УНИВЕРЗИТЕТ СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ - СКОПЈЕ
Природно-математички факултет

$\boxed{\text{Драган Димитровски,}}$ Весна Манова-Ераковиќ, Ѓорѓи Маркоски

МАТЕМАТИКА I
(ЗА СТУДЕНТИТЕ ПО БИОЛОГИЈА)

Скопје, 2015

ПРЕДГОВОР

Оваа книга, пред се е наменета за предметот математика за студентите по биологија. Меѓутоа, може да ја користат и студентите од техничките факултети, и сите оние кои го изучуваат материјалот опфатен во оваа книга.

Книгава е резултат на повеќегодишните предавања и вежби кои ги одржувале авторите на студентите по биологија и студиите каде се предава овој материјал.

Опфатени се темите реални броеви, реални функции и диференцијално сметање на функции од една реална променлива.

Во главата реални броеви обработени се и низи од реални броеви, како и проценти и пропорции.

Елементарните функции и поимот за гранична вредност на функција е обработен во втората глава, а во третата се изучуваат изводите на функции од една реална променлива и нивна примена.

Низ целата книга, посебно внимание е посветено на задачи кои се сретнуваат во природата, особено во биологијата.

Особено им се заблагодаруваме на рецензентите на оваа книга, кои со своите коментари и забелешки многу придонесоа за нејзино подобрување.

Ќе бидеме благодарни на сите читатели кои со своите сугестии ќе придонесат за идни подобрувања на оваа книга.

На сите читатели им посакуваме успешно навлегување во тајните на математиката, преку оваа книга и успешно совладување на нејзините содржини.

Скопје, 2015 Авторите

Рецензенти

Проф. д-р Никита Шекутковски
Редовен професор на ПМФ, Скопје
Проф. д-р Валентина Миовска
Вонреден професор на ПМФ, Скопје
Проф. д-р Дана Прелиќ
Редовен професор на ПМФ, Скопје

Со одлука број 02-1107/8 од 29.1.2015 година на Наставно-научниот совет на Природно-математичкиот факултет во Скопје се одобрува печатењето на оваа книга како универзитетски учебник.

1

РЕАЛНИ БРОЕВИ

1.1 Поимот множество, примери и претставување на множества

1.1.1 Некои елементи од теоријата на множества и алгебрата

Поимот можество е основен поим во математиката, и тој не се дефинира, туку се усвојува интуитивно. На овој поим не́ упатува и секојдневниот живот, при разгледување на какви и да било предмети. Во секојдневниот говор се сретнуваме со зборовите: фамилија, севкупност, група, класа, популација (чест термин во јазикот на биологијата) и многу други, коишто ќе ги сметаме за синоними на зборот множество. Така зборуваме за:

Пример 1. Множеството студенти на ПМФ-Скопје.
Пример 2. Множеството студенти на група биологија при ПМФ-Скопје.
Пример 3. Множеството букви од македонската азбука.
Пример 4. Множеството букви од името ПЕТАР.
Пример 5. Множеството риби во Охридското Езеро.
Пример 6. Множеството точки од дадена права.

Во секој од овие примери имаме извесна претстава од што е составено тоа множество.

Значи поимот множество се објаснува како целина од различни објекти (предмети, поими или живи суштества) коишто имаат една или повеќе заеднички карактеристики (својства).

Објектите од кои е составено едно множество се нарекуваат **елементи** на множеството. Така, елементи на множеството од пример 1 се сите студенти запишани на ПМФ-Скопје, елементи на множеството од пример 2 се сите студенти запишани на групата биологија при ПМФ-Скопје, елементи на множеството од пример 3 се буквите: а,б,в,…,ш, во пример 4 елементи се буквите П,Е,Т,А,Р, во пример 5 елементи се сите риби во Охридското езеро, а во пример 6 елементи се сите точки од дадената права.

Вообичаено е множествата да ги означуваме со големи печатни букви од латинската азбука: $A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$.

Ако еден елемент x припаѓа на дадено множество X т.е. ако x е елемент на X, симболички пишуваме $x \in X$.

Ако пак елементот y не припаѓа на даденото множество X, т.е. ако y не е елемент на X, симболички пишуваме $y \notin X$.

Запишувањето на елементите на дадено множество X, т.е. претставувањето на множеството X, може да се направи на неколку начини:

(i) **Табеларно**, т.е. запишување на елементите на даденото множество во големи загради и притоа одвојувајќи ги со запирка. Ако со A го означиме множеството од пример 4, тогаш, табеларно, множеството A ќе го запишеме на следниот начин: $A = \{$П,Е,Т,А,Р$\}$. Ако со B го означиме множеството од пример 3, тогаш табеларниот запис е $B = \{$а,б,в,…,ш$\}$.

(ii) **Описно**, т.е. претставување во обликот $\{x \mid P(x)\}$, каде x е договорна, заедничка ознака за сите елементи на множеството, а $P(x)$ е карактеристичното својство на елементите од множеството.

Така ако со C го означиме множеството од пример 1, тогаш $C = \{x \mid x$ е студент на ПМФ-Скопје$\}$.

(iii) **Претставување со Венов дијаграм**, т.е. запишување на елементите на даденото множество во внатрешноста на геометриска фигура ограничена со кружница или некоја друга затворена крива линија. Така, ако $D = \{\,1, 2, 3, 4, 5\,\}$, D го претставуваме со Венов дијаграм на следниот начин:

Веновите дијаграми, како нагледна претстава на множествата, многу почесто ги користиме при воочување на разните врски меѓу множествата и особините на поимите што се поврзани со поимот множество. Најчесто, множеството ќе го претставуваме со круг или со некоја друга геометриска фигура и притоа елементите на множеството се точките од внатрешноста на соодветната фигура.

Подоцна ќе дадеме една илустрација на користа од Веновите дијаграми.

1.1.2 Елементи од математичка логика и некои корисни математички симболи

Секоја декларативна реченица којашто задоволува точно еден од следниве два услова

а) таа е вистинита

б) таа не е вистинита

се нарекува исказ.

Ако реченицата го задоволува условот (а) тогаш велиме дека исказот е точен, а ако го задоволува условот (б) тогаш велиме дека исказот е неточен.

Исказите вообичаено ги означуваме со мали букви од латинската азбука: $p, q, r, s, \dots.$

Пример 1. p: Јануари има 31 ден
е точен исказ.

Пример 2. q: Март има 30 дена
е неточен исказ.

Пример 3. r: Февруари има 28 дена
не е воопшто исказ, бидејќ февруари нема секогаш 28 дена.

Слично како во говорниот јазик, во случај на исказното сметање, можеме да зборуваме, наместо за ”прости” и ”сложени” реченици, за ”прости” и ”сложени” искази, соодветно.

Простите искази уште ги нарекуваме и **атомарни** искази. Негацијата е наједноставниот начин од ”проста” да се добие пословожена реченица.

Ако p е исказ, **негација** на исказот p е исказ, со ознака $\neg p$, при што ако p е точен исказ, $\neg p$ е неточен исказ и ако p е неточен исказ, $\neg p$ е точен исказ.

Друг вообичаен сврзник во говорниот јазик е ”и” и за него ќе го употребуваме симболот $\wedge$.

Конјункција на исказите p и q е исказ, со ознака $p \wedge q$, при што $p \wedge q$ е точен исказ ако и само ако p и q се точни искази.

Симболот $\vee$ ќе го користиме за сврзникот ”или” од говорниот јазик.

Дисјункција на исказите p и q е исказ, со ознака $p \vee q$, пришто $p \vee q$ е точен исказ ако и само ако барем еден од исказите p, q е точен. Значи $p \vee q$ е неточен ако и само ако и p и q се неточни.

Друг начин на формирање на сложена реченица е формирање на условна реченица, т.е. ако од исказот p произлегува исказот q

тогаш симболички пишуваме $p \Rightarrow q$ и велиме дека p повлекува q.

Импликација на p и q е исказ, со ознака $p \Rightarrow q$, при што $p \Rightarrow q$ е неточен ако и само ако p е точен, а q неточен исказ.

Значи, ако p е неточен исказ, тогаш $p \Rightarrow q$ е точен исказ независно од тоа дали q е точен или неточен исказ.

Ако $p \Rightarrow q$ и $q \Rightarrow p$, тогаш пишуваме $p \Leftrightarrow q$ и велиме дека исказот p е **еквивалентен** со исказот q.

Еквиваленцијата $p \Leftrightarrow q$ е точен исказ ако и само ако p и q истовремено се точни искази или p и q истовремено се неточни искази.

Значи, симболот $\Leftrightarrow$ е замена за зборовите "ако и само ако" од говорниот јазик.

Со $(\forall x \in X)$ го означуваме изразот "за секој елемент x од множеството X."

Со $(\exists x \in X)$ го означуваме изразот "постои некој елемент x од множеството X" т.е. "за некој елемент $x \in X$".

1.1.3 Празно множество, еднаквост на множества, подмножество

Множеството коешто не содржи ниту еден елемент се нарекува празно множество и него ќе го означуваме со симболот $\emptyset$.

Две множества X и Y што се состојат од исти елементи ги нарекуваме еднакви множества и пишуваме $X = Y$.

Пример 1. Нека E е множеството букви од името АТАНАС. Тогаш $E = \{$А,Т,А,Н,А,С$\}$. Но и множествата $F = \{$А,Т,Н,С$\}$ и $G = \{$А,Н,С,Т$\}$ се еднакви со E т.е. $E = F = G$, што значи, според изнесената дефиниција за еднаквост на множества, при запишување на множеството, не е важен редоследот на запишување на елементите, ниту пак е важно колку пати еден елемент е запишан во множеството. Под договор, секој елемент од едно множество ќе се запишува само еднаш во множеството.

Негацијата на $X = Y$, ја означуваме со $X \neq Y$ и велиме дека во тој случај X и Y се различни множества.

За множеството X велиме дека е **подмножество** од множеството Y, и пишуваме $X \subseteq Y$, ако и само ако секој елемент на множеството X е елемент и на множеството Y, т.е. искажано со симболи:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow ((\forall x \in X) \Rightarrow x \in Y)$$

Ако $X \subseteq Y$ и ако уште $X \neq Y$ т.е. секој елемент на X е елемент на Y и постои елемент од Y што не е елемент на X, тогаш велиме дека X е **вистинско подмножество** од Y и пишуваме $X \subset Y$.

Симболички пишуваме

$$X \subset Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge X \neq Y.$$

Точни се следниве својства:

1.1. $X \subseteq X$, за секое множество X.

1.2. $X = Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X)$

1.3. $\emptyset \subseteq X$, за секое множество X, и $\emptyset \subset X \Leftrightarrow X$ не е празно множество.

Негациите на $X \subseteq Y$ и $X \subset Y$ ќе ги означуваме со $X \nsubseteq Y$ и $X \not\subset Y$ соодветно.

1.1.4 Унија и пресек на множества и некои нивни својства

Множеството што се состои од сите елементи на множеството X и сите елементи на множеството Y го викаме **унија** на множествата X и Y и го означуваме со $X \cup Y$.
Симболички пишуваме $X \cup Y = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Множеството што се состои од заедничките елементи на множествата X и Y го викаме **пресек** на множествата X и Y и го означуваме со $X \cap Y$.
Симболички пишуваме $X \cap Y = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
Пример 1. Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.
Тогаш $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а $A \cap B = \{4, 5\}$.

Ќе наведеме некои од својствата на пресек и унија на множества.

1.4. Идемпотентност: $X \cup X = X$ и $X \cap X = X$, за секое множество X.

1.5. Комутативност: $X \cup Y = Y \cup X$ и $X \cap Y = Y \cap X$, за секои две множества X и Y.

1.6. Асоцијативност: $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ и $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ за секои три множества X, Y и Z.

1.7. Дистрибутивност: $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ и $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ за секои три множества X, Y и Z.

1.8. а) $X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$
б) $X \cap Y = X \Leftrightarrow X \subseteq Y$

Ако $A \cap B = \emptyset$ тогаш велиме дека A и B се **дисјунктни** множества.

1.1.5 Разлика на множества, комплемент на множество

Множеството што се состои од сите елементи на множеството X кои што не му припаѓаат на множеството Y го викаме **разлика** на множествата X и Y и го означуваме со $X \setminus Y$.
Симболички пишуваме $X \setminus Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$.
Пример 1. Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Тогаш $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$, а $B \setminus A = \{6, 7, 8\}$.
Од примерот се гледа дека во општ случај $A \setminus B \neq B \setminus A$

Ако $X \subseteq U$ тогаш разликата $U \setminus X$ ја нарекуваме **комплемент** на X во однос U и ја означуваме со X'_U, или само X'.

Нека X и Y се подмножества од дадено множество U и нека ги разгледуваме комплементите на X и Y во U. Тогаш се точни следниве особини:

1.9. $X \cup X' = U$ и $X \cap X' = \emptyset$.

1.10. $U' = \emptyset$ и $\emptyset' = U$.

1.11. $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$ и $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$.

1.1.6 Директен (Декартов) производ на множества

Нека X и Y се две непразни множества.

Множеството што се состои од сите подредени парови (двојки) (x, y), каде $x \in X$ и $y \in Y$ го викаме директен (Декартов) производ на множествата X и Y и го означуваме со $X \times Y$.

Симболички пишуваме $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$.

Ако некое од множествата X и Y е празно, тогаш, по дефиниција, земаме дека и нивниот директен производ е празно множество.

Ако (x_1, y_1) и (x_2, y_2) се два елемента од директниот производ $X \times Y$, тогаш тие се еднакви ако и само ако $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ т.е.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

Пример 1. Нека $\{1, 2, 3\}$ и $B = \{\text{а,б}\}$. Тогаш:

$$A \times B = \{(1, \text{а}), (1, \text{б}), (2, \text{а}), (2, \text{б}), (3, \text{а}), (3, \text{б})\} \quad \text{и}$$

$$B \times A = \{(\text{а}, 1), (\text{а}, 2), (\text{а}, 3), (\text{б}, 1), (\text{б}, 2), (\text{б}, 3)\}.$$

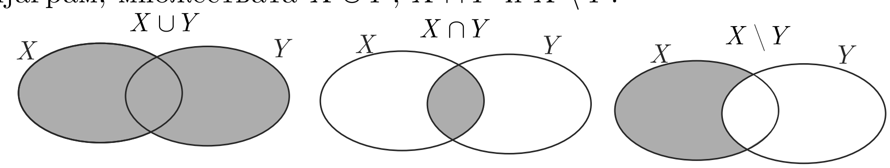
Општо, директен (Декартов) производ на множествата $X_1, X_2, ..., X_n$ е множеството

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{\, (x_1, x_2, ..., x_n) |\, x_i \in X_i,\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\} \,.$$

Притоа, ако $(x_1, x_2, ..., x_n)\,, (y_1, y_2, ..., y_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, тогаш $(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n) \Leftrightarrow x_i = y_i,\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

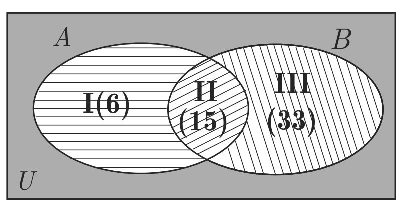
1.1.7 Уште малку за Веновите дијаграми и нивна примена

Во продолжение, ќе ја илустираме примената на Веновите дијаграми. Прво, ќе ги претставиме, со шрафиран дел од Веновиот дијаграм, множествата $X \cup Y$, $X \cap Y$ и $X \setminus Y$.



