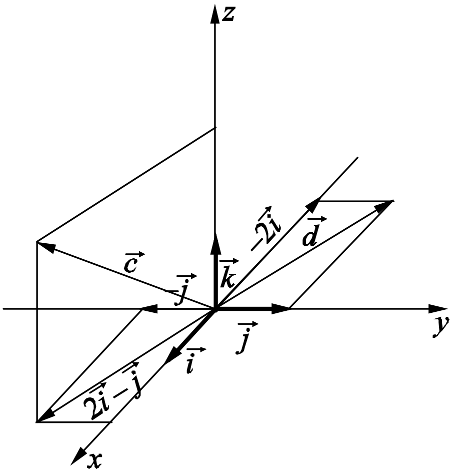
$$\vec{a}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

тогаш имаме дека $\vec{a}-\vec{a}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}=\vec{0},$ од каде што заради линеарната независност на векторите $\vec{i},$ $\vec{j}$ и $\vec{k}$ следува дека

$$a_x=b_x,\ a_y=b_y \text{ и } a_z=b_z.$$

Дефиниција 1. Коефициентите во разложувањето на даден вектор $\vec{a}$ се нарекуваат **координати** на векторот во однос на избран координатен систем $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$; записот $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ е координатно претставување на векторот $\vec{a}$. Притоа a_x се нарекува **прва координата**, a_y **втора координата**, а a_z се нарекува **трета координата** на векторот $\vec{a}$.

Координатните претставувања на единечните вектори се $\vec{i}=(1,0,0),$ $\vec{j}=(0,1,0)$ и $\vec{k}=(0,0,1),$ и за нултиот вектор важи $\vec{0}=(0,0,0).$



Цртеж 4

Пример 1. Векторот $\vec{a}=7\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$ има координати $a_x=7$, $a_y=4$ и $a_z=-3$, а векторот $\vec{b}=-\frac{\vec{i}}{2}+\vec{k}$ има координати $b_x=-\frac{1}{2}$, $b_y=0$ и $b_z=1$; $(7,4,-3)$ е координатното претставување на векторот $\vec{a}$, додека $\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$ е координатното претставување на векторот $\vec{b}$.

Подредените тројки $\left(2,-1,\frac{5}{2}\right)$ и $(-2,1,0)$ ги претставуваат векторите $\vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}+\frac{5}{2}\vec{k}$ и $\vec{d}=-2\vec{i}+\vec{j}$, соодветно. На цртеж 4 векторите $\vec{c}$ и $\vec{d}$ се претставени геометриски во координатен систем $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ги координатните претставувања на векторите:

а) $\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$; б) $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$;

в) $\vec{a}=\vec{j}-2\vec{k}$; г) $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{k}$.

2. Разложи ги координатните претставувања на векторите

а) $\vec{a}=(0,-1,4)$; б) $\vec{a}=(7,0-1)$;

в) $\vec{a}=(0,-2,0)$; г) $\vec{a}=(1,-2,-6)$,

по координатните вектори.

3. Во координатен систем $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ конструирај ги векторите:

а) $\vec{a}=\overrightarrow{2i}+3\vec{j}+4\vec{k}$; б) $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$;

в) $\vec{a}=\overrightarrow{7j}-2\vec{k}$; г) $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{k}$.

4. Конструирај ги векторите:

а) $\vec{a}=(3,1,5)$; б) $\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},1,4\right)$;

в) $\vec{a}=(0,-2,0)$; г) $\vec{a}=(0,-1,2)$.

4.1.2. Операции со вектори зададени со координатни претставувања

Нека се дадени векторите $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$. Тогаш од

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \text{ и } \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

добиваме дека

$$\begin{aligned}\vec{a}\pm\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\pm(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=\\&=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k},\end{aligned}$$

односно

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z).$$

Според тоа, секоја координата на збирот од два вектори е еднаква на збирот на соодветните координати на векторите, додека секоја координата на разликата на еден вектор со друг е еднаква на разликата на соодветните координати на векторите.

Пример 1. Ако $\vec{a}=(2,1,3)$ и $\vec{b}=(0,-2,1)$, тогаш координатните претставувања на збирот $\vec{a}+\vec{b}$ и разликата $\vec{a}-\vec{b}$ се, соодветно,

$$\vec{a}+\vec{b}=(2,1,-3)+(0,-2,1)=(2+0,1+(-2),(-3)+1)=(2,-1,-2),$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(2,1,-3)-(0,-2,1)=(2-0,1-(-2),(-3)-1)=(2,3,-4).$$ ♦

Нека е даден векторот $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и нека λ е произволен скалар. Тогаш од

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

следува дека

$$\lambda\vec{a}=\lambda(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k},$$

односно

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

Значи, секоја координата на производот на еден вектор со скалар е еднаква на производот на соодветната координата на векторот со дадениот скалар.

Пример 2. Ако $\vec{a}=(-1,0,3)$, тогаш координатните претставувања на векторите $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{a}$. се, соодветно

$$2\vec{a}=2(-1,0,3)=(2(-1),2\cdot 0,2\cdot 3)=(-2,0,6),$$

$$-3\vec{a}=-3(-1,0,3)=(-3(-1),(-3)\cdot 0,(-3)\cdot 3)=(3,0,-9),$$

$$\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(-1,0,3)=\left(\frac{1}{2}(-1),\frac{1}{2}\cdot 0,\frac{1}{2}\cdot 3\right)=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right).$$ ♦

Теорема 1. Ако $\overrightarrow{a_1}=(p_1,q_1,r_1)$, $\overrightarrow{a_2}=(p_2,q_2,r_2),\dots,\overrightarrow{a_k}=(p_k,q_k,r_k)$ и ако λ_1, $\lambda_2,\dots,\lambda_k$ се дадени скалари, тогаш векторот

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\dots+\lambda_k\overrightarrow{a_k}$$

има координатно претставување

$$(\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\dots+\lambda_kp_k,\lambda_1q_1+\lambda_2q_2+\dots+\lambda_kq_k,\lambda_1r_1+\lambda_2r_2+\dots+\lambda_kr_k).$$

Доказ. Согласно со својствата на операциите собирање на вектори и множење на вектор со скалар, како и својствата на операциите собирање и множење реални на броеви, од равенствата

$$\overrightarrow{a_1} = p_1\vec{i} + q_1\vec{j} + r_1\vec{k},$$

$$\overrightarrow{a_2} = p_2\vec{i} + q_2\vec{j} + r_2\vec{k},$$

....

$$\overrightarrow{a_k} = p_k\vec{i} + q_k\vec{j} + r_k\vec{k},$$

следува дека

$$\begin{aligned}&\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{a_k} = \\ &= \left(\lambda_1 p_1\vec{i} + \lambda_1 q_1\vec{j} + \lambda_1 r_1\vec{k}\right) + \left(\lambda_2 p_2\vec{i} + \lambda_2 q_2\vec{j} + \lambda_2 r_2\vec{k}\right) + \ldots \\ &\quad + \left(\lambda_k p_k\vec{i} + \lambda_k q_k\vec{j} + \lambda_k r_k\vec{k}\right) = \\ &= \left(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_k p_k\right)\vec{i} + \left(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \ldots + \lambda_k q_k\right)\vec{j} + \\ &\quad + \left(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \ldots + \lambda_k r_k\right)\vec{k}\end{aligned}$$

Според тоа, добиваме дека

$$\begin{aligned}&\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{a_k} = \\ &= (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_k p_k, \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \ldots + \lambda_k q_k, \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \ldots + \lambda_k r_k).\end{aligned}$$

Пример 3. Ако $\overrightarrow{a_1} = (0,2,0)$, $\overrightarrow{a_2} = (1,3,0)$, $\overrightarrow{a_3} = (3,0,1)$ и $\overrightarrow{a_4} = (-2,1,1)$, тогаш координатните претставувања на векторите $4\overrightarrow{a_1} - 3\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3}$ и $\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2} + 3\overrightarrow{a_3} - 2\overrightarrow{a_4}$ се, соодветно

$$4\overrightarrow{a_1} - 3\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3} = (4\cdot 0 - 3\cdot 1 - 3, 4\cdot 2 - 3\cdot 3 - 0, 4\cdot 0 - 3\cdot 0 - 1) = (-6,-1,-1),$$

$$\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2} + 3\overrightarrow{a_3} - 2\overrightarrow{a_4} =$$

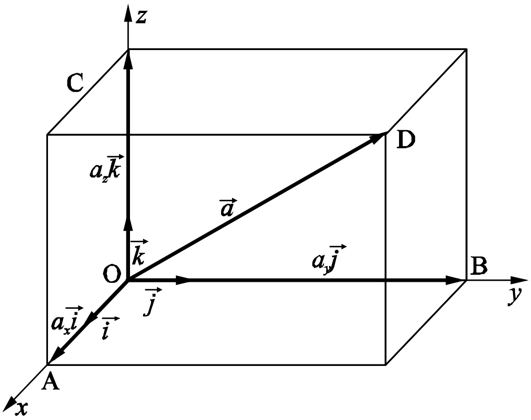
$$= (0-2\cdot1+3\cdot3-2\cdot(-2), 2-2\cdot3+3\cdot0-2\cdot1, 0-2\cdot0+3\cdot1-2\cdot1 =$$
$$= (11,-6,1)$$

◆

Теорема 2. Ако $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, тогаш $|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$.

Доказ. Векторот $\vec{a}$ може да го запишеме во облик

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$



Цртеж 1

Векторите $(OA)\in a_x\vec{i}$, $(OB)\in a_y\vec{j}$ и $(OC)\in a_z\vec{k}$ се рабови на правоаголен паралелопипед и притоа модулот на векторот $(OD)\in\vec{a}$ е еднаков на должината на неговата дијагонала (цртеж 1). Тогаш

$$|(OD)|^2=|(OA)|^2+|(OB)|^2+|(OC)|^2,$$

односно $|a_x\vec{i}|^2=a_x{}^2$, Поради $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, имаме дека

$$|a_x\vec{i}|^2=a_x{}^2,\ |a_y\vec{i}|^2=a_y{}^2 \text{ и } |a_z\vec{i}|^2=a_z{}^2,$$

од каде што следува дека $|\vec{a}|^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2$, односно

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}.$$

Пример 4. Модулот на векторот $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$ е

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-7)^2} = 3\sqrt{6}. \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди го координатното претставување на збирот на векторите $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$, ако:

а) $\overrightarrow{a_1} = (-4,1,0)$ и $\overrightarrow{a_2} = (3,0,-1)$;

б) $\overrightarrow{a_1} = (-7,4,-3)$ и $\overrightarrow{a_2} = (-5,0,6)$.

2. Запиши ги координатното претставување на разликата на векторот $\overrightarrow{a_1}$ со векторот $\overrightarrow{a_2}$, ако:

а) $\overrightarrow{a_1} = (-2,6,0)$ и $\overrightarrow{a_2} = (-5,-3,2)$;

б) $\overrightarrow{a_1} = (0,1,7)$ и $\overrightarrow{a_2} = (3,-7,-1)$.

3. Дадени се векторите $\overrightarrow{a_1} = \left(\frac{1}{2},3,7\right)$ и $\overrightarrow{a_2} = (2,-3,0)$. Најди го координатното претставување на векторите:

а) $3\overrightarrow{a_1} - 4\overrightarrow{a_2}$; б) $-2\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$; в) $\overrightarrow{a_1} - 6\overrightarrow{a_2}$.

4. Дадени се векторите $\overrightarrow{a_1} = (0,0,-4)$, $\overrightarrow{a_2} = (3,-4,-3)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1,3,0)$ и $\overrightarrow{a_4} = (0,-2,1)$. Запиши го координатото претставување на векторите:

а) $\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2} + 4\overrightarrow{a_3}$; б) $2\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}$;

в) $-\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_2}+3\overrightarrow{a_3}-4\overrightarrow{a_4}$.

5. Два вектори се еднакви ако и само ако им се еднакви соодветните координати. Докажи!

6. Пресметај го модулот на векторот $\vec{a}=5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$.

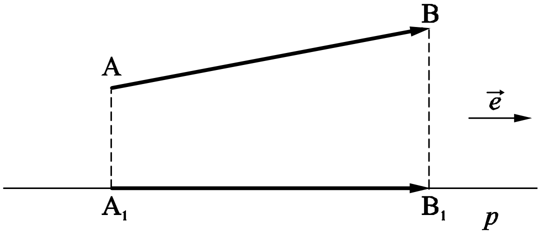
7. Покажи дека векторите $\vec{a}=(1,-1,2)$, $\vec{b}=(1,2,-4)$ и $\vec{c}=(3,1,1)$ се линеарно независни.

4.1.3. Ортогонална проекција на вектор

Нека се дадени правата p и векторот (AB) (цртеж 1). **Ортогонална проекција** на векторот (AB) врз правата p е векторот (A_1B_1), каде што A_1 и B_1 се ортогоналните проекции на точките A и B врз правата p, и пишуваме

$$\mathrm{pr}_p(AB)=(A_1B_1).$$

На правата p ја избираме за позитивна насока насоката на избран вектор $\vec{e}\neq\vec{0}$ паралелен на правата p. Вака ориентирана, правата p ја нарекуваме **оска**, а векторот (A_1B_1) **ортогонална проекција** на векторот AB врз оската p.



Цртеж 1

Ако $(AB)\sim(CD)$, тогаш $(A_1B_1)\sim(C_1D_1)$, односно ортогоналните проекции на два еквиполентни вектори се еквиполентни вектори. Претходната дискусија допушта воведување на поимот **ортогонална проекција на слободен вектор** $\vec{a}$ врз слободен вектор $\vec{e}\neq\vec{0}$.

Имено, ако (AB) е произволен врзан вектор од слободниот вектор $\overrightarrow{AB}$ и ако (A_1B_1) е ортогоналната проекција на векторот (AB) врз оска ориентирана со векторот $\vec{e}$, велиме дека слободниот вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ е ортогонална проекција на слободниот вектор $\overrightarrow{AB}$ врз векторот $\vec{e}$ и пишуваме:

$$\mathrm{pr}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}.$$

Нека $\vec{a}$ е произволен вектор. Бројот

$$\frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}},$$

каде што $\overrightarrow{e_0}$ е единечен вектор колинеарен со $\vec{e}$, се вика **алгебарска вредност** на ортогоналната проекција на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{e}$. Од дефиницијата за делење на колинеарни вектори следува дека

$$\frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}}=\frac{|\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}|}{|\overrightarrow{e_0}|}=|\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}|,$$

ако векторите $\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}$ и $\overrightarrow{e_0}$ имаат иста насока, и

$$\frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}}=-\frac{|\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}|}{|\overrightarrow{e_0}|}=-|\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}|,$$

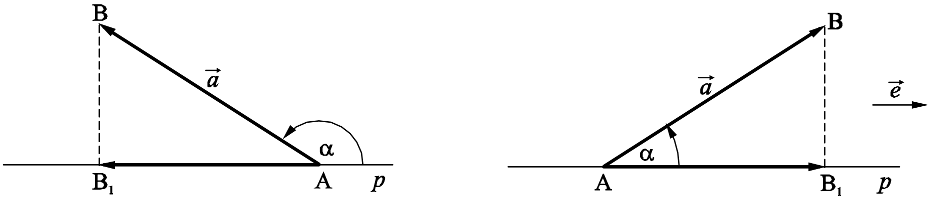
ако векторите $\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}$ и $\overrightarrow{e_0}$ имаат спротивни насоки.

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два произволни вектори. Ако $(OA)\in\vec{a}$ и $(OB)\in\vec{b},$ тогаш **агол** меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е аголот меѓу полуправите OA и OB и ќе го означуваме со $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. Да напомнеме дека $0\le(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\le\pi.$

Теорема 1. Алгебарската вредност на ортогонална проекција на векторот $\vec{a}$ врз вектор $\vec{e}\neq\vec{0}$ е еднаква на производот од модулот на векторот $\vec{a}$ и косинусот од аголот $(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$.

Доказ. Да го разгледаме векторот $(AB)\in\vec{a}$ чијашто почетна точка A лежи на оската p која има иста насока како векторот $\vec{e}$ (цртеж 2).

Да ја означиме со B_1 ортогоналната проекција на точката B врз оската p.



Цртеж 2

Ако аголот $(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$ е остар, тогаш имаме дека

$$|\overrightarrow{AB_1}|=|\overrightarrow{AB}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}}).$$

Од $(AB_1)\in \mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}$ и $(AB)\in\vec{a}$, имаме $|\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}|=|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{e})$, односно

$$\frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}}=|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{e}).$$

Ако аголот $(\vec{a},\vec{e})$ е тап, тогаш имаме дека

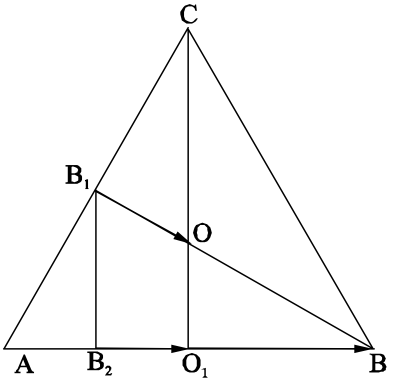
$$|\overrightarrow{AB_1}|=|\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-(\vec{a},\vec{b}))=-|\overrightarrow{AB}|\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

Бидејќи $(AB_1)\in \mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}$ и $(AB)\in\vec{a}$, како и во претходниот случај добиваме дека

$$\frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}}=|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{e}).$$

Доказот во случај кога $(\vec{a},\vec{e})=0^o$, $(\vec{a},\vec{e})=90^o$ или $(\vec{a},\vec{e})=180^o$, како и случајот кога $\vec{a}=\vec{0}$ му го препуштаме на читателот.

Пример 1. Нека ABC е рамностран триаголник со страна a. Да ја означиме со O пресечната точка на висините на триаголникот, а со B_1 средината на отсечката AC (цртеж 3).



Цртеж 3

Ортогоналната проекција на векторот $\overrightarrow{B_1O}$ врз векторот $\vec{e} = \overrightarrow{AB}$ е векторот $\overrightarrow{B_2O_1}$, каде што B_2 е ортогоналната проекција на точката B_1 врз правата AB, а O_1 е ортогоналната проекција на точката O врз правата AB. Значи

$$pr_{\vec{e}}\overrightarrow{B_1O} = \overrightarrow{B_2O_1}.$$

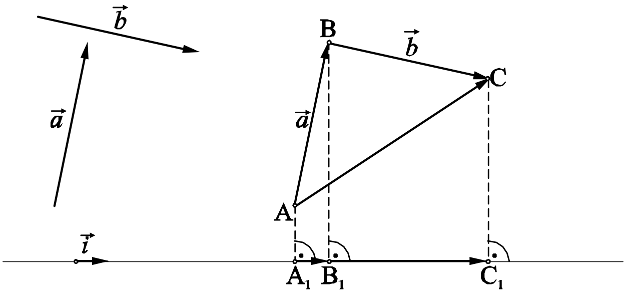
Бидејќи $(\overrightarrow{B_1O}, \vec{e}) = 30^o$, имаме дека

$$\frac{\overrightarrow{B_2O_1}}{\overrightarrow{e_0}} = |\overrightarrow{B_1O}|\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{B_1O}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{4}. \blacklozenge$$

Теорема 2. Алгебарската вредност на ортогоналната проекција на збир од два вектори е еднаква на збирот од алгебарските вредности на ортогоналните проекции на двата вектори.

Доказ. Нека се дадени два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ако $(AB) \in \vec{a}$ и $(BC) \in \vec{b}$, тогаш имаме дека $(AC) \in \vec{a} + \vec{b}$ (цртеж 4). Нека

$$pr_{\vec{e}}\vec{a} = \overrightarrow{A_1B_1},\quad pr_{\vec{e}}\vec{b} = \overrightarrow{B_1C_1} \text{ и } pr_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{A_1C_1}$$



Цртеж 4

Од равенството

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$$

имаме дека

$$\mathrm{pr}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a} + \mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{b},$$

од каде што следува дека

$$\frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b})}{\overrightarrow{e_0}}\overrightarrow{e_0} = \frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}}\overrightarrow{e_0} + \frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{b}}{\overrightarrow{e_0}}\overrightarrow{e_0}.$$

Бидејќи

$$\left(\frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b})}{\overrightarrow{e_0}} - \left(\frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}} + \frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{b}}{\overrightarrow{e_0}}\right)\right)\overrightarrow{e_0} = \vec{0},$$

поради $\overrightarrow{e_0} \neq \vec{0}$ добиваме дека

$$\frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b})}{\overrightarrow{e_0}} = \frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}} + \frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{b}}{\overrightarrow{e_0}}.$$

Пример 2. За три дадени вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, важи

$$\frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}(\vec{a}-\vec{b})}{\overrightarrow{e_0}} = \frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}(\vec{a}+(-\vec{b}))}{\overrightarrow{e_0}} = \frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}} + \frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}(-\vec{b})}{\overrightarrow{e_0}} = \frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}} - \frac{\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{b}}{\overrightarrow{e_0}},$$

односно алгебарска вредност на ортогоналната проекција на разликата на еден вектор со друг е еднаква на разликата од алгебарската вредност на ортогоналната проекција на едниот вектор со алгебарската вредност на ортогоналната проекција на другиот вектор. Понатаму, алгебарската вредност на ортогоналната проекција на збир од три вектори е еднаква на збирот од алгебарските вредности на ортогоналните проекции на векторите, односно

$$\frac{pr_{\vec e}(\vec a+\vec b+\vec c)}{\overrightarrow{e_0}}=\frac{pr_{\vec e}\vec a+(\vec b+\vec c)}{\overrightarrow{e_0}}=\frac{pr_{\vec e}\vec a}{\overrightarrow{e_0}}+\frac{pr_{\vec e}(\vec b+\vec c)}{\overrightarrow{e_0}}=$$

$$=\frac{pr_{\vec e}\vec a}{\overrightarrow{e_0}}+\frac{pr_{\vec e}\vec b}{\overrightarrow{e_0}}+\frac{pr_{\vec e}\vec c}{\overrightarrow{e_0}}. \ ♦$$

Теорема 3. Координатите на векторот $\vec a$ се алгебарски вредности на ортогоналната проекција на векторот $\vec a$ врз соодветните координатни вектори.

Доказ. Нека е даден векторот $\vec a=(a_x,a_y,a_z)$. Тогаш

$$\vec a=a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k.$$

Согласно со крајот од пример 2, за проекцијата на векторот $\vec a$ врз векторот $\vec i$ имаме

$$pr_{\vec i}\vec a=pr_{\vec i}a_x\vec i+pr_{\vec j}a_y\vec j+pr_{\vec i}a_y\vec k.$$

Тогаш за алгебарската вредност на проекцијата на векторот $\vec a$ врз векторот $\vec i$ добиваме

$$\frac{pr_{\vec i}\vec a}{\vec i}=\frac{pr_{\vec i}a_x\vec i}{\vec i}+\frac{pr_{\vec i}a_y\vec j}{\vec i}+\frac{pr_{\vec i}a_z\vec k}{\vec i}.$$

Алгебарската вредност $\frac{a_x\vec i}{\vec i}$ на векторот $pr_{\vec i}a_x\vec i$ е еднаква на $|a_x|$, ако векторот $a_x\vec i$ има иста насока со векторот $\vec i$, односно, ако

$a_x > 0,$ додека таа е еднаква на $-|a_x|,$ ако векторот $a_x\vec{i}$ има спротивна насока со векторот $\vec{i},$ односно, ако $a_x < 0.$

Ако $a_x > 0,$ тогаш $(a_x\vec{i},\vec{i}) = 0,$ и согласно со теорема 2, имаме

$$|a_x|\cos(a_x\vec{i},\vec{i}) = |a_x| = a_x.$$

Слично на ова, ако $a_x < 0,$ тогаш $(a_x\vec{i},\vec{i}) = \pi,$ така што

$$|a_x|\cos(a_x\vec{i},\vec{i}) = -|a_x| = a_x.$$

Понатаму, бидејќи $(a_y\vec{j},\vec{i}) = (a_z\vec{k},\vec{i}) = \frac{\pi}{2},$ алгебарските вредности на векторите $pr_{\vec{i}}a_y\vec{j}$ и $pr_{\vec{i}}a_z\vec{j}$ се еднакви на нула. Според тоа, може да заклучиме дека

$$\frac{pr_{\vec{i}}\vec{a}}{\vec{i}} = a_x.$$

Слично се покажува и дека важат равенствата

$$\frac{pr_{\vec{j}}\vec{a}}{\vec{j}} = a_y \text{ и } \frac{pr_{\vec{k}}\vec{a}}{\vec{k}} = a_z.$$

Според теорема 1 имаме дека

$$\frac{pr_{\vec{i}}\vec{a}}{\vec{i}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{i}), \quad \frac{pr_{\vec{j}}\vec{a}}{\vec{j}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{j}) \text{ и } \frac{pr_{\vec{k}}\vec{a}}{\vec{k}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{k}).$$

Конечно, добиваме дека важат равенствата

$$a_x = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{i}), \quad a_y = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{j}) \text{ и } a_z = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{k}).$$

Задачи за самостојна работа

1. Во кој случај $pr_{\vec{e}}\vec{a} = \vec{0}$?

2. Докажи дека за произволен вектор $\vec{a}$ важи неравенството $|\text{pr}_{\vec{e}}\vec{a}| \leq |\vec{a}|$. Во кој случај важи равенство?

3. Најди ја алгебарската вредност на ортогоналната проекција на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{e}$, ако

а) $|\vec{a}| = 6$ и $(\vec{a}, \vec{e}) = 60^{\circ}$; б) $|\vec{a}| = 8$ и $(\vec{a}, \vec{e}) = 90^{\circ}$;

в) $|\vec{a}| = 5$ и $(\vec{a}, \vec{e}) = 0^{\circ}$; г) $|\vec{a}| = 6$ и $(\vec{a}, \vec{e}) = 180^{\circ}$.

4. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два ненулти вектори. Докажи дека важи равенството $|\vec{a}||\text{pr}_{\vec{a}}\vec{b}| = |\vec{b}||\text{pr}_{\vec{b}}\vec{a}|$.

5. Докажи дека за произволен скалар λ важи равенството $\text{pr}_{\vec{e}}\lambda\vec{a} = \lambda\text{pr}_{\vec{e}}\vec{a}$.

6. Нека $\dfrac{\text{pr}_{\vec{e}}\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}} = -3$ и $\dfrac{\text{pr}_{\vec{e}}\vec{b}}{\overrightarrow{e_0}} = 4$. Пресметај

а) $\dfrac{\text{pr}_{\vec{e}}3\vec{a}}{\overrightarrow{e_0}}$; б) $\dfrac{\text{pr}_{\vec{e}}(\vec{b} - \vec{a})}{\overrightarrow{e_0}}$; в) $\dfrac{\text{pr}_{\vec{e}}\left(3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)}{\overrightarrow{e_0}}$.

4.2. Скаларен производ на вектори

Покрај операциите собирање, одземање и множење на вектор со скалар, во векторската алгебра има смисла и **множењето на вектори**. Множењето на два вектори може да се дефинира на два начина во зависност од тоа дали сакаме резултатот од извршената операција да биде скалар или вектор. Според тоа, ќе разликуваме скаларно и векторско множење на два вектори.

4.2.1. Дефиниција и својства на скаларниот производ на вектори

Дефиниција 1. Скаларен производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарекува бројот еднаков на производот од модулите на овие вектори и косинусот од аголот меѓу нив, и се означува со $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$. Значи,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

Непосредно од дефиницијата на скаларен производ следува дека скаларниот производ е позитивен број, негативен број или е еднаков на нула во зависност од тоа дали аголот меѓу векторите соодветно е остар, тап или прав, или пак едниот од векторите е нултиот вектор.

Пример 1. Скаларниот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за кои што важи

а) $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3$ и $(\vec{a},b)=60^{\circ}$, е бројот

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 3\cdot\cos 60^{\circ}=3;$$

б) $|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=7$ и $(\vec{a},b)=120^{\circ}$, е бројот

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=4\cdot 7\cdot\cos 120^{\circ}=-14.\ \blacklozenge$$

Теорема 1. За скаларниот производ на два вектори точни се следниве тврдења:

(i) (комутативност) За секои два вектори $\vec{a},\ \vec{b} \in V$ важи

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

(ii) (асоцијативност) За секои два вектори $\vec{a},\ \vec{b} \in V$ и за секој $p \in R$ важи

$$(p\vec{a}) \cdot \vec{b} = p(\vec{a}\vec{b}).$$

(iii) (дистрибутивност) За секои три вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in V$ важи

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Доказ. Ако еден од векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ е нултиот вектор, тогаш очигледно тврдењата од теоремата се точни.

(i) Нека $\vec{a},\ \vec{b} \in V.$ Тогаш имаме дека

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}||\vec{a}|\cos(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

согласно со асоцијативноста и комутативноста на множењето реални броеви.

(ii) Нека $\vec{a},\ \vec{b} \in V$ и нека $p \in R.$ Ќе ги разгледаме следниве два случаја:

Ако $p > 0,$ тогаш $(\vec{a}, \vec{b}) = (p\vec{a}, \vec{b}).$ Од дефиницијата на скаларниот производ и асоцијативноста на множењето реални броеви имаме

$$(p\vec{a}) \cdot \vec{b} = |p\vec{a}||\vec{b}|\cos(p\vec{a}, \vec{b}) = |p||\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= p(|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})) = p(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Ако $p < 0,$ тогаш $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi - (p\vec{a}, \vec{b})$ и $|p| = -p.$ Според тоа,

$$(p\vec{a})\cdot\vec{b} = |p\vec{a}||\vec{b}|\cos(p\vec{a},\vec{b}) = |p||\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-(\vec{a},\vec{b})) =$$

$$= -p(|\vec{a}||\vec{b}|(-\cos(\vec{a},\vec{b}))) = p(|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})) = p(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

(iii) Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\in V$. Користејќи ја теоремата за збир на проекции добиваме дека

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\frac{pr_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})}{\overrightarrow{a_0}} = |\vec{a}|\left(\frac{pr_{\vec{a}}\vec{b}}{\overrightarrow{a_0}}+\frac{pr_{\vec{a}}\vec{c}}{\overrightarrow{a_0}}\right) =$$

$$= |\vec{a}|\frac{pr_{\vec{a}}\vec{b}}{\overrightarrow{a_0}} + |\vec{a}|\frac{pr_{\vec{a}}\vec{c}}{\overrightarrow{a_0}} = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Пример 2. Скаларниот производ на векторите $\vec{a}=3\vec{p}+4\vec{q}$ и $\vec{b}=12\vec{p}-5\vec{q}$, каде што $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$ и $(\vec{p},\vec{q})=60^0$, е скаларот

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\vec{p}+4\vec{q})(12\vec{p}-5\vec{q}) = 36|\vec{p}|^2 + 33(\vec{p}\cdot\vec{q}) - 20|\vec{q}|^2 = 63. \blacklozenge$$

Во продолжение ќе докажеме уште некои својства на скаларниот производ.

Теорема 2. Модулот $|\vec{a}|$ на векторот $\vec{a}$ е квадратен корен од скаларниот производ $\vec{a}\cdot\vec{a}\left(=\vec{a}^2\right)$, значи

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\left(=\sqrt{\vec{a}^2}\right).$$

Доказ. Од $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2|\cos 0^o = |\vec{a}|^2$ следува дека

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}.$$

Непосредно од теоремата следува дека $|\vec{a}|=0$ ако и само ако $\vec{a}=\vec{0}$.

Пример 3. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се такви што $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=4$ и $(\vec{a},\vec{b})=30^0$, тогаш должината на векторот $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$ е еднаква на

$$|\vec{p}|=\sqrt{\vec{p}\cdot\vec{p}}=\sqrt{(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{4|\vec{a}|^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2}=$$
$$=\sqrt{4\cdot 64+4\cdot 16\sqrt{3}+16}=\sqrt{272+64\sqrt{3}}.\ \blacklozenge$$

Следната теорема содржи формула за пресметување **агол меѓу два ненулти вектори**, ако е познат нивниот скаларен производ.

Теорема 3. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се ненулти вектори. Тогаш $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Доказ. Нека $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$. Од $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$ следува дека

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Пример 4. За да го најдеме косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}$, за коишто $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ и $(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$, согласно со дефиницијата

$$\cos(\vec{c},\vec{d})=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|},$$

потребно е да ги најдеме вредностите $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{c}|$, $|\vec{d}|$ и $\vec{c}\cdot\vec{d}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=1,$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}\cdot\vec{c}}=\sqrt{(3\vec{a}-\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})}=\sqrt{9|\vec{a}|^2-6(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2}=$$

$$=\sqrt{9\cdot 2^2-6\cdot 1+1^2}=\sqrt{31},$$

$$|\vec{d}|=\sqrt{\vec{d}\cdot\vec{d}}=\sqrt{(2\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}+3\vec{b})}=$$

$$=\sqrt{4|\vec{a}|^2+12(\vec{a}\cdot\vec{b})+9|\vec{b}|^2}=\sqrt{4\cdot 2^2+12\cdot 1+9\cdot 1^2}=\sqrt{37},$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=(3\vec{a}-\vec{b})(2\vec{a}+3\vec{b})=6|\vec{a}|^2+7(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2=$$

$$=6\cdot 2^2+7\cdot 1-3\cdot 1^2=28.$$

Според тоа, добиваме дека

$$\cos(\vec{c},\vec{d})=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|}=\frac{28}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{37}}\approx 0{,}82675.\ \blacklozenge$$

Од теоремата непосредно се добива **условот за ортогоналност на два вектори**:

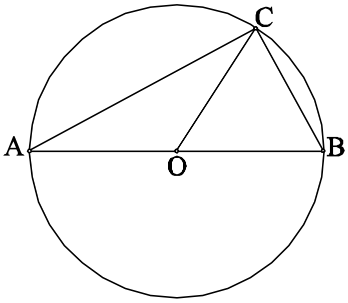
Последица 1. Два ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се ортогонални ако и само ако $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}.$

Навистина, ако $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0},$ тогаш $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$ ако и само ако $\cos(\vec{a},\vec{b})=0,$ што значи $(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}.$

Пример 5. Доказ на теоремата на Талес: Секој периферен агол над дијаметар на кружница е прав.

Нека $K(O,r)$ е дадена кружница, AB нејзин дијаметар и C произволна точка од кружницата (цртеж 1). Тогаш $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA},$ $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OA},$ па

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OA})=\overline{CO}^2-\overline{OA}^2=r^2-r^2=0,$$



Цртеж 1

од каде што следува дека векторите $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ се заемно ортогонални, односно $\angle ACB = 90^o$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ја вредноста на изразот

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a}^2$; в) $\vec{b}^2$;

г) $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b})$; д) $2\vec{a} \cdot (-2\vec{b} + \vec{a})$,

ако $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^0$.

2. Докажи ги идентитетите:

а) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$, за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$;

б) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$, за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$;

в) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$, за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$;

г) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) + \vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$, за секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$;

д) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$, за секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V$.

3. Одреди го знакот на скаларниот производ $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$, ако

а) $0^{o}\leq(\vec{a},\vec{b})<90^{0}$; б) $90^{o}<(\vec{a},\vec{b})\leq 180^{0}$.

4. Најди го косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$, ако $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$ и $(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$.

5. Дадени се векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, така што $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c})=90^{0}$ и $(\vec{c},\vec{a})=45^{0}$. Пресметај ја должината на векторот $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

6. Докажи ја Питагорината теорема: збирот од квадратите на катетите во правоаголен триаголник е еднаков со квадратот на хипотенузата.

7. Најди го косинусот од аголот φ меѓу дијагоналите на еден паралелограм чии што страни се еднакви на a и b, а аголот меѓу нив е α.

4.2.2. Пресметување на скаларен производ со помош на координати

Теорема 1. Ако $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, тогаш

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Доказ. Векторите може да ги запишеме во облик

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ и } \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Заради асоцијативноста, комутативноста и дистрибутивноста на скаларниот производ, имаме дека

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$
$$= a_x b_x\vec{i}\vec{i} + a_y b_y\vec{j}\vec{j} + a_z b_z\vec{k}\vec{k} +$$
$$+(a_x b_y + a_y b_x)\vec{i}\vec{j} + (a_x b_z + a_z b_x)\vec{i}\vec{k} + (a_y b_z + a_z b_y)\vec{j}\vec{k}.$$

Бидејќи векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се единечни и во парови заемно нормални, имаме дека $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ и $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0.$ Според тоа, добиваме дека

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Пример 1. Ако $\vec{a} = (3,-7,0)$ и $\vec{b} = (4,3,2),$ тогаш имаме дека

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 4 + (-7)\cdot 3 + 0\cdot 2 = -9. \blacklozenge$$

Од теорема 1 непосредно следува дека ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z),$ тогаш неговиот модул може да го пресметаме по формулата

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Пример 2. Ако $\vec{a} = (-1,2,0),$ тогаш неговата должина е

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}. \blacklozenge$$

Исто така, од теорема 1 следува дека ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ се ненулти вектори, тогаш **формулата за пресметување агол** меѓу меѓу нив, ако е познат нивниот скаларен производ гласи

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}.$$

Пример 3. За аголот меѓу векторите $\vec{a} = (2,0,-2)$ и $\vec{b} = (0,0,6)$ се добива

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{2\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot 6}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{-12}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{36}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

од каде што следува дека $(\vec{a},\vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$. ♦

Ако два ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се зададени со своите координатни претставувања $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогаш согласно со теорема 1 **условот за ортогоналност на два вектори** гласи:

$$\boxed{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.}$$

Пример 4. За да го најдеме аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $(AB) \in \vec{a} = (2,1,0)$ и $(AD) \in \vec{b} = (0,-2,1)$ постапуваме на начин како што следува:

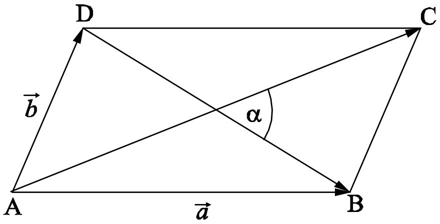
Нека $ABCD$ е дадениот паралелограм и нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (цртеж 1). Бараниот агол α е аголот меѓу векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ и може да го пресметаме по формулата

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{DB}|}.$$

Од равенствата

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} \text{ и } \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$$

добиваме дека $\overrightarrow{AC} = (2,-1,1)$ и $\overrightarrow{DB} = (2,3,-1)$. Тогаш од равенството $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 4 - 3 - 1 = 0$, користејќи го условот за ортогоналност на два



Цртеж 1

вектори, може да заклучиме дека векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ се ортогонални, односно $\alpha = \frac{\pi}{2}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај го скаларниот производ на векторите

а) $\vec{a} = (-1,1,0)$ и $\vec{b} = (1,-2,2)$;

б) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

2. Пресметај ја должината на векторот

а) $\vec{a} = (-2,6,3)$; б) $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

3. Најди го аголот меѓу векторите

а) $\vec{a} = (-1,1,0)$ и $\vec{b} = (1,-2,2)$; б) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$.

4. Дали се заемно нормални векторите

а) $\vec{a} = (-2,0,3)$ и $\vec{b} = (4,1,2)$;

б) $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$?

5. Најди вектор $\vec{x}$ колинеарен на векторот $\vec{a} = (2,-1,2)$, кој ја задоволува равенката $\vec{a} \cdot \vec{x} = -18.$

6. Дадени се векторите $\vec{a} = (2,2,2)$ и $\vec{b} = (0,1,0)$. Најди единечен вектор $\vec{x}$ кој е нормален на векторот $\vec{a},$ а со векторот $\vec{b}$ зафаќа агол од 60°.

7. Дали векторите $(OA) \in \vec{a} = (10,-5,10),$ $(OB) \in \vec{b} = (-11,-2,10)$ и $(OC) \in \vec{c} = (-2,-14,-5)$ се рабови на коцка со заедничко теме?

4.3. Векторски производ на вектори

Освен скаларниот производ на вектори ќе дефинираме операција, наречена векторско множење.

4.3.1. Дефиниција и својства на векторскиот производ на вектори

При дефинирање на векторското множење ќе го користиме поимот **десна (лева) тројка вектори**. Три вектори за кои се знае кој од нив е прв, кој е втор, а кој е трет се нарекува **тројка вектори**. На пример, во тројката вектори $\vec{c},$ $\vec{b},$ $\vec{a}$ ќе сметаме дека векторот $\vec{c}$ е прв, векторот $\vec{b}$ е втор, а векторот $\vec{a}$ е трет вектор.

Тројката вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ кои не се компланарни се нарекува **десна (лева)** ако векторите $(OA)\in\vec{a}$, $(OB)\in\vec{b}$, $(OC)\in\vec{c}$ се распоредени како палецот, показалецот и средниот прст од десната (левата) рака.

Дефиниција 1. Векторски производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарекува вектор $\vec{c}$ за којшто важат следните услови

(i) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$,

(ii) $\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{0}$ и $\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{0}$, односно векторот $\vec{c}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

(iii) векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ формираат десна тројка вектори.

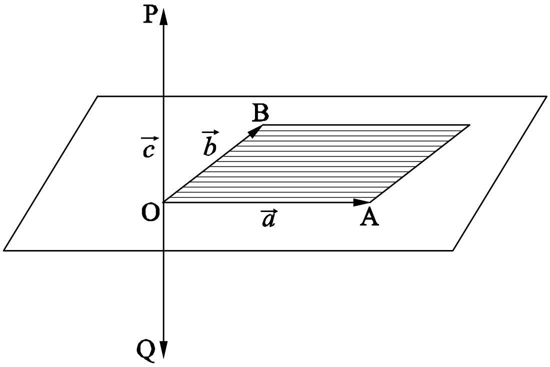
Векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ќе го означуваме со $\vec{a}\times\vec{b}$. Да забележиме дека условот (i) го определува модулот на векторскиот производ, условот (ii) неговиот правец, додека условот (iii) ја определува неговата насока.

Пример 1. Векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за кои $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ и $(\vec{a},b)=30^{\circ}$ има модул

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=2\cdot3\cdot\sin30^{\circ}=3. \blacklozenge$$

Еден врзан вектор од векторскиот произод $\vec{a}\times\vec{b}$ може да се конструира ако ја конструираме нормалата на рамнината определена со векторите $(OA)\in\vec{a}$ и $(OB)\in\vec{b}$ во точката O (цртеж 1), а потоа го одредиме неговиот модул кој е бројно еднаков на мерниот број на плоштината на паралелограмот конструиран над векторите

(OA) и (OB). Овај услов го исполнуваат два вектори: (OP) и (OQ). Но третиот услов од дефиницијата за векторски производ го исполнува само векторот (OP), па според тоа $(OP) \in \vec{a} \times \vec{b}$.



Цртеж 1

Во следнава теорема се содржани неколку важни својства на векторскиот производ.

Теорема 1. За векторскиот производ на вектори точни се следниве тврдења:

(i) (антикомутативност) За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

(ii) (асоцијативност) За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и за секој $p \in R$ важи

$$(p\vec{a}) \times \vec{b} = p(\vec{a} \times \vec{b})$$

(iii) (дистрибутивност) За секои три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

(iv) За секој вектор $\vec{a} \in V$ и за секое $p \in R$ важи $\vec{a} \times (p\vec{a}) = \vec{0}.$

Доказ. (i) Ако се навратиме на претходната дискусија векторот $\overrightarrow{OP}$ е еднаков на производот $\vec{a} \times \vec{b}.$

Векторот $\overrightarrow{OQ}$ исто така ги исполнува првите два услова од дефиницијата за векторски производ, што значи има ист правец и ист модул како и векторот $\overrightarrow{OP},$ но $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OQ}.$ Од друга страна $\overrightarrow{OQ} = \vec{b} \times \vec{a}.$ Според тоа,

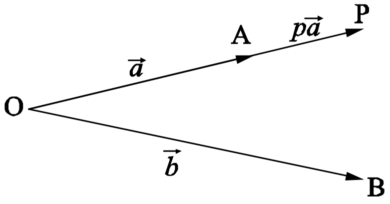
$$\vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OQ} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

(ii) За доказ на тврдењето ќе ги разгледаме следниве два случаја:

Ако $p > 0,$ тогаш

$$|(p\vec{a}) \times \vec{b}| = |p\vec{a}||\vec{b}|\sin(p\vec{a}, \vec{b}) = p|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

Од друга страна



Цртеж 2

$$|p(\vec{a}\times\vec{b})|=|p||\vec{a}\times\vec{b}|=p|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}).$$

Според тоа, добиваме дека

$$|(p\vec{a})\times\vec{b}|=|p(\vec{a}\times\vec{b})|.$$

Бидејќи векторите $\vec{a}$ и $p\vec{a}$ се колинеарни, векторите $(OA)\in\vec{a}$ и $(OB)\in\vec{b}$ определуваат иста рамнина како и векторите $(OP)\in p\vec{a}$ и $(OB)\in\vec{b}$ (цртеж 2). Тогаш векторите определени со нивните векторски производи имаат ист правец. Насоката на векторите $(p\vec{a})\times\vec{b}$ и $p(\vec{a}\times\vec{b})$ е иста и е определена со насоката на векторот $\vec{a}\times\vec{b}.$

Ако $p<0,$ тогаш

$$|(p\vec{a})\times\vec{b}|=|p\vec{a}||\vec{b}|\sin(p\vec{a},\vec{b})=|p||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi-(\vec{a},\vec{b}))=$$
$$=-p|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}).$$

Од друга страна, имаме дека

$$|p(\vec{a}\times\vec{b})|=|p||\vec{a}\times\vec{b}|=-p|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}).$$

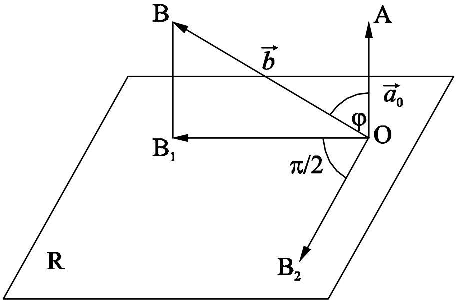
Според тоа, може да заклучиме дека

$$|(p\vec{a})\times\vec{b}|=|p(\vec{a}\times\vec{b})|.$$

Слично, како и во претходниот случај заклучуваме дека векторите $(p\vec{a})\times\vec{b}$ и $p(\vec{a}\times\vec{b})$ имаат ист правец и насока, со таа разлика што во случај кога $p<0$ нивната насока е спротивна од насоката на векторот $\vec{a}\times\vec{b}.$

(iii) Да го најдеме векторот $\overrightarrow{a_0}\times\vec{b},$ каде што $|\overrightarrow{a_0}|=1.$ Од дефиницијата за векторски производ следува дека векторот $\overrightarrow{a_0}\times\vec{b}$ е нормален на рамнината определена со векторите $(OA)\in\overrightarrow{a_0}$ и $(OB)\in\vec{b}$ (цртеж 3). Нека R е рамнината нормална на правата

OA во точката O и нека B_1 е нормалната проекција на точката B на рамнината R. Со ротација на векторот (OB_1) околу точката O



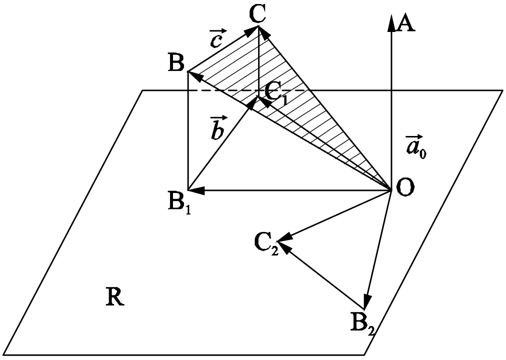
Цртеж 3

во рамнината R за агол $\frac{\pi}{2}$ во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот, го добиваме векторот (OB_2). Да го означиме со φ аголот $(\overrightarrow{a_0}, \vec{b})$. Тогаш од триаголникот OBB_1 имаме $|\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, односно $|\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}| = |\vec{b}| \sin\varphi$. Заради $|\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}|$ добиваме дека $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2} = \overrightarrow{a_0} \times \vec{b}$.

Нека $(\mathrm{BC}) \in \vec{c}$. Тогаш $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (цртеж 4). Да ја означиме со C_1 нормалната проекција на точката C на рамнината R, а со (OC_2) векторот добиен со ротација на векторот (OC_1) околу точката O во рамнината R за агол $\frac{\pi}{2}$ во насока спротивна од насоката на движење на стрелката на часовникот. Тогаш $\overrightarrow{\mathrm{OC}_2} = \overrightarrow{a_0} \times (\vec{b} + \vec{c})$ и $\overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2} = \overrightarrow{a_0} \times \vec{b}$, што се докажува на сличен начин како и равенството $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2} = \overrightarrow{a_0} \times \vec{b}$.

Од $\overrightarrow{\mathrm{OC}_2} = \overrightarrow{\mathrm{OB}_2} + \overrightarrow{\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2}$ добиваме дека

$$\overrightarrow{a_0}\times(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{a_0}\times\vec{b}+\overrightarrow{a_0}\times\vec{c}.$$



Цртеж 4

Векторот $\vec{a}$ може да го запишеме во облик $\vec{a}=|\vec{a}|\overrightarrow{a_0}$. Ако последното равенство го помножиме со $|\vec{a}|$ добиваме дека

$$|\vec{a}|(\overrightarrow{a_0}\times(\vec{b}+\vec{c}))=|\vec{a}|(\overrightarrow{a_0}\times\vec{b}+\overrightarrow{a_0}\times\vec{c}),$$

$$(|\vec{a}|\overrightarrow{a_0})\times(\vec{b}+\vec{c})=(|\vec{a}|\overrightarrow{a_0})\times\vec{b}+(|\vec{a}|\overrightarrow{a_0})\times\vec{c},$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

(iv) Од равенствата

$$|\vec{a}\times(p\vec{a})|=|-(p\vec{a})\times\vec{a}|=|-p(\vec{a}\times\vec{a})|=|-p\,||\vec{a}\,||\vec{a}\,|\sin 0^{\circ}=0,$$

следува дека

$$\vec{a}\times(p\vec{a})=\vec{0}.$$

Пример 2. За да се пресмета плоштината P на паралелограмот конструиран над векторите $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{a}-3\vec{b}$, каде што $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=3$ и $(\vec{a},\vec{b})=30^{\circ}$, се поаѓа од

$$P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}| \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}).$$

Притоа, имаме дека

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b}) = -3(\vec{a} \times \vec{b}) + 2(\vec{b} \times \vec{a}) =$$
$$= -5(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Оттука добиваме дека

$$P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 30^0 = \frac{75}{2}. \blacklozenge$$

Од дефиницијата на векторки производ непосредно следува дека векторскиот производ е нултиот вектор, ако и само ако еден од векторите е нултиот вектор или ако векторите се колинеарни. Според тоа, равенството

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

го искажува **условот за колинеарност на два вектори**.

Пример 3. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни вектори. За да се најде вредност на параметарот λ за којшто векторите $\vec{c} = \lambda\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$ се колинеарни се поаѓа од условот за колинеарност на векторите $\vec{c}$ и $\vec{d}$

$$\vec{c} \times \vec{d} = (\lambda\vec{a} + 5\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0},$$

Имаме дека

$$\vec{c} \times \vec{d} = (\lambda\vec{a} + 5\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b}) =$$
$$= \lambda\vec{a} \times 3\vec{a} + 5\vec{b} \times 3\vec{a} - \lambda\vec{a} \times \vec{b} - 5\vec{b} \times \vec{b} =$$
$$= 15(\vec{b} \times \vec{a}) + \lambda(\vec{b} \times \vec{a}) = (15 + \lambda)(\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{0}.$$

Бидејќи векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, имаме $\vec{b}\times\vec{a}\neq\vec{0}$. Затоа $15+\lambda=0$, односно $\lambda=-15$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај го модулот $|\vec{a}\times\vec{b}|$, ако $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}=30$.

2. Најди го векторот $\vec{a}\times\vec{b}$, ако $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}+5\vec{r}$ и $\vec{b}=-4\vec{p}+\vec{q}-2\vec{r}$, каде што $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ е десна тројка заемно нормални и единични вектори.

3. Докажи ги идентитетите:

а) $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$, за секои $\vec{a}, \vec{b}\in V$;

б) $(\vec{a}\times\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$, за секои $\vec{a}, \vec{b}\in V$;

в) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{d}$, за секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\in V$;

г) $\vec{a}\times(\vec{b}+\lambda\vec{a})=(\vec{a}+\mu\vec{b})\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}$, за секои $\vec{a}, \vec{b}\in V$ и $\lambda,\mu\in 3$.

4. Пресметај ја плоштината на паралелограмот $ABCD$, конструиран над векторите $\overrightarrow{AB}=2\vec{b}-\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=3\vec{a}+\vec{b}$, ако $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$ и $(\vec{a},\vec{b})=45^{\circ}$.

5. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC конструиран над векторите $\overrightarrow{AB}=2\vec{b}+\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+3\vec{b}$, каде што $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се единични вектори кои зафаќаат агол од 30^{0}.

6. Пресметај ја должината на висината од темето C на триаголникот ABC ако $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$, при што векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се заемно нормални единични вектори.

7. Докажи дека од равенствата

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ и $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$

следува дека векторите $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$ се колинеарни.

4.3.2. Координати на векторски производ на вектори

Од дефиницијата за векторски производ за единичните координатни вектори имаме дека

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}, \qquad \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, \qquad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, \qquad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}, \qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},$$

$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, \qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, \qquad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}.$$

Теорема 1. Ако $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, тогаш

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)$$

Доказ. Нека $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Заради својствата на векторскиот производ и дефиницијата на детерминанта од втор ред имаме

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+$$

$$+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})=$$

$$=a_x b_y \vec{k}+a_x b_z(-\vec{j})+a_y b_x(-\vec{k})+a_y b_z \vec{i}+a_z b_x \vec{j}+a_z b_y(-\vec{i})=$$

$$=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Како последица од теоремата, користејќи ја дефиницијата на детерминанта од трет ред, векторскиот производ на векторите $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ може да го запишеме во облик:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Пример 1. За да ги најдеме координатите на векторскиот производ на векторите $\vec{a}=(3,-2,1)$ и $\vec{b}=(2,4,-3)$ постапуваме на следниов начин: Бидејќи

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}=6\vec{i}+2\vec{j}+12\vec{k}-(-4\vec{k}+4\vec{i}-9\vec{j})=2\vec{i}+11\vec{j}+16\vec{k},$$

добиваме дека $\vec{a}\times\vec{b}=(2,11,16)$. ♦

Пример 2. Должината на висината од темето B на триаголникот ABC, за којшто $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$ и $\overrightarrow{BC}=(-4,9,-3)$ може да се добие како што следува:

Плоштината P на триаголникот ABC е еднаква на половина од плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Според тоа, имаме дека

$$2P=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=|-15\vec{i}-12\vec{j}-16\vec{k}|=\sqrt{225+144+256}=25.$$

Од елементарна геометрија е познато дека $2P = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{B_1B}|$, каде што B_1 е подножјето на нормалата спуштена од темето B. Бидејќи $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (0,4,-3)$ имаме $2P = 5|\overrightarrow{B_1B}|$. Тогаш

должината на бараната висина е $|\overrightarrow{B_1B}| = 5$. ♦

Ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогаш условот за нивна колинеарност $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, е исполнет ако и само ако секоја координата на векторскиот производ е еднаква на нула

$$a_y b_z = a_z b_y,\ a_z b_x = a_x b_z,\ a_x b_y = a_y b_x,$$

односно ако

$$\frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z},\quad \frac{a_z}{b_z} = \frac{a_x}{b_x},\quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}.$$

При претпоставка, дека ако некоја координата на едниот вектор е нула, на пример $a_x = 0$, тогаш мора $b_x = 0$, и по дефиниција се зема

$$\frac{0}{0} = \frac{a_y}{b_y},\ \frac{0}{0} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Според тоа **условот за колинеарност на два вектори** во координатна форма гласи:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Пример 3. За да се испита дали векторите $\vec{a} = (1,-2,3)$ и $\vec{b} = (3,-6,9)$ се колинеарни, се формираат односите $\frac{1}{3}$, $\frac{-6}{-2}$ и $\frac{9}{3}$. Од равенствата

$$\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{3}{9}$$

следува дека дадените вектори се колинеарни.♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди го координатното претставување на векторскиот производ на векторите:

а) $\vec{a}=(0,1,0)$ и $\vec{b}=(-2,1,3)$; б) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$;

2. Дадени се векторите $\vec{a}=(3,-1,-2)$ и $\vec{b}=(1,2,-1)$. Најди ги координатите на векторите:

а) $\vec{a}\times\vec{b}$; б) $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$; в) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})$.

3. Пресметај го синусот од аголот меѓу векторите $\vec{a}=(2,-2,1)$ и $\vec{b}=(2,3,6)$.

4. Пресметај ја плоштината на паралелограмот $ABCD$ конструиран над векторите $\overrightarrow{AB}=(2,3,-1)$ и $\overrightarrow{AD}=(-3,-1,1)$.

5. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC конструиран над векторите $\overrightarrow{AB}=(-3,-5,8)$ и $\overrightarrow{AC}=(3,-2,6)$.

6. Најди единичен вектор нормален на векторите $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

7. Најди вектор $\vec{x}$ нормален на векторите $\vec{a}=(2,-3,1)$ и $\vec{b}=(1,-2,3)$ кој го задоволува условот $\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k})=10$.

8. За кои вредности на x и y, векторите $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+y\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+x\vec{j}+6\vec{k}$ се колинеарни?

4.4. Мешан производ на три вектори

Решавањето на бројни геометриски задачи значително се олеснува со воведувањето на мешаниот производ на три вектори, којшто има интересна геометриска интерпретација.

4.4.1. Геометриска интерпретација на мешан производ на три вектори

Дефиниција 1. Мешан производ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е скаларниот производ на векторите $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}.$$

Пример 1. За да се пресмета мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, коишто претставуваат десна тројка вектори и $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$ и $|\vec{c}|=8$, се постапува на следниов начин:

Бидејќи $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуваат десна тројка вектори, векторите $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$ имаат иста насока, па според тоа имаме

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=$$

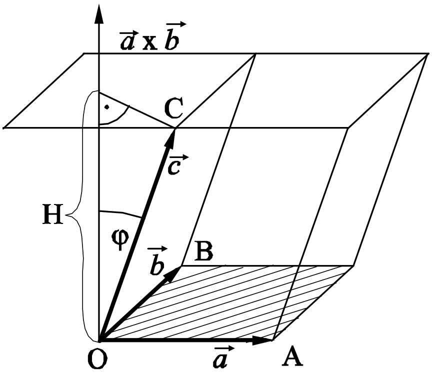
$$=(|\vec{a}||\vec{b}|\sin 90^{o})|\vec{c}|\cos 0^{o}=5\cdot 3\cdot 1\cdot 8\cdot 1=120. \blacklozenge$$

Следнава теорема дава геометриска интерпретација на мешаниот производ.

Теорема 1. Мешан производ на три некомпланарни вектори $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ е број чијашто апсолутната вредност е еднаква на волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $(OA) \in \vec{a},\ (OB) \in \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} \in \vec{c}.$

Знакот на мешаниот производ е позитивен ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е десна тројка вектори, а негативен ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е лева тројка вектори.

Доказ. Нека $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е десна тројка вектори. Да го конструирме паралелопипедот над векторите $(OA) \in \vec{a},\ (OB) \in \vec{b}$ и $(OC) \in \vec{c}$ и да го означиме со φ аголот меѓу векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ (цртеж 1). Тогаш од дефиницијата за скаларен производ имаме $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos \varphi.$



Цртеж 1

Знаеме дека должината на векторскиот производ $\vec{a} \times \vec{b}$ е бројно еднаква на плоштината B на паралелограмот конструиран над векторите $(OA) \in \vec{a}$ и $(OB) \in \vec{b},$ а тој пак е основа на конструираниот паралелопипед. Од друга страна, производот $|\vec{c}|\cos\varphi$ по апсолутна вредност е еднаков на висината H спуштена кон основата S на паралелопипедот. Оттука за волуменот V на паралелопипедот добиваме

$$V = S\cdot H = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\varphi| = |(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}| = \pm(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}.$$

Според тоа, знакот на мешаниот производ зависи од знакот на изразот $\cos\varphi$, односно од аголот меѓу векторите $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$. Притоа $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} > 0$ ако и само ако $0^{o} < \varphi < 90^{o}$, додека $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} < 0$ ако и само ако $180^{o} > \varphi > 90^{o}$. Бидејќи векторот $\vec{a}\times\vec{b}$ е норамален на рамнината R во која лежат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, може да заклучиме дека $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} > 0$ ако и само ако векторите $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$ се од иста страна на рамнината R, додека $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} < 0$ ако и само ако векторите $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$ се од различни страни на рамнината R. Оттука добиваме дека $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} > 0$ ако и само ако $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ е десна тројка вектори, а $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} < 0$ ако и само ако $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ е лева тројка вектори.

Имајќи го предвид геометриското значење на мешаниот производ, може да заклучиме дека мешаниот производ на три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е еднаков на нула, односно $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0$ ако и само ако е исполнет кој било од следните услови:

✓ еден од векторите е нултиот вектор,

✓ трите вектори се компланарни.

Според тоа, **услов за компланарност** на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ гласи:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0. \qquad (1)$$

Задача 1. Пресметај го волуменот на паралелопипедот определен со векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ кои имаат еднакви должини и

$$(\vec{a},\vec{b})=(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b})=60^{\circ}.$$

Бидејќи плоштината на основата S и висината H на паралелопипедот се еднакви на

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$H=|\vec{c}|\cos(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b})=|\vec{a}|\cos 60^{0}=\frac{|\vec{a}|}{2},$$

бараниот волумен изнесува

$$V=S\cdot H=\frac{|\vec{a}|^3\sqrt{3}}{4}.\ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Векторот $\vec{c}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, кои зафаќаат агол од 60°. Пресметај го мешаниот производ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$, ако $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=4$ и $|\vec{c}|=\sqrt{3}$.

2. Пресметај го волуменот на коцка со основен раб $a=3$.

3. Пресметај го волуменот на правоаголен паралелопипед со рабови $a=3$, $b=4$, $c=7$.

4. Дадени се три единични вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Ако $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{c},(\vec{a}\times\vec{b}))=\alpha$, тогаш $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Докажи!

4.4.2. Пресметување на мешан производ со помош на координати

Теорема 1. Ако $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ и $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, тогаш

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Доказ. Од

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)$$

добиваме дека

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)(c_x,c_y,c_z)=$$

$$=c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}+c_y\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Според тоа, имаме дека

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Согласно теоремата, го добиваме **условот за комланарност на три вектори** $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ зададени со своите координати.

Последица 1. Условот за колинеарност на векторите $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ и $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, гласи

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

Пример 3. Волуменот на тетраедарот конструиран над векторите $\vec{a}=(1,-1,4)$, $\vec{b}=(1,-3,1)$ и $\vec{c}=(3,2,-5)$ изнесува

$$V=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=19. \blacklozenge$$

Пример 4. Вредноста на параметарот p за којашто векторите $\vec{a}=(1,-3,1)$, $\vec{b}=(p,1,0)$ и $\vec{c}=(1,4,8)$ се компланарни може да се добие од условот за компланараност на три вектори. Имено,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ p & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}=0 \text{ за } p=-\frac{1}{4}. \blacklozenge$$

Како последица од теорема 1, со примена на својствата на детерминантите се добиваат следниве равенства:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]=-[\vec{c},\vec{b},\vec{a}]=-[\vec{a},\vec{c},\vec{b}].$$

Задачи за самостојна работа

1. Дадени се векторите

$\vec{a}=(1,-3,1),\ \vec{b}=(2,1,-3)$ и $\vec{c}=(1,2,1).$

Пресметај го мешаниот производ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}].$

2. Пресметај го волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите

$$(OA)\in\vec{a}=(1,-3,1),\ (OB)\in\vec{b}=(2,1,-3) \text{ и } (OC)\in\vec{c}=(1,2,1).$$

3. Дали векторите $\vec{a}=(3,4,5),\ \vec{b}=(1,2,2)$ и $\vec{c}=(9,14,16)$ се компланарни?

4. Пресметај ја висината на паралелопипедот конструиран над векторите

$$(OA)\in\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k},\quad (OB)\in\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k} \text{ и } (OC)\in\vec{c}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},$$

ако неговата основа е паралелограмот над векторите $(OA)\in\vec{a}$ и $(OB)\in\vec{b}.$

5. Најди ја вредноста на параметарот t за којашто векторите

$\vec{a}=(t,1,-2),\ \vec{b}=(1,t,-1)$ и $\vec{c}=(1,1,t)$

се компланарни.

6. Најди ја вредноста на параметарот p за којашто векторите

$\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=p\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k},$

се компланарни.

4.5. Точка во простор

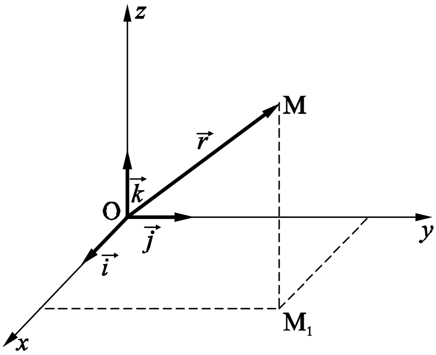
Во ова поглавје ќе воведеме аналитички начин на задавање на еден од основните поими во геометријата, поимот точка. Со координатното претставување на точките во просторот може лесно да го пресметаме растојанието меѓу две точки, како и да ја определиме положбата на точка во просторот која дадена отсечка ја дели во даден однос.

4.5.1. Растојание меѓу две точки

Со помош на аналитички метод ќе го решиме проблемот на пресметување на растојание меѓу две точки во просторот.

А) Координати на точка

Нека во просторот е избран правоаголен Декартов координатен систем $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ и нека M е произволна точка. Векторот $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ со почеток во координатниот почеток и крај во точката M се нарекува **радиусвектор** на точката M (цртеж 1). Положбата на точката M во просторот е наполно определена со нејзиниот радиусвектор $\vec{r}$, а тој пак е наполно определен со своите координати во однос на избраниот координатен систем.



Цртеж 1

Точката M како крајна точка на векторот $\vec{r}$ ќе биде определена со истите координати. Според тоа, ако $\vec{r} = (x, y, z)$, тогаш координатите x, y, z на векторот $\vec{r}$ ги нарекуваме координати на точката M. Направената дискусија ја допушта следнава дефиниција:

Дефиниција 1. Во избран координатен систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, **координати на точка** M се нарекуваат координатите на нејзиниот радиус-вектор $\vec{r} = (x, y, z)$ и се пишува $M(x, y, z)$. Притоа x се нарекува **прва координата** или **апсциса**, y **втора координата** или **ордината**, а z **трета координата** или **апликата** на точката M.

Пример 1. Точката M чијшто радиусвектор е $\vec{r} = (-1,0,3)$ има координати $M(-1,0,3)$. ♦

Б) Координатно претставување на вектор зададен со своите крајни точки

Еден вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ е наполно определен со своите крајни точки M_1 и M_2.

Теорема 1. Ако $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ се почетната и крајната точка на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$, соодветно тогаш

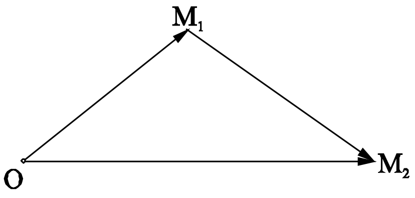
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

Доказ. Бидејќи координатите на една точка во просторот се еднакви со координатите на нејзиниот радиусвектор, од $M_1(x_1,y_1,z_1)$ следува дека нејзиниот радиусвектор е (цртеж 2)

$$\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1).$$

Слично, од $M_2(x_2,y_2,z_2)$ добиваме дека нејзиниот радиусвектор е

$$\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)$$



Цртеж 2

Од равенството

$$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}$$

следува дека

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

Според тоа

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).\blacksquare$$

Пример 2. Координатното претставување на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$, за којшто $M_1(1,-2,0)$ и $M_2(3,0,-1)$ е

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1,0-(-2),-1-0)=(2,2,-1).\ \blacklozenge$$

В) Растојание меѓу две точки

Под растојание d меѓу две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ го подразбираме мерниот број на должината на отсечката M_1M_2. Од друга страна, должината на отсечката M_1M_2 е всушност, должината на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Теорема 2. Растојанието d меѓу дадени точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ е определено со формулата

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Доказ. Ако за векторот $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ ја примениме формулата за пресметување должина на вектор зададен со своите координати, добиваме

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Како што веќе рековме, бараното растојание d меѓу дадените точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ е еднакво на должината на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$, односно $d=|\overrightarrow{M_1M_2}|$. Според тоа,

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+(z_2-z_1)^2}.\blacksquare$$

Пример 3. Растојанието меѓу точките $M_1(3,0,-2)$ и $M_2(-1,5,1)$ изнесува

$$d=\sqrt{(-1-3)^2+(5-0)^2+(1-(-2))^2}=5\sqrt{2}.\blacklozenge$$

Пример 4. За да ги најдеме должините на страните на триаголникот ABC, каде што $A(2,1,\sqrt{2})$, $B(1,0,0)$ и $C(1+\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{6})$, доволно е да ги пресметаме растојанијата меѓу неговите темиња, т.е:

$$\overline{AB}=|\overrightarrow{AB}|=d_{AB}=\sqrt{(1-2)^2+(0-1)^2+(0-\sqrt{2})^2}=2,$$

$$\overline{BC}=|\overrightarrow{BC}|=d_{BC}=\sqrt{(1+\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}-0)^2+(0-(-\sqrt{6}))^2}=2\sqrt{3},$$

$$\overline{AC}=|\overrightarrow{AC}|=d_{AC}=\sqrt{(1+\sqrt{3}-2)^2+(\sqrt{3}-1)^2+(-\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=4.\blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Дадени се радиусвекторите на точките A, B, C, D и E: $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=-3\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=4\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$, $\overrightarrow{OD}=2\vec{i}-3\vec{k}$, $\overrightarrow{OE}=2\vec{j}-\vec{k}$. Запиши ги координатите на точките A, B, C, D и E.

2. Најди го координатите на ортогоналните проекции на точките $A(1,-2,4)$, $B(-2,3,1)$ и $C(1,3,2)$ врз

а) $xy-$рамнината; б) $yz-$рамнината;

в) $xz-$рамнината.

3. Дадени се точките $A(2,1,0)$, $B(3,3,2)$, $C(0,2,2)$ и $D(3,4,-1)$. Запиши ги координатите на векторите

а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{AC}$;

д) $3\overrightarrow{BD}$; ѓ) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$; е) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

4. Нека $(AB)\in\vec{a}=(2,-2,3)$ и нека $A(0,1,-4)$. Запиши ги координатите на точката B.

5. Пресметај го растојанието d меѓу точките:

а) $M_1(1,-3,7)$ и $M_2(2,6,0)$; б) $M_1(0,2,1)$ и $M_2(0,-2,-1)$;

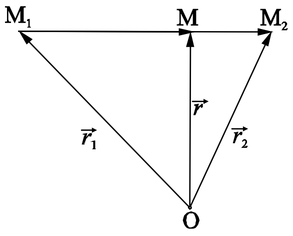
в) $M_1(-1,-2,3)$ и $M_2(0,2,4)$; г) $M_1(1,0,3)$ и $M_2(7,0,-2)$.

6. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC, ако $A(1,-3,-1)$, $B(3,-5,0)$ и $C(0,-5,7)$.

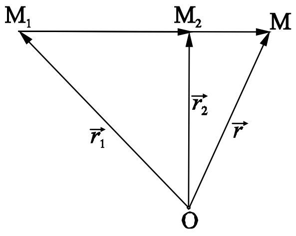
4.5.2. Делење на отсечка во даден однос

Нека M_1 и M_2 се две различни точки од една права. Произволна точка M од правата M_1M_2 може да припаѓа или да не припаѓа на отсечката M_1M_2 (цртеж 1 и цртеж 2). Во двата случаи векторите $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ се колинеарни, па постои нивниот количник, односно имаме дека

$$\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}} = q.$$



Цртеж 1



Цртеж 2

Како што знаеме количникот q е определен со формулата

$q = \frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|}$, ако векторите $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ имаат иста насока,

и

$q = -\frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|}$, ако векторите $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ имаат спротивни насоки.

✓Ако $q > 0$, тогаш точката M лежи на отсечката M_1M_2. Во тој случај велиме дека точката M ја дели отсечката M_1M_2 со **внатрешна поделба** во однос q.

✓Ако $q < 0$, тогаш точката M не лежи на отсечката M_1M_2. Во тој случај велиме дека точката M ја дели отсечката M_1M_2 со **надворешна поделба** во однос q.

Следната теорема ни го открива радиусвекторот, а воедно и координатите на точката M изразени преку радиусвекторите, односни координатите на точките M_1, M_2 и бројот q.

Теорема 1. Нека се дадени две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Ако точката M ја дели отсечката M_1M_2 со внатрешна поделба во однос q, тогаш

$$M\left(\frac{x_1 + qx_2}{1+q}, \frac{y_1 + qy_2}{1+q}, \frac{z_1 + qz_2}{1+q}\right).$$

Доказ. Да ги означиме со $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ радиусвекторите на точките M_1 и M_2, а со $\vec{r}$ радиусвекторот на точката M. Да забележиме дека

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{r} - \vec{r_1} \text{ и } \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} = \vec{r_2} - \vec{r}.$$

Тогаш од $\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}} = q$ добиваме дека $\vec{r} - \vec{r_1} = q(\vec{r_2} - \vec{r})$. Според тоа, радиусвекторот на точката M е определен со формулата

$$\vec{r} = \frac{\vec{r_1} + q\vec{r_2}}{1+q},$$

односно

$$\vec{r} = \left(\frac{x_1 + qx_2}{1+q}, \frac{y_1 + qy_2}{1+q}, \frac{z_1 + qz_2}{1+q}\right).$$

Оттука добиваме дека

$$M\left(\frac{x_1 + qx_2}{1+q}, \frac{y_1 + qy_2}{1+q}, \frac{z_1 + qz_2}{1+q}\right). \blacksquare$$

Ако точката M е средина на отсечката M_1M_2 тогаш $q=1$ и радиусвекторот на точката M е определен со релацијата

$$\vec{r}=\frac{\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r_2}}{2}.$$

За координатите на средишната точка M на отсечката M_1M_2 имаме

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_2+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Пример 1. Координатите на точките P и Q кои отсечката AB ја делат на три еднакви дела, ако $A(3,-2,1)$ и $B(0,2,-5)$ се добиваат на следниов начин.

Од условот на задачата имаме $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\frac{1}{2}$ и $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}=2.$ Тогаш од Теорема 1 следува дека $P\left(2,-\frac{2}{3},-1\right)$ и $Q\left(1,\frac{2}{3},-3\right)$. ♦

Пример 2. Нека е даден триаголникот ABC чии темиња имаат координати $A(3,-2,1)$, $B(4,0,3)$ и $C(-2,6,5)$. Ако се бараат координатите на тежиштето на триаголникот, тогаш за нивно определување го користиме условот дека тежиштето ја дели секоја од тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 во однос 2.

Од равенствата

$$x_{A_1}=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{4+(-2)}{2}=1, \qquad y_{A_1}=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{0+6}{2}=3 \text{ и}$$
$$z_{A_1}=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3+5}{2}=4$$

следува дека $A_1(1,3,4)$. Тогаш имаме дека

$$x_T=\frac{x_A+2x_{A_1}}{1+2}=\frac{3+2\cdot 1}{3}=\frac{5}{3},\ y_T=\frac{y_A+2y_{A_1}}{1+2}=\frac{-2+2\cdot 3}{3}=\frac{4}{3}$$

и $z_T=\frac{z_A+2z_{A_1}}{1+2}=\frac{1+2\cdot 4}{3}=3,$

па според тоа, добиваме дека $T\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},3\right)$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ги координатите на средината $M(x,y,z)$ на отсечката AB, ако

а) $A(3,6,0)$ и $B(1,4,2)$; б) $A(-1,0,1)$ и $B(1,0,-1)$.

2. Дадени се точките $A(2,6,3)$ и $M(6,2,0)$. Запиши ги координатите на точката B ако M е средина на отсечката AB.

3. Дадени се точките $A(3,1,1)$ и $B(8,3,5)$. Најди ги координатите на точката M којашто отсечката AB ја дели во однос

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $-\frac{2}{3}$; г) $-\frac{3}{2}$.

4. Дадени се точките $A(-3,-2,-3)$ и $B(7,3,0)$. Запиши ги координатите на точките кои отсечката AB ја делат на пет еднакви делови.