Пример 1. Во прва година студии на групата биологија при ПМФ се запишани 60 студенти, од кои 21 се женски. Од сите студенти 48 редовно ги следат предавањата, а 6 женски нередовно одат на предавања. Колку машки студенти нередовно ги следат предавањата?

Решение. Решението на оваа задача ќе го проследиме со Венови дијаграми. Нека со U го означиме множеството од сите студенти, со A множеството од сите женски студенти, а со B множеството од сите студенти што редовно ги следат предавањата. Множествата A и B мора да имаат заеднички елементи, бидејќи збирот на елементи на овие две множества $(21 + 48 = 69)$ е поголем од бројот на елементите на $U(60)$.



Според тоа, на соодветниот Венов дијаграм (цртежот погоре), имаме 4 дела со кои што се претставени: $I = A \cap B'$, $II = A \cap B$, $III = A' \cap B$ и $IV = A' \cap B'$. Нас нé интересира бројот на елементи во $A' \cap B'$ т.е. во IV. Од даденото, знаеме дека A има 21 елемент, B има 48 елементи, а $A \cap B'$ има 6 елементи, па (погледни слика) II има $21 - 6 = 15$ елементи, а III пак има $48 - 15 = 33$ елементи. Конечно, IV има $60 - (6 + 15 + 33) = 60 - 54 = 6$ елементи т.е. одговорот на нашата задача е 6.

1.2 Кореспонденција, релација, пресликување и операција

1.2.1 Дефиниција на кореспонденција и релација и некои основни својства

Дефиниција 1. Нека X и Y се две множества. Секое подмножество K од Декартовиот производ $X \times Y$ се нарекува **кореспонденција** од X во Y.

Ако $(x, y) \in K$, тогаш често пишуваме xKy.

Ако $(z, t) \notin K$, тогаш пишуваме $z \not K\ t$.

Множеството X се вика **домен**, а множеството Y се вика **кодомен** на кореспонденцијата K.

Пример 1. Нека $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$. Тогаш $K = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ е една кореспонденција од A во B.

Дефиниција 2. Нека X е дадено множество. Секоја кореспонденција од X во X се нарекува **релација** во множеството X.

Значи, релација во множеството X е секое подмножество од $X \times X$. Вообичаено е релациите да се означуваат со буквите од грчката азбука α, β, $\gamma \dots$.

Пример 2. Нека $A = \{1, 2, 3\}$. Тогаш со
$\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ е дадена релација во A.

Нека α е релација во X. Релацијата α велиме дека е:

(i) **рефлексивна** ако и само ако за секој $x \in X$ е точно $x\alpha x$.

(ii) **антирефлексивна** ако и само ако за секој $x \in X$ е точно $x\not\alpha x$.

(iii) **симетрична** ако и само ако за сите $x, y \in X$ такви што $x\alpha y$ важи и $y\alpha x$.

(iv) **антисиметрична** ако и само ако за сите $x, y \in X$ за кои $x\alpha y \wedge y\alpha x$ важи $x = y$.

(v) **транзитивна** ако и само ако за сите $x, y, z \in X$ за кои $x\alpha y \wedge y\alpha z$ важи $x\alpha z$.

(vi) **релација за еквивалентност** ако и само ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

(vii) **релација за подредување** ако и само ако е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

(vii) **релација за строго подредување** ако и само ако е антирефлексивна, транзитивна.

Пример 3. Нека $A = \{1, 2, 3\}$ и нека
$\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$,
$\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$ и $\gamma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ се релации во A. Провери дека α е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна, а β е антирефлексивна и симетрична.

Релацијата γ не задоволува ниту едно од наведените својства:
γ не е рефлексивна бидејќи $(2, 2) \notin \gamma$,

γ не е антирефлексивна бидејќи $(1,1) \in \gamma$,
γ не е симетрична бидејќи $(1,3) \in \gamma$, но $(3,1) \notin \gamma$,
γ не е антисиметрична бидејќи $(1,2),(2,1) \in \gamma$, но $1 \neq 2$,
γ не е ни транзитивна бидејќи $(2,1),(1,3) \in \gamma$, но $(2,3) \notin \gamma$.

Релациите за еквивалентност и за подредување се од посебен интерес. Во продолжение ќе се задржиме на релацијата за подредување.

Нека α е релација за подредување во X. Велиме дека α е **линеарно подредување** во X ако и само ако за секои $x, y \in X$ е исполнет еден од следните два услова $x\alpha y$ или $y\alpha x$.

Пример 4. Релацијата α од примерот 2 е релација за линеарно подредување.

Ако ставиме $A = \{1,2,3,4\}$ и $\rho = \{(1,1),(2,2),\ (3,3),(4,4),(1,2),\ (2,3),(1,3)\}$, тогаш ρ е релација за подредување во A, но подредувањето не е линеарно, бидејќи $(1,4) \notin \rho$ и $(4,1) \notin \rho$.

Нека α е релација за строго подредување во X. Велиме дека α е **линеарно строго подредување** во X ако за секои $x, y \in X$ е исполнет точно еден од условите $x\alpha y$ или $y\alpha x$.

Вообичаено е релацијата за подредување во множеството Xда се означува со $\leq$ (помало или еднакво), а пак строгото подредување со $<$ (помало), а за множеството X да велиме дека е **подредено** со $\leq$, односно **строго подредено** со $<$.

1.2.2 Дефиниција за супремум и инфимум во подредено множество

Нека X е линеарно подредено множество со релација за подредување $\leq$ и нека $A \subseteq X$.

Дефиниција 3. За елементот $M \in X$ велиме дека е **мајорант** на множеството A ако и само ако е исполнет условот $a \leq M$, за секој $a \in A$.

Нека M е мајорант на A и $M_1 \in X$ е таков што $M \leq M_1$. Тогаш, заради транзитивноста на подредувањето, ќе биде исполнето $a \leq M_1$, за секој $a \in A$, што значи дека и M_1 е мајорант на A.

Значи, од интерес е оној мајорант на A, кој е помал или еднаков од секој друг мајорант на A, и него го нарекуваме супремум на A и означуваме $\sup_X A$ или кратко $supA$.

Дефиниција 4. За $u \in X$ велиме дека е **супремум на** A и пишуваме $u = \sup A$, ако и само ако се исполнети условите:
(i) u е мајорант на A,
(ii) ако $M \in X$ е кој било мајорант на A, тогаш $u \leq M$.

Слично, дефинираме минорант и инфимум на A.

Дефиниција 5. За елементот $m \in X$ велиме дека е **минорант** на A во X ако и само ако е исполнет условот $m \leq a$, за секој $a \in A$.

Дефиниција 6. За елементот $v \in X$ велиме дека е **инфимум** на A и пишуваме $v = \inf_X A$ или кратко $v = \inf A$ ако и само ако се исполнети условите:
(i) v е минорант на A,
(ii) ако m е кој било минорант на A, тогаш $m \leq v$.

1.2.3 Дефиниција на пресликување и видови на пресликувања

Дефиниција 7. Нека X и Y се две непразни множества. За кореспонденцијата f од X во Y која што ги задоволува условите:

$$(i)\ \ (\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ \ (x, y) \in f$$

$$(ii)\ \ (x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

велиме дека е **пресликување** (функција) од X во Y и пишуваме $f :\ X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

Ако $(x, y) \in f$ при пресликувањето f од X во Y вообичаено е да користиме ознака $y = f(x)$, и елементот y се вика **слика** на елементот x при пресликувањето f, или уште велиме дека y му е придружен на x при пресликувањето f.

Множеството X се вика **домен**, а Y **кодомен** на пресликувањето $f :\ X \to Y$.

Множеството $f(X) = \{y \in Y |\ y = f(x),$ за некој $x \in X\}$ се вика **ранг** на f и се означувва со $\mathrm{Rang} f$ или само $f(X)$. Јасно $f(X) \subseteq Y$.

Двата услова за една кореспонденција да биде пресликување може да се искажат и на друг начин т.е.:

Пресликување f од множеството X во множеството Y е кореспонденција од X во Y, која на секој елемент од X му кореспондира (придружува) единствен елемент од Y.

Пример 5. Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$.

Ако $f = \{(1, a), (2, b)\}$, тогаш f е кореспонденција од A во B, која не е пресликување, бидејќи $3 \in A$, но не постои елемент од B кој му е придружен на 3.

Пример 6. Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ и
$g = \{(1, a), (2, b), (3, c), (3, d)\}$. Тогаш g е повторно кореспонденција од A во B, која не е пресликување од A во B бидејќи $(3, c), (3, d) \in g$ но $c \neq d$.

Пример 7. Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ и $h = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$. Кореспонденцијата h од A во B е пресликување од A во B.

Дефиниција 8. Пресликувањето $f : X \to Y$ е **инјективно** пресликување (или **инјекција**) ако и само ако различни елементи од X имаат различни слики во Y.

Значи, пресликувањето $f : X \to Y$ е инјективно $\Leftrightarrow$ $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$, за сите $x_1, x_2 \in X$ $\Leftrightarrow$ $(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, за сите $x_1, x_2 \in X)$.

Забелешка. Еквивалентноста на двете дефиниции за инјективно пресликување следува од математичката логика, т.е од еквивалентноста на $p \Rightarrow q$ и $\neg q \Rightarrow \neg p$, за било кои искази p и q.

Дефиниција 9. Пресликувањето $f : X \to Y$ е **сурјективно** пресликување (или **сурјекција**) ако и само ако $f(X) = Y$.

Бидејќи $f(X) \subseteq Y$, за секое пресликување $f : X \to Y$, условот за сурјективност на пресликување f е всушност $Y \subseteq f(X)$ т.е. барање секој елемент $y \in Y$ да биде елемент на $f(X)$ т.е. секој елемент $y \in Y$ да биде слика на некој елемент $x \in X$.

Така, можеме да кажеме дека пресликувањето $f : X \to Y$ е сурјективно ако и само ако е исполнет условот

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x).$$

Дефиниција 10. Ако пресликувањето $f : X \to Y$ е инјективно и сурјективно, тогаш велиме дека f е **биективно пресликување** или само **биекција** од X во Y.

Пример 8. Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ и $f = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$. Тогаш f е пресликување од A во B кое е сурјективно, но не е инјективно бидејќи елементите 2 и 3 од A имаат иста слика.

Пример 9. Нека $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}$ и $g = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$. Тогаш g е пресликување од A во B кое е инјективно, но не е сурјективно бидејќи елементот $d \in B$ не е слика на ниту еден елемент од A при g.

Дефиниција 11. Секое пресликување од $X \times X$ во X се нарекува **операција** во X.

Пример 10. Собирање во $\mathbb{N}$ и множење во $\mathbb{N}$ се операции во $\mathbb{N}$, каде $\mathbb{N}$ е множеството природни броеви.

1.3 Еквивалентни множества. Конечни и бесконечни множества. Природен број

1.3.1 Еквивалентни (истобројни) множества

Да се задржиме уште малку на биективните пресликувања.

Пример 1. Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{a, b, c, d\}$. Пресликувањето $f : A \to B$, дефинирано со $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$ е биективно пресликување од A во B. Ако дефинираме кореспонденција g од B во A со $g = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$, лесно може да провериме дека g е пресликување од B во A. Уште повеќе g е и биективно пресликување.

Ова што го направивме во примерот 1, на конкретните множества A и B и пресликувањето f, важи и поопшто т.е. за кои било множества X и Y и кое било биективно пресликување од X во Y.

Нека X и Y се кои било множества и нека f е биективно пресликување од X во Y. Дефинираме кореспонденција $g : Y \to X$ на следниот начин:

$$g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x), \text{ за } x \in X, y \in Y. \qquad (*)$$

3.1. Кореспонденцијата g од Y во X, дефинирана со $(*)$, е пресликување од Y во X, коешто е и биекција.

Доказ. Прво, ќе покажеме дека g е пресликување од Y во X.

(i) Нека $y \in Y$ е произволен елемент од Y. Бидејќи $f : X \to Y$ е сурјекција, постои елемент $x \in X$ таков што $f(x) = y$ од каде, заради $(*)$, имаме $x = g(y)$. Значи, на секој елемент $y \in Y$ со g му е придружен елемент $x \in X$.

(ii) Нека $y \in Y$ и нека $(y, x_1), (y, x_2) \in g$ т.е. $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 = g(y)$ и $x_2 = g(y)$. Заради $(*)$, имаме дека $f(x_1) = y$ и $f(x_2) = y$ т.е. $f(x_1) = y = f(x_2)$. Но, $f : X \to Y$ е инјекција, па значи од $f(x_1) = f(x_2)$ за $x_1, x_2 \in X$ следува $x_1 = x_2$. Докажавме дека ако $(y, x_1), (y, x_2) \in g$, тогаш $x_1 = x_2$.

Од *(i)* и *(ii)* следува дека g, дефинирано со $(*)$, е пресликување од Y во X.

Да докажеме дека g е инјекција од Y во X.

Нека $y_1, y_2 \in Y$ и нека $g(y_1) = g(y_2) (= x \in X)$. Тогаш, заради $(*)$, имаме дека $y_1 = f(x)$ и $y_2 = f(x)$ т.е. $(x, y_1), (x, y_2) \in f$, а бидејќи f е пресликување од X во Y, мора $y_1 = y_2$. Значи, од $g(y_1) = g(y_2)$ следува $y_1 = y_2$ за кои било $y_1, y_2 \in Y$, што значи дека g е инјекција од Y во X.

Слично, се покажува дека g е сурјекција од Y во X (се остава на читателот да го провери тоа).

Дефиниција 1. Нека f е биективно пресликување од X во Y. Биективното пресликување g од Y во X, дефинирано со $(*)$, се нарекува **инверзно пресликување** на f и се означува со f^{-1}.

Забелешка. Ако постои биективно пресликување f, од множество X во множество Y, тогаш на секој елемент од X му е придружен единствен елемент од Y (со f) и обратно т.е. на секој елемент од Y му е придружен единствен елемент од X (со f^{-1}). Велиме воспоставено е **заемно еднозначно соодветствување** (придружување) меѓу елементите од X и Y. Во овој случај, можествата X и

Y имаат исто "количество" на елементи и се нарекуваат **еквивалентни множества**.

Дефиниција 2. За две множества X и Y велиме дека се **еквивалентни** ако постои биективно пресликување од X во Y. Пишуваме $X \sim Y$.

Множествата A и B од примерот 1 се еквивалентни множества. Точно е и следното својство:
3.2. (*i*) $X \sim X$, за секое множество X.
(*ii*) Ако $X \sim Y$ тогаш и $Y \sim X$
(*iii*) Ако $X \sim Y$ и $Y \sim Z$ тогаш $X \sim Z$.
Од 3.2 следува дека "$\sim$" е релација за еквивалентност.

1.3.2 Конечни и бесконечни множества

Дефиниција 3. Едно множество се нарекува **конечно** ако не е еквивалентно со ниедно негово вистинско подмножество.

Дефиниција 4. Едно множество се нарекува **бесконечно** ако не е конечно.

Множествата од пример 1 се конечни множества. Ако конечните множества X и Y се еквивалентни, тогаш уште ги нарекуваме и **истобројни** т.е. X и Y се множества со **еднаков број на елементи** и пишуваме $\delta X = \delta Y$.

1.3.3 Природен број

Истобројните множества формираат **класи**. Така на пример, сите множества што се еквивалентни со множеството раце кај еден човек, формираат една класа. Во таа класа, ќе се најдат и множествата: $A = \{\triangle, \bigcirc\}$, $B = \{a, b\}$,$C = \{|, ||\}$ и уште многу други.

Понатаму, сите множества еквивалентни со множеството прсти од едната рака кај некој човек, образуваат друга класа. Во оваа друга класа, ќе се најдат множествата $D = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{|, ||, |||, ||||, |||||\}$ и уште многу други множества.

Така, уште во раниот развој на човештвото, се јавила потребата за разликување на бројноста на множествата од разни класи и секој народ си создавал свои ознаки (знаци) и тоа различни за различни класи.

Изразувањето на бројноста на множествата од првата класа се карактеризира со зборот "два" (во нашиот јазик) и симболот 2, а на множествата од втората класа со зборот "пет" (во нашиот јазик) и симболот 5.

Така се дошло до поимот **природен број. Секој природен број всушност е карактеристика на некоја класа од непразни, истобројни, конечни множества.**

Ова покажува дека поимот природен број произлегува од многу поширокиот поим - множество.

1.4 Множеството на природни броеви, $\mathbb{N}$

1.4.1 Конструкција на множеството на природни броеви $\mathbb{N}$

Веќе видовме дека секое конечно множество X има своја карактеристика (величина) која се нарекува **број на елементи во** X и се означува со δX, и таа карактеристика δX е иста за сите други множества коишто се истобројни (еквивалентни) со X, т.е. се во класата на истобројни множества со X. Ако $X \neq \emptyset$, δX определува **природен број**.

Нека $X = \{x\}$ т.е. X го содржи елементот x и ниту еден друг елемент. Бројот на елементи на множеството X, δX, којшто е еднаков со бројот на елементи на секое друго истобројно множество со X, го определува природниот број "еден" (во нашиот јазик) со симбол 1 (во декадниот систем на означување).

Ако на множеството $X = \{x\}$ му додадеме елемент y, $y \neq x$, добиваме множество $Y = \{x, y\}$. Бројот на елементи на множеството Y, δY, којшто е еднаков со бројот на елементи на секое друго истобројно множество со Y, го определува природниот број "два" (во нашиот јазик) со симбол 2 (во декадниот систем на означување).

Продолжувајќи ја оваа постапка, на додавање по еден нов (различен) елемент на претходното множество, доаѓаме до природните броеви "три", "четири", "пет", итн., со симболи $3, 4, 5$, соодветно итн., т.е. го добиваме **множеството на природните броеви, кое го означуваме со** $\mathbb{N}$.

Значи, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 9, 10, 11 \ldots\}$.

Важно множество што веќе го спомнавме на почетокот е и празното множество, $\emptyset$. Тоа е множество кое нема ниту еден елемент. Неговата карактеристика $\delta\emptyset$ ја викаме "нула", со симбол 0, и не ја сметаме за природен број.

Забелешка. За означување на природните броеви т.е. за означување на бројот на елементи на непразни, конечни множества, во текот на историјата се користени различни знаци. Денес најмногу се користи таканаречен десетичен (декаден) систем во кој се користат десет цифри (симболи): $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (веќе ги наведовме), и кои се нарекуваат арапски цифри. Постојат и други системи што се употребуваат.

Нека со n означиме произволен фиксиран природен број т.е. $n \in \mathbb{N}$. Тоа значи $n = \delta X$ за некое конечно, непразно множество X. Бројот на елементи на множеството Y кое се добива со додавање на еден нов (различен од сите елементи во X) елемент на X, δY, е природен број кој што го означуваме со $n+1$ и го нарекуваме (непосреден) **следбеник** на бројот n.

Во исто време, велиме дека n е (непосреден) **претходник** за $n+1$.

1.4.2 Пеанови аксиоми. Принцип на математичка индукција

При конструкцијата на природните броеви воочуваме некои законитости.

4.1. За секој елемент $n \in \mathbb{N}$ постои точно еден елемент од $\mathbb{N}$, што го означуваме со $n+1$ и го нарековме негов следбеник.

4.2. Постои единствен елемент од $\mathbb{N}$, кој што го означуваме со симболот 1, којшто не е следбеник на ниту еден елемент од $\mathbb{N}$.

4.3. Секој елемент од $\mathbb{N}$ е следбеник на најмногу еден елемент од $\mathbb{N}$, односно

4.3′. Два различни елементи од $\mathbb{N}$ имаат различни следбеници.

4.4. Ако S е подмножество од $\mathbb{N}$, такво што

а) $1 \in S$

б) Од елементот $n \in S$ следува дека и неговиот следбеник $n+1 \in S$.

Тогаш $S = \mathbb{N}$

Множеството на природни броеви $\mathbb{N}$ ги задоволува својствата 4.1, 4.2, 4.3 и 4.4. Секое множество кое ги задоволува својствата 4.1, 4.2, 4.3. и 4.4. е еквивалентно со $\mathbb{N}$.

Својствата 4.1, 4.2, 4.3 и 4.4 се познати под името **Пеанови аксиоми**.

Својствата 4.1, 4.2 и 4.3, може да ги наведеме во едно тврдење користејќи го поимот пресликување. Нека со f ја означиме кореспонденцијата која на секој елемент од $\mathbb{N}$ му го придружува неговиот следбеник $n+1$. Својствата 4.1, 4.2 и 4.3 всушност значат дека f е инјективно пресликување од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{N}$, при што 1 не е слика на ниту еден елемент од $\mathbb{N}$.

Својството 4.4 е познато и под името **аксиома на индукција**.

Оваа аксиома се користи при докажување на многу својства на природните броеви и, притоа, во примена се користи следната нејзина формулација, позната под името **принцип на математичка индукција (ПМИ)**.

За да се докаже дека некое својство го има секој природен број, доволно е да се докаже дека тоа својство го има бројот 1 и дека од тоа што тоа својство го има природниот број n, следува дека го има и неговиот следбеник $n+1$, т.е.

ПМИ. Нека $P(n)$ означува дека некое својство е исполнето за природниот број n.
Нека важи:
(i) $P(1)$
(ii) Од $P(n)$ следува $P(n+1)$
Тогаш за секој природен број n важи $P(n)$.

1.4.3 Операции во $\mathbb{N}$: Собирање, множење, степенување

Во множеството природни броеви се изведуваат повеќе операции. На почеток, ќе ја дефинираме операцијата "собирање", која што всушност (природно) следува од самата конструкција на природните броеви и е поврзана со операцијата унија на множества. Потоа ќе ја дефинираме операцијата множење на природни броеви преку операцијата собирање. Ќе наведеме некои битни својства на овие две важни операции во $\mathbb{N}$. Потоа со помош на множењето ќе дефинираме операција степенување во $\mathbb{N}$, и повторно ќе дадеме некои нејзини својства.

Операцијата "собирање" на природни броеви, со ознака "+", се определува како што веќе кажавме со помош на операција унија на множества. За $m, n \in\mathbb{N}$, **збирот** $m+n$ е бројот на елементи на унијата на две дисјунктни множества, едното од кои содржи m елементи, а другото содржи n елементи. Оваа дефиниција не зависи од изборот на дадените множества.

Собирање во $\mathbb{N}$ може да се дефинира и индуктивно на следниот начин:

За $m, n \in\mathbb{N}$,

$$m+1 = f(m) \tag{4.1}$$

$$m+(n+1) = f(m+n) \tag{4.2}$$

каде f е пресликувањето од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{N}$ кое на секој природен број му го придружува неговиот следбеник $n+1$, т.е. $f(n) = n+1$.

Да ја објасниме втората дефиниција, имајќи ја предвид конструкцијата на природните броеви и дефиницијата на собирањето.

Нека $m \in\mathbb{N}$ е произволно избран елемент од $\mathbb{N}$ и нека X е множество такво да $m = \delta X$. Збирот $m+1$ е број на елементи на унијата на множеството X со некое едноелементно множество Y, чиј што пресек со X е $\emptyset$. Бидејќи Y е едноелементно множество и $X \cap Y = \emptyset$, тоа множеството $X \cup Y$ всушност го добиваме кога на множеството X му додадеме еден нов елемент (различен од сите елементи во X). Тоа значи дека $\delta(X \cup Y)$ е следбеникот на δX т.е. $m+1$ е следбеникот на m т.е. $m+1 = f(m)$.

Понатаму, збирот $m+2$ го дефинираме слично како и $m+1$, но сега како следбеник на веќе дефинираниот збир $m+1$, а бидејќи 2 е следбеник на 1 т.е. $2 = 1+1$, тоа го запишуваме на следниот начин:

$$m + (1+1) = f(m+1)$$

Слично се дефинира $m+3$ и збирот на бројот m со било кој друг природен број, користејќи го претходно дефинираниот збир.

Со ПМИ се докажува дека за кои било природни броеви $m, n \in \mathbb{N}$, збирот $m+n$ е еднозначно определен природен број.
Имено, нека $m \in \mathbb{N}$ е произволно избран природен број. Ќе докажеме дека за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот $m+n$ е природен број, еднозначно определен. Доказот ќе го спроведеме со ПМИ.

За $n = 1$, збирот $m+n = m+1 \overset{(4.1)}{=} f(m)$ е следбеникот на $m \in \mathbb{N}$, којшто е еднозначно определен природен број.

Нека за $n \in \mathbb{N}$, збирот $m+n$ е еднозначно определен природен број.

Тогаш за збирот на m и $n+1$ имаме

$m+(n+1) \overset{(4.2)}{=} f(m+n) = (m+n)+1$ т.е. $m+(n+1)$ е следбеникот на природниот број $m+n$, којшто е еднозначно определен природен број.

Заради ПМИ тврдењето важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

Операцијата “множење” на природни броеви со ознака “$\cdot$” се дефинира индуктивно на следниот начин:

За $m, n \in \mathbb{N}$,

$$1 \cdot m = m \tag{4.3}$$

$$(n+1) \cdot m = n \cdot m + m \tag{4.4}$$

Од (4.3) и (4.4) имаме дека: за $m, n \in \mathbb{N}$, **производот** $n \cdot m$ е еднаков на збирот на n природни броеви, од кои секој е еднаков на m, т.е.

$$n \cdot m = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n-\text{пати}}$$

Како и кај собирањето, и кај множењето важи дека за кои било природни броеви $m, n \in \mathbb{N}$, **производот** $m \cdot n$ е еднозначно определен природен број. (Се проверува со ПМИ).

Во продожение ќе дадеме некои важни својства на операциите собирање и множење во $\mathbb{N}$.

За кои било природни броеви $m, n, k \in \mathbb{N}$, важи:

4.5. (i) $m+n = n+m$

(ii) $m \cdot n = n \cdot m$

Својството 4.5. е познато под името **комутативност** на собирање и множење.

4.6. (i) $m + (n + k) = (m + n) + k$

(ii) $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$

Својството 4.6. е познато под името **асоцијативност** на собирање и множење.

4.7. (i) $m \cdot (n + k) = (m \cdot n) + (m \cdot k)$

(ii) $(m + n) \cdot k = (m \cdot k) + (n \cdot k)$

Својството 4.7. е познато под името **дистрибутивност** на едната операција во однос на другата операција во $\mathbb{N}$.

4.8. (i) $m + k = n + k \Leftrightarrow m = n$

(ii) $m \cdot k = n \cdot k \Leftrightarrow m = n$

Својството 4.8. е познато како својство за **кратење** при собирање и множење во $\mathbb{N}$.

Со помош на множењето во $\mathbb{N}$ се дефинира и една друга операција во $\mathbb{N}$, наречена **степенување**.

За $m, n \in \mathbb{N}$, **степенот** m^n, се дефинира како производ од n природни броеви, од кои секој е еднаков на m, т.е. $m^n = \underbrace{m \cdot m \cdot \cdots \cdot m}_{n-\text{пати}}$

Оваа дефиниција е еквивалентна со следната индуктивна дефиниција на степенот т.е.

За $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m^1 = m \tag{4.5}$$

$$m^{n+1} = m^n \cdot m \tag{4.6}$$

Во ознаката за степенот m^n, m се нарекува **основа** на степенот, а n се нарекува **експонент** на степенот.

За било кои природни броеви $m, n \in \mathbb{N}$, степенот m^n е еднозначно определен природен број.
(И ова се проверува со ПМИ).

За $m, n, k \in \mathbb{N}$ важат следните својства:

4.9. $1^m = 1$

4.10. $m^n \cdot m^k = m^{n+k}$

4.11. $(m \cdot n)^k = m^k \cdot n^k$

4.12. $(m^n)^k = m^{n \cdot k}$

1.4.4 Подредување во $\mathbb{N}$

Нека m и n се дадени природни броеви. Ако постои природен број k, таков што $n = m + k$, велиме дека m е **помал** од n (или n е **поголем** од m).

Во тој случај пишуваме $m < n$(или $n > m$). Според ова погоре, за $m, n \in \mathbb{N}$, имаме

$$m < n \Leftrightarrow n > m \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) \;\; n = m + k \tag{4.7}$$

(4.7) дефинира една релација во $\mathbb{N}$, за која се покажува дека е строго подредување во $\mathbb{N}$, т.е. е антирефлексивна и транзитивна.
4.13. Ако m и n се кои било природни броеви, тогаш е исполнет еден и само еден од условите:
(i) $m < n$
(ii) $m = n$
(iii) $m > n$

Својството 4.13. всушност докажува дека строгото подредување "$<$" дефинирано со (4.7) е линеарно.
Со помош на "$<$" се дефинира релација "$\leq$" (помало или еднакво) во $\mathbb{N}$ на следниот начин:

За $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m \leq n \Leftrightarrow n \geq m \Leftrightarrow (m < n \vee m = n) \tag{4.8}$$

Со (4.8) е дефинирана релација "помало или еднакво", за која што се покажува дека е **подредување** во $\mathbb{N}$ и тоа **линеарно подредување** (заради 4.13.).

Ќе наведеме некои својства на подредувањето во однос на операциите во $\mathbb{N}$.

За $m, n, k, s \in \mathbb{N}$, важи
4.14. (i) $m < n \Leftrightarrow m + k < n + k$
(ii) $m \leq n \Leftrightarrow m + k \leq n + k$

4.15. (i) $m < n \Leftrightarrow m \cdot k < n \cdot k$
(ii) $m \leq n \Leftrightarrow m \cdot k \leq n \cdot k$
4.16. (i) $m < n \wedge k < s \Rightarrow m + k < n + s \wedge m \cdot k < n \cdot s$
(ii) $m \leq n \wedge k \leq s \Rightarrow m + k \leq n + s \wedge m \cdot k \leq n \cdot s$

4.17. $1 \leq n,$ за секој $n \in \mathbb{N}$
Забелешка. Лесно се проверува дека природните броеви се подредени на следниот начин:

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n < n + 1 < \ldots$$

1.4.5 Одземање во $\mathbb{N}$

Нека m и n се дадени природни броеви. Ако постои природен број k таков што $m = n + k$, велиме дека k е **разлика** на броевите m и n, и пишуваме $k = m - n$.