5. Нека $A(-2,4,-12)$, $B(19,-2,-15)$ и $C(1,4,18)$ се темиња на триаголник. Најди ги координатите на средините на неговите страни.

6. Запиши ги координатите на тежиштето на триаголникот ABC, ако $A(2,0,3)$, $B(5,-1,3)$ и $C(1,2,0)$.

7. Дадени се точките $A(2,6,1)$, $B(0,3,4)$ и $T(2,-1,3)$. Најди ги координатите на точката C, ако T е тежиште на триаголникот ABC.

4.6. Рамнина

Положбата на една рамнина во просторот може да се определи на повеќе начини. На пример, една рамнина може да биде зададена со три свои неколинеарни точки, или таа да биде нормална на некој вектор и да се наоѓа на определено растојание од координатниот почеток. Исто така, една рамнина е определена со една точка и права што не минува низ дадената точка, како и со две прави што се сечат. Оттука произлегува заклучокот дека една иста рамнина може да ја зададеме аналитички на различни начини.

4.6.1. Нормална равенка на рамнина

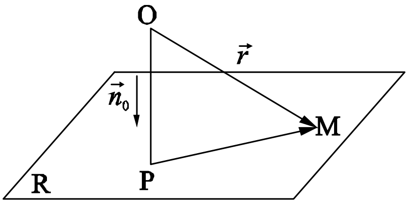
Нека P е нормалната проекција на координатниот почеток врз разгледуваната рамнина, а $\overrightarrow{n_0}$ единичен вектор нормален на рамнината. Тогаш, со векторот $\overrightarrow{n_0}$ и точката P наполно е определена положбата на рамнината во просторот како рамнина што ја содржи точката P и е нормална на векторот $\overrightarrow{n_0}$. Бројот $\left|\overrightarrow{OP}\right| = p$ претставува растојание на координатниот почеток од рамнината. Притоа, ако $p = 0$ рамнината минува низ координатниот почеток, додека, ако $p > 0$ тогаш рамнината е на растојание p од координатниот почеток во насока на векторот $\overrightarrow{n_0}$.

Теорема 1. Радиусвекторот $\vec{r}$ на произволна точка M од рамнината R која е на растојание p од координатниот почеток и е нормална на векторот $\overrightarrow{n_0}$, ја задоволува векторската равенка

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{n_0} - p = 0.$$

Доказ. Нека $\vec{r}$ е радиусвекторот на произволна точка M од рамнината R (цртеж 1). Бидејќи векторот $\overrightarrow{n_0}$ е нормален на дадената рамнина, тој е нормален и на векторот $\overrightarrow{PM}$, каде што P е ортогоналната проекција на координатниот почеток на рамнината R. Тогаш

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{n_0} = 0. \qquad (1)$$



Цртеж 1

Од триаголникот MOP имаме $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - p\overrightarrow{n_0}$, од каде што со замена во (1) добиваме $(\vec{r} - p\overrightarrow{n_0}) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0$. Користејќи ги својствата на скаларниот производ и фактот дека $\overrightarrow{n_0} \cdot \overrightarrow{n_0} = 1$, добиваме

$$\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_0}-p=0.\blacksquare \qquad (2)$$

Равенката (2) се нарекува **нормална векторска равенка на рамнина**.

Теорема 2. Секоја равенка од облик (2) каде што $\overrightarrow{n_0}$ е единичен вектор и p ненегативен скалар, претставува рамнина.

Доказ. Нека P е точка во просторот таква што $(OP)\in p\overrightarrow{n_0}$ и нека $\vec{r}$ е радиусвекторот на произволна точка M која ја задоволува равенката (2). Тогаш имаме дека

$$\overrightarrow{PM}=\vec{r}-p\overrightarrow{n_0} \text{ и } \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PM}=p\overrightarrow{n_0}(\vec{r}-p\overrightarrow{n_0})=p(\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_0}-p).$$

Бидејќи векторот $\vec{r}$ ја задоволува равенката (2) имаме $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=0,$

од каде што заклучуваме дека векторите $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{PM}$ се заемно нормални. Според тоа, сите точки кои ја задоволуваат равенката (2) припаѓаат на една иста рамнина, нормална на векторот (OP) во точката P.■

Од теорема 1 и теорема 2 непосредно може да заклучиме дека на рамнината нормална на векторот $\overrightarrow{n_0}$ на растојание $p\geq 0$ од координатниот почеток, припаѓаат сите точки чии радиусвектори ја задоволуваат равенката (2) и само тие точки.

Пример 1. Нека $A(2,1,1)$, $B(-3,1,1+\sqrt{6})$ и $C(2,5,1)$ се темиња на даден триаголник ABC. Тогаш може да се најде равенката на рамнината која е паралелна на рамнината на триаголникот и е на растојание од 10 единици од координатниот почеток.

Векторскиот производ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ е вектор нормален на рамнината на триаголникот ABC, па секоја рамнина нормална на тој вектор е паралелна на рамнината на триаголникот ABC. Нека $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Тогаш

$$\vec{n}=-8\sqrt{6}\vec{i}-20\vec{k}, \qquad |\vec{n}|=28, \qquad \overrightarrow{n_0}=-\frac{2\sqrt{6}}{7}\vec{i}-\frac{5}{7}\vec{k}.$$

Бараната равенка гласи

$$\vec{r}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{6}}{7}\vec{i}-\frac{5}{7}\vec{k}\right)-10=0.$$

За векторот $-\overrightarrow{n_0}$, односно за векторот $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$ добиваме равенка на друга рамнина (од другата страна на координатниот почеток) што ги исполнува условите од задачата, која гласи: $\vec{r}\cdot\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\vec{i}+\frac{5}{7}\vec{k}\right)-10=0.$ ♦

Нека α, β, γ се аглите што ги зафаќа единичниот вектор $\overrightarrow{n_0}$ со координатните вектори, соодветно.

Теорема 3. Равенката $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ ја претставува рамнината која е нормална на единичниот вектор $\overrightarrow{n_0}$, на растојание p од координатниот почеток, т.е. точките $M(x,y,z)$ од оваа рамнина и само тие ја задоволуваат равенката.

Доказ. Радиусвекторот на произволна точка $M(x,y,z)$ од рамнината е $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Согласно со теорема 1, нормалната векторска равенка на рамнина гласи

$$\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_0}-p=0.$$

За разгледуваната рамнина имаме

$$(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})(\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k})-p=0,$$

односно

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.\blacksquare \qquad (3)$$

Равенката (3) се нарекува **нормална скаларна равенка на рамнина.**

Пример 2. Равенката

$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-4=0$$

ја претставува рамнината која е нормална на единичниот вектор

$$\overrightarrow{n_0}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k},$$

на растојание $p=4$ од координатниот почеток, т.е. точките од оваа рамнина и само тие ја задоволуваат дадената равенка.♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ја нормалната векторска равенка на рамнината која е нормална на векторот $\vec{n}=(2,-2,1)$, на растојание 5 од координатниот почеток.

2. Запиши ја нормалната векторска равенка на рамнината, ако точката $P(3,4,0)$ е ортогонална проекција на координатниот почеток врз рамнината.

3. Најди ја нормалната векторска равенка на рамнината која е паралелна на векторите $\vec{a}=(2,5,0)$ и $\vec{b}=(-3,0,1)$, на растојание 12 од координатниот почеток.

4. Која од следниве равенки на рамнина претставува нормална скаларна равенка на рамнина:

а) $3x-2y+z+7=0;$ б) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z-3=0;$

в) $\frac{2}{3}x-\frac{4}{7}y-2z-11=0?$

5. Најди ги нормалниот вектор и растојанието од координатниот почеток на рамнините:

а) $\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}y-\frac{\sqrt{5}}{4}z-3=0;$ б) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-33=0;$

в) $\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}y-\frac{2\sqrt{5}}{5}+10=0.$

4.6.2. Општа равенка на рамнина

Теорема 1. Равенката

$$\vec{r}\cdot\vec{n}+D=0, \tag{1}$$

каде што $\vec{n}$ е произволен ненулти вектор, а D произволен скалар, претставува рамнина.

Доказ. Ако равенката (1) ја поделиме со $\pm|\vec{n}|$ ја добиваме еквивалентната равенка

$$\vec{r}\frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|}+\frac{D}{\pm|\vec{n}|}=0. \qquad (2)$$

Ако знакот пред $\vec{n}$ го избереме спротивен од знакот на D, тогаш согласно со теорема 2, од претходното поглавје равенката (2) претставува рамнина. Притоа $\overrightarrow{n_0}=\frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|}$ и $-p=\frac{D}{\pm|\vec{n}|}$, каде што $\overrightarrow{n_0}$ е единичен вектор нормален на рамнината, насочен од координатниот почеток кон рамнината, а p е растојанието од координатниот почеток од рамнината. ■

Равенката (2) се нарекува **општа векторска равенка на рамнина**.

Ако $\vec{n}=(A,B,C)$ и $\vec{r}=(x,y,z)$, тогаш равенката (1) добива облик

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (3)$$

Равенката (3) се нарекува **општа скаларна равенка на рамнина**.

Пример 1. За да се доведе во нормален векторски облик равенката на рамнина зададена со општа скаларна равенка

$$2x+9y+2\sqrt{21}z+26=0$$

се воочува нормалниот вектор $\vec{n}$ на рамнината,

$$\vec{n}=2\vec{i}+9\vec{j}+2\sqrt{21}\vec{k},$$

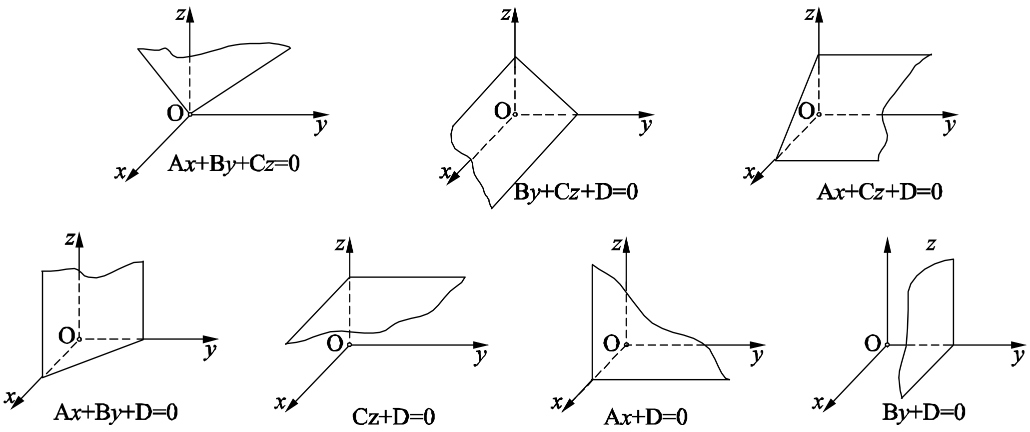
и се наоѓа неговиот модул $|\vec{n}|=13$. Бидејќи $D=26$, за $\overrightarrow{n_0}$ и p се добива $\overrightarrow{n_0}=\frac{\vec{n}}{13}$, $-p=\frac{26}{13}=2$.

Според тоа, нормалниот векторски облик на дадената рамнина гласи

$$\vec{r} \cdot \left(\frac{2}{13}\vec{i} + \frac{9}{13}\vec{j} + \frac{2}{13}\sqrt{21\vec{k}} \right) + 2 = 0. \blacklozenge$$

Да разгледаме некои специјални случаи на равенката на рамнина (3) (цртеж 1).

Ако $D = 0,$ тогаш равенката на рамнината добива облик $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0,$ од каде што заклучуваме дека радиусвекторот на произволна точка од рамнината е нормален на векторот $\vec{n}.$ Тоа значи дека рамнината минува низ координатниот почеток.



Цртеж 1

✓Ако $A = 0,$ тогаш $\vec{n} = B\vec{j} + C\vec{k},$ од каде што заклучуваме дека векторот $\vec{n}$ е компланарен со векторите $\vec{j}$ и $\vec{k},$ односно тој е нормален на $x-$оската. Во тој случај рамнината е паралелна на $x-$оската. Слично на ова, ако $B=0$ рамнината е паралелна на $y-$оската, додека ако $C=0$ тогаш рамнината е паралелна со $z-$оската.

✓Ако $D=A=0$ тогаш рамнината минува низ координатниот почеток и е паралелна на $x-$оската, што значи ја содржи $x-$оската. Слично, ако $D=B=0$ тогаш рамнината ја содржи $y-$оската, додека ако $D=C=0$ тогаш рамнината ја содржи $z-$оската.

✓Ако $A=B=0$ тогаш рамнината е паралелна со $x-$оската и $y-$оската, односно рамнината е паралелна со xy рамнината. Ако $A=C=0$ тогаш рамнината е паралелна со $x-$оската и $z-$оската, односно рамнината е паралелна со xz рамнината, додека ако $B=C=0$ тогаш рамнината е паралелна со $y-$оската и $z-$оската, односно рамнината е паралелна со yz рамнината.

✓Во случајот $A=B=C=0$ равенката (3) не претставува рамнина бидејќи во случајот $D=0$, го претставува целиот простор, а за $D\neq 0$ равенката е противречна.

✓Ако $A=B=D=0$ рамнината се совпаѓа со xy рамнината. Слично на ова, ако $A=C=D=0$ рамнината се совпаѓа со xz рамнината, додека ако $B=C=D=0$ рамнината се совпаѓа со yz рамнината.

Пример 2. Рамнината зададена со равенката $x+2y=0$ ја содржи $z-$оската, во смисла секоја точка од $z-$оската, $M(0,0,z)$ ја задоволува равенката на рамнина за која $\vec{n}=(1,2,0)$ е нормален вектор.♦

Задачи за самостојна работа

1. Доведи ги во нормален векторски облик следниве равенки на рамнина:

а) $2x + 6y + 3z - 1 = 0;$ б) $2x - 2y + z = 12.$

2. Најди ги должината и косинусите на правците на нормалата спуштена од координатниот почеток на рамнините

а) $2x - 5y + 7z - 36 = 0;$ б) $-x + y = 16;$

в) $3y + z = 16.$

3. Ако е познато дека отсечката $AB,$ каде што $A(4,12,z),$ $B(0,1,7),$ е паралелна на рамнината $3x - 2y + z = 12,$ најди ја непознатата координата z на точката $A.$

4. Покажи дека рамнините зададени со равенките

$2x + 10y - 11z = -6,$ $28x - 10y - 4z = 11,$ $8x + 40y - 44z = 15,$

$3x + 6y + 6z + 1 = 0,$ $14x - 5y + -2z + 3 = 0$ и $x + 2y + 2z - 5 = 0$

заградуваат правоаголен паралелопипед во чија внатрешност лежи координатниот почеток.

5. Што може да се каже за положбата на рамнините зададени со равенките:

а) $z - 4 = 0;$ б) $3x - 5 = 0;$ в) $y - 8 = 0;$

г) $x + y + z = 0;$ д) $x + 2z - 1 = 0;$ ѓ) $y + z - 3 = 0;$

е) $2x + y - 5 = 0;$ ж) $x + 2y = 0?$

4.6.3. Сегментна равенка на рамнина

Нека е дадена рамнина R со својата општа равенка

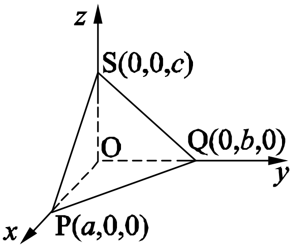
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

каде што A, B, C и D се сите различни од нула. Произволна точка P на $x-$оската има координати $(a,0,0)$, каде што a е реален број (цртеж 1). Точката P лежи во рамнината R ако и само ако

$$A \cdot a + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0,$$

односно, ако

$$a = -\frac{D}{A}.$$



Цртеж 1

Бројот a е **сегмент** или **отсечок** на $x-$оската отсечен со рамнината R. Слично ги добиваме отсечоците b и c отсечени со рамнината на $y-$оската и $z-$оската:

$$b = -\frac{D}{B}, \qquad c = -\frac{D}{C}.$$

Ако коефициентите A, B и C ги изразиме преку D, a, b и c, ја добиваме равенката на рамнината во обликот:

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0.$$

Бидејќи D е различно од нула, последната равенка може да ја запишеме во обликот:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

наречен **сегментен облик на равенка на рамнина**.

Пример 1. За да се добие сегментниот облик на равенката на рамнина

$$5x-2y+7z-3=0$$

се зема $y=z=0$ во дадената равенка на рамнина и се добива отсечокот на $x-$оската: $5x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$; значи $a=\frac{3}{5}$.

Слично, за $x=z=0$ добиваме $b=-\frac{3}{2}$, а за $x=y=0$ добиваме $c=\frac{3}{7}$. Сегментниот облик на равенката на рамнината гласи:

$$\frac{x}{\frac{3}{5}}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}+\frac{z}{\frac{3}{7}}=1. \ \blacklozenge$$

Пример 2. Нека се дадени отсечоците на координатните оски $a=6,\ b=-12$ и $c=6,$ со одредена рамнина и нека се бараат:

а) равенката на рамнината,

б) косинусите на правците на нормалата на рамнината и растојанието од координатниот почеток до рамнината.

За одговорот под а) знаејќи ги отсечоците на рамнината на координатните оски, може да ја запишеме нејзината сегментна равенка

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-12}+\frac{z}{6}=1.$$

За одговорот б) се ослободуваме од именителите на равенката под а) и ја добиваме општата скаларна равенка на рамнината:

$$10x-5y+10z-60=0.$$

Тогаш $\vec{n}=(10,-5,10),$ од каде што добиваме дека

$$|\vec{n}|=\sqrt{10^2+5^2+10^2}=15.$$

Нормалниот скаларен облик на равенката на дадената рамнина гласи

$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-4=0.$$

За косинусите на правците на нормалата на рамнината имаме:

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=-\frac{1}{3} \text{ и } \cos\gamma=\frac{2}{3},$$

а растојанието од координатниот почеток до рамнината е $p=4.$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ги во сегментен облик следниве равенки на рамнина:

а) $3x-2y-4z+12=0;$ б) $3x+4y-2z=-1;$

в) $2x-3y+z-1=0.$

2. Најди ги сегментите на координатните оски што ги отсекува рамнината $2x+y-2z-4=0.$

3. Најди ја вредноста на параметарот k за којашто збирот на сегментите на координатните оски што ги отсекува рамнината $2x+5ky-3z-30=0$ е еднаков на 10.

4. Најди ја вредноста на параметарот k за којашто производот на сегментите на координатните оски што ги отсекува рамнината $12x+5y-z-12k=0$ е еднаков на $\frac{1}{5}$.

5. Пресметај го волуменот на тетраедарот ограничен со координатните рамнини и со рамнината $3x+4y+6z-12=0$.

4.6.4. Равенка на рамнина низ дадена точка

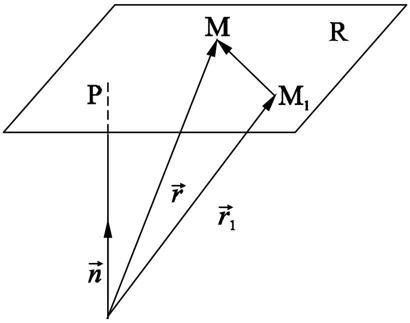
Нека се дадени точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и вектор $\vec{n}(A,B,C)$. Следнава теорема ја утврдува равенката на рамнината којашто е нормална на векторот $\vec{n}$ и минува низ точката M_1; $\vec{r}$ го означува радиусвекторот на произволна точка од рамнината.

Теорема 1. Рамнината којашто е нормална на векторот $\vec{n}$ и минува низ точката M_1 е определена со равенката

$$(\vec{r}-\vec{r_1})\cdot\vec{n}=0, \tag{1}$$

каде што $\vec{r_1}$ е радиусвекторот на точката M_1.

Доказ. Нека M е произволна точка од рамнината R којашто е нормална на векторот $\vec{n}$ и минува низ точката M_1 (цртеж 1). Векторот $\vec{n}$ е нормален на секој вектор од рамнината R, па тој е нормален и на векторот $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1}$, каде што $\vec{r}$ е радиусвекторот на точката M.



Цртеж 1

Според тоа, важи равенството

$$(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot \vec{n} = 0.$$

Значи, радиусвекторот на секоја точка од рамнината R ја задоволува равенката (1).■

Со помош на координатите на векторот $\vec{n}(A, B, C)$, и точките $M(x, y, z)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, равенката (1) може да ја запишеме во облик

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Пример 1. Равенката на рамнината која минува низ точката $M(3,2,1)$ и е нормална на координатниот вектор $\vec{i} = (1,0,0)$ гласи

$$1(x - 3) + 0(y - 2) + 0(z - 1) = 0,$$

односно

$$x - 3 = 0.$$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја равенката на рамнината којашто минува низ точката $M(-1,4,0)$ и е нормална на векторот $\vec{n}=(3,7,-1)$.

2. Запиши ја равенката на рамнината којашто минува низ точката $M(4,5,0)$ и е паралелна со рамнината $3x-2y+5z-6=0$.

3. Запиши ја равенката на рамнината којашто минува низ точката $M(-2,6,-4)$ и е паралелна со

а) $xy-$рамнината; б) $xz-$ рамнината;

в) $yz-$ рамнината.

4.6.5. Равенка на рамнина низ три дадени точки

Нека се дадени три точки

$$M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2) \text{ и } M_3(x_3,y_3,z_3).$$

Ќе ја определиме равенката на рамнината којашто минува низ трите дадени точки. Да ги означиме со $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ и $\vec{r_3}$, радиусвекторите на точките M_1, M_2 и M_3, соодветно. Произволна точка M со радиусвектор $\vec{r}$ лежи во рамнината определена со точките M_1, M_2 и M_3 ако и само ако векторите

$$\vec{r}-\vec{r_1},\ \vec{r}-\vec{r_2} \text{ и } \vec{r}-\vec{r_3}$$

се компланарни. Од друга страна од условот за компланарност на три вектори веќе знаеме дека векторите $\vec{r}-\vec{r_1}$, $\vec{r}-\vec{r_2}$ и $\vec{r}-\vec{r_3}$ се компланарни ако и само ако

$$[\vec{r}-\vec{r_1},\vec{r}-\vec{r_2},\vec{r}-\vec{r_3}]=0,$$ односно $$[\vec{r}-\vec{r_1},\vec{r_2}-\vec{r_1},\vec{r_3}-\vec{r_1}]=0,$$

што значи дека

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 1. Равенката на рамнината што минува низ точките $M_1(2,2,3)$, $M_2(-1,2,-2)$ и $M_3(3,1,1)$ гласи:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-3 \\ -1-2 & 2-2 & -2-3 \\ 3-2 & 1-2 & 1-3 \end{vmatrix}=0,$$

или, во развиена форма,

$$5x+11y-3z-23=0. \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ точките $M_1(8,1,0)$, $M_2(3,-2,1)$ и $M_3(4,5,6)$.

2. Провери дали точките A, B, C и D лежат во една иста рамнина, ако

а) $A(0,2,-4)$, $B(5,1,2)$, $C(3,8,3)$, $D(2,-2,1)$;

б) $A(0,-2,0)$, $B(-5,0,0)$, $C(1,-3,-1)$, $D(-6,1,1)$;

в) $A(0,0,1)$, $B(3,-2,0)$, $C(4,6,-9)$, $D(-1,0,2)$?

Во случај на потврден одговор најди ја равенката на рамнината.

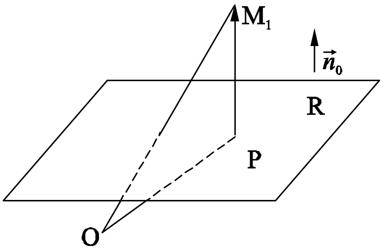
3. Дали точките $A(1,2,3)$, $B(0,-2,4)$, $C(2,1,0)$ и $D(1,-4,3)$ се темиња на тетраедар?

4.6.6. Растојание од точка до рамнина

Нека е дадена рамнината R со векторската равенка

$$\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_0}-p=0. \tag{1}$$

Растојанието на произволно избрана точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ во просторот од дадената рамнина е еднакво на модулот на векторот $\overrightarrow{PM}$, каде што P е ортогоналната проекција на точката M_1 на дадената рамнина (цртеж 1). Векторите $\overrightarrow{PM_1}$ и $\overrightarrow{n_0}$ се колинеарни бидејќи и двата се нормални на една иста рамнина. Според тоа, $\overrightarrow{PM_1}=d\overrightarrow{n_0}$, каде што $|d|$ е растојанието на точката M_1 од рамнината.



Цртеж 1

Притоа да напоменеме дека $d>0$, ако точката M_1 и координатниот почеток O се на различни страни од рамнината, додека

$d < 0,$ ако точката M_1 и координатниот почеток O се на иста страна од рамнината.

Радиусвекторот $\overrightarrow{r_2}$ на точката P може да го определиме од триаголникот OPM_1 :

$$\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{r_1} - d\overrightarrow{n_0},$$

каде што $\overrightarrow{r_1}$ е радиусвекторот на точката M_1. Бидејќи точката P лежи во дадената рамнина нејзиниот радиусвектор ја задоволува равенката (1) што значи дека

$$\overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{n_0} - p = 0$$

Односно

$$(\overrightarrow{r_1} - d\overrightarrow{n_0})\overrightarrow{n_0} - p = 0.$$

По извршените операции добиваме

$$\overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n_0} - d - p = 0,$$

или

$$d = \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{n_0} - p. \qquad (2)$$

Ако векторите $\overrightarrow{r_1}$ и $\overrightarrow{n_0}$ ги претставиме како линеарна комбинација од координатните вектори,

$$\overrightarrow{r_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \qquad \overrightarrow{n_0} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k},$$

за d добиваме

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p. \qquad (3)$$

Растојанието d на точката M_1 од дадената рамнина е апсолутна вредност на бројот d определен со формулите (2) и (3). Притоа

$d > 0$, ако точката M_1 и координатниот почеток O се на различни страни од рамнината, додека $d < 0$, ако точката M_1 и координатниот почеток O се на иста страна од рамнината.