Природно, се поставува прашањето дали за кои било два дадени природни броја може да се определи нивната разлика. Одговорот на ова прашање е негативен т.е. разлика на два природни броја постои за некои природни броеви, но не за сите природни броеви.

Пример 1. а) Дали постои $3-2$?
Да, бидејќи $3 = 2+1$, $1 \in \mathbb{N}$.
б) Дали постои $2-3$?

Прашањето е еквивалентно со следното прашање: дали постои $k \in \mathbb{N}$, $2 = 3+k$? Бидејќи таков $k \in \mathbb{N}$ не постои, одговорот на прашањето е НЕ.

Се поставува и друго прашање: дали доколку разликата на два природни броја постои, таа е еднозначно определена. Одговорот на ова прашање е позитивен.

4.18. Разликата $m-n$ на природните броеви $m, n \in \mathbb{N}$ е природен број (постои во $\mathbb{N}$) ако и само ако m е поголем од n и во тој случај таа е еднозначно определена.

Определувањето на разликата $m-n$, за броевите $m, n \in \mathbb{N}$, се нарекува **одземање**.

Од сé што кажавме погоре, јасно е дека одземањето не е операција во $\mathbb{N}$.

Нека m и n се дадени природни броеви. Ако постои природен број $k \in \mathbb{N}$ таков што $m = n \cdot k$, велиме дека k е **количник** на броевите m и n и пишуваме

$$k = \frac{m}{n} \ \text{ или } \ k = m : n$$

Уште се вели дека n е **делител** на m и пишуваме $n|m$.

И овде се поставува прашање дали за кои било два дадени природни броеви постои нивниот количник. Лесно може да се провери дека одговорот и на ова прашање е негативен. На пример, ако земеме $m = 3$ и $n = 2$, нивниот количник не постои во $\mathbb{N}$, бидејќи постоење на нивниот количник значи постоење на природен број k таков да $3 = 2 \cdot k$, што не е можно во $\mathbb{N}$.

Точно е следното својство:

4.19. Ако количникот $\frac{m}{n}$ на два дадени природни броеви постои во $\mathbb{N}$ тогаш тој е еднозначно определен природен број.

Определување на количникот $\frac{m}{n}$ на два дадени природни броја m и n се нарекува **делење**. Делењето, како и одземањето, не е операција во $\mathbb{N}$.

Лесно се проверуваат следните својства на делењето.

Нека $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Точни се:

4.20. (i) $\frac{m}{1} = m$
(ii) $\frac{m}{m} = 1$

(*iii*) $\frac{m \cdot n}{n} = m$

(*iv*) Ако $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$, тогаш $\frac{m+1}{m}$ не постои во $\mathbb{N}$.

Забелешка. Секаде понатаму, знакот "·" за множење ќе го испуштаме и ќе пишуваме mn наместо $m \cdot n$, и ако количникот $\frac{m}{n}$ за $m, n \in \mathbb{N}$ постои ќе пишуваме $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$, а во спротивно $\frac{m}{n} \notin \mathbb{N}$.

4.21. Ако $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{N}$ тогаш $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ ако и само ако $mq = np$.

4.22. Ако $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{N}$ тогаш $\frac{m}{n}\frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \in \mathbb{N}$ и $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq} \in \mathbb{N}$.

1.5 Множеството на цели броеви $\mathbb{Z}$

Во 1.4.5 видовме дека одземањето на природни броеви не е операција во $\mathbb{N}$ бидејќи за дадени природни броеви m и n равенката

$$(*) \qquad m = n + x,$$

не секогаш има решение во $\mathbb{N}$. Природно, се наложува потреба од проширување на множеството на природни броеви, но притоа проширувањето да се направи така што збирот на два елементи од $\mathbb{N}$ во новото множество биде определен на ист начин како и во $\mathbb{N}$. Така, во новото множество ќе се најдат сите природни броеви, 0 и броеви од облик $-n$, каде $n \in \mathbb{N}$. Ова е **множество на целите броеви**, со ознака $\mathbb{Z}$. Значи:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -n, -(n-1), \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

Множеството $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ се означува со -$\mathbb{N}$, а елементите $-n$ и n се нарекуваат **спротивни** елементи.

Така, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (\text{-}\mathbb{N})$, а унијата $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ја означуваме со $\mathbb{N}_0$.

Елементите на $\mathbb{N}$ се нарекуваат **позитивни цели броеви**, а на -$\mathbb{N}$ **негативни цели броеви**.

Собирањето "+" во $\mathbb{Z}$ се дефинира со:

(*i*) $m + 0 = 0 + m = m$, за секој $m \in \mathbb{Z}$

(*ii*) За $m, n \in \mathbb{N}$ збирот $m + n$ е определен како во $\mathbb{N}$.

(*iii*) $n + (-n) = (-n) + n = 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$

(*iv*) $n + (-(n+k)) = (-(n+k)) + n = -k$, за секои $n, k \in \mathbb{N}$

(*v*) $(n+k) + (-n) = (-n) + (n+k) = k$, за секои $n, k \in \mathbb{N}$

(vi) $(-m)+(-n)=(-n)+(-m)=-(m+n)$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$

(i)-(vi) искажани со зборови, всушност, значат: (i) Секој цел број собран со 0 го дава самиот број.
(ii) Собирањето на два природни броја во $\mathbb{Z}$ е како и во $\mathbb{N}$.
(iii) Секој број собран со неговиот спротивен дава 0.
(iv) Збир на два броја $n\in\mathbb{N}$ и $(-m)\in-\mathbb{N}$, каде $n<m$ е еднаков на спротивниот број на разликата на m и n.
(v) Збир на два броја $m\in\mathbb{N}$ и $(-n)\in-\mathbb{N}$, каде $m>n$ е еднаков на разликата на броевите m и n.
(vi) Збир на два броја $-m,-n\in-\mathbb{N}$ е еднаков на спротивниот број на збирот на броевите m и n.

Множењето во $\mathbb{Z}$ се дефинира со:

а) $m\cdot 0=0\cdot m=0$, за секој $m\in\mathbb{Z}$
б) За $m,n\in\mathbb{N}$, производот mn е определен како и во $\mathbb{N}$.
в) $m(-n)=(-m)n=-(mn)$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$
г) $(-m)(-n)=(-n)(-m)=mn$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Разликата во $\mathbb{Z}$ се дефинира слично како во $\mathbb{N}$.

Нека m и n се дадени цели броеви. Ако постои цел број $k\in\mathbb{Z}$ таков што $m=n+k$, тогаш k е разлика на m и n и пишуваме $k=m-n$.

Заради
$m=n+k\Leftrightarrow(-n)+m=(-n)+(n+k)\Leftrightarrow(-n)+m=((-n)+n)+k\Leftrightarrow m+(-n)=0+k\Leftrightarrow m+(-n)=k$
добивме дека разликата на броевите m и n, $m-n$ е еднаква на збирот на бројот m и спротивниот број на бројот n т.е. $m-n=m+(-n)$.

5.1. Разликата на кои било два цели броја m и n, $m-n$, е еднозначно определен цел број, и притоа $m-n=m+(-n)$.
Значи, одземањето во $\mathbb{Z}$ е операција во $\mathbb{Z}$ и равенката (*) секогаш има единствено решение во $\mathbb{Z}$, еднакво на $m+(-n)$.

5.2. За операциите собирање и множење во $\mathbb{Z}$ важат комутативниот, асоцијативниот, дистрибутивниот закон и законот за кратење. Притоа, кај множењето, важи закон за кратење со елементи различни од 0, т.е. $mk=nk\Leftrightarrow m=n$ при $k\neq 0$.

Делењето во $\mathbb{Z}$ се дефинира слично како во $\mathbb{N}$.

Нека m и n се дадени цели броеви. Ако постои $k\in\mathbb{Z}$ таков што $m=nk$, велиме k е количник на m и n и пишуваме $k=\frac{m}{n}$. Уште велиме, n е делител на m и пишуваме $n|m$.

Броевите од $\mathbb{Z}$, кои го имаат 2 за делител, се викаат **парни** цели броеви, а останатите **непарни**.

Броевите од $\mathbb{N}$, кои немаат други делители освен 1 и самиот број се нарекуваат **прости**, а останатите природни броеви се нарекуваат **сложени**.

Бројот 1 не е ни прост ни сложен број.

Лесно се проверува дека делењето и во $\mathbb{Z}$ не е операција.

Имајќи го предвид множењето во $\mathbb{Z}$, се забележува дека:

(i) ако $m, n \in \mathbb{N}$ или $m, n \in -\mathbb{N}$, тогаш нивниот количник, доколку постои, е елемент на $\mathbb{N}$.

(ii) ако $m \in \mathbb{N}$, $n \in -\mathbb{N}$ или $m \in -\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ тогаш нивниот количник доколку постои е елемент на -$\mathbb{N}$.

Степенување во $\mathbb{Z}$ се дефинира со:

(а) $m^0 = 1$ за секој $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(б) За $m, n \in \mathbb{N}$, m^n се дефинира како и во $\mathbb{N}$.

(в) $(-m)^n = \underbrace{(-m)(-m)\dots(-m)}_{n-\text{пати}}$ за било кои $m, n \in \mathbb{N}$.

Забелешка. m^{-n}, за $m, n \in \mathbb{N}$ не е секогаш определено во $\mathbb{Z}$.

И во $\mathbb{Z}$ се дефинира подредување, при што се запазува подредувањето во $\mathbb{N}$.

За $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$m < n \Leftrightarrow n > m \Leftrightarrow n - m \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

Лесно се проверува дека "$<$" дефинирано со (5.1) е строго подредување во $\mathbb{Z}$. Релацијата "$\leq$" дефинирана со

$$m \leq n \Leftrightarrow n \geq m \Leftrightarrow (m < n \vee m = n) \tag{5.2}$$

е релација за подредување во $\mathbb{Z}$, и тоа линеарно подредување во $\mathbb{Z}$.

Од тоа како е дефинирано подредувањето во $\mathbb{Z}$, јасно е дека: $n < n+1$, $-(n+1) < -n$, $0 < n$, $-n < 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ т.е. елементите на $\mathbb{Z}$ се подредени на следниот начин:

$$\dots - (n+1) < -n < \dots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \dots n < n+1 < \dots$$

Нека $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Точни се следните својства на подредувањето во однос на собирање и множење во $\mathbb{Z}$.

5.3. (i) $m < n \Leftrightarrow m + p < n + p$
(ii) $m \leq n \Leftrightarrow m + p \leq n + p$

5.4. (i) $m < n, 0 < k \Leftrightarrow m \cdot k < n \cdot k$
(ii) $m \leq n, 0 < k \Leftrightarrow m \cdot k \leq n \cdot k$

5.5. (i) $m < n, k < 0 \Leftrightarrow m \cdot k > n \cdot k$
(ii) $m \leq n, k < 0 \Leftrightarrow m \cdot k \geq n \cdot k$

За бројот $m \in \mathbb{Z}$, **апсолутна вредност на** m, со ознака $|m|$, се дефинира на следниот начин:

$$|m| = \begin{cases} m, & m \in \mathbb{N} \\ -m, & m \in -\mathbb{N} \\ 0, & m = 0 \end{cases}$$

Значи $|m| \geq 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Со ПМИ се докажува и следното битно својство во $\mathbb{Z}$.

5.6. Нека m и n се дадени цели броеви, при што $n \neq 0$. Тогаш постои еден и само еден пар цели броеви q и r такви што $m = q{\cdot}n{+}r$, $0 \leq r < |n|$.

1.6 Множеството на рационални броеви $\mathbb{Q}$

Веќе видовме дека и во $\mathbb{Z}$, количникот на кои било два цели броја m, n не секогаш постои бидејќи за дадени цели броеви m и n равенката $(\triangle)$ $m = n \cdot x$ не секогаш има решение во $\mathbb{Z}$. Затоа, и ова множество се проширува, до едно ново множество на броеви од облик $\frac{m}{n}$ наречени **дропки**, каде $m, n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$. Бројот m се нарекува **броител**, а бројот n се нарекува **именител** на дропката $\frac{m}{n}$. Притоа, за две дропки $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ велиме дека се еднакви ако и само ако $m \cdot q = n \cdot p$ т.е.

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow m \cdot q = n \cdot p \text{ за } m, n, p, q \in \mathbb{Z},\ \ n, q \neq 0 \tag{6.1}$$

Ова ново множество е множеството на рационални броеви, и го означуваме со $\mathbb{Q}$.

Во $\mathbb{Q}$ се дефинираат операции собирање и множење на следниот начин:

За $\dfrac{m}{n}, \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q} \tag{6.2}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \tag{6.3}$$

Во множеството $\mathbb{Z}$, за $a \in \mathbb{Z}$ е точно дека $a : 1 = \dfrac{a}{1} = a$. Имајќи го ова предвид, секој цел број a може да се претстави како рационален од обликот $\frac{a}{1}$, и добиваме дека $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Од (6.2) и (6.3) е јасно дека собирањето и множењето на броеви од $\mathbb{Z}$, во новото множество, е како и во $\mathbb{Z}$.

6.1. За операциите собирање и множење во множеството на рационални броеви, $\mathbb{Q}$, важат комутативниот, асоцијативниот, дистрибутивниот закон и законот за кратење (при множење важи законот за кратење со елементи различни од 0).

За два дадени броја $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, нивната разлика $\frac{m}{n} - \frac{p}{q}$ е рационален број $\frac{r}{s}$ таков што $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} + \frac{r}{s}$. Точно е

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{m}{n} + \frac{-p}{q}$$

Делењето во $\mathbb{Q}$ се дефинира на следниот начин:
Нека $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ се дадени рационални броеви. Ако постои рационален број x таков што $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \cdot x$ велиме x е количник на $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ и пишуваме $x = \frac{m}{n} : \frac{p}{q}$.
Заради

$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \cdot x \Leftrightarrow \frac{q}{p} \cdot \frac{m}{n} = \frac{q}{p}\left(\frac{p}{q} \cdot x\right) \Leftrightarrow \frac{qm}{pn} = \left(\frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q}\right)x$
$\Leftrightarrow \frac{qm}{pn} = \frac{qp}{pq}x \Leftrightarrow \frac{qm}{pn} = x$

добиваме дека количникот $\frac{m}{n} : \frac{p}{q}$ е еднаков на рационалниот број $\frac{qm}{pn}$.
6.2. Количникот на кои било два рационални броеви $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, $\frac{m}{n} : \frac{p}{q}$ е еднозначно определен број, еднаков на $\frac{qm}{pn}$.

Значи равенката ($\triangle$) во $\mathbb{Q}$ секогаш има единствено решение.

За рационалниот број $\frac{m}{n}$ велиме е дека **позитивен** ако $m \cdot n > 0$. Множеството на позитивни рационални броеви го означуваме со $\mathbb{Q}^+$.

Ако $m \cdot n < 0$, велиме дека рационалниот број $\frac{m}{n}$ е **негативен**, а множеството од негативни рационални броеви го означуваме со $\mathbb{Q}^-$.

Дефинираме релација “$<$” во $\mathbb{Q}$ со:

$$r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, r_1 < r_2 \Leftrightarrow r_2 > r_1 \Leftrightarrow r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}^+ \tag{6.4}$$

и релација ”$\leq$” во $\mathbb{Q}$ со:

$$r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, r_1 \leq r_2 \Leftrightarrow r_2 \geq r_1 \Leftrightarrow (r_1 < r_2 \vee r_1 = r_2) \tag{6.5}$$

“$\leq$” е линеарно подредување во $\mathbb{Q}$.

Точно е следното важно својство:
6.3. Ако $r, s \in \mathbb{Q}$ се произволни рационални броеви такви што $r < s$, тогаш постои рационален број t таков сто $r < t < s$.
Навистина, $t = \frac{r+s}{2}$ е еден таков број.

Всушност, меѓу кои било два рационални броја r и s, $r < s$, постојат бесконечно многу рационални броеви.

Забелешка. Вакво својство не важи кај целите броеви.

6.4. Ако r и s се кои било позитивни рационални броеви, тогаш постои природен број $n \in \mathbb{N}$ таков што $n \cdot r > s$.
Ова својство е познато под името **Архимедово својство**.

Во $\mathbb{Q}$ се дефинира и степен на рационален број со показател, негативен цел број на следниот начин:

За $r \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, $r^{-n} = \left(\frac{1}{r}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)\dots\left(\frac{1}{r}\right)}_{n-\text{пати}}$

Дропките со именител 10^n, n-природен број, ги нарекуваме **десетични** и ги запишуваме во вид на децимални броеви.
Дропката
$a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = a, a_1 a_2 \dots a_n$,
$a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ се нарекува **конечна десетична дропка** (или **конечен децимален број**).

Нема да се задржиме на правила за операции со децимални броеви, бидејќи тие произлегуваат од правилата за операции со дропки. Ние ќе се задржиме на претставување на некои рационални броеви во вид на конечни десетични дропки т.е. во вид на конечен децимален број.
6.5. Нека $\frac{p}{q}$ е рационален број таков што p и q немаат заеднички делител различен од 1 (или -1). Ако именителот q може да се претстави во вид $\pm 2^m \cdot 5^n$, $m, n, \in \mathbb{N}_0$, тогаш $\frac{p}{q}$ може да се претстави во вид на конечна десетична дропка.

На пример:
$\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2} = \frac{3 \cdot 25}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{75}{10^3} = \frac{70+5}{10^3} = \frac{7 \cdot 10}{10^3} + \frac{5}{10^3} = \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 0 + \frac{0}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 0,075$
Во делот 1.14, ќе видиме дека ако q не може да се претстави во вид $\pm 2^m \cdot 5^n$,$m, n \in \mathbb{N}_0$, тогаш бројот $\frac{p}{q}$ не може да се претстави во вид на конечна десетична дропка, туку во вид на бесконечна десетична дропка, во која одредена група цифри се повторуваат периодично и бесконечно. Таквите дропки се нарекуваат **бесконечни периодични десетични дропки** или **бесконечни децимални периодични броеви**.
Пример 2. $\frac{4}{9} = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} \cdots = 0,444\dots$

1.7 Однос и пропорција

Однос на два броја a и b, $b \neq 0$ се нарекува количникот на броевите a и b.

Од својствата на рационалните броеви произлегува дека односот на два броја a и b, $b \neq 0$ не се менува ако броевите a и b се помножат (поделат) со еден ист број m, $m \neq 0$. т.е.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$$

Така, односот на два рационални броја, може да се замени со однос на два цели броја.

Пример 1. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{10}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{10}{9}$

Еднаквост на два односа $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ се нарекува **пропорција**. Притоа за броевите a, b, c, d велиме дека се во пропорција и a и d се **крајни членови** на пропорцијата, а b и c се **средни членови** на пропорцијата.

Од условот за еднаквост на два рационални броја произлегуваат следните својства:

7.1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Ова својство дава правило за пресметување на некој непознат член од пропорцијата.

На пример, ако $\frac{6}{x} = \frac{2}{7}$, тогаш $6 \cdot 7 = x \cdot 2$ т.е. $x = \frac{42}{2} = 21$

7.2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$.

Значи, во пропорцијата $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ може да се менуваат местата на членовите, под услов при пресметување на вкрстените производи во пропорцијата да се добие $a \cdot d = b \cdot c$.

7.3. Нека $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Тогаш:

$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$,

Доказ. Нека $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Тогаш важи:

$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, од каде следува дека $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$, од каде следува дека $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

Од $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, добиваме

$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c}{d}}$ т.е. $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$.

Слично, од $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ се добива $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$.

Од $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ и $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ се добива:

$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c-d}{d}}$ т.е. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се произволни броеви и k е даден константен број. Ако секој од броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$ го помножиме со k, добиваме броеви $b_1 = k \cdot a_1$, $b_2 = k \cdot a_2$, $\dots$, $b_n = k \cdot a_n$ соодветно т.е. следната таблица броеви:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \dots & a_n \\ b_1 & b_2 \dots & b_n \end{matrix}$$

за кои важи $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n} = k$ која се нарекува **систем на пропорционални броеви**. За k велиме дека е **коефициент на пропорционалност**.

Лесно се проверува дека важи:

7.4. $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n} = \frac{b_1+b_2+\dots+b_n}{a_1+a_2+\dots+a_n}$

Доказ. Од $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n} = k$ имаме $b_1 = k \cdot a_1$, $b_2 = k \cdot a_2$, $\dots$, $b_n = k \cdot a_n$ па

$\frac{b_1+b_2+\dots+b_n}{a_1+a_2+\dots+a_n} = \frac{k \cdot a_1 + k \cdot a_2 + \dots + k \cdot a_n}{a_1+a_2+\dots+a_n}$

$= \frac{k(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = k = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots \frac{b_n}{a_n}$.

Пропорцијата има голема примена во практиката и во секојдневниот живот. Во продолжение ќе ја илустрираме оваа примена.

1.8 Величини, пропорционални величини, обратнопропорционални величини

Во секојдневниот живот, техниката и науката се користат најразлични величини како должина, плоштина, маса, волумен, температура, време и други.

Секое својство (карактеристика) на дадени објекти (тела, геометриски фигури, поими) што може да се споредува со исто такво својство на претходно избран објект се нарекува **величина**. Величината на претходно избраниот објект, најчесто се нарекува **единица мерка** за таа величина, а самиот објект се нарекува **единечен објект**.

На пример, величини се: должина на отсечка, која се споредува со должина на единечна оцечка, од на пример 1cm; број на елементи на конечни множества, со единица мерка бројот 1; плоштина на рамнински фигури со единица мерка, на пример 1cm^2; маса на тела со единица мерка од 1kg и други.

Да се измери една величина, значи таа да се спореди со избраната единица мерка и да се определи бројот којшто кажува колку пати единицата мерка се содржи во дадената величина. Оваа постапка се нарекува **мерење**, а добиениот број се нарекува **мерен број**. Мерниот број запишан со единица мерка се нарекува **мерка** на таа величина.

За две величини A и B, од кои едната зависи од другата, велиме дека се **правопропорционални** или само **пропорционални** ако нивните мерни броеви образуваат систем на пропорционални броеви.

Така, ако A и B се две пропорционални величини и ако a_1 и b_1 се мерни броеви на A и B соодветно, при едни услови, а a_2 и b_2 се мерни броеви на A и B соодветно, при некои други услови, тогаш имаме:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \text{ т.е. } \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

Последното значи дека ако едната величина стане неколкупати поголема (или помала) тогаш и другата величина ќе претрпи иста таква промена т.е. ќе стане исто толку пати поголема (или помала).

Примената на пропорцијата ќе ја образложиме на следниот пример.

Пример 1. Во множество од 100 единки изброени се 30 машки единки. Колку машки единки може да се очекуваат во множеството од 500 единки од истиот вид.

Решение. Значи, во овој пример разгледуваме множество B, од машки и женски единки од некој вид и множество A, од машки единки од тој вид. Притоа, јасно $A \subset B$. Во еден примерок изброени се $a_1 = 30$ и $b_1 = 100$. Очигледно е дека δA и δB се пропорционални величини бидејќи ако δB се зголеми одреден број пати т.е. најдеме примерок од истиот вид кој брои поголем број единки, во тој примерок ќе има исто толку пати поголем број машки единки т.е. δA ќе се зголеми ист број пати.

Шематски:

ако во 100 единки од еден вид има 30 машки

тогаш во 500 единки од истиот вид има x машки

и тоа така да односот на бројот на машки единки во однос на бројот на сите единки од тој вид се запазува т.е. останува ист при промени на бројот на единки.

Математички запишуваме на следниот начин:

$$\frac{30}{100} = \frac{x}{500} \text{ т.е.}$$

$$30 \cdot 500 = x \cdot 100 \text{ т.е. } x = \frac{30 \cdot 500}{100} = 150.$$

Заклучуваме дека во множество од 500 единки од тој вид може да очекуваме 150 машки единки од истиот вид.

Забелешки: 1) Ако сме ја претставиле пропорцијата шематски, ги изедначуваме вкрстените производи (прикажани со стрелки) и го добиваме бројот што го бараме.

2) На ист начин, како во конкретниот пример 1, се прави шематски приказ на секоја пропорција и се пресметува еден од непознатите членови во пропорцијата.

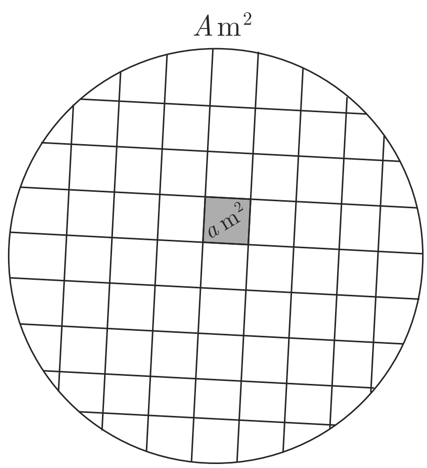
Пример 2. На една поголема површина P, се брои застапеноста на растението X. Како што е вообичаено при вакви постапки површината се дели на експериментални квадрати со еднакви плоштини, и со случаен избор на експерименталните квадрати се брои бројноста на X во извесен број квадрати кои се викаат пробни површини. Нека плоштината на секој пробен квадрат изнесува a m^2.

Со помош на средна вредност е најдена просечна бројност на растението X во еден пробен квадрат од $a\ m^2$ и нека тој просек биде H единки. Ако целата површина P има плоштина од Am^2, можеме да поставиме пропорција со следната шема:

ако на $a\ m^2$ се изброени H единки од растението X

тогаш на $A\ m^2$ ќе има x единки од растението X

$$\text{т.е.}\ \ \frac{H}{a} = \frac{x}{A}\ \ \text{т.е.}\ \ A \cdot H = x \cdot a\ \ \text{т.е.}\ \ x = \frac{A \cdot H}{a}$$



Забелешка. На овој начин, користејќи пропорција, и имајќи предвид дека бројноста на растението X и плоштината на површината на која се наоѓа растението X се пропорционални величини, се предвидува бројноста на растението X на целата површина P, без да се брои застапеноста на X на целата површина.

За две заемно зависни величини A и B, велиме дека се **обратнопропорционални** величини ако производот од нивните мерни броеви е константен.

Така, ако A и B се обратнопропорционални величини и a_1, b_1, се мерни броеви на A и B, соодветно, при едни услови, а a_2 и b_2 се мерни броеви на A и B соодветно, при некои други услови, тогаш имаме:

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2\ \ \text{т.е.}\ \ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}.$$

Последното значи дека ако едната величина се зголеми (намали) неколку пати, тогаш другата величина ќе се намали (зголеми) исто толку пати.

Пример 3. Една група од 5 работника завршува некоја работа за 11 денови, а друга група од 7 работника ја завршува истата работа за 8 денови. Која група работи подобро (поефикасно)?

Решение. Ќе пресметаме, за секоја група, за колку денови ќе ја заврши работата еден работник од групата ако работи сам. (Притоа, претпоставуваме дека во секоја група сите работници работат подеднакво). За првата група имаме:

ако 5 работника ја завршуваат работата за 11 дена

тогаш 1 работник ќе ја заврши работата за x денови.
Очигледно овде станува збор за обратнопропорционални величини, бидејќи ако бројот на работници во групата се смали, бројот на денови потребни за завршување на работата ќе биде поголем.
Значи, $5 \cdot 11 = 1 \cdot x$ т.е. $x = 55$ дена.
За втората група имаме:
ако 7 работника ја завршуваат работата за 8 дена

тогаш 1 работник ќе ја заврши работата за y денови.

Значи, $7 \cdot 8 = 1 \cdot y$ т.е. $y = 56$ дена.
Бидејќи $x < y$, заклучуваме дека првата група на работници е поефикасна.

1.9 Проценти

На почетокот ќе разгледаме два примери на популации во кои ја одредуваме половата структура на дадениот вид.

Пример 1. Во некоја популација се најдени 2360 единки и е утврдено дека 420 од нив се машки, а останатите се женски единки. Колку пати има повеќе женски единки во однос на машки единки? Колку е односот на сите единки во однос на машките единки?

ВКУПНО	МАШКИ	ЖЕНСКИ
2360	420	$2360 - 420 = 1940$

однос: $\frac{\text{женски единки}}{\text{машки единки}} = \frac{1940}{420} = 4,62$ пати
однос: $\frac{\text{сите единки}}{\text{машки единки}} = \frac{2360}{420} = 5,62$ пати
Значи во оваа популација има $4,62$ пати повеќе женски во однос на машки, и $5,62$ пати се повеќе сите во однос на машките единки.

Пример 2. Во некоја популација од 1110 единки се најдени 130 машки единки. Останатите се женски. Да најдеме колку пати има повеќе женски во однос на машки единки?

женски$= 1110 - 130 - 980$
однос: $\frac{\text{женски единки}}{\text{машки единки}} = \frac{980}{130} = 7,5$ пати повеќе женски
Да претпоставиме сега дека во нашиот експеримент се бара да се одреди дали еден вид содржи повеќе женски (или помалку) во однос на машки единки и дека во популацијата од пример 1 имаше еден вид од кој сме успеале да најдеме 2360 единки и изброиле 420

машки, а во популацијата од пример 2 сме нашле 1110 и изброиле 130 машки. Што е она што нас ќе не интересира?

Апсолутната бројност на женските единки од популациите од примерите 1 и 2 е:

1940 единки од видот кој припаѓа на популацијата од примерот 1

и

980 единки од видот кој припаѓа на популацијата од примерот 2.

1940 во однос на 980 не кажува ништо за видот, затоа што од првиот вид имаме најдено повеќе единки, т.е. апсолутната вредност не кажува ништо за тоа колкав е односот на женски во однос на машки, само при различни експерименти наоѓаме различен број единки и имаме различно броење.

Важен показател за споредба е **релативниот однос**.

Во нашиот случај има однос $\frac{A}{B}(4,62)$ во една ситуација и однос $\frac{D}{C}(7,5)$ во друга ситуација што покажува дека видот од популацијата од пример 1 има сразмерно помалку женски единки во однос на видот од популацијата од пример 2 иако во популацијата од пример 1 беа најдени повеќе женски единки.