Ако равенката на рамнината е дадена во општ векторски облик или општ скаларен облик, тогаш дадената равенка ја сведуваме во нормален облик, а потоа го одредуваме растојанието како во постапката изложена погоре. Така, на пример, ако рамнината е зададена со својата општа скаларна равенка

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

тогаш нејзината општа векторска равенка гласи:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} + D = 0,$$

каде што $\vec{n} = (A, B, C)$, а $\vec{r}$ е радиусвекторот на произволна точка од рамнината. Тогаш општата векторска равенка може да ја запишеме во нормален векторски облик

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{n_0} - p = 0,$$

каде што

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|}, \qquad -p = \frac{D}{\pm|\vec{n}|}.$$

Бидејќи $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, добиваме

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad -p = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Тогаш од формулата $d = \vec{r_1} \cdot \overrightarrow{n_0} - p$ добиваме

$$d=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}-\frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

или

$$d=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 1. За да се најде растојанието од точката $M(-2,-4,3)$ до рамнината

$$\frac{x}{-\frac{3}{2}}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-\frac{3}{2}}=1,$$

се составува општата равенка на дадената рамнина којашто гласи $2x-y+2z+3=0,$ и оттука

$$|d|=\left|\frac{2\cdot(-2)-1\cdot(-4)+2\cdot 3+3}{\pm\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\right|=|3|=3.$$

Бидејќи $d=3>0$ заклучуваме дека точката M во однос на координатниот почеток се наоѓа на спротивната страна на дадената рамнина.♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди го растојанието од точката $M(8,3,-7)$ до рамнината $3y-2z+18=0.$

2. Дали точките $M(3,2,1)$ и $N(1,2,3)$ лежат од иста страна на рамнината $x+3y-z=2$?

3. Најди точка на $x-$оската еднакво оддалечена од рамнините $x-y+z=4$ и $x-2y+2z=0.$

4. Најди го растојанието меѓу паралелните рамнини $13x - y + 6z = -6$ и $26x - 2y + 12z = 4.$

5. Најди ја равенката на рамнината, која е паралелна со рамнината $2x + 2y - z - 11 = 0$ и е на растојание $d = 5$ единици од неа. Притоа бараната рамнина и точката $M(1,2,4)$ се наоѓаат на различни страни од дадената рамнина.

6. Нека точките $A(1,1,2), B(2,1,-2), C(-1,-2,-3)$ и $D(3,3,3)$ се темиња на тетраедарот $ABCD.$ Најди ја должината на висината на тетраедарот спуштена од темето $D.$

4.6.7. Агол меѓу две рамнини. Услов за ортогоналност на две рамнини

Нека се дадени две рамнини со своите векторски равенки

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{n_1} + D_1 = 0, \qquad \vec{r} \cdot \overrightarrow{n_2} + D_2 = 0.$$

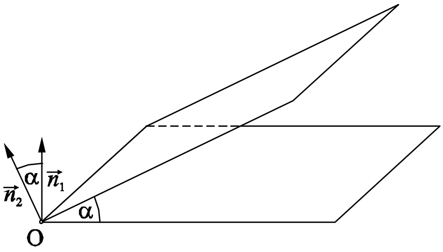
Значи, векторот $\overrightarrow{n_1}$ е нормален на првата рамнина, а векторот $\overrightarrow{n_2}$ е нормален на втората рамнина. Познато е дека косинусот од аголот меѓу векторите $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ е определен со формулата

$$\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}. \qquad (1)$$

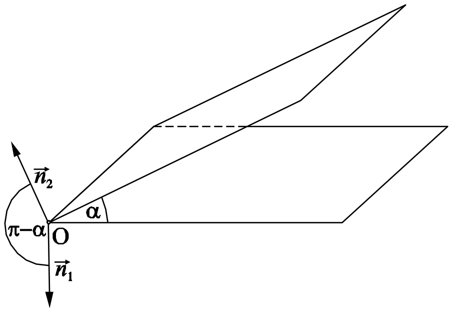
Бидејќи аголот $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$ е еднаков на аголот α меѓу дадените рамнини или го дополнува α до $\pi,$ знаејќи го косинусот од аголот $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$ може да го пресметаме аголот меѓу рамнините. Ако рамнините се нормални или паралелни тогаш бројот $\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$ во формулата (1) е со знак плус (остар агол) или минус (тап агол), во зависност од насоките на векторите $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$, а не од положбата на рамнините (цртеж 1а и цртеж 1б). Затоа и во случајот

$$\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

α е аголот меѓу рамнините.



Цртеж 1а



Цртеж 1б

Значи, аголот α меѓу дадените рамнини е определен со формулата

$$\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}. \qquad (2)$$

Ако рамнините се зададени со своите општи равенки

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

тогаш

$$\overrightarrow{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}, \qquad \overrightarrow{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k},$$

и за аголот α меѓу нив се добива формулата

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пример 1. За да го пресметаме аголот α меѓу рамнините

$$2x + 5y + \frac{3}{\sqrt{2}}z + 7 = 0 \text{ и } z = 0,$$

прво забележуваме дека рамнината чијашто равенка е $z = 0$ е всушност, xy координатната рамнина, чијшто нормален вектор е $\overrightarrow{n_2} = (0{,}01).$

Согласно со формулата за пресметување на агол меѓу две рамнини наоѓаме

$$\cos\alpha = \frac{\left|2\cdot 0 + 5\cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot 1\right|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

од каде што следува дека $\alpha = \frac{\pi}{6}$. ♦

Две рамнини зададени со равенките

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

се заемно нрмални ако и само ако се заемно нормални векторите $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$. Како што знаеме, векторите $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ се заемно нормални ако и само ако нивниот скаларен производ е еднаков на нула, односно

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0.$$

Бидејќи

$$\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1) \text{ и } \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$$

условот за ортогоналност на рамнините се сведува на

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Пример 2. Се бара равенката на рамнината којашто минува низ точките $M_1(1,-1,3)$ и $M_2(0,2,3)$, а е нормална на рамнината $5x - y + 2z - 7 = 0.$

Нека бараната равенка на рамнина е

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Од претпоставката дека рамнината минува низ точката $M_1(1,-1,3)$ следува условот

$$A \cdot 1 + B \cdot (-1) + C \cdot 3 + D = 0;$$

рамнината минува и низ точката $M_2(0,2,3)$ што значи дека

$$A \cdot 0 + B \cdot 2 + C \cdot 3 + D = 0.$$

За да биде бараната рамнина нормална на дадената рамнина мора да биде исполнет условот

$$A\cdot 5+B\cdot(-1)+C\cdot 2=0.$$

Значи проблемот на наоѓање вредности на непознатите коефициенти $A,\ B,\ C$ и слободниот член D на горната равенка се сведува на решавање на системот линеарни равенки

$$\begin{cases} A-B+3C+D=0 \\ \quad 2B+3C+D=0 \\ 5A-B+2C \quad =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A-3B \quad =0 \\ \quad 2B+3C+D=0 \\ \quad 14B+2C \quad =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3B \\ D=19B\,. \\ C=-7B \end{cases}$$

Значи бараната равенка е $B(3x+y-7z+19)=0$ или едноставно

$$3x+y-7z+19=0.\ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди го аголот меѓу рамнините зададени со равенките:

а) $2x-y+2z-1=0$ и $x+y+4z-5=0$;

б) $3x+4y-5z=7$ и $4x-3y-5z=9$.

2. Најди го аголот меѓу рамнините

а) $x+y=11$ и $3x+8=0$;

б) $x-\sqrt{3}z=9$ и $z=0$.

3. Запиши ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(3,-4,5)$ и е нормална на рамнините

$2x-y+3z=0$ и $x+3y-2z-6=0$.

4. Нека рамнините зададени со равенките

$\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_1}+D_1=0$ и $\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_2}+D_2=0$

не се паралелни. Најди ја равенката на рамнината која е нормална на двете дадени рамнини и минува низ точката M_0 со радиусвектор $\overrightarrow{r_0}$.

4.7. Права во простор

Положбата на една права во просторот може да се определи на повеќе начини. На пример, права може да минува низ дадена точка и да биде нормална на некоја друга права или да биде паралелна на неа. Исто така, правата може да ја определиме со две точки или како пресек на две рамнини. Оттука произлегува заклучокот дека една иста права може да ја зададеме со равенки од различни облици.

4.7.1. Разни видови равенки на права во простор

Бидејќи правата е основен геометриски поим, кој е прифатен без дефиниција, за да се дојде до нејзина равенка потребно е да се искористи некое нејзино својство.

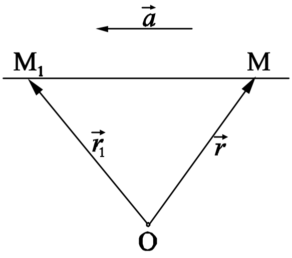
А) Векторски облик на равенка на права

Нека е дадена правата која минува низ точката M_1 со радиусвектор $\overrightarrow{r_0}$ и е паралелна на векторот $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогаш точна е следнава теорема:

Теорема 1. Радиусвекторот $\vec{r}$ на произволна точка M од правата којашто минува низ точката M_1 со радиусвектор $\vec{r_1}$ и која е паралелна со векторот $\vec{a} \neq \vec{0}$, е определен со равенството

$$\vec{r} = \vec{r_1} + t\vec{a}. \qquad (1)$$

Доказ. Ако M е произволна точка од правата, со радиусвектор $\vec{r}$, тогаш векторот $\overrightarrow{M_1M}$ е колинеарен со векторот $\vec{a}$. Значи, постои реален број t така што $\overrightarrow{M_1M} = t\vec{a}$. Бидејќи векторот $\vec{a}$ е однапред даден фиксен вектор, параметарот t зависи само од векторот $\overrightarrow{M_1M}$ односно од положбата на точката M (цртеж 1).



Цртеж 1

Тогаш од триаголникот OM_1M добиваме

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M},$$

односно

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}. \blacksquare$$

Теорема 2. Нека $\vec{r_1}$ и $\vec{a}$ се дадени вектори. Равенството (1) ги претставува точките од правата која минува низ точката со радиусвектор $\vec{r_1}$ и која е паралелна на векторот $\vec{a}$, кога t се менува во множеството реални броеви $(-\infty < t < +\infty)$.

Доказ. Да ја означиме со M_1 точката чијшто радиусвектор е $\vec{r_1}$. Нека M е произволна точка во просторот со радиусвектор $\vec{r}$, којшто го задоволува равенството (1). Тогаш $\vec{r} - \vec{r_1} = t\vec{a}$, за некоја вредност на реалниот параметар t. Според тоа, векторот $\vec{r} - \vec{r_1}$ е колинеарен со векторот $\vec{a}$, од каде што следува дека правата определена со точките M и M_1 е паралелна со векторот $\vec{a}$. Бидејќи низ точката M_1 минува една и само една права паралелна со векторот $\vec{a}$, може да заклучиме дека точката M лежи на дадената права.■

Од теорема 1 и од теорема 2 следува дека равенството (1) го задоволуваат сите точки од правата којашто е паралелна на векторот $\vec{a}$ и минува низ точката M_1, и само тие. Значи, равенството (1) ја определува правата и се нарекува **векторска равенка на права**.

Б) Параметарска равенка на права

Нека се дадени точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Ако $M(x, y, z)$ е произволна точка од правата којашто минува низ точката M и која е паралелна со векторот $\vec{a}$, тогаш од векторската равенка на оваа права добиваме

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + t(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})$$

или

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_1 + ta_1)\vec{i} + (y_1 + ta_2)\vec{j} + (z_1 + ta_3)\vec{k},$$

согласно со својствата на операциите собирање на вектори и множење на вектор со скалар. Од последното равенство следуваат скаларните равенства

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ta_1 \\ y &= y_1 + ta_2 \\ z &= z_1 + ta_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Кога параметарот t ги прима сите можни вредности во множеството реални броеви, равенствата (2) ги даваат координатите $M(x, y, z)$ на секоја точка од правата. Затоа, тие се нарекуваат **параметарски равенки на права**.

Пример 1. Параметарските равенки на правата којашто минува низ точката $M(2,-4,3)$ и која што е паралелна на векторот $\vec{a} = (5,-2,1)$ се

$$x = 2 + 5t, \;\; y = -4 - 2t, \;\; z = 3 + t. \blacklozenge$$

B) Канонични равенки на права

✓ Ако претпоставиме дека сите координати на векторот $\vec{a}$ се различни од нула, т.е. $a_i \neq 0 \;\; (i = 1,2,3)$, тогаш параметарските равенки (2) може да се запишат во еквивалентен облик (решени по параметарот t):

$$t=\frac{x-x_1}{a_1}, \quad t=\frac{y-y_1}{a_2}, \quad t=\frac{z-z_1}{a_3},$$

што значи дека

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}. \qquad (3)$$

Равенствата (3) се нарекуваат **канонични равенки на права.**

✓ Ако една од координатите на векторот $\vec{a}$ е еднаква на нула, на пример $a_1 \neq 0, \ a_2 \neq 0, \ a_3 = 0,$ тогаш согласно со (2) се добиваат каноничните равенки:

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}, \qquad z-z_1=0. \qquad (4)$$

✓ Ако две од координатите на векторот $\vec{a}$ се еднакви на нула, на пример $a_1 \neq 0, \ a_2 = a_3 = 0,$ тогаш каноничните равенки на правата ($x-$оската) согласно со (2) се:

$$y-y_1=0, \qquad z-z_1=0. \qquad (5)$$

Пример 2. Нека точките $A(-3,1,-4)$, $B(-2,0,4)$ и $C(2,6,-4)$ се темиња на триаголникот ABC. За да ја најдеме каноничната равенката на правата којашто минува низ темето C и која е паралелна на тежишната линија AA_1, пред се констатираме дека точката A_1 е средина на страната BC, што значи $A_1(0,3,0)$. Тогаш

$$\overrightarrow{AA_1}=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}.$$

Векторската равенка на правата низ темето C, паралелна на векторот $\overrightarrow{AA_1}$ гласи:

$$\vec{r}=2\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}+t(3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}),$$

од каде што ги добиваме параметрските равенки на правата:

$$x = 2 + 3t, \quad y = 6 + 2t, \quad z = -4 + 4t.$$

Оттука, каноничните равенки на правата се

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+4}{4},$$

согласно со (3). ♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ги параметарските равенки на правата која минува низ точката $M(1,3,-2)$ и е паралелна на векторот $\vec{a} = (7,-4,2)$.

2. Која од следниве точки

а) $M_1(1,3,-1)$; б) $M_2(2,4,3)$;

в) $M_3(-2,1,1)$; г) $M_4(1,7,-3)$.

лежи на правата $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}$?

3. Најди ги параметарските и каноничните равенки на правата што минува низ точката $M(2,-1,3)$ и е нормална на рамнината

$$4x - 5y + 6z - 7 = 0.$$

4. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(2,-5,3)$ и е паралелна на правата

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}.$$

4.7.2. Равенка на права низ две точки

Нека се дадени две различни точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Правата која минува низ овие точки може да ја разгледуваме како права паралелна на векторот

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2},$$

($\vec{a} \neq \vec{0}$ бидејќи точките M_1 и M_2 се различни) и која минува низ точката M_1. Да го означиме со $\vec{r_1}$ радиусвекторот на точката M_1.Тогаш векторската равенка на правата која минува низ дадените точки M_1 и M_2 гласи:

$$\vec{r} = \vec{r_1} + t\vec{a},$$

или еквивалентно

$$\vec{r} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + t((x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}).$$

Тогаш параметарските равенки на правата се

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad z = z_1 + t(z_2 - z_1),$$

така што каноничните равенки на правата низ точките M_1 и M_2 се:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример 1. Каноничните равенки на правата којашто минува низ точките $M_1(1{,}2{,}3)$ и $M_2(4{,}-5{,}6)$ се

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-7} = \frac{z - 3}{3}.$$

За точките $M_1(2,-3,4)$ и $M_2(2,4,-5)$ се добиваат каноничните равенки

$$x-2=0,\ \frac{y+3}{7}=\frac{z-4}{-9}.\ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја равенката на правата којашто минува низ точките

а) $M_1(3,2,3)$ и $M_2(2,4,1)$; б) $M_1(3,1,2)$ и $M_2(-1,1,0)$.

2. Запиши ја равенката на правата којашто минува низ координатниот почеток и низ точката $M(-1,7,3)$.

3. Запиши ги равенките на правите на кои лежат рабовите на тетраедарот $ABCD$, ако $A(0,0,2)$, $B(4,0,5)$, $C(5,3,0)$ и $D(-1,4,-2)$.

4. Провери дали се колинеарни точките

$M(3,0,1)$, $N(0,2,4)$ и $P\left(1,\frac{4}{3},3\right)$.

5. Запиши ја равенката на правата која минува низ координатниот почеток и тежиштето на триаголникот ABC, ако

$A(2,-1,3)$, $B(4,5,-2)$ и $C(-3,2,-1)$.

6. Точките $A(-1,2,4)$, $B(3,-1,-4)$ и $C(0,4,7)$ се темиња на даден триаголник. Најди ги равенките на правите, секоја од кои минува низ едно теме и е паралелна со спротивната страна.

4.7.3. Растојание од точка до права

Познато е дека растојанието од точка до права е еднакво на должината на нормалата спуштена од точката кон правата.

Равенката на една права може да биде запишана во разни облици. Според тоа, и растојанието од точка до права може да се одреди по различни формули, во зависност од обликот на равенката на правата. Ќе ја изведеме формулата за пресметување растојание од точка до права зададена со каноничната равенка.

Теорема 1. Растојанието d од точката $M_2(x_2,y_2,z_2)$ до правата

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$$

е одредено со формулата

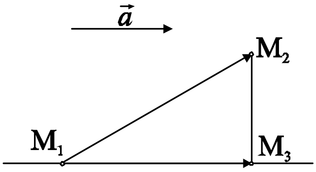
$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}.$$

Доказ. Да ја означиме со M_3 ортогоналната проекција на точката M_2 на дадената права (цртеж 1), која е паралелна на векорот $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и која минува низ точката $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Од правоаголниот триаголник $M_1M_2M_3$ за растојанието dод точката M_2 до дадената права добиваме:

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|\sin(\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M_2}).$$

Бидејќи аголот $(\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M_2})$ е еднаков на аголот $(\vec{a},\overrightarrow{M_1M_2})$, за растојанието d добиваме

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}|\sin(\vec{a}, \overrightarrow{M_1M_2}).$$



Цртеж 1

Од

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}| = |\overrightarrow{M_1M_2}||\vec{a}|\sin(\vec{a}, \overrightarrow{M_1M_2}),$$

заменувајќи го изразот

$|\overrightarrow{M_1M_2}|\sin(\vec{a}, \overrightarrow{M_1M_2})$ со $\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$ за растојанието d добиваме

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} \qquad (1)$$

Бидејќи

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

за координатното претставување на векторскиот производ $\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}$ имаме

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Тогаш,

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2},$$

така што за растојанието d од дадената точка до дадената права од (1) конечно добиваме

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}. \blacksquare$$

Пример 1. Согласно со погорната формула, растојанието од точката $M(1,0,1)$ до правата

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

изнесува

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 0-0 & 1-0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1-0 & 1-2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1-2 & 0-0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2^2+4^2+2^2}}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}. \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди го растојанието од точката $M(3,5,4)$ до правата

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}.$$

2. Најди го растојанието од точката $M(3,2,-3)$ до правата зададена со равенката

$$x = 1 + t,\ \ y = 2 - t,\ \ z = -3t.$$

3. Најди го растојанието од координатниот почеток до правата

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

4. Определи која од точките $M(-3,1,0)$ и $N(5,4,-3)$ е на помало растојание од правата

$$\frac{x-7}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}.$$

5. Најди ги висините во триаголникот $ABC,$ ако $A(0,0,-1),$ $B(0,-2,0)$ и $C(1,-1,0).$

4.7.4. Агол меѓу две прави.
Услов за ортогоналност на две прави

По договор под агол меѓу две прави во просторот се подразбира остриот или најмногу правиот аголот меѓу кои било два вектора кои се паралелни на дадените прави.

Нека се дадени две прави со своите канонични равенки:

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}, \qquad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}.$$

Според наведениот договор аголот α што го зафаќаат дадените прави всушност е остриот агол α меѓу двата вектори

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Косинусот на аголот α може да го определиме според формулата

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Ако скаларниот производ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и модулите $|\vec{a}|$и $|\vec{b}|$ ги изразиме со помош на координатите на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, добиваме дека

$$\cos\alpha=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}.$$

Пример 1. За да се пресмета аголот α што го зафаќа правата што минува низ точката $M(2,-1,4)$ и е паралелна на правата

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-9}{12}=\frac{z+6}{3},$$

со правата

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{7}=\frac{z}{4},$$

прво се составуваат каноничните равенки на правата којашто минува низ точката $M(2,-1,4)$ и е паралелна на правата

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-9}{12}=\frac{z+6}{3},$$

а тоа се

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-4}{3}.$$

Сега се пресметува косинусот на аголот α меѓу правите

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-4}{3} \text{ и } \frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{7}=\frac{z}{4}$$

по погоре добиената формула

$$\cos\alpha = \frac{|4\cdot 4+12\cdot 7+3\cdot 4|}{\sqrt{4^2+12^2+3^2}\sqrt{4^2+7^2+4^2}} = \frac{112}{117}.$$

Оттука имаме дека $\alpha \approx 0{,}2934\ \text{rad}$. ♦

Од формулата за пресметување агол меѓу две прави може да го изведеме **условот за ортогоналност на две прави**. Имено, две прави се отогонални, ако и само ако векторите на нивните правци се ортогонални, односно

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Пример 2. Правите

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-4}{-5} \text{ и } \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

се ортогонални бидејќи

$$3\cdot 2 + (-4)\cdot(-1) + (-5)\cdot 2 = 0.$$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди го косинусот од аголот α меѓу правите

а) $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z}{-2}$;

б) $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$.

2. Пресметај го косинусот од аголот α што го зафаќа правата што минува низ точката $M(-1,3,2)$ и е паралелна на правата

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2},$$

со правата

$$\frac{x-3}{7}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-1}.$$

3. Најди го косинусот од аголот α што го зафаќа правата што минува низ координатниот почеток и низ точката $M(-1,5,-3)$, со правата

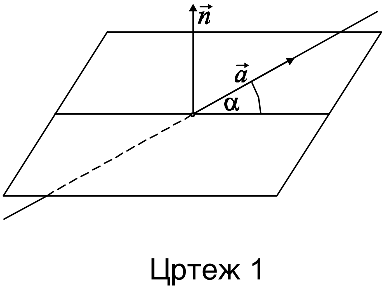
$$\frac{x}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-1}.$$

4. Дали се ортогонални правите кои се сечат во координатниот почеток и уште е познато дека едната минува низ точката $M(-4,4,2)$, а другата низ точката $N(2,1,2)$.

5. Најди ги аглите меѓу рабовите кои немаат заедничко теме на тетраедарот $ABCD$, ако $A(3,-1,0)$, $B(0,-7,3)$, $C(-2,1,-1)$ и $D(3,2,6)$.

4.7.5. Агол меѓу права и рамнина

Агол меѓу права и рамнина е остриот или правиот агол што го зафаќа правата со нејзината ортогонална проекција на таа рамнина.



Цртеж 1

Нека се дадени правата со својата канонична равенка

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$$

и рамнината со својата општа равенка

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Да го означиме со α аголот меѓу правата и рамнината. Тогаш аголот α е комплементарен на аголот меѓу правата и векторот $\vec{n}$ кој е нормален на рамнината (цртеж 1). Бидејќи правата е паралелна на векторот $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, а векторот $\vec{n}=(A,B,C)$ е нормален на рамнината, добиваме дека

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|}.$$

Според тоа синусот од аголот α меѓу дадената права и дадената рамнина може да го пресметаме според формулата:

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|}.$$

Ако апсолутната вредност на скаларниот производ $\vec{a}\cdot\vec{n}$ и модулот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{n}$ ги изразиме со помош на нивните координатни претставувања, тогаш синусот од аголот α меѓу дадената права и дадената рамнина може да го пресметаме според формулата:

$$\sin\alpha=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}.$$

Пример 1. Аголот меѓу правата

$$\frac{x+12}{3}=\frac{y-4}{6}=\frac{z}{2}$$

и рамнината

$$15x - 10y + 6z - 3 = 0$$

може да се одреди на два начина:

I начин. Од равенката на правата имаме $\vec{a} = (3,6,2)$ а од равенката на рамнината заклучуваме дека $\vec{n} = (15,-10,6)$. Тогаш имаме дека $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{n}| = 19$, $\vec{a} \cdot \vec{n} = -3$, од каде што следува дека

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|} = \frac{|-3|}{7 \cdot 19} = \frac{3}{133},$$

односно $\alpha = \arcsin\frac{3}{133}$.

Оттука $\alpha \approx 0{,}026551$ rad.