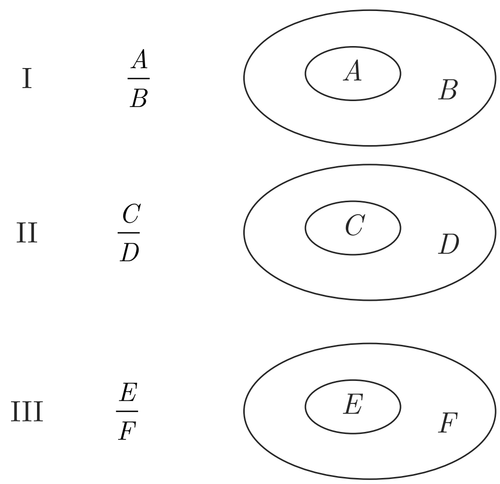
Така, ние можевме да ги споредуваме A во однос на C (како на почеток), но тоа ништо не ни покажува за тие два вида, ниту пак може да се добие квалитетен заклучок за споредба.

Релативната споредба $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ и $\frac{A}{B}$ во однос на $\frac{C}{D}$ е многу поважна и почеста во биологијата наспроти апсолутната споредба.

Да разгледаме уште еден пример.

Пример 3. Ако студентската стипендија е 2000 денари споредена со средна плата од 8000 денари, таа дава **коефициент на студентски стандард** т.е. $\frac{2000}{8000} = \frac{1}{4}$ од плата $= 0,25$. Пред неколку години, стипендијата изнесувала 1600 денари, а средна плата била 6000 денари. Значи тогаш коефициентот на студентски стандард изнесувал $\frac{1600}{6000} = 0,266$. Бидејќи $0,266$ е поголемо од $0,25$ заклучуваме дека студентот пред неколку години имал поголем стандард во однос на денешниот студент, иако апсолтутно тој денес има поголема стипендија 2000 во однос на 1600. Значи секое мерење е **релативно**.

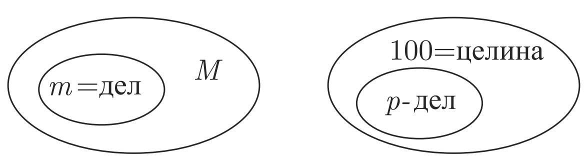
Да се вратиме на првите два примери. Ако имаме повеќе единки од различен пол и сакаме да ја одредиме половата структура односно машките единки во однос на вкупната популација, ќе дојдеме до количници од видот:



итн

Добиваме различни **децимални броеви за споредување**. Заради тоа што испитуваме во која популација преовладуваат повеќе машки единки треба да направиме споредување на децималните броеви од I, II, III, ... т.е. $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$, ... Споредбата е многу поедноставна ако наместо различни $B, D, F, \ldots$ работиме со некое (замислено) множество од секогаш еднаков број на единки во секој вид и тоа баш 100. Се прашуваме зошто баш 100? $10, 100, 1000$ се лесни броеви, но ако земеме 10 единки тоа е премалку (можни се многу случајности), 1000 е доволно голем број за да даде поточна слика, но 1000 примероци е преголем број, не секогаш може да се најдат толку многу. И затоа се зема множество од 100 единки (или 100 единици мерки) за **основно множество** во сите мерења.

Ако имаме некоја величина (множество) M и не интересира некој нејзин дел m како се однесува во однос на целината M, тоа е како да се бара колкав е делот p од едно замислено множество од 100 кој би бил еднаков на делот m во однос на M, т.е.



Станува збор за пропорција, па добиваме:

$$m : M = p : 100$$

т.е. $m \cdot 100 = M \cdot p$ т.е. $p = \frac{m}{M} \cdot 100$ или $m = p \cdot \frac{M}{100}$
Овој дел од 100 се вика p-ти процент.

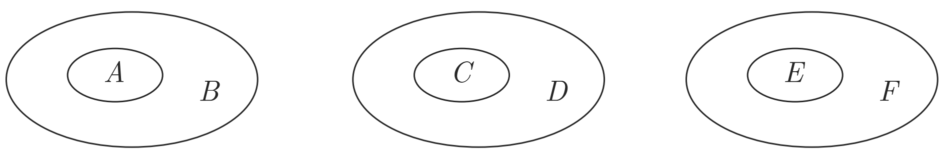
Дефиниција. (Еден) Процент е стоти дел од некоја величина A т.е. 1% од $A = \frac{A}{100}$

Пример 5. 1% од 2000 единки изнесува $\frac{2000}{100} = 20$ единки. $(= \frac{1}{100}$-ти дел од 2000).
5% од 2000 единки е петпати повеќе од 1% т.е.
5% од 2000 единки = 5(1% од 2000 единки) =
$= 5 \cdot \frac{2000}{100} = 5 \cdot 20 = 100$ единки.
Пример 6. 25% од 4000 грама изнесува
$25 \cdot \frac{4000}{100} = 1000$ грама.
Точно е дека

$$p\% \,\text{од}\, A = p \cdot \frac{A}{100}$$

Да го објасниме значењето на $p\%$ од A.

Ако се вратиме на разгледување примери од повеќе различни популации:



$$\frac{A}{B} \;-\; \text{дел на } A \text{ во } B$$

$$\frac{C}{D} \;-\; \text{дел на } C \text{ во } D$$

$$\frac{E}{F} \;-\; \text{дел на } E \text{ во } F$$

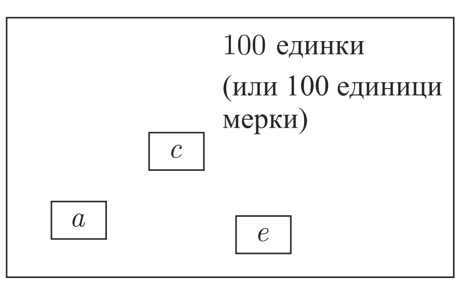
и ако покрај $B, D, F\ldots$ разгледуваме и основно множество од 100 единки, тогаш имаме соодветно

$$a - \text{дел од}100 = A\text{ти дел од}B$$

$$c - \text{дел од}100 = C\text{ти дел од}D$$

$$e - \text{дел од}100 = E\text{ти дел од}F$$

т.е.



Тоа математички се изразува на следниот начин:

$$\frac{a}{100} = \frac{A}{B}, \;\; A = a \cdot \frac{B}{100}$$

$$\frac{c}{100} = \frac{C}{D}, \;\; C = c \cdot \frac{D}{100}$$

$$\frac{e}{100} = \frac{E}{F}, \;\; E = e \cdot \frac{F}{100}$$

односно:

A е еднаков на a % од B

C е еднаков на c % од D

E е еднаков на e % од F

т.е. a е број на проценти на A во B
c е број на проценти на C во D
e е број на проценти на E во F

Општо

$$\frac{\text{процент}}{100} = \frac{\text{дел}}{\text{целина}}$$

т.е. формулата за процент е

$$\text{процент} = (\frac{\text{дел}}{\text{целина}} \cdot 100)\%$$

Пример 7. Да ги разгледаме сега Пример 1 и Пример 2 и да го изразиме процентуално делот на женски во I и во II група (популација).

$$\text{I група:} \;\; (\frac{1940}{2360} \cdot 100)\% = 82\%$$

$$\text{II група:} \;\; (\frac{980}{1110} \cdot 100)\% = 88\%$$

што значи дека женски има процентуално повеќе во II - група (популација) иако бројно помалку.
Што значат овие бројки 82 % и 88 %?
I група: ако земеме 100 единки, од нив 82 ќе бидат женски
II група: ако земеме 100 единки, од нив 88 ќе бидат женски.

Пример 8. Од 2500 цветови 900 се бели. Кој процент е тоа?

$p = (\frac{900}{2500} \cdot 100)\% = 36\%$ бели цветови

Значи, ако земеме 100 цвета, 36 од нив ќе бидат бели (при идеални распределби).

Процентот е посебно важен ако имаме множество со повеќе подмножества, како што е случај во биологијата. Тогаш процентуалното претставување е суштинско, општо усвоено и многу кажува за множеството и неговите подможества.

Пример 9. Во класата Insecta од редот Heteroptera се најдени следниве фамилии:

ALYDIDAE	2	
ARDCHORIDAE	37	
COREIDAE	2	
LIGAEIDAE	318	
MIRIDAE	373	
NABIDAE	3	
Вкупно	735	*Heteroptera*

Најди го процентот на секоја фамилија од редот Heteroptera!

Имаме:

$$p_1 = \left(\frac{2}{735} \cdot 100\right)\% = 0,27\%$$

$$p_2 = \left(\frac{37}{735} \cdot 100\right)\% = 5,03\%$$

$$p_3 = \left(\frac{2}{735} \cdot 100\right)\% = 0,27\%$$

$$p_4 = \left(\frac{318}{735} \cdot 100\right)\% = 41,6\%$$

$$p_5 = \left(\frac{373}{735} \cdot 100\right)\% = 50\%$$

$$p_6 = \left(\frac{3}{735} \cdot 100\right)\% = 0,41\%$$

Забележуваме дека најголем дел отпаѓа на две фамилии, четвртата и петтата, а останатите фамилии во класата се скоро незначителни (освен можеби од втората фамилија).

Исто така забележуваме дека $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 \approx 100\%$ (т.е. вкупниот збир е 100% од сите)

Пример 10. Во природните науки се чести и следните видови споредбени табели. Мериме годишен развиток (растење или опаѓање) на бројноста во некоја популација.

почеток на година	број n на единки	годишен прираст Δn	% растење
1995	326	99	$\left(\frac{99}{326}\cdot 100\right)\% = 30,3\%$
1996	425	90	$\left(\frac{90}{425}\cdot 100\right)\% = 21\%$
1997	515	125	$\left(\frac{125}{515}\cdot 100\right)\% = 24,2\%$
1998	640	140	$\left(\frac{140}{640}\cdot 100\right)\% = 21,9\%$
1999	780	170	$\left(\frac{170}{780}\cdot 100\right)\% = 22\%$

Значи 1995 година започнува со 326 единки. Во тек на таа година порастот е 99 единки па така на почеток на 1996 има вкупно $(326+99)$ единки $= 425$ единки. Процент на пораст во 1995 година изнесува $(\frac{99}{326}\cdot 100)\% = 30,3\%$.
Постапката продолжува.

Од вакви пресметки и табели може да заклучиме во која година порастот бил најголем, а во која најмал т.е. која била најдобра година за растење, а која најлоша и таквите пресметки служат за да се направат некои анализи. Во нашиот пример процентот на пораст (**стапка или индекс на растење**) бил најголем во 1995, а најмал во 1996 год.

1.10 Видови на процентни задачи

Можни се три вида на процентни задачи:

Прва директна процентна задача

Дадена е една величина A, се бара друга величина B, која изнесува $p\%$ од A.
Решение.

$$1\% \text{ од } \; A \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{A}{100}$$

$$p\% \text{ од } \; A \; = \; p\cdot(1\,\% \text{ од } A) \; = p\cdot\frac{A}{100}$$

По услов $p\%$ од $A = B$ т.е. $B = p\cdot\frac{A}{100}$

Пример 1. Во множество од 1226 единки само 87% од нив надминуваат определена тежина. Колку изнесува бројноста на тој дел од популацијата?

Решение. $A = 1226$
$p = 87$
$B = p\cdot\frac{A}{100} = 87\cdot\frac{1226}{100} = 108$ единки.

Втора (прва обратна) процентна задача

Дадена е една величина B, за која се знае дека е $p\%$ од A. Се бара непознатата величина A!

Решение. Повторно

$$1\% \text{ од } \ A \stackrel{\text{df}}{=} \frac{A}{100}$$

$$p\% \text{ од } \ A \ = \ p \cdot \frac{A}{100}$$

Се знае $B = p\%$ од A т.е. $B = \frac{p \cdot A}{100}$

$$A = \frac{100 \cdot B}{p}$$

Пример 2. Се знае дека раковите претставуваат 15% од некоја животинска заедница. Изброени се 420 ракови. Колкава е популацијата на раковите?

Решение. Дадено е: $B = 420$

$p = 15$

Се бара A

$A = \frac{100 \cdot 420}{15} = 2800$ единки

Трета (втора обратна) процентна задача

Дадени се две величини A и B. Се знае дека B е помала од A и дека B е дел од A. Се бара кој дел од B е A во %?

Решение. Од воведот за процент: $\frac{\text{дел}}{\text{целина}} = \frac{p}{100} (= \frac{B}{A})$

$$p = \frac{B}{A} \cdot 100$$

Пример 3. Во заедница од 1200 единки само 45 имаат некоја потребна должина. Колку е тоа во проценти?

Решение. $B = 45$

$A = 1200$

па $p\% = (\frac{45}{1200} \cdot 100) = 37,5\%$ ја имаат потребна должина

1.11 Примери

Пример 1. Индекс на растење и среден индекс

Некоја популација расте со динамика:

$$\overbrace{55 \qquad 78}^{I \text{ година}}\overbrace{\qquad 86}^{II \text{ година}}\overbrace{\qquad 97}^{III \text{ година}}\overbrace{\qquad 110}^{IV \text{ година}}$$

$$x_0 \qquad x_1 \qquad x_2 \qquad x_3 \qquad x_4$$

Растењата во текот на поедини години изнесуваат:

прираст во I година $\Delta x_1 = 78 - 55 = 23 \quad = x_1 - x_0$

прираст во II година $\Delta x_2 = 86 - 78 = 8 \quad = x_2 - x_1$

прираст во III година $\Delta x_3 = 97 - 86 = 11 \quad = x_3 - x_2$

прираст во IV година $\Delta x_4 = 110 - 97 = 13 \quad = x_4 - x_3$

Општо, годишниот прираст е $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$

Годишен индекс на растење е односот на годишниот прираст со бројот на почетокот на таа година, изразен во проценти.

Општо, индексот на растење за k-та година изразен во % е

$$i_k = \left(\frac{\Delta x_k}{x_{k-1}} \cdot 100\right)\% \;\;,\;\; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Така имаме

$$\begin{aligned} i_1 &= \left(\frac{\Delta x_1}{x_0} \cdot 100\right)\% = \frac{23}{55} \cdot 100 = 41,8\% \\ i_2 &= \left(\frac{8}{78} \cdot 100\right)\% = 1,2\% \\ i_3 &= \left(\frac{11}{86} \cdot 100\right)\% = 12,7\% \\ i_4 &= \left(\frac{13}{97} \cdot 100\right)\% = 14,4\% \end{aligned}$$

Тоталната промена се мери со вкупниот индекс на растење

$$i_{tot} = \frac{110 - 55}{55} \cdot 100\% = \frac{55}{55} \cdot 100\% = 100\%$$

т.е. популацијата пораснала за 100% (за сите 4 години).