II начин. Од равенката на правата за векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ имаме $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ и $a_3 = 2$, додека од равенката на рамнината заклучуваме дека $A = 15$, $B = -10$ и $C = 6$. Тогаш

$$\sin\alpha = \left| \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{5 \cdot 3 + (-10) \cdot 6 + 6 \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-10)^2 + 6^2}\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} \right| = \frac{3}{133},$$

и повторно $\alpha \approx 0{,}026551$ rad. ♦

Од формулата за пресметување агол меѓу права и рамнина може да го изведеме условот при кој дадена права е паралелна на дадена рамнина. Имено, правата зададена со равенката

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$$

е паралелна на рамнината зададена со равенката

$$Ax+By+Cz+D=0$$

ако и само ако важи

$$Aa_1+Ba_2+Ca_3=0.$$

Пример 2. Согласно со горенаведениот услов, правата зададена со равенката

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$$

е паралелна на рамнината зададена со равенката $x+3z+7=0.$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди го аголот меѓу правата

$$y+1=0,\ \frac{x+1}{3}=\frac{z-9}{10}$$

и рамнината

$$3x-15y-2z+1=0.$$

2. Најди го аголот меѓу правата

$$\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$$

и рамнината што минува низ точката $M(2,3,4)$ и која е паралелна со векторите $\vec{a}=(1,1,-1)$ и $\vec{b}=(-2,-1,2).$

3. Најди ја равенката на рамнината што минува низ правата која е пресек на рамнините определени со равенките

$$x + 4y + 3z + 4 = 0 \text{ и } 3x + 2y + 5z + 12 = 0,$$

и која е паралелна со правата

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-3}.$$

4. За која вредност на коефициентот A рамнината

$$Ax + 3y - 5z + 1 = 0$$

е паралелна на правата

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}?$$

4.8. Заемни односи

Сега сме спремни да ги утврдиме заемните односи меѓу две рамнини, права и рамнина и две прави во просторот, зададени со своите равенки.

4.8.1. Заемен однос на две рамнини

Прво ќе најдеме потребен и доволен услов при кој две рамнини се паралелни, се совпаѓаат или се сечат. Потоа ќе ја изведеме равенката на права зададена како пресек на две рамнини.

А) Услов за паралелност на две рамнини

Нека се дадени рамнините R_1 и R_2 со општите равенки

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

соодветно. Тогаш, векторот $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ е нормален на рамнината R_1, а векторот $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_3)$ е нормален на рамнината R_2.

Дадените рамнини се паралелни ако и само ако се колинеарни нивните нормални вектори. Од условот за колинеарност на два вектора добиваме дека рамнините R_1 и R_2 се паралелни ако и само ако важи

$A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ и $C_1 = \lambda C_2$, за некое $\lambda \in R$, односно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Според тоа, дадените рамнини се паралелни ако и само ако коефициентите A_1, B_1 и C_1 се пропорционални на коефициентите A_2, B_2 и C_2, соодветно.

Пример 1. Рамнините зададени со равенките

$$2x - 3y + 7z - 1 = 0 \text{ и } 6x - 9y + 21z - 3 = 0$$

се паралелни, бидејќи важи условот

$$\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} = \frac{7}{21}. \blacklozenge$$

Б) Услов за совпаѓање на две рамнини

Нека се дадени рамнините R_1 и R_2 со општите равенки

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

содветно. Ако рамнините се совпаѓаат, т.е. $R_1 = R_2$ тогаш согласно со условот за паралелност $A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1$ и $C_2 = \lambda C_1,$ за некој реален број $\lambda \in R,$ односно нивните равенки се од обликот

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и}$$

$$\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1z + D_2 = 0.$$

Од претпоставката дека овие две равенки определуваат една иста рамнина, следува дека секое решение на првата равенка е решение на втората равенка и обратно.

Нека $(x_{0,}y_0, z_0)$ е кое било решение на двете равенки. Тогаш

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \text{ и}$$

$$\lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) + D_2 = 0$$

односно, $\lambda(-D_1) + D_2 = 0,$ или $D_2 = \lambda D_1.$ Значи, ако $R_1 = R_2$, тогаш е точно дека

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Обратно, ако коефициентите во дадените равенки го исполнуваат условот

$$A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1 \text{ и } D_2 = \lambda D_1, \text{ за некој } \lambda \in R,$$

тогаш тие се еквивалентни равенки, па R_1 и R_2 се совпаѓаат, бидејќи втората равенка се сведува на

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z) = \lambda D_1.$$

Дефинитивно, дадените рамнини се совпаѓаат ако и само ако е исполнет условот

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

односно, ако и само ако коефициентите A_1, B_1, C_1 и D_1 се пропорционални на коефициентите A_2, B_2, C_2 и D_2, соодветно.

Пример 2. Рамнините определени со равенките

$$x + 3y - z + 1 = 0 \text{ и } 6x + 18y - 6z + 6 = 0$$

се совпаѓаат, бидејќи

$$\frac{1}{6} = \frac{3}{18} = \frac{-1}{-6}. \blacklozenge$$

В) Услов за пресек на две рамнини.

Равенка на права како пресек на две рамнини

Поаѓајќи од условите изнесени под А) и под Б) заклучивме дека две рамнини се сечат ако и само ако е нарушен условот

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Познато е дека две рамнини во просторот кои се сечат определуваат една права. Да ја определиме равенката на правата која е пресек на две рамнини, кои не се паралелни, и се зададени со општите равенки:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогаш векторите

$$\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1) \text{ и } \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$$

се нормални на заедничката права на двете рамнини. Значи, векторот

$$\vec{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$$

е паралелен на правата која е пресек на двете дадени рамнини. Согласно со дефиницијата на векторски производ, за координатна форма добиваме

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Бидејќи дадените рамнини не се паралелни, коефициентите пред x, y и z, не се сите еднакви на нула и не се пропорционални. Тогаш барем една координата на векторот $\vec{a}$ е различна од нула. Ако точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$ е произволна точка што припаѓа на двете рамнини, односно на правата, тогаш векторската равенка на правата која што минува низ точката M_1 со радиус вектор $\overrightarrow{r_1}$ и е паралелна на векторот $\vec{a}$ гласи

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_1} + t\vec{a},$$

односно

$$\vec{r}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})+t\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\vec{k}\right).$$

Тогаш параметарските равенки на правата ќе гласат:

$$x=x_1+t\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\quad y=y_1+t\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\quad z=z_1+t\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix},$$

а нејзините канонични равенки се

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_1}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_1}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

Пример 1. За да се најдат каноничните равенки на правата определена како пресек на рамнините зададени со равенките

$2x+y+2z+1=0$ и $x+y+3z-2=0,$

прво се одредува носечкиот вектор на правата

$$\vec{a}=\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1,\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-4,\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\right).$$

Една точката што лежи на двете дадени рамнини, односно на бараната права е $M(0,-7,3)$. Тогаш каноничната равенка на правата гласи

$$\frac{x}{1}=\frac{y+7}{-4}=\frac{z-3}{1}.\ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Испитај ја заемната положба на рамнините:

а) $3x-5y-z-2=0$ и $6x-10y-2z-4=0.$

б) $x-y-1=0$ и $2x-2y-4=0.$

в) $x+3y+z=0$ и $6x+18y+6z=0.$

г) $4x-y+z-1=0$ и $6x+y-z-2=0.$

2. Запиши ги каноничните равенки на правата:

а) $\begin{cases}3x-4y-2z=0\\2x+y-2z=0\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-3y-3z-9=0\\x-2y+z+3=0.\end{cases}$

3. Најди ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(2,3,1)$ и низ правата

$$\begin{cases}x+y-2z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}.$$

4. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(2,-5,3)$ и е паралелна на правата

$$\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\5x+4y-z-7=0\end{cases}.$$

5. За кои вредности на параметрите B и D правата

$$\begin{cases}x-2y+z-9=0\\3x+By+z+D=0\end{cases}$$

лежи во $xy-$рамнината?

4.8.2. Заемен однос на две прави во просторот

Ќе изведеме потребен и доволен услов при кој две прави се паралелни, се сечат или се разминуваат.

А) Услов за паралелност на две прави

Нека се дадени две прави со своите канонични равенки

$$\frac{x-p_1}{a_1}=\frac{y-p_2}{a_2}=\frac{z-p_3}{a_3} \quad \text{и}$$

$$\frac{x-q_1}{b_1}=\frac{y-q_2}{b_2}=\frac{z-q_3}{b_3}.$$

Тогаш векторот $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ е паралелен на првата права, а векторот $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ е паралелен на втората права. Дадените прави се паралелни ако и само ако се колинеарни векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Од условот за колинеарност на два вектора добиваме дека дадените прави се паралелни ако и само ако важи

$$a_1=\lambda b_1,\ a_2=\lambda b_2 \ \text{ и } \ a_3=\lambda b_3, \text{ за некое } \lambda\in R,$$

односно

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

Пример 1. За да се најде вредноста на параметарот a за која што правите зададени со равенките со

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{a} \quad \text{и} \quad \frac{x-5}{8}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{4}$$

се паралелни поаѓаме од условот за паралелност на две прави. Имено од условот $\frac{4}{8}=\frac{-2}{-4}=\frac{a}{4}$ добиваме дека $a=2$. ♦

Б) Услов за пресек на две прави

Познато е дека две прави се сечат ако и само ако лежат во иста рамнина и не се паралелни.

Нека се дадени две прави со своите канонични равенки

$$\frac{x-p_1}{a_1}=\frac{y-p_2}{a_2}=\frac{z-p_3}{a_3} \quad \text{и}$$

$$\frac{x-q_1}{b_1}=\frac{y-q_2}{b_2}=\frac{z-q_3}{b_3}.$$

Првата од дадените прави минува низ точката $P(p_1,p_2,p_3)$ и е паралелна на векторот $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, додека втората права минува низ точката $Q(q_1,q_2,q_3)$ и е паралелна на векторот $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Дадените прави се сечат ако и само ако векторите

$$\overrightarrow{PQ}=(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3),\ \vec{a}=(a_1,a_2,a_3) \text{ и } \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

се компланарни. Користејќи го условот за компланарност на три вектори добиваме дека дадените прави се сечат ако и само ако е исполнето равенството

$$\begin{vmatrix} q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 2. За да се утврди дали се сечат правите

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4} \text{ и } \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

и во потврден случај за да се најдат координатите на пресечната точка S прво се проверува точноста на равенството

$$\begin{vmatrix} 0+1 & 0-1 & 0+1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Потоа поаѓајќи од параметарските равенки на правите

$$\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = -1+4t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = u \\ y = 2u, \\ z = 3u \end{cases}$$

за пресечната точка мора да бидат исполнети равенствата

$$u = -1+2t,\ 2u = 1+t \text{ и } 3u = -1+4t.$$

Бидејќи тие се исполнети за $t = 1$ и $u = 1$ заклучуваме дека пресечна точка е $S(1,2,3)$.

В) Разминувачки прави

Две прави коишто не се паралелни и не се сечат се нарекуваат разминувачки. Согласно со условите изведени под А) и под Б) правите зададени со каноничните равенки

$$\frac{x-p_1}{a_1} = \frac{y-p_2}{a_2} = \frac{z-p_3}{a_3} \text{ и}$$

$$\frac{x-q_1}{b_1} = \frac{y-q_2}{b_2} = \frac{z-q_3}{b_3}$$

се разминувачки ако и само ако

$$\begin{vmatrix} q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример 3. Правите

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x+31}{3}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-3}{6}$$

се разминувачки, бидејќи важи условот

$$\begin{vmatrix} -31-2 & 6-1 & 3+1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Задачи за самостојна работа

1. Испитај дали се сечат правите

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}$ и $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$,

в) $\begin{cases} 4x+z-1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x+y-z+4=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}$.

2. Дадени се правите

$$\begin{cases} 7x+2y-2z+7=0 \\ 3x+2y+1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{a}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}.$$

Најди ја вредноста на параметарот a за која дадените прави се сечат, а потоа најди ги координатите на пресечната точка.

3. Дадени се правите

$$\frac{x-2}{a}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} x=-2+t \\ y=1+2t \\ z=t \end{matrix}.$$

Најди ја вредноста на параметарот a за која дадените прави лежат во една рамнина, а потоа најди ја равенката на таа рамнина.

4. Запиши ја равенката на права која минува низ точката $A(4,0,-1)$ и ги сече правите

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3} \text{ и } \frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

5. Запиши ја равенката на правата што ги сече правите

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1} \text{ и } \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$$

и е паралелна на правата

$$\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}.$$

4.8.3. Заемен однос на права и рамнина

Нека

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$$

се каноничните равенки на произволна права и нека

$$Ax+By+Cz+D=0$$

е општата равенка на произволна рамнина.

Една права во просторот може да е паралелна на дадена рамнина, да лежи во рамнината или да ја прободува рамнината. За да се изведе потребен и доволен услов за секој од трите случаи, кои заемно се исклучуваат, правата ќе ја запишеме во параметарски облик

$$x=x_1+ta_1,\ \ y=y_1+ta_2,\ \ z=z_1+ta_3.$$

Со внесување на координатите на произволна точка од правата во равенката на рамнината ја добиваме равенката по променливата (параметарот t)

$$A(x_1 + ta_1) + B(y_1 + ta_2) + C(z_1 + ta_3) + D = 0,$$

или

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)t + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

Со воведување на ознаките

$$a = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \text{ и } b = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

равенката се сведува во облик

$$at + b = 0.$$

Случај I Ако $a = b = 0,$ тогаш секој реален број е решение на равенката $at + b = 0$, што значи дека координатите на секоја точка од правата ја задоволуваат равенката на рамнината, односно правата лежи во рамнината.

Случај II Ако $a = 0$ и $b \neq 0,$ тогаш равенката $at + b = 0$ претставува противречност, што значи дека координатите на ниедна точка од правата не ја задоволуваат равенката на рамнината, односно правата е паралелна на рамнината.

Случај III Ако $a \neq 0,$ тогаш равенката $at + b = 0$ има единствено решение $t = -\frac{b}{a}$ што значи дека правата и рамнината имаат само една заедничка точка, соодветна на вредноста на параметарот $t = -\frac{b}{a},$ т.е. правата ја прободува рамнината во точката

$$M\left(x_1 - \frac{b}{a}a_1, y_1 - \frac{b}{a}a_2, z_1 - \frac{b}{a}a_3\right).$$

Погорната дискусија може да ја резимираме во вид на следниве заклучоци:

✓Правата

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$$

лежи во рамнината $Ax+By+Cz+D=0$ ако и само ако важат равенствата

$$Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \text{ и } Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

✓Правата

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$$

е паралелна на рамнината $Ax+By+Cz+D=0$ (и немаат заедничка точка) ако и само ако се исполнети условите

$$Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \text{ и } Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0.$$

✓Правата

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$$

ја прободува рамнината $Ax+By+Cz+D=0$ ако и само ако е исполнет условот

$$Aa_1+Ba_2+Ca_3\neq 0$$

Пример 1. Ако се дадени правата

$$\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$$

и рамнината

$$3x + 5y - z - 2 = 0,$$

тогаш од

$$3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \neq 0$$

може да заклучиме дека дадената права ја прободува рамнината. За координатите на пресечната точка добиваме

$$\left(12 - \frac{78}{26} \cdot 4 = 0{,}9 - \frac{78}{26} \cdot 3 = 0{,}1 - \frac{78}{26} \cdot 1 = -2\right).$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди ја заедничката точка на правата

$$\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$$

и на рамнината

$$3x - y + 2z - 5 = 0.$$

2. Запиши ја равенката на правата што минува низ заедничките точки на рамнината

$$2x + y - 3z + 1 = 0$$

со правите

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2} \text{ и } \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+4}{-6}.$$

3. Провери дали правата

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$$

лежи во рамнината

$$4x+3y-z+3=0.$$

4. Запиши ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(3,1,-2)$ и низ правата $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

5. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ нормалите спуштени од точката $M(-3,2,5)$ на рамнините

$4x+y-3z+13=0$ и $x-2y+z-11=0$.

Задачи за вежбање

1. Разложи го векторот $\vec{d}=(3,-3,4)$ по векторите $\vec{a}=(1,1,2)$, $\vec{b}=(2,0,1)$ и $\vec{c}=(1,2,0)$.

2. Најди ја алгебарската вредност на проекција на векторт $\vec{a}=(1,2,2)$ врз векторот $\vec{c}=(1,0,1)$.

3. Најди ги: модулот на векторот $\vec{a}=5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, соодветниот единичен вектор и косинусите од аглите што ги зафаќа векторот $\vec{a}$ со координатните оски.

4. Најди го бројот k, ако $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+k$.

5. Најди вектор $\vec{c}$ колинеарен со векторот $\vec{a}+\vec{b}$, ако $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$, $\vec{c}\cdot\vec{b}=18$, $|\vec{b}|=2$.

6. Дадени се векторите $\vec{a}=(2,-3,1)$ и $\vec{b}=(1,2,-2)$. Најди ги векторските производи

а) $\vec{a}\times\vec{b}$, б) $\vec{b}\times\vec{a}$, в) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{a})$.

7. Дадени се векторите

$$\vec{a} = 2\lambda\vec{j} + \lambda\vec{k},\ \ \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\ \text{ и }\ \vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Најди вектор $\vec{d}$ кој ги задоволува условите

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{c}\times\vec{d}\ \text{ и }\ \vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{d}.$$

8. Нека се дадени два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кои не се колинеарни. Покажи дека векторите $\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ се заемно нормални.

9. Дадени се векторите

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k},\ \ \vec{b} = \vec{i} + \vec{j}\ \text{ и }\ \vec{c} = \vec{i} - \vec{j}.$$

Најди вектор $\vec{p}$ така што $\vec{p}\cdot\vec{a} = 3$ и $\vec{p}\times\vec{b} = \vec{c}.$

10. Дадени се векторите

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{k},\ \ \vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k},\ \ \vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\ \text{ и }\ \vec{d} = 2\vec{i} + \vec{k}.$$

Најди ги координатните претставувања на векторите

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\ \text{ и }\ (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}).$$

11. Најди ги плоштината на паралелограмот $OABC$ и аголот меѓу векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}.$

12. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC конструиран над векторите $(AB) \in \vec{a} = (-2,3,-3)$ и $(AC) \in \vec{b} = (1,3,-5).$

13. Пресметај ја плоштината на паралелограмот чии дијагонали се формирани со векторите $(AC) \in \vec{a} = (3,1,-2)$ и $(BD) \in \vec{b} = (1,-3,4).$

14. Дадени се векторите $\vec{a}=(1,2x,-3)$ и $\vec{b}=(2,x,-2x)$. За кои вредности на x дадените вектори се меѓусебно

а) нормални; б) паралелни?

15. Дадени се векторите $\overrightarrow{OM}=6\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ и $\overrightarrow{ON}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$. Покажи дека векторите $\overrightarrow{MN}$, $\vec{i}$ и $\vec{k}$ се компланарни.

16. За која вредност на параметарот t векторите

$$\vec{a}=(\log(t-2),-2,6),\quad \vec{b}=(t,-2,5) \text{ и } \vec{c}=(0,-1,3)$$

се компланарни?

17. Пресметај го волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите

$$(OA)\in\vec{a}=(1,-1,1),\quad (OB)\in\vec{b}=(2,2,-1) \text{ и } (OC)\in\vec{c}=(3,-1,0).$$

18. Пресметај ја висината на паралелопипедот конструиран над векторите

$$(OA)\in\vec{a}=(3,-2,5),\quad (OB)\in\vec{b}=(1,-1,4) \text{ и } (OC)\in\vec{c}=(1,-3,1),$$

ако негова основа е паралелограмот над векторите $(OA)\in\vec{a}$ и $(OB)\in\vec{b}$.

19. Запиши ги координатите на точката што е симетрична на точката $M(3,-1,2)$ во однос на

а) секоја од координатните рамнини;

б) координатниот почеток.

20. Најди го растојанието од точката $M(12,-3,4)$ до

а) координатниот почеток;

б) координатните оски.

21. Најди ги аглите што радиусвекторот на точката $M(6,2,9)$ ги зафаќа со координатните оски.

22. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $A(-4,-1,2)$, $B(3,5,-6)$ и $C(4,4,1)$.

23. Докажи дека отсечките што ги сврзуваат средините на спротивните рабови кај тетраедарот се сечат во една иста точка која ги преполовува.

24. Отсечката AB е поделена на пет еднакви дела при што првата од делбените точки има координати $C(3,-5,7)$ а последната $F(-2,4,-8)$. Најди ги координатите на крајните точки на дадената отсечка.

25. Дали точките $A(3,-2,3)$, $B(0,4,9)$, $C(2,0,5)$ и $D(2,-8,-1)$ лежат во една иста рамнина?

26. Запиши ја равенката на рамнината која

а) минува низ точката $M(2,-5,3)$ и е паралелна на $xz-$рамнината,

б) минува низ точката $M(-3,1,-2)$ и низ $z-$оската,

в) минува низ точките $M_1(4,0,-2)$, $M_2(5,1,7)$ и е паралелна на $x-$оската.

27. Најди ги отсечоците на координатните оски на следниве рамнини:

а) $2x-3y-z+12=0$; б) $5x+y-3z-15=0$;

в) $x - y + z - 1 = 0.$

28. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(7,-5,1)$ и на координатните оски отсекува позитивни и еднакви меѓу себе отсечоци.

29. Доведи ги во нормален облик следниве равенки на рамнина:

а) $10x + 2y - 11z + 60 = 0;$ б) $6x - 6y - 7z + 33 = 0.$

30. Запиши ја равенката на рамнината која е на растојание 6 единици од координатниот почеток, а за отсечоците на координатните оски важи $a : b : c = 1 : 3 : 2.$

31. Најди ги косинусите на правците на нормалата на рамнината $2x - y + 2z + 9 = 0.$

32. Најди го аголот меѓу $yz-$рамнината и рамнината зададена со равенката $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0.$

33. Пресметај ја должината на висината на тетраедарот $ABCD$ спуштена од темето A, ако $A(0,6,4)$, $B(3,5,3)$, $C(-2,11,-5)$ и $D(1,-1,4).$

34. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ:

а) точката $M(-2,7,3)$ и е паралелна на рамнината

$x - 4y + 5z - 1 = 0;$

б) координатниот почеток и е нормална на рамнините

$2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0;$

в) точките $L(0,0,1)$ и $M(3,0,0)$ и со $xy-$рамнината зафаќа агол $\frac{\pi}{3}$.

35. Најди точка на $z-$оската, еднакво оддалечена од рамнините $x+4y-3z-2=0$ и $5x+z+8=0$.

36. Запиши ги равенките на бочните страни на тетраедарот $ABCD$, ако $A(0,0,2)$, $B(3,0,5)$, $C(1,1,0)$ и $D(4,1,2)$.

37. Запиши ја равенката на рамнината која минува низ пресечната права на рамнините $x+5y+z=0$ и $x-z+4=0$, а со рамнината $x-4y-8z+12=0$ зафаќа агол $\frac{\pi}{4}$.

38. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(1,-5,3)$ и со координатните оски зафаќа агли еднакви на $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{2\pi}{3}$, соодветно.

39. Запиши ја равенката на правата која минува низ координатниот почеток, нормално на правата

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}.$$

40. Запиши ја равенката на нормалата на рамнината

$$5x+3y-7z+1=0$$

повлечена од точката $M(3,-2,4)$.

41. Запиши ја равенката на рамнината која минува низ координатниот почеток, и е нормална на правата определена со равенката

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}.$$

42. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ правата

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2},$$

и е нормална на рамнината определена со равенката

$$x+4y-3z+7=0.$$

43. Најди ја равенката на проекцијата на правата

$\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ врз рамнината $x-y+3y+8=0.$

44. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ правите

$\frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5}$ и $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}.$

45. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(1,0,7)$, паралелно на рамнината

$$3x-y+2z-15=0$$

и ја сече правата

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}.$$

46. На правата

$$\begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$$

најди точка еднакво оддалечена од точките $A(3,11,4)$ и $B(-5,-13,-2)$.

47. Најди ги координатите на ортогоналната проекција на точката $M(2,-3,5)$ врз рамнината $x+2y-2z-4=0.$

48. Најди ги координатите на симетричната точка на точката $M(3,4,7)$ во однос на рамнината $2x - y + z + 9 = 0.$

49. Најди ги координатите на симетричната точка на точката $M(2,1,3)$ во однос на правата

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Одговори и решенија на задачите

1.1.

1. а) 7; б) 0; в) 1; г) $-2b^3$. **2. Упатство:** Од втората редица извлечи множител a. **Одг.** 0. **3.** а) $x_1 = 3, x_2 = -3$; б) $x_1 = 0, \ x_2 = 1$; в) $x_1 = -2, \ x_2 = -\sqrt{5}, \ x_3 = \sqrt{5}$. **4.** а) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

б) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, в) $x \in (-7,1)$.

1.2.1.

1. а) $x = 2, \ y = 1$; б) $x = 5, y = -3$; в) $x = 1$, $y = \frac{1}{5}$. **2.** а) Системот е противречен, б) системот има бесконечно многу решенија, решение е секој пар броеви $x = t, \ y = \frac{\sqrt{3}}{3}(t-1)$, каде што $t \in R$, в) за $k \neq 2$ системот е противречен, а за $k = 2$ тој има бесконечно многу решенија.

3. а) За произволно a и $b \neq -3$; б) за $a = 2$ и $b = -3$; в) за $a \neq 2$ и $b = -3$. **4.** $k = 9$. **5.** $k = 2$. **6.** а) $m \neq -4$; б) $m = -4, \ n \neq 10$; в) $m = -4, n = 10$.

1.2.2.

1. а) Решение е секоја тројка броеви $x = -t - 8, y = 11, \ z = t$, каде $t \in R$; б) системот е противречен. **2.** а) $x = t, \ y = 5t, \ z = 11t$, каде $t \in R$; б) решение е секоја тројка (x, y, z), каде $3x - 2y + z = 0$; в) ако $a = -1$, тогаш системот е еквивалентен со равенката $x - y - z = 0$ и има бесконечно многу решенија. Ако $a=1,$ тогаш системот е противречен. Ако $a \neq \pm 1,$ тогаш решение на системот е секоја тројка $(x,y,z),$ каде $x=-t,\ \ y=(a-1)t,\ \ z=t,$ каде $t \in R.$

1.3.1.

1. а) 4; б) 33; в) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$; г) $(a-b)(b-c)(c-a)$. **2.** а) $x_1=3,\ \ x_2=2$; б) $x_1=-1,\ \ x_2=-2$; в) $x_1=a,$ $x_2=b.$ **3.** а) $x^2+y^2+z^2+1$; б) 0; в) $ax^2+bx+c.$

1.3.2.

2. а) 1; б) 2; в) $3abc-a^3-b^3-c^3.$ **3.** а) 0; б) 20; в) $x^3+y^3+z^3-3xyz.$

1.3.3.

1. а) 0; б) 6; в) 0. **3.** а) **Упатство:** Првата редица додај ја на втората редица, а потоа помножена со -2 додај ја на третата редица. Притоа се добива детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. На крај, втората редица помножена со $\frac{3}{2}$ додај ја на третата редица. **Одг.** 5; б) 0; в) **Упатство:** Замени ги местата на првата и на втората редица. **Одг.** $2.$

1.4.1.

1. а) $(1,-2,1)$; б) нема решение; в) $x=\frac{5}{11}(1-t)$, $y=\frac{1}{11}(9+13t)$, $z=t$, $t\in R$. **2.** Детерминантата на системот е $\Delta=-a^2+3a-3\neq 0$ за секој $a\in R$. Системот има единствено решение: $x=\frac{a^2-2a+2}{a^2-3a+3}$, $y=\frac{-1}{a^2-3a+3}$, $z=\frac{5a+38}{2(a+2)}$, каде што a е параметар. **3.** а) За $a=2$ системот има бесконечно многу решенија; б) за $a=-2$ системот нема решение; в) за $a\neq 2$ и $a\neq -2$ системот има единствено решение: $x=\frac{35}{2(a+2)}$, $y=\frac{21}{2(a+2)}$, $z=\frac{5a+38}{2(a+2)}$.

4. Упатство: а) Реципрочните вредности на $x+y+z$, $y-2x$ и $3z-y$ замени ги со u, v и w. **Одг.** $x=3$, $y=2$, $z=1$;
б) $x=4$, $y=2$, $z=1$.

1.4.2.

1. Нема решение. **2.** $x=3$, $y=-2$, $z=2$. **3.** $x=y=z=1$.
4. $x=1$, $y=2$, $z=-1$. **5.** $x=2$, $y=-3$, $z=2$. **6.** $x=1$, $y=-2$, $z=1$.
7. $x=3$, $y=-2$, $z=1$. **8.** $x=5$, $y=2$, $z=-1$.

1.5.

1. Упатство: а) Третата равенка на системот е линеарна комбинација од првите две. **Одг.** $x=2t$, $y=-3t$, $z=5t$, $t\in R$;
б) бидејќи $\Delta\neq 0$, системот нема ненулти решенија. Значи $(0,0,0)$ е единствено решение. **2.** $a=-3$.

4. Упатство: $\Delta=(a-1)^2(a+2)$. **Одг.** $a\in\{1,-2\}$.

Задачи за вежбање

1. а) -1; б) 1. **2.** а) $x=3,\ y=-1$; б) $x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}$. **6.** 1. **7.** $x\in(-6,-4)$.

8. $a=12$. **9.** а) $x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a+c}{2},\ z=\frac{b+c}{2}$; б) Системот најлесно ќе го решиш ако ги собереш трите равенки. **Одг.** $x=\frac{a-b+c}{2}$, $y=\frac{a+b-c}{2},\ z=\frac{b+c-a}{2}$. **10.** Ако $a\neq1$ и $a\neq-2$, единствено решение е $x=-\frac{a+1}{a+2},\ y=\frac{1}{a+2},\ z=\frac{(a+1)^2}{a+2}$. Ако $a=-2$, системот нема решение, а ако $a=1$, тогаш решение е секоја тројка (x,y,z) за кои $x=y+z=1$. **11.** а) $x=3,\ y=-2,\ z=1$; б) $x=5,\ y=2,\ z=-1$. **12.** 264.

13. $5\text{cm}, 3\text{cm}, 6\text{cm}$. **14.** $a=\frac{a+m}{n+2}+\frac{a-m(1+n)}{n+2}+\frac{n(a+m)}{n+2}$.

15. $a=b$. **16. Упатство:** $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$.

17. $x=bc,\ y=ac,\ z=ab$.

2.1.

1. Упатство: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow AB\parallel CD\ \wedge\ \overline{AB}=\overline{CD}$ и $AC\parallel BD\ \wedge\ \overline{AC}=\overline{BD}$ $\Leftrightarrow$ ABCD е паралелограм. **2. Упатство:** Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на иста права тогаш земи го предвид тврдењето во претходната задача 1. Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на иста права, тогаш избери вектор $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$ што не лежи на таа права. **3. Упатство:** Точката O лежи на отсечката AB и $\overline{OA}=\overline{OB}$. **4.** а) да; б) не; в) да; г) да; д) не.

5. Точни се исказите под а), в) и д). **6.** $\vec{a}=\vec{c}$ и $\vec{m}=\vec{p}$.

2.2.1.

2. Упатство: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$ **4.** а) збирот $\vec{a}+\vec{b}$ има иста насока со векторот $\vec{a},$ а за модулот важи $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|,$ б) збирот $\vec{a}+\vec{b}$ има иста насока со векторот $\vec{b},$ а за модулот важи $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{b}|-|\vec{a}|,$ в) збирот $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0},$ па насоката е неопределена, а за модулот имаме $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{0}|=0.$ **5.** а) (AB); б) (AD); в) (DA); г) (BD).

2.2.2.

2. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}.$ **3. Решение:** Нека $ABCD$ е паралелограм и $S=AC\cap BD$ е пресекот на неговите дијагонали. За да покажеме дека S е средина на отсечките AC и BD доволно е да докажеме дека $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}.$ Од $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SB},$ $\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{SD},$ добиваме дека $(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD},$ односно $(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}.$ Бидејќи $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=\vec{0},$ имаме $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}.$ Но векторот $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{AC},$ а векторот $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{BD}.$ Векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не се колинеарни. Според тоа $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}.$ За доказ на обратното тврдење претпоставуваме дека S е средина на дијагоналите на четириаголникот $ABCD.$ Ќе покажеме дека четириаголникот е паралелограм. За таа цел доволно е да докажеме дека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}.$ Бидејќи S е средина на отсечката AC имаме $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SC}.$ Слично, S е средина на отсечката $BD,$ па $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{SD}.$ Тогаш

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{DC}.$ **4.** а) $\overrightarrow{BC};$ б) $\overrightarrow{DB};$ в) $\vec{0};$ г) $\overrightarrow{AB}.$

5. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF},$ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}.$

2.3.

2. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=10.$ **3.** а) $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$ или аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е прав; б) аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е остар, аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е тап. **4.** а) $\vec{x}=\vec{b}+\vec{c};$ б) $\vec{x}=\vec{b}-\vec{c}.$ **5.** $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},$ $\overrightarrow{BC}=-\vec{b}-\vec{a},$ $\overrightarrow{CD}=\vec{a}-\vec{b}$ и $\overrightarrow{DA}=\vec{a}+\vec{b}.$

2.4.

4. а) $\vec{a};$ б) $-2\vec{c}.$ **5.** а) $\vec{x}=3\vec{a}+\vec{b};$ б) $\vec{x}$ е произволен вектор.

6. Решение: Претпоставуваме дека векторите $\vec{a},$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ формираат триаголник, односно постои триаголник ABC таков што $\vec{a}=\overrightarrow{BC},$ $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AB}.$ Тогаш $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$ Обратно, претпоставуваме дека $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$ Нека A е произволна точка и нека B и C се две точки такви што $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{a}.$ Тогаш имаме $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}-\vec{c}=-(\vec{a}+\vec{c}).$ Од $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ следува дека $\vec{b}=-(\vec{a}+\vec{c})=\vec{0},$ па $\vec{b}=\overrightarrow{CA},$ односно векторите $\vec{a},$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ го формираат триаголникот $ABC.$ **7. Решение:** За произволна точка M важи $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA},$ $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB},$ $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}.$ Бидејќи векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC},$ како и векторите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD},$ се спротивни, имаме $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$ Ако ги собереме четирите горенаведени равенства добиваме $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\cdot\overrightarrow{MO}$. **8. Решение:** Бидејќи M е средина на отсечката AB, а N е средина на отсечката CD, имаме $2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}$, па

$$2\overrightarrow{MN}=2(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})=2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=$$
$$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD},$$

и $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

2.5.

1. а) $x=1$, $y=2$; б) не постојат такви x и y. **2. Решение:** Нека MN и PQ се средните линии во четириаголникот $ABCD$ и нека S е средина на MN. Тогаш за произволна точка O, имаме

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC})\right)=$$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})$, од каде што следува дека S е средина и на средната линија PQ. **3.** $p=0$. **4. Упатство:** Од

$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AN}+\lambda\overrightarrow{ND}=\frac{1}{2}\vec{a}+\lambda\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)$ и $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\mu\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$

имаме $\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}-\mu\right)\vec{a}=\left(-\lambda-\frac{\mu}{2}\right)\vec{b}$. $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$.

2.6.

1. а) Линеарно зависни; б) линеарно зависни. **2.** а) Линеарно зависни; б) линеарно независни. **3.** Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. **4.** $\lambda=-9,\ \mu=-\frac{1}{3}$. **5. Упатство:** Од векторското равенство $\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}=\vec{0}$ го добиваме системот $\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0\\-\alpha+2\beta+\gamma=0\\2\alpha-\beta+\gamma=0\end{cases}$ кој има единствено решение $\alpha=\beta=\gamma=0$. **6.** $p=-\frac{1}{7}$.

Задачи за вежбање

1. Упатство: Векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и $\vec{d}$ формираат четириаголник ако нивниот збир е нултиот вектор. Според тоа,

$\vec{d}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+2\vec{r}$. **2.** а) $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; б) $\vec{a}=2\vec{c}-\vec{b}$.

3. $\overrightarrow{CB}=2\vec{a}-2\vec{b},\ \overrightarrow{DC}=-\vec{b},\ \overrightarrow{DE}=-\vec{a}$ и $\overrightarrow{EF}=2\vec{a}-2\vec{b}$.

4. Решение: Бидејќи $ODEF$ е паралелограм, имаме $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}$. Тогаш

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})-(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OF})=$$

$$=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF}=$$

$$=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF})+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF})-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE}-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})=\vec{0}.$$

5. $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a},\ \overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b},\ \overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c},$

6. Упатство: Од равенството $(q-r)\vec{a}+(r-p)\vec{b}+(p-q)\vec{c}=\vec{0}$ го добиваме хомогениот систем $\begin{cases}q-r=0\\r-p=0\\p-q=0\end{cases}$ чија детерминанта е еднаква на нула.

7. $\vec{x}=k\vec{y}+m\vec{z},\quad k=\frac{bc-ad}{c-bd},\quad m=\frac{a-b^2}{c-bd}.$

8. Упатство: Од $\vec{b}=k\vec{a}$ наоѓаме $-3\vec{p}+2\vec{q}+y\vec{r}=kx\vec{p}-4k\vec{q}-6k\vec{r},$ од каде што заради условот дека $\vec{p},\ \vec{q}$ и $\vec{r}$ не се компланарни добиваме $k=-\frac{1}{2},\ x=6$ и $y=3.$

9. Упатство: а) Од векторското равенство $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ го добиваме системот $\begin{cases}2x+y+z=0\\3x+y+2z=0\\x+3y-2z=0\end{cases}$ чие решение е $x=k,\ \ y=z=-k,$ каде k е произволен реален број. Според тоа векторите се линеарно зависни, б) линеарно независни.

3.1.1.

1. $\overrightarrow{BC}=(0,1),\ \overrightarrow{CD}=(-1,0),\ \overrightarrow{DA}=(0,-1),\ \overrightarrow{AC}=(1,1),\ \overrightarrow{BD}=(-1,1).$

2. $\overrightarrow{AA_1}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{BB_1}=\left(-1,\frac{1}{2}\right),\ \overrightarrow{CC_1}=\left(\frac{1}{2},-1\right).$

4. векторите се осносиметрични во однос на правата $y=x.$

3.1.2.

1. а) $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=(7,-1)$ б) $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=(2,1).$ **2.** а) $\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}=(9,-3)$ б) $\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}=(2,-5).$ **3.** а) $3\overrightarrow{a_1}-4\overrightarrow{a_2}=\left(-\frac{13}{2},21\right)$ б) $-2\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=(1,-9)$ в) $\overrightarrow{a_1}-6\overrightarrow{a_2}=\left(-\frac{23}{2},21\right).$

4. а) $\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2}+4\overrightarrow{a_3}=(-4,28)$ б) $2\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}=(15,-8)$

в) $-\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_2}+3\overrightarrow{a_3}-4\overrightarrow{a_4}=(-11,19)$.

5. $\overrightarrow{AA_1}=(3,4)$, $\overrightarrow{BB_1}=(0,-5)$, $\overrightarrow{CC_1}=(-3,1)$.

3.1.3.

1. а) IV-квадрант б) II-квадрант в) III-квадрант г) I-квадрант д) $x-$оската ѓ) $y-$оската е) $y-$оската ж) $x-$оската.

2. а) II-квадрант б) I-квадрант в) IV-квадрант г) III-квадрант д) $x-$оската ѓ) $y-$оската е) $x-$оската ж) $y-$оската.

3. а) $M(1,0)$, $N(-2,0)$, $P(5,0)$, $Q(-3,0)$, б) $M(0,3)$, $N(0,4)$, $P(0,-2)$, $Q(0,-1)$. **4.** а) $N(3,-5)$ б) $N(-3,5)$ в) $N(-3,-5)$. **5.** $m_x=4$, $m_y=2$.

3.1.4.

1. а) $d=\sqrt{82}$ б) $d=4$ в) $d=3\sqrt{5}$ г) $d=3\sqrt{5}$. **3.** $y=11$ или $y=-1$. **4.** $C(21,18)$. **5.** 13. **6.** $B(0,-15)$. **7.** $C(3,0)$.

3.1.5.

1. $S_{AB}\left(4,-\frac{5}{2}\right)$, $S_{BC}(2,1)$, $S_{AC}\left(1,-\frac{7}{2}\right)$. **2.** а) $M\left(\frac{39}{4},1\right)$, б) $M\left(\frac{45}{4},7\right)$.

3. 5. **4.** $(-1,-1)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(5,2)$. **5.** а) $\left(5,\frac{9}{5}\right)$ б) $\left(6,\frac{11}{5}\right)$ в) $(-7,-3)$ г) $(18,7)$. **6.** $A(-2,-6)$, $B(8,2)$, $C(-6,10)$. **8.** $C(2s_1-a_1,2s_2-a_2)$, $D(2s_1-b_1,2s_2-b_2)$.

3.2.1.

2. а) $y=x$ б) $y=-x$ в) $y=0$. **3.** а) $k=2$, $m=-3$ б) $k=-1$, $m=3$

в) $k = 0,\ m = -2$ г) $k = \sqrt{3},\ m = 0.$ **4.** $y = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}.$ **5.** $y = -x - 1.$

6. $k = -\frac{6}{5},\ m = \frac{7}{5}.$ **7.** $y = -5x + 2.$ **8.** $y = \pm x \pm 2\sqrt{2}.$

3.2.2.

1. а) $2x - 3y - 3 = 0$ б) $y + 4 = 0$ в) $x - 3 = 0.$ **2.** а) $k = 2,\ m = 3$

б) $k = \frac{5}{2},\ m = \frac{3}{2}$ в) $k = -\frac{3}{8},\quad m = -\frac{16}{3}.$ **3.** $\varphi = \frac{3\pi}{4},\ m = 3.$ **5.** да.

6. коефициентите A и B се со спротивни знаци.

3.2.3.

1. а) $y + 3 = k(x - 2)$ б) $y - 4 = k(x + 1).$ **2.** $3x + y + 5 = 0.$ **3.** $x + y + 3 = 0.$

4. а) $2x + y - 11 = 0$ б) $x - y - 10 = 0$ в) $3x - 2y - 27 = 0.$ **5.** а) $y + 1 = 0$

б) $3x - y - 10 = 0$ в) $x - y - 4 = 0.$ **6.** а) $x + y + 1 = 0$ б) $3x - 6y + 9 = 0$

в) $x - 3y - 7 = 0.$ **7.** $3x - 4y - 2 = 0.$

3.2.4.

1. а) $k = -\frac{7}{5}$ б) $k = -5$ в) $k = 0.$ **2.** $7x + 5y - 13 = 0.$ **3.** Не. **4.** $y = 2x.$

5. $3x + 4y - 16 = 0,\ 5x + 3y - 1 = 0,\ 2x - y - 7 = 0.$ **6.** $38x + 13y - 137 = 0,$

$17x - y - 23 = 0,\ 11x + 7y - 58 = 0.$ **7.** $y = \pm\frac{4}{3}x \pm 4.$

8. $x - 4y + 16 = 0,\ 5x + 3y + 11 = 0,\ 6x - y - 19 = 0.$

9. $3x - 5y + 4 = 0,\ 3x - 5y - 22 = 0,\ x + 7y - 16 = 0,\ x + 7y + 10 = 0.$

3.2.5.

1. а) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}=1,$ 4 единици на $x-$оската, 6 единици на $y-$оската

б) $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1,$ 1 единици на $x-$оската, 1 единици на $y-$оската

в) $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{-2}=1$ $\frac{1}{2}$ единици на $x-$оската, 1 единици на $y-$оската.

2. $k=\frac{6}{85}$. **3.** $k=\pm\frac{5}{12}$. **4.** 18 квадратни единици. **5.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1,$

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1$. **6.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$. **7.** а) $b=-a$ б) $b=a$ в) $b=-a\sqrt{3}$.

3.2.6.

1. равенките под г), д) и ѓ). **2.** а) $M=\frac{1}{\sqrt{5}}$ б) $M=\frac{1}{\sqrt{101}}$ в) $M=-\frac{1}{\sqrt{17}}$.

3. а) $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2=0$ б) $\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-3=0$ в) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{3}{2}=0$

г) $-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{3}{\sqrt{5}}=0$ д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-2=0$

ѓ) $x\cos 10^0+y\sin 10^0+4=0$. **4.** а) $\frac{3}{\sqrt{13}}x+\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$

б) $-\frac{1}{\sqrt{26}}x+\frac{5}{\sqrt{26}}y-\frac{10}{\sqrt{26}}=0$ в) $\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{3}{\sqrt{2}}=0.$

3.2.7.

1. $d=\frac{7}{5}$, не. **2.** $d=\frac{2}{3}$. **3.** $d_M=\frac{10}{\sqrt{5}}$ и $d_N=\frac{8}{\sqrt{5}}$. **4.** $\frac{198}{\sqrt{97}}, \frac{99}{\sqrt{130}}, \frac{22}{\sqrt{5}}$.

5. $x+y=7\pm5\sqrt{2}$. **6.** $4x-3y+26=0,\ 4x-3y-24=0$.

7. $4x-3y+11=0,\ 4x+3y+5=0$. **8.** $d=\frac{25}{\sqrt{34}}$.

3.2.8.

1. а) се сечат во точката $(1,2)$ б) се паралелни в) се совпаѓаат.

2. $A=4,\ B=2$. **3.** а) $(5,0)$ и $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ б) $(-6,0)$ и $(0,4)$. **4.** а) $k_1\neq k_2$

б) $k_1=k_2$ и $b_1\neq b_2$ в) $k_1=k_2$ и $b_1=b_2$. **5.** $5x-6y+28=0$.

6. $\left(\frac{19}{57},0\right),\left(-\frac{19}{57},-\frac{171}{57}\right)$ и $(-2,-1)$. **7.** $7x-3y+41=0,\ x-2y-8=0$ и

$5x+7y-23=0$. **8.** $6\sqrt{5}$ и $10\sqrt{2}$.

3.2.9.

1. $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **2.** $2x+y-4=0$. **3.** $(2+\sqrt{3})x+y-5=0$. **4.** правите по а) б) д)

и ѓ). **5.** $5x+3y-60=0$. **6.** $k_1=-\frac{1}{3},\ k_2=1$ и $k_1=-\frac{5}{3}$. **7.** $\left(-\frac{12}{13},\frac{34}{13}\right)$.

3.3.1.

1. $x^2+y^2=25$. **2.** а) $S(-7,0),\ \ r=3$ б) $S(-6,8),\ \ r=6$ в) $S(35,12),\ \ r=37$

г) $S(-30,-30),\ \ r=30$. **3.** $(x+3)^2+(y+2)^2=13$.

4. $(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. **5.** $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$.

6. а) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ б) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$.

7. $7x^2+7y^2-19x+11y-6=0.$ **8.** $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\left(y+\frac{7}{5}\right)^2=\frac{533}{25}.$

9. а) $\lambda\in\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)\cup(0,\infty)$ б) $\lambda=6.$

3.3.2.

1. $(3,-1)$ и $(2,-2)$ **2.** $\sqrt{90}.$ **3.** $2x-3y+9=0.$

4. $(x-34)^2+(y+34)^2=1156,\ (x-10)^2+(y+10)^2=100.$

5. $y=0,\ 20x-21y=0.$ **6.** $2y-x=\pm\sqrt{30}.$

7. $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2},\ \left(x-\frac{13}{18}\right)^2+\left(y-\frac{13}{18}\right)^2=\frac{25}{162}.$

4.3.3.

1. а) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$ **2.** M_3 и $M_8.$

3. а) $F_1(-8,0),\ F_2(8,0)$ б) $F_1(-2\sqrt{2},0),\ F_2(2\sqrt{2},0)$ в) $F_1(-12,0),\ F_2(12,0).$

4. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1.$ **5.** а) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ б) $\frac{x^2}{54}+\frac{y^2}{27}=1$ в) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1.$

3.3.4.

1. а) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$ **2.** а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$ в) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1.$ **3.** а) $a=2,\ \ b=1$ б) $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{5}$

в) $a=\sqrt{15},\ b=\sqrt{3}.$ **4.** $2a=26,\ \ 2b=10,\ \varepsilon=\frac{12}{13},\ F_1(-12,0),\ F_2(12,0).$

5. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **6.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **7.** $7x^2+16y^2=112$. **8.** а) $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$ б) $\varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{5}$. **9.** 6.

3.3.5.

1. $M_1(0,-3)$, $M_2\left(\frac{192}{73},\frac{165}{73}\right)$. **2.** $M(5,-4)$. **3.** $4x+9y-13=0$.

4. $x-2y-8=0$. **5.** $2x-y\pm 12=0$. **6.** $y=3$, $M(0,3)$ и $12x+7y+51=0$, $M\left(-\frac{60}{17},-\frac{3}{17}\right)$. **7.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, $\frac{16x^2}{80}+\frac{y^2}{5}=1$. **8.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

3.3.6.

1. M_1 и M_2 не, M_3 да. **2.** $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$. **3.** а) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ б) $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ в) $5x^2-7y^2=13$. **4.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **5.** $M\left(\frac{48}{5},\pm\frac{3\sqrt{119}}{5}\right)$.

3.3.7.

1. $F_1(-\sqrt{74},0)$, $F_2(\sqrt{74},0)$, $y=\pm\frac{5}{7}x$. **2.** а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{324}=1$ б) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ г) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ д) $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1$. **3.** а) $2a=8$, $2b=4$ б) $2a=6$, $2b=10$ в) $2a=16$, $2b=6$. **4.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **5.** $\left(\pm\frac{14\sqrt{3}}{3},\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

6. а) $a=\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{5}$ б) $a=\frac{3\sqrt{19}}{5}$, $b=\sqrt{19}$.

3.3.8.

1. а) $M_1(2,0)$ и $M_2(4,3)$ б) $M(10,-2)$, правата е тангента в) немаат заеднички точки. **2.** $x+y-1=0$. **3.** $25x-12y\pm 40=0$.

4. $x+y\pm\sqrt{54}=0$. **5.** $m=\pm\frac{9}{2}$. **6.** $10x-9y-24=0$. **7.** $y+5=\pm\frac{1}{2}(x-2)$.

3.3.9.

1. а) $p=4$ б) $p=\frac{3}{2}$ в) $p=16$. **2.** а) $F\left(\frac{5}{4},0\right)$, $x=-\frac{5}{4}$ б) $F\left(\frac{1}{4},0\right)$ $x=-\frac{1}{4}$

в) $F\left(\frac{1}{8},0\right)$, $x=-\frac{1}{8}$. **3.** $A(18,12)$, $B(18,-12)$. **4.** а) $y^2=16x$ б) $y^2=4x$.

5. $A(0,0)$, $B\left(\frac{45}{2},15\right)$, $C\left(\frac{45}{2},-15\right)$. **6.** $\overline{OM}=10$. **7.** $h_1=7{,}5$, $h_2=\frac{20}{3}$,

$h_3=\frac{25}{6}$.

3.3.10.

1. а) $M\left(\frac{2}{9},2\right)$, правата е тангента на параболата б) немаат

заеднички точки в) $\left(\frac{1}{2},3\right)$, правата е паралелна со оската на

симетрија. **2.** $2x-y-3=0$. **3.** а) $x+y+3=0$, $(3,-6)$ $x-y+3=0$, $(3,6)$

б) $y=3x+1$. **4.** а) $x-2y+12=0$ б) $3x+y+1=0$. **5.** $p=\frac{5}{2}$. **6.** $d=2$.

Задачи за вежбање

1. $4(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{13})$. **2. а)** $M(7,1)$ **б)** $M(7,1)$. **3.** $\lambda=\frac{1}{2}$. **4.** $L\left(\frac{19}{3},1\right)$ **и** $M(1,13)$. **5.** $6x-y-5=0$. **6.** $7x+10y+29=0$. **8.** $D(1,-5)$.