Во општ случај ако имаме низа на растење:

$$\overbrace{x_o \qquad x}^{1}\overbrace{{}_1 \qquad x}^{2}\overbrace{{}_2 \qquad x_3}^{3}\ldots\overbrace{x_{n-1} \qquad x_n}^{n}$$

дефинираме индекс на растење на популација

$$i_1 = \frac{x_1 - x_0}{x_0} \cdot 100\% = \frac{\Delta x_1}{x_0} \cdot 100\% \;-\; \text{за првиот временски период}$$

$$i_2 = \frac{x_2 - x_1}{x_1} \cdot 100\% = \frac{\Delta x_2}{x_1} \cdot 100\% \ - \ \text{за вториот временски период}$$

$$\vdots$$

$$i_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} \cdot 100\% = \frac{\Delta x_k}{x_{k-1}} \cdot 100\%, \ k = 1, 2, \ldots, n - \text{за } k\text{-тиот временски период}$$

$$\vdots$$

Во случај на рамномерно растење дефинираме **среден индекс на растење** со

$$\begin{aligned} i_{\text{среден}} &= \bar{i} = \tfrac{i_1 + i_2 + \cdots + i_n}{n} = \\ &= \tfrac{\Delta x_1}{x_0} \cdot 100\% + \tfrac{\Delta x_2}{x_1} \cdot 100\% + \cdots + \tfrac{\Delta x_n}{x_{n-1}} \cdot 100\% = \\ &= \tfrac{100}{n} \left[\tfrac{\Delta x_1}{x_0} + \tfrac{\Delta x_2}{x_1} + \cdots + \tfrac{\Delta x_n}{x_{n-1}} \right] \% \end{aligned}$$

Вкупен индекс на растење се дефинира со

$$i_{tot} = \frac{x_n - x_0}{x_0} \cdot 100\% = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\%$$

Пример 2. Стапка на раѓање

Во град од 375000 жители дневно се раѓаат 48 машки и 57 женски деца. Определи ја стапката на раѓање:

а) на сите деца

б) само машки

в) само женски и тоа:

- месечно на 1000 жители
- годишно на 1000 жители
- годишно на 100000 жители

Решение.

сите	само машки	само женски
на 375000 жители дневно се раѓаат $48+57=105$ деца	на 375000 жители дневно се раѓаат 48 машки	на 375000 жители дневно се раѓаат 57 женски
дневно на 1000 жители x - деца $\frac{375000}{105}=\frac{1000}{x}$ т.е. $x=\frac{105}{375}$ деца на 1000 жители дневно	дневно на 1000 жители y - машки $\frac{375000}{48}=\frac{1000}{y}$ т.е. $y=\frac{48}{375}$ машки на 1000 жители дневно	дневно на 1000 жители z - женски $\frac{375000}{57}=\frac{1000}{z}$ т.е. $z=\frac{57}{375}$ женски на 1000 жители дневно
месечно на 1000 жители $30\cdot\frac{105}{375}$	месечно на 1000 жители $30\cdot\frac{48}{375}$	месечно на 1000 жители $30\cdot\frac{57}{375}$
годишно на 1000 жители $12\cdot 30\cdot\frac{105}{375}$	годишно на 1000 жители $12\cdot 30\cdot\frac{48}{375}$	годишно на 1000 жители $12\cdot 30\cdot\frac{57}{375}$
годишно на 100000 жители $x\cdot 1000$ $=100000\cdot 12\cdot 30\cdot\frac{105}{375}$ $x=100\cdot 12\cdot 30\cdot\frac{105}{375}$	годишно на 100000 жители $100\cdot 12\cdot 30\cdot\frac{48}{375}$	годишно на 100000 жители $100\cdot 12\cdot 30\cdot\frac{57}{375}$

Пример 3. Трошоци на производство.

Во просторниот распоред на некој парк:
растението A зазема $28m^2$ површина
растението B зазема $32m^2$ површина
растението C зазема $36m^2$ површина

Вкупните трошоци за садење се 1850 денари. Колку чини секој расад посебно?

Решение.

Вкупната површина е $A+B+C=(28+32+36)m^2=96m^2$

Вкупната цена е $S=1850$ денари.

Засадувањето на целата површина $A+B+C$ чини 1850 денари, а делот A е $\frac{A}{A+B+C}$ од вкупните трошоци.

Значи,
A чини $\frac{A}{A+B+C}\cdot\ S=\frac{28}{96}\cdot 1850$ ден
B чини $\frac{B}{A+B+C}\cdot\ S=\frac{32}{96}\cdot 1850$ ден
C чини $\frac{C}{A+B+C}\cdot\ S=\frac{36}{96}\cdot 1850$ ден

$\frac{A}{A+B+C}$ - покажува кој дел од вкупната површина зазема A, па

$\frac{A}{A+B+C} \cdot S$ е дел од вкупната цена истрошен за производство на A.

Пример 4. Пропорција и биохемиски процеси. Процентен состав на соединение

Да пресметаме процентен состав на сулфурна киселина H_2SO_4. Од таблица ги наоѓаме атомските тежини на компонентите:

тежината на водородот H е 1, на кислородот O е 16, на сулфурот S е 32.
Според тоа, молекулската тежина на:

H_2SO_4=$2 \cdot H$+$1 \cdot S$+$4 \cdot O$=$2 \cdot 1$+$1 \cdot 32$+$4 \cdot 16 = 98$ Значи,

во 98 грама H_2SO_4 има 2 грама H
во 100 грама H_2SO_4 има x грама H

Оттука,

$$\Rightarrow \quad 98 \cdot x = 100 \cdot 2$$

$$x = \left(\frac{2}{98} \cdot 100\right)\% = 2,04\%$$

Значи, H е застапен во H_2SO_4 со $2,04\%$. Слично добиваме дека

% на S во $H_2SO_4 = \left(\frac{32}{98} \cdot 100\right)\%$ и % на O во $H_2SO_4 = \left(\frac{64}{98} \cdot 100\right)\%$.

Пример 5. Формирање на смеси

Има голем број на задачи, поврзани со формирање раствори и смеси, разблажување и засилување на раствори, моларност итн.

На пример, Потребно е да се формира со 500 gr растворувач еден 2 - моларен раствор на сулфурна киселина. Колку gr чиста киселина е потребно да сеземе за таа цел?

Решение. 1мол $H_2SO_4 = 98$ gr бидејќи мол. тежина на H_2SO_4 е 98.
1 - моларен раствор значи 1 мол. раств. матер. на 1000 gr,

т.е. 98 gr треба да се сипат на 1000 gr,

а за 2 - моларен раствор значи дека треба да се сипат $2 \cdot 98$ gr на 1000 gr.

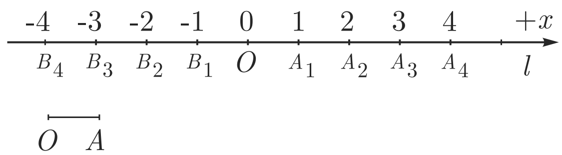
Ако за формирање на $2-M$ раствор на H_2SO_4, за 1000 gr треба да се сипат $2 \cdot 98 = 196$ gr киселина, тогаш, за 500 gr треба да се сипат x gr киселина.

$$1000 \cdot x = 500 \cdot 196$$

$$x = \frac{500 \cdot 196}{1000} = 98\ gr.$$

1.12 Бројна права

За поголема прегледност на бројните множества, многу често се практикува нивните елементи да се претставуваат со помош на точки од права линија. Се зема произволна права l, на неа избираме точка (произволно ја избираме и ја фиксираме) O и произволна отсечка со должина $\overline{OA}$, како единична мерка за должина.



Од точката O, ја нанесуваме лево и десно отсечката OA произволен број пати. Така, ги добиваме точките:

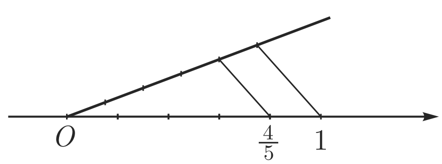
$$A_1, A_2, A_3, \dots \quad B_1, B_2, B_3, \dots$$

на кои што ги придружуваме броевите $1, 2, 3 \dots -1, -2, -3, \dots$, соодветно. Со тоа избравме и две насоки на правата: позитивна и негативна, соодветно.

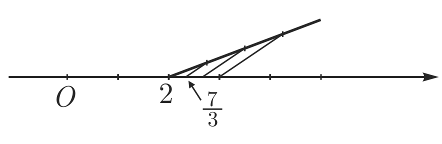
Права линија на којашто е избрана почетна точка (на таа е придружен бројот 0), единична мерка за должина и е определена позитивна насока се вика **бројна права**.

Се поставува прашање дали на произволен број $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ секогаш е можно да му се придружи соодветна точка од бројната права?

Одговорот на ова прашање е позитивен. Нека a и b се позитивни природни броеви и $a < b$. Тогаш единечната отсечка ја делиме на b делови и од нив земаме a делови (на цртежот е прикажан бројот $\frac{4}{5}$).



Ако $a > b$, тогаш постојат природни броеви m и c така што $\frac{a}{b} = m + \frac{c}{b}$ и $c < b$. Според тоа, го конструираме бројот $\frac{c}{b}$, како претходно, и таа отсечка ја нанесуваме во продолжение на m (на цртежот е претставен бројот $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$).

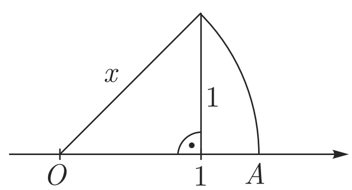


Ако $\frac{a}{b}$ е негативен, прво ја конструираме отсечката што одговара на $-\frac{a}{b}$ (кој е позитивен) а потоа ја пренесуваме таа отсечка лево од 0.

На овој начин на секој $r \in \mathbb{Q}$, му одговара точка од бројната права. Множеството точки од бројната права коишто одговараат на броевите од $\mathbb{Q}$ се нарекуваат **рационални точки**. Множеството $\mathbb{Q}$ е густо (што значи меѓу било кои две рационални точки се наоѓаат бесконечно многу рационални точки), па рационалните точки се густо поставени на бројната права. Логично се поставува прашањето дали овие густо распоредени рационални точки целосно ја пополнуваат (покриваат) целата права?

Со други зборови, ако на секој рационален број му одговара (рационална) точка од бројната права, дали важи и обратното, т.е. дали на секоја точка од бројната права и соодветствува рационален број? Одговорот на ова прашање е негативен. Во следниот пример ќе го образложиме ова.

Пример 1. Нека l е бројната права. Над единичната отсечка конструираме рамнокрак правоаголен триаголник, со катета 1 и темето на правиот агол да се наоѓа на бројната права.



Должината на хипотенузата, x, нанесена на бројната права определува точка A, што не припаѓа на $\mathbb{Q}$.

Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $x \in \mathbb{Q}$. Од Питагоровата теорема имаме дека $1^2+1^2 = x^2$. Значи, $2 = x^2$ и $x \in \mathbb{Q}$. Од тоа што $x \in \mathbb{Q}$, имаме дека $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Бидејќи во множеството на дропките важи $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$, за секој $m \in \mathbb{Q}$, $m \neq 0$, можеме да сметаме дека a и b се такви да $x = \frac{a}{b}$ и a, b немаат заеднички делител различен од 1 и -1.

Од $x^2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$ добиваме дека a е парен број, односно $a = 2c$, за некој $c \in \mathbb{Z}$.

Тогаш $a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow (2c)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4c^2 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = 2c^2$ т.е. b е парен број односно $b = 2d$, за некој $d \in \mathbb{Z}$. Добивме дека $2|a$ и $2|b$, што не е можно.

Заклучуваме дека не постои рационален број $x \in \mathbb{Q}$ таков што $x^2 = 2$. Значи, најдовме точка од бројната права (една таква точка е A), на која не ѝ соодветствува ниту еден рационален број. Значи рационалните точки не ја покриваат целосно бројната права, туку меѓу нив има и некои празнини (отвори). Затоа, природно се наложува потребата од проширување на множеството на рационални броеви, $\mathbb{Q}$, до ново множество. Тоа множество се нарекува множество реални броеви и се означува со $\mathbb{R}$.

1.13 Поим за низа

Веќе ја спомнавме добро познатата **низа од природни броеви**: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, n + 1, \ldots$

Од искуство знаеме дека и други броеви, освен природните можат да бидат вака запишани. На пример, резултати од некое мерење, платни списоци, ранг листи и слично.

Нека $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ се резултати од некое мерење. Ако α е прв по ред мерен резултат, него го доведуваме во врска со првиот природен број 1. Ако β е втор мерен резултат, него го доведуваме во врска со бројот 2 и.т.н.,

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}$$

и за да го нагласиме овој редослед, α ја заменуваме со a_1, β со a_2, γ со a_3, δ со a_4, итн. Така добиваме

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

Ова е природно запишување на резултатите според редоследот на мерењето, а може да се направи и според големините, или според некој друг квалитет.

Ако на секој природен број $n \in\mathbb{N}$ по некој определен закон му кореспондира единствен елемент a_n од некое множество, тогаш

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

определуваат **низа**.

Дефиниција. Секое пресликување f од множеството на природни броеви $\mathbb{N}$ во некое друго множество A, се нарекува **низа** (со вредности) во A.

Притоа, $a_n = f(n)$, за $n \in\mathbb{N}$ се нарекуваат **членови** на низата. Значи, a_1 е прв член на низата, a_2 е втор член на низата, a_n е n-ти член на низата или **општ член** на низата.

Низата кратко се бележи со симболот $\{a_n\}$.

Пресликувањето $\boldsymbol{f}$ што ги определува членовите на низата, уште се нарекува и **закон на низата**.

Низата се смета за определена ако се знае кој е законот, f, на низата.

Пример 1. Ако законот f гласи: членот a_n е реципрочна вредност од природниот број n т.е.

$$a_n = f(n) = \frac{1}{n}$$

тогаш низата е:

$$\frac{1}{1}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$$

На пример, 101-от член од низата е $a_{101} = \frac{1}{101}$, а 1000-тиот член на низата е $a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0,001$.

Пример 2. Ако законот f гласи: членот a_n е n-ти степен на бројот 2 т.е. $a_n = f(n) = 2^n$, тогаш низата е: $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$ и на пр. $a_5 = 32$, а $a_{10} = 1024$.

Пример 3. Да определиме неколку први членови на низата $\{a_n\}$, зададени со: $a_1 = 1, \ a_2 = 1, \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Решение. Првите членови на оваа низа се: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. И во овој случај низата е определена иако општиот член a_n не е даден експлицитно, туку се дадени првите два члена на низата и врската меѓу три члена во низата, $a_n, \ a_{n+1}, \ a_{n+2}$. Можно е да се определи и експлицитен аналитички израз за законот на оваа низа.

Ваквото задавање на низата се нарекува задавање со **рекурентна формула**.

Низата од пример 3 е позната како низа на Фибоначи, и се појавува во ботаника.

За некои низи не може да се определи аналитички израз (формула) за општиот член, иако се знае правилото според кое се добиваат нејзините членови. На пример, низата од прости броеви која за членови ги има: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ не може да биде зададена со формула за општиот член a_n, и покрај тоа што ја знаеме постапката за нивно определување.

1.14 Метод на децимално мерење на отсечките

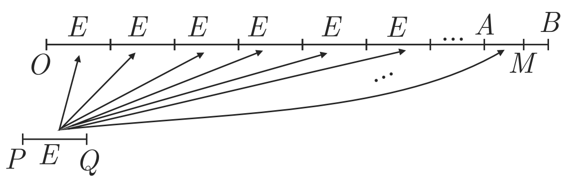
Досега ги разгледавме бројните множества: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Ќе покажеме дека тие се подмножества од едно поширoко множество, а тоа е множеството на реалните броеви. Да се потсетиме, природниот број се раѓа во процесот на броење, а реалниот број, како што ќе видиме во процесот на мерење.