9. $C(5,-3)$, $D(1,-5)$. **11. а)** $d=\frac{7}{5}$ **б)** $d=1$. **12.** $x-3=0$, $x-3y-7=0$, $x+3y-13=0$. **13. а)** $T(-4,0)$ **б)** $H(4,4)$. **14. а)** $3\sqrt{10}$ **б)** $\sqrt{10}$ **в)** 15.
15. $M(-3,8)$. **16.** $P=49$. **17.** $4x+3y-120$, $48x+9y+72=0$. **18.** $A(-3,-2)$, $B(7,-1)$, $C(-1,5)$. **19. а)** $T\left(\frac{17}{12},11\right)$ **б)** $P=\frac{105}{8}$. **20.** $3x+8y-7=0$, $8x-3y+7=0$. **21.** $x=\pm 4\sqrt{3}$. **22. а)** $(-2,2)$, $(6,6)$
б) $(x+2)^2+(y-2)^2=4$, $(x-6)^2+(y-6)^2=36$.

23. $(x-4)^2+(y+3)^2=25$, $(x-2)^2+(y+2)^2=4$, $\left(\frac{16}{5},-\frac{18}{5}\right)$.

24. $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$. **25.** 17. **26.** $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{125}=1$. **27.** $-\frac{b}{a}<k<\frac{b}{a}$.

28. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$. **29.** $(1,0)$, $(-1,0)$, $(\sqrt{5},-2)$, $(-\sqrt{5},-2)$. **30.** $(0,0)$, $(6,2\sqrt{3})$, $(6,-2\sqrt{3})$. **31.** $x+y+1=0$. **33.** $(x-2)^2+\left(y+\frac{15}{2}\right)^2=169$.

34. $3x-4y+32=0$. **35.** $x^2+y^2-14y-1=0$. **36.** $\sqrt{7}x+3y\pm 16=0$, $\sqrt{7}x-3y\pm 16=0$. **37.** $(x-6)^2+(y+7)^2=98$.

4.1.1.

1. а) $a_x=1, a_y=4,\ a_z=1$; б) $a_x=-2,\ a_y=1,\ a_z=-1$;

в) $a_x=0, a_y=1,\ a_z=-2$; г) $a_x=1,\ a_y=0,\ a_z=3$. **2.** а) $\vec{a}=-\vec{j}+4\vec{k}$;

б) $\vec{a}=7\vec{i}-\vec{k}$; в) $\vec{a}=-2\vec{j}$; г) $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$.

4.1.2.

1. а) $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=(-1,1,-1)$; б) $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=(-12,4,3)$. **2.** а) $\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}=(3,9,-2)$;

б) $\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}=(-3,8,8)$. **3.** а) $3\overrightarrow{a_1}-4\overrightarrow{a_2}=\left(-\frac{13}{2},21,21\right)$;

б) $-2\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=(1,-9,-14)$; в) $\overrightarrow{a_1}-6\overrightarrow{a_2}=\left(-\frac{23}{2},21,7\right)$.

4. а) $\overrightarrow{a_1}-2\overrightarrow{a_2}+4\overrightarrow{a_3}=(-10,20,2)$; б) $2\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}=(1,-5,-7)$;

в) $-\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_2}+3\overrightarrow{a_3}-4\overrightarrow{a_4}=(3,9,-6)$. **5. Решение:** Нека се дадени векторите $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$. Ако $a_x=b_x$, $a_y=b_y$ и $a_z=b_z$, тогаш $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}=\vec{b}$, односно $\vec{a}=\vec{b}$. Обратно, ако $\vec{a}=\vec{b}$ тогаш $\vec{a}-\vec{b}=0$ или изразено со помош на координати $\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$. Според тоа, $\vec{0}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}$. Бидејќи векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се линеарно независни, добиваме дека $a_x-b_x=0$, $a_y-b_y=0$ и $a_z-b_z=0$, односно $a_x=b_x$, $a_y=b_y$ и $a_z=b_z$. **6.** $|\vec{a}|=3\sqrt{5}$.

7. Упатство: Од векторското равенство $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ го добиваме системот $\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0\\-\alpha+2\beta+\gamma=0\\2\alpha-4\beta+\gamma=0\end{cases}$ кој има единствено решение $\alpha=\beta=\gamma=0$.

4.1.3.

1. Упатство: $\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a=\vec 0 \;\Leftrightarrow\; |\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a|=0.$ $\dfrac{\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a}{\overrightarrow{e_0}}=|\vec a|\cos(\vec a,\vec e) \;\Rightarrow$

$\left|\dfrac{\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a}{\overrightarrow{e_0}}\right|=|\vec a||\cos(\vec a,\vec e)| \;\Rightarrow\; |\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a|=|\vec a||\cos(\vec a,\vec e)|.$ $|\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a|=0 \;\Leftrightarrow$

$|\vec a||\cos(\vec a,\vec e)|=0 \Leftrightarrow |\vec a|=0$ или $|\cos(\vec a,\vec e)|=0 \;\Leftrightarrow\; |\vec a|=0$ или $(\vec a,\vec e)=\dfrac{\pi}{2}.$

2. Упатство: Од $\dfrac{\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a}{\overrightarrow{e_0}}=|\vec a|\cos(\vec a,\vec e) \;\Rightarrow\; \left|\dfrac{\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a}{\overrightarrow{e_0}}\right|=|\vec a||\cos(\vec a,\vec e)| \;\Rightarrow$

$|\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a|=|\vec a||\cos(\vec a,\vec e)|.$ Заради $|\cos(\vec a,\vec e)|\le 1$ имаме $|\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a|\le|\vec a|.$ Од

$|\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a|=|\vec a||\cos(\vec a,\vec e)|$ имаме $|\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a|=|\vec a| \;\Leftrightarrow\; (\vec a,\vec e)=0$ или $(\vec a,\vec e)=\pi.$

3. а) $\dfrac{\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a}{\overrightarrow{e_0}}=|\vec a|\cos(\vec a,\vec e)=6\cos 60^{\circ}=3,$ б) $0,$ в) $5,$ г) $-6.$

4. Решение: $|\vec a||\mathrm{pr}_{\vec a}\vec b|=|\vec a||\vec b||\cos(\vec b,\vec a)|=|\vec b||\vec a||\cos(\vec a,\vec b)|=|\vec b||\mathrm{pr}_{\vec b}\vec a|.$

5. Упатство: На оска p која има иста насока со $\vec e$ избираме точка O и ги конструираме векторите $(OA)\in\vec a$ и $(OB)\in\lambda\vec a$ (направи цртеж). Ако ги означиме со A_1 и B_1 ортогоналните проекции на точките A и B на оската $p,$ тогаш од сличноста на триаголниците OAA_1 и OBB_1 имаме $|\overrightarrow{OB_1}|=\lambda|\overrightarrow{OA_1}|.$ Да забележиме дека $(OA_1)\in\mathrm{pr}_p\vec a$ и $(OB_1)\in\mathrm{pr}_p\lambda\vec a.$ **6.** а) $\dfrac{\mathrm{pr}_{\vec e}3\vec a}{\overrightarrow{e_0}}=3\dfrac{\mathrm{pr}_{\vec e}\vec a}{\overrightarrow{e_0}}3\cdot(-3)=-9;$ б) $7;$ в) $\dfrac{21}{2}.$

4.2.1.

1. а) 6; б) 9; в) 16; г) -72. **2. Упатство:** Се користи комутативноста, асоцијативноста и дистрибутивноста на скаларното множење.

3. а) позитивен; б) негативен. **4.** $\cos(\vec{c},\vec{d})=\frac{1}{7}$. **5.** $|\vec{p}|=\sqrt{14+\sqrt{2}}$.

6. Решение: Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол при темето C. Ако ставиме $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$, тогаш $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ (направи цртеж). Доказот следува од

$|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$, бидејќи $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. **7.** $\cos\varphi=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha}}$.

4.2.2.

1. а) -3; б) 11. **2.** а) 7; б) $\sqrt{26}$. **3.** а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$. **4.** а) не; б) да.

5. $\vec{x}=(-4,2,-4)$. **6.** $\vec{x}=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$ и

$\vec{x}=\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$. **7.** $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=15$, $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c})$.

Одг. да.

4.3.1.

1. Упатство: Од $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{13}$ имаме

$\sin(\vec{a},\vec{b})=\sqrt{1-\cos^2(\vec{a},\vec{b})}=\frac{12}{13}$. Тогаш $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=72$.

2. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{p}-16\vec{q}+10\vec{r}.$ **3. Упатство:** Се користи антикомутативноста, асоцијативноста и дистрибутивноста на векторското множење.

4. $P=\frac{105\sqrt{2}}{2}.$ **5.** $P=\frac{1}{4}.$ **6.** $h=\frac{19}{5}.$ **7. Упатство:** Докажи дека $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}.$

4.3.2.

1. а) $\vec{a}\times\vec{b}=(3,0,2);$ б) $\vec{a}\times\vec{b}=(-5,1-7).$ **2.** а) $\vec{a}\times\vec{b}=(5,1,7);$

б) $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}=(10,2,14);$ в) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})=(-20,-4,-78).$

3. $\sin(\vec{a},\vec{b})=\frac{5\sqrt{17}}{21}.$ **4.** $P=\sqrt{54}.$ **5.** $P=\frac{49}{2}.$ **6.** $\vec{x}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

7. $\vec{x}=(7,5,1).$ **8.** $x=6,\ y=2.$

4.4.1.

1. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=48.$ **2.** $V=27.$ **3.** $V=84.$

4. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot 1\cdot\cos\alpha=1\cdot 1\cdot\sin\alpha\cdot 1\cdot\cos\alpha=\ =\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha.$

4.4.2.

1. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=25.$ **2.** $V=25.$ **3.** Да. **4.** $H=\frac{10\sqrt{59}}{59}.$ **5.** $t_1=1,\ t_2=1+\sqrt{2},$ $t_3=1-\sqrt{2}.$ **6.** $p=-\frac{1}{7}.$

4.5.1.

1. $A(2,-3,1),\ B(-3,1,0),\ C(4,-4,-2),\ D(2,0,-3),\ E(0,2,-1).$

2. а) $A(1,-2,0)$, $B(-2,3,0)$, $C(1,3,0)$; б) $A(0,-2,4)$, $B(0,3,1)$, $C(0,3,2)$; в) $A(1,0,4)$, $B(-2,0,1)$, $C(1,0,2)$. **3.** а) $\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$; б) $\overrightarrow{BA}=(-1,-2,-2)$; в) $\overrightarrow{AC}=(-2,1,2)$; г) $\overrightarrow{BD}=(0,1,-3)$; д) $3\overrightarrow{BD}=(0,3,-9)$; ѓ) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(-2,2,-1)$; е) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(-4,3,1)$. **4.** $B(2,-1,-1)$. **5.** а) $d=\sqrt{131}$; б) $d=2\sqrt{5}$; в) $d=3\sqrt{2}$; г) $d=\sqrt{61}$. **6.** $L=3+\sqrt{58}+\sqrt{69}$.

4.5.2.

1. а) $M(2,5,1)$; б) $M(0,0,0)$. **2.** $B(10,-2,-3)$. **3.** а) $M\left(5,\frac{9}{5},\frac{13}{5}\right)$; б) $M\left(6,\frac{11}{5},\frac{17}{5}\right)$; в) $M(-7,-3,-7)$; г) $M(18,7,13)$.

4. $M_1\left(-1,-1,-\frac{12}{5}\right)$, $M_2\left(1,0,-\frac{9}{4}\right)$, $M_3\left(3,1,-\frac{6}{5}\right)$, $M_4\left(5,2,-\frac{3}{5}\right)$.

5. $S_{AB}(9,1,-13)$, $S_{BC}(10,1,2)$, $S_{AC}(0,4,3)$. **6.** $T\left(\frac{8}{3},\frac{1}{3},2\right)$. **7.** $C(4,-12,4)$.

4.6.1.

1. $\vec{r}\cdot(2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})-5=0$. **2.** $\vec{r}\cdot(3\vec{i}+4\vec{j})-5=0$. **3.** Задачата има две решенија: $\vec{r}\cdot(5\vec{i}-2\vec{j}+15\vec{k})-12=0$ или $\vec{r}\cdot(-5\vec{i}+2\vec{j}-15\vec{k})-12=0$.

4. рамнината под б). **5.** а) $\overrightarrow{n_0}=\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$, $p=3$; б) $\overrightarrow{n_0}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $p=33$; в) $\overrightarrow{n_0}=\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $p=10$.

4.6.2.

1. а) $\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{7}\vec{i}+\frac{6}{7}\vec{j}+\frac{3}{7}\vec{k}\right)-\frac{1}{7}=0;$ б) $\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{1}{3}\vec{k}\right)-4=0.$

2. а) $p=\frac{36}{\sqrt{74}},\ \cos(\overrightarrow{n_0},\vec{i})=\frac{2}{\sqrt{74}},\ \cos(\overrightarrow{n_0},\vec{j})=-\frac{5}{\sqrt{74}},\ \cos(\overrightarrow{n_0},\vec{k})=\frac{7}{\sqrt{74}};$

б) $p=\frac{16}{\sqrt{2}},\ \cos(\overrightarrow{n_0},\vec{i})=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos(\overrightarrow{n_0},\vec{j})=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos(\overrightarrow{n_0},\vec{k})=0;$ в) $p=\frac{16}{\sqrt{10}},$

$\cos(\overrightarrow{n_0},\vec{i})=0,\ \cos(\overrightarrow{n_0},\vec{j})=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \cos(\overrightarrow{n_0},\vec{k})=\frac{1}{\sqrt{10}}.$ **3.** $z=17.$

4. Упатство: Покажи дека рамнините зададени со равенките $2x+10y-11z=-6$ и $8x+40y-44z=15$ се паралелни. Првата рамнина е на онаа страна од координатниот почеток кон која е насочен нормалниот вектор $\vec{n}=(2{,}10,-11),$ додека втората рамнина е на спротивната страна. Според тоа, координатниот почеток лежи во просторот меѓу двете рамнини. Слично, рамнините зададени со равенките $28x-10y-4z=11$ и $14x-5y+-2z+3=0,$ како и рамнините зададени со равенките $3x+6y+6z+1=0$ и $x+2y+2z-5=0$ се паралелни. Направи слична дискусија за положбата во просторот на координатниот почеток.

5. а) Паралелна на $xy-$рамнината; б) паралелна на $yz-$рамнината; в) паралелна на $xz-$рамнината; г) минува низ координатниот почеток; д) паралелна на $y-$оската; ѓ) паралелна на $x-$оската; е) паралелна на $z-$оската; ж) ја содржи $z-$оската.

4.6.3.

1. а) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1$; б) $\frac{x}{-\frac{1}{3}}+\frac{y}{-\frac{1}{4}}+\frac{z}{\frac{1}{2}}=1$; в) $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{-\frac{1}{3}}+z=1$. **2.** $a=2$, $a=4$, $c=-2$. **3.** $k=-\frac{6}{5}$. **4.** $k=-\frac{1}{12}$. **5.** 4 кубни единици.

4.6.4.

1. $3x+7y-25=0$. **2.** $3x-2y+5z-2=0$. **3.** а) $z+4=0$; б) $y-6=0$; в) $x+2=0$.

4.6.5.

1. $22x-26y+32z-150=0$. **2.** а) Не; б) да, $2x+5y-3z+10=0$; в) да, $x+y+z-1=0$. **3.** Да.

4.6.6.

1. $\frac{5}{\sqrt{13}}$. **2.** Да. **3.** $(6+2\sqrt{3},0,0)$. **4.** $\frac{8}{\sqrt{206}}$. **5.** $2x+2y-z-26=0$.

6. $\frac{24}{\sqrt{91}}$.

4.6.7.

1. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$. **2.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{6}$. **3.** $x-y-z-2=0$.

4. Упатство: Нормалниот вектор на бараната рамнината е векторскиот производ $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$. Бараната равенка гласи $(\vec{r}-\vec{r_1})\cdot(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})=0$, односно $[\vec{r}-\vec{r_1},\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}]=0$.

4.7.1.

1. $x = 1 + 7t,\ \ y = 3 - 4t,\ \ z = -2 + 2t.$ **2.** $M_1.$ **3.** $x = 2 + 4t,\ \ y = -1 - 5t,$

$z = 3 + 6t,\ \ \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-3}{6}.$ **4.** $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}.$

4.7.2.

1. а) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2};$ б) $\frac{x-3}{-4} = \frac{z-2}{-2},\ \ y - 1 = 0.$ **2.** $\frac{x}{-1} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3}.$

3. $AB:\ \frac{x}{4} = \frac{z-2}{2},\ \ y = 0.\ \ AC:\ \frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2},\ \ AD:\ \frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-4},$

$BC:\ \frac{x-4}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{-5},\ \ BD:\ \frac{x-4}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-7},\ \ CD:\ \frac{x-5}{-6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-2}.$

4. Да. **5.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2},\ \ z = 0.$ **6.** $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-7}{-8},\ \ \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+4}{3},$

$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-4}{11}.$

4.7.3.

1. $2\sqrt{2}.$ **2.** $\sqrt{2}.$ **3.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}.$ **4.** Точката $N.$ **5.** $h_C = 1,\ h_B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}},\ h_A = \sqrt{3}.$

4.7.4.

1. а) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{42},$ б) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{6}.$ **2.** $\cos\alpha = \frac{13}{189}.$ **3.** $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{70}}{105}.$ **4.** Да.

5. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{2}.$

4.7.5.

1. $\sin\alpha = \frac{11}{\sqrt{109}\sqrt{238}}$. **2.** $\frac{\pi}{3}$. **3.** $\frac{x+4}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$. **4.** $A = -1$.

4.8.1.

1. а) Рамнините се паралелни; б) рамнините се паралелни;
в) рамнините се совпаѓаат; г) рамнините се сечат.

2. а) $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{11}$; б) $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{3}$. **3.** $5x - y - 7 = 0$.

4. $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$. **5.** $B = -6,\ D = -27$.

4.8.2.

1. а) Да; б) да. **2.** $a = 3,\ S(1,-2,5)$. **3.** $a = 3,\ \ x + 2y - 5z = 0$.

4. $\frac{x-4}{13} = \frac{y}{37} = \frac{z+1}{58}$. **5.** $\frac{x}{8} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+9}{1}$.

4.8.3.

1. $(2,3,1)$. **2.** $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-2}{1}$. **3.** Да. **4.** $8x - 9y - 22z - 59 = 0$.

5. $5x + 7y + 9z - 44 = 0$.

Задачи за вежбање

1. Упатство: Од векторското равенство $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ го добиваме системот $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+2z=-3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ чие решение е $x=1,\ \ y=2$ и $z=-2.$

Според тоа $\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c}.$ **2.** $\dfrac{pr_{\vec{c}}\vec{a}}{\overrightarrow{c_0}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$

3. $|\vec{a}|=\sqrt{5^2+(-2)^2+4^2}=3\sqrt{5},$

$$\overrightarrow{a_0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}}{3\sqrt{5}}=\frac{5}{3\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{2}{3\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{4}{3\sqrt{5}}\vec{k},$$

$\cos\alpha=\dfrac{5}{3\sqrt{5}},\ \cos\beta=-\dfrac{2}{3\sqrt{5}},\ \cos\gamma=\dfrac{5}{3\sqrt{5}}.$ **4.** $k=-\vec{b}\cdot\vec{c}.$ **5.** $\vec{c}=2(\vec{a}+\vec{b}).$

6. а) $\vec{a}\times\vec{b}=(4,5,7);$ б) $\vec{b}\times\vec{a}=(-4,-5,-7);$

в) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{a})=(-8,-10-14).$ **7. Упатство:** Нека бараниот вектор е $\vec{d}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$ Тогаш $\vec{a}\times\vec{b}=2\lambda\vec{j}-4\lambda\vec{k}$ и $\vec{c}\times\vec{d}=(2z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-2x)\vec{k}.$ Од првиот услов имаме

$\begin{cases} 2z-y=0 \\ x-z=2\lambda \\ y-2x=-4\lambda \end{cases}$, додека од вториот услов добиваме $\begin{cases} 2z-y=0 \\ x-2z=\lambda \\ 2x-2y=2\lambda \end{cases}.$

Од двата услова добиваме $x=5,\ y=6,\ z=3,$ односно $\vec{d}=5\lambda\vec{i}+6\lambda\vec{j}+3\lambda\vec{k}.$ **8. Упатство:** Покажи дека $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0,$ $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}))=0$ и $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}))=0.$

9. Упатство: Нека $\vec{p}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$ Од условот на задачата имаме $\vec{p}\cdot\vec{a}=x+y+z=3,\ \ \vec{p}\times\vec{b}=-z\vec{i}+z\vec{j}+(x-y)\vec{k}=\vec{i}-\vec{j}$,. од каде што следува $x=y=2,$ па $\vec{p}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}.$

10. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=-7\vec{i}-2\vec{j}-21\vec{k},\quad (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=6\vec{i}+60\vec{j}+63\vec{k}.$

11. $P=|\vec{a}\times\vec{b}|=8\sqrt{3},\ \sin(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{24}}.$ **12.** $P=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{286}}{2}.$

13. $P=5\sqrt{3}.$ **14.** а) $x=2$ и $x=-1,$ б) не постои x за кој векторите би биле паралелни. **15. Упатство:** Покажи дека $[\overrightarrow{MN},\vec{i},\vec{k}]=0,$ каде $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}.$ 16. $t=3.$ 17. $V=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=-6.$ 18 $H=\dfrac{23}{\sqrt{158}}.$

19. а) $M_{xy}(3,-1,-2),\ M_{xz}(3,1,2),\ M_{yz}(-3,-1,2);$ б) $M_1(-3,1,-2).$

20. а) $d_{OM}=13;$ б) $d_x=5,\ d_y=4\sqrt{10}.$ **21.** $\cos\varphi_1=\dfrac{2\sqrt{10}}{11},$ $\cos\varphi_2=\dfrac{3\sqrt{13}}{11},\ \cos\varphi_3=\dfrac{\sqrt{85}}{11}.$ **22.** $P=9$ квадратни единици.

23. Упатство. Докажи дека средините на отсечките $PQ,\ MN$ и KL имаат исти координати. **24.** $A\left(\dfrac{14}{3},-8,12\right),\ B\left(\dfrac{11}{3},7,-13\right).$

25. Да. **26.** а) $y+5=0,$ б) $x+3y=0,$ в) $9y-z-2=0.$

27. а) $-6,\ 4,\ 12;$ б) $3,\ 15,\ -5;$ в) $1,\ -1,\ 1;$

28. $x+y+z-3=0.$ **29.** а) $-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{15}y+\dfrac{11}{15}z-4=0;$

б) $-\dfrac{6}{11}x+\dfrac{6}{11}y+\dfrac{7}{11}z-3=0.$ **30.** $6x+2y+3z\pm42=0.$ **31.** $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3},$ $\cos\beta=\dfrac{1}{3},\ \cos\gamma=-\dfrac{2}{3}.$ **32.** $\alpha=\dfrac{\pi}{3}.$ **33.** $h_A=3.$ **34.** а) $x-4y+5z+15=0;$

б) $2x-y-z=0;$ в) $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0.$

35. $M_1(0,0,3),\ M_2\left(0,0,-\dfrac{5}{2}\right).$ **36.** $ABC:\ x-3y-z+2=0,$

$ABD:\ x-4y-z+2=0,\ \ ACD:\ 2x-8y-3z+6=0,$

$BCD:\ 2x-11y-3z+9=0.$ **37.** $x+20y+7z-12=0$ и $x-z+4=0.$

38. $x-1=\frac{y+5}{\sqrt{2}}=\frac{z-3}{-1}.$ **39.** $\frac{x}{8}=\frac{y+8}{7}=\frac{z+9}{1}.$ **40.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}.$

41. $4x+5y-2z=0.$ **42.** $11x-17y-19z+10=0.$ **43.** $\frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}.$

44. $17x-13y-16z-10=0.$ **45.** $\frac{x-1}{68}=\frac{y}{70}=\frac{z-7}{-67}.$ **46.** $M(2,-3,5).$

47. $M_p(4,1,1).$ **48.** $M_s(-9,10,1).$ **49.** $M_s(-4,1-3).$

Литература

[1] Битраков Д., Збирка задачи по аналитичка геометрија, *Векторска алгебра низ задачи*, Просветно дело, Скопје, 1995

[2] Выгодский, М. Я., *Аналитическая геометрия*, Государственное издателъство, Москва, 1963

[3] Gusyatnikow P., Reznichenko S., *Vector Algebra*, Mir Publisher, Moskow, 1988

[4] Ефимов, Н. В., *Краткий курс аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1975

[5] Илъин, В. А.; Позняк, Э. Г., *Аналитическая геометрия*, Наука, Москва, 1981

[6] Карчицка, Д., *Конечно димензионални векторски простори,* Унинивeрзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1985

[7] Клетник, Д. Б., *Сборник задач по аналитической геометрии,* Москва, 1969

[8] Milenković O., Dzorić M., *Zbirka zadataka iz analitičke geometrije*, Matematički fakultet Beograd, 1999

[9] Самарџиски А., *Векторска алгебра низ задачи*, Универзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1991

[10] Тышкевич, Р. И., Феденко, А. С.: *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, Вышэйшая школа, Минск, 1968

[11] Улчар, Ј., *Аналитичка геометрија со векторска алгебра,* Нумерус, Скопје, 1995

[12] Целакоски, Н., *Задачи по линеарна алгебра*, Просветно дело, Скопје, 1996

[13] Цубербиллер, О. Н., *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1966

[14] Шилов, Г. Е., *Конечномерные линейные пространства,* Наука, Москва, 1964

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41