Веќе објаснивме дека мерењето е споредување на некоја големина со однапред избрана единица мерка. Бидејќи мерењето должина е лесно приемливи за човекот, реалниот број ќе го воведеме низ мерење на должини. Се разбира, истиот процес лесно може да се прикаже на сите други мерења.

Да се измери должина на отсечка OM т.е. $\overline{OM}$, значи да се спореди со дадената основна должина (единица мерка). Нека таа биде должината на отсечката PQ.

Мерењето се состои во нанесување на отсечката PQ определен број пати врз OM. Притоа, крајот на претходната се совпаѓа со почетокот на следната отсечка. За оваа постапка аксиоматска основа постои во геометријата, позната како **аксиома на Архимед**, која вели:

Секоја отсечка може да се надмине со нанесување на определена дадена отсечка E, конечен број пати. т.е.



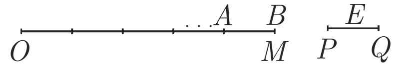
Ако $\overline{OM}$ е должината на дадената отсечка, $\overline{PQ} = E$ е должина на единечната отсечка, тогаш колку и да е долга отсечката OM секогаш може да ја прекриеме со нанесување конечен број пати на отсечката PQ врз OM, и тоа така да **крајната точка M се најде меѓу почетната и крајната точка на последната од отсечките PQ т.е. меѓу A и B (види цртеж)**. Оваа постапка е основа на сите мерења. Мерењата ги вршиме во чекори:

I чекор: Ја нанесуваме отсечката PQ определен број пати врз OM така да OM биде достигната. (како што објаснивме погоре т.е. да M биде меѓу почетна A и крајна точка B на последната од отсечките PQ) Може да се случи:

(i) Точката M да се совпадне со точката B. Тогаш пишуваме $M \equiv B$. Во тој случај велиме дека мерењето е завршено и мерниот број на должината на отсечката OM е бројот на нанесувањето на отсечката PQ врз OM. Тоа е некој природен број, да речеме n. Пишуваме:

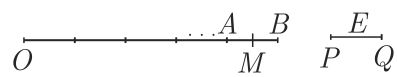
$$\overline{OM} = n \cdot E$$

Геометриско претставување на оваа ситуација е дадено на следниов цртеж.



Бидејќи E е единечната должина т.е. $E = 1$, $\overline{OM} = n \cdot 1 = n$ и природниот број n е мерен број за должината $\overline{OM}$. Меѓутоа,

можен е и следниот случај:
(ii) Точката M да не се совпадне со B, туку да биде меѓу A и B.



Ако до точката A, отсечктата PQ сме ја нанеле цел број пати, да речеме n, тогаш до B, отсечката PQ сме ја нанеле $n+1$ пати. Така M е меѓу крајните точки на двете отсечки со должини $n \cdot E$ и $(n+1) \cdot E$ од каде, заради $E = 1$, имаме

$$n < \overline{OM} < n+1.$$

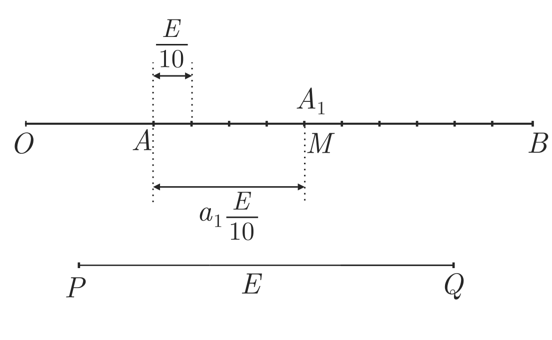
Овде мерењето не е завршено и мерниот број на OM не е најден. Најдени се само граници на мерниот број на мерената величина, а тоа се природните броеви n и $n+1$. Запишувајќи n^-, наместо n, означуваме дека n е помала вредност од вредноста на величината што ја мериме. Уште велиме дека n^- е **целобројна апроксимација (приближна вредност) на мерената величина, по недостиг.**

Запишувајќи го $n+1$ како $(n+1)^+$ означуваме дека $n+1$ е поголема вредност од вредноста на мерената величина. Велиме $(n+1)^+$ е **целобројна апроксимација (приближна вредност) до мерената величина по додаток.**

Значи, апроксимациите n^- и $(n+1)^+$ се првите природни броеви најблиски до вредноста на мерената велчина. Уште велиме дека n и $n+1$ формираат **целоброен интервал** во кој се наоѓа бараната мерена величина. Но, ова се само груби граници на мерената величина, и тие во општ случај се природни броеви, и затоа постапката ја продолжуваме до наоѓање поточен мерен број на бараната величина.

II чекор: Бидејќи M е меѓу A и B, последната од единичните отсечки PQ, AB, ја делиме на 10 еднакви дела, секој од нив со должина $\frac{E}{10}$. Така добиваме 9 нови внатрешни точки. Повторно се можни следните случаи:

(i) Може да се случи точката M да се поклопи со некоја од точките на новата поделба, на пример, со точката A_1.



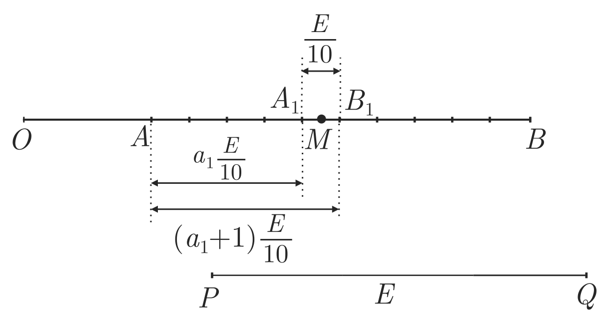
Ако до A_1 има a_1 мали отсечки, тогаш јасно a_1 е природен број и тоа $a_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, т.е. a_1 е една цифра. Сега мерењето е завршено и мерниот број на $\overline{OM}$ е

$$\overline{OA_1} = \overline{OA} + \overline{AA_1} = nE + a_1 \cdot \frac{E}{10} = n \cdot 1 + a_1 \cdot \frac{1}{10} = n + \frac{a_1}{10}$$

$$\overline{OA_1} = n + \frac{a_1}{10} \quad (n, a_1)$$

Велиме, мерниот број на $\overline{OM}$ е **децимален број со една децимала т.е.** n, a_1**.**

Ако M не се совпадне со ниедна точка од новата поделба, тогаш имаме друг случај, т.е.
(ii) M да се најде меѓу две едноподруги точки A_1 и B_1 од новата поделба. Геометриски приказ на оваа ситуација е следниов:



Ако од A до A_1 има a_1 отсечки со должина $\frac{E}{10}$, тогаш од A до B_1 има (a_1+1) отсечки со должина $\frac{E}{10}$, па

$\overline{OA_1} < \overline{OM} < \overline{OB_1}$, каде

$$\overline{OA_1} = \overline{OA} + \overline{AA_1} = nE + a_1 \cdot \frac{E}{10} = n + \frac{a_1}{10}$$

$$\overline{OB_1} = \overline{OA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1B_1} = nE + a_1 \cdot \frac{E}{10} + 1 \cdot \frac{E}{10} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} = n + \frac{a_1+1}{10}$$

од каде добиваме

$$n + \frac{a_1}{10} < \overline{OM} < n + \frac{a_1+1}{10}$$

т.е. $n, a_1 < \overline{OM} < n, \overline{a_1+1}$

($\overline{a_1+1}-$ означува дека е тоа една цифра што се добива кога на a_1 се додаде 1).

Значи, сега се најдени поблиски граници на мерниот број на бараната величина $\overline{OM}$. Точката M се наоѓа во интервал со широчина $\frac{1}{10}$, т.е. M е меѓу крајните точки на две отсечки со должини n, a_1 и $n, \overline{a_1+1}$, соодветно, и велиме со точност $\frac{1}{10}$. Значи, во овој случај имаме 10 пати поголема прецизност отколку во првиот чекор.

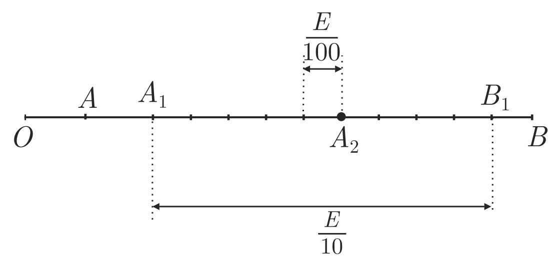
Бројот n, a_1 е **прва децимална апроксимација (приближна вредност) по недостиг**, и означуваме n, a_1^- (помала вредност од мерената, но најблиска од сите децимални броеви со една децимала).

Бројот $n, \overline{a_1 + 1}$ е **прва децимална апроксимација по додаток** и означуваме $n, \overline{a_1 + 1}^+$.

Во овој случај мерењето не е завршено, но имаме потесен интервал во кој се наоѓа мерниот број на бараната величина.

III чекор: Постапката ја продолжуваме на истиот начин. Отсечката A_1B_1 ја делиме на 10 нови еднакви делови. Должина на секој дел ќе биде $\frac{1}{10}$ од $\frac{E}{10}$ т.е. $\frac{1}{10} \cdot \frac{E}{10} = \frac{E}{10^2} = \frac{E}{100}$. Значи, новите отсечки се со должина еднакви на стотиот дел од единицата. И овде може да настапат два случаи:

(i) Може M да се совпадне со една од новите точки на пример $M \equiv A_2$. Геометриски приказ на оваа ситуација е следниов цртеж.



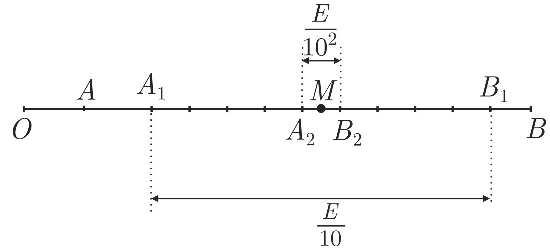
Ако од A_1 до A_2 има a_2-нови отсечки со должина $\frac{E}{100}$, тогаш

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} = n \cdot E + a_1 \cdot \frac{E}{10} + a_2 \frac{E}{100} =$$
$$= n \cdot 1 + a_1 \cdot \frac{1}{10} + a_2 \cdot \frac{1}{10^2} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\,(= n, a_1a_2)$$

Мерењето е завршено и **мерниот број на $\overline{OM}$ е децимален број со две децимали**.

Но, можен е и случајот:

(ii) M да се најде меѓу две точки, A_2 и B_2, од новата поделба т.е. во интервал со ширина $\frac{E}{10^2}$.



Ако од A_1 до A_2 има a_2 делови, тогаш од A_1 до B_2 има (a_2+1) делови, па:

$$\overline{OA_2} < \overline{OM} < \overline{OB_2}, \text{ каде}$$

$$\overline{OA_2} = \overline{OA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} = n \cdot E + a_1\frac{E}{10} + a_2\frac{E}{10^2} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}$$

$$\overline{OB_2} = \overline{OA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1B_2} = n \cdot E + a_1 \cdot \frac{E}{10} + (a_2+1) \cdot \frac{E}{10^2} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2},$$

од каде заради

$$n, a_1a_2 = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \quad \text{и} \quad n, a_1\overline{a_2+1} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2},$$

добиваме $n, a_1a_2 < \overline{OM} < n, a_1\overline{a_2+1}$. Мерењето не е завршено, но најден е интервал со ширина $\frac{1}{100}$ во кој се наоѓа точката M, и притоа, M е оддалечена од границите на тој интервал за помалку од $\frac{1}{100}$. Тоа значи, ако за приближна вредност за $\overline{OM}$ земеме

$$\overline{OM} \approx n, a_1a_2 \quad \text{или} \quad \overline{OM} \approx n, a_1\overline{a_2+1}$$

тогаш грешката на таа замена е помала од $\frac{1}{100} = 10^{-2}$

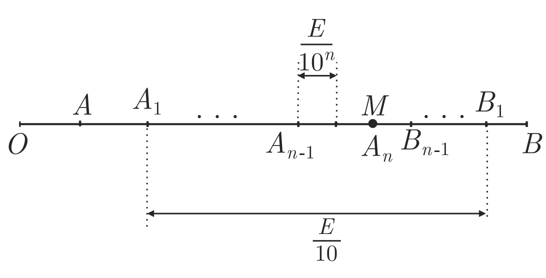
Како и досега, запишуваме $n, a_1a_2 \equiv n, a_1a_2^-$ и велиме е **втора децимална апроксимација по недостиг**, а $n, a_1\overline{a_2+1} \equiv n, a_1a_2+1^+$ е **втора децимална апроксимација по додаток**

Оваа постапка може да се продолжи. При секој натамошен чекор може да се очекуваат два настани:

(i) точката M да се совпадне со една од точките на новата десетична поделба или

(ii) M да не се совпадне со ниту една таква точка т.е. да се најде во интервал меѓу две точки од новата поделба. Така би имале во некој $(n+1)$-ви чекор:

(i) M се поклопи со A_n од последната нова поделба.



па

$$\overline{OM} = \overline{OA_n} = \overline{OA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n} =$$

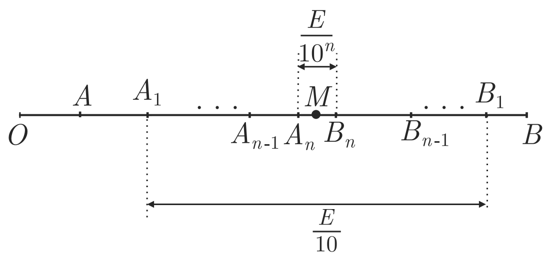
$$= n \cdot E + a_1 \cdot \frac{E}{10} + a_2 \cdot \frac{E}{10^2} + \cdots + a_n \cdot \frac{E}{10^n} =$$

$$n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = n, a_1a_2 \ldots a_n$$

т.е. **мерниот број на $\overline{OM}$ е децимален број со n-децимали и $\overline{OM}$ е измерливо преку делови од E.**

Но можен е и следниот случај:

(ii) M се наоѓа меѓу две нови точки A_n и B_n т.е.



па

$$\overline{OA_n} < \overline{OM} < \overline{OB_n}, \quad \text{каде}$$

$$\overline{OA_n} = \overline{OA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_{n-1}A_n} =$$

$$= n \cdot E + a_1\frac{E}{10} + a_2\frac{E}{10^2} + \cdots + a_n\frac{E}{10^n} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

$$\overline{OB_n} = \overline{OA} + \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_{n-1}B_n} =$$

$$= n \cdot E + a_1\frac{E}{10} + a_2\frac{E}{10^2} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n}E = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n}$$

т.е. $\quad n, a_1a_2\ldots a_n < \overline{OM} < n, a_1a_2\ldots\overline{a_n+1}.$

Значи, M се наоѓа во интервал со широчина $\frac{1}{10^n}$, чија лева и десна граница се децимални броеви со n-децимали, кои меѓу себе се разликуваат само за една единица на последното n-тото децимално место. Како и досега:

$n, a_1a_2\ldots a_n \quad \equiv n, a_1a_2\ldots a_n^- \quad =$ **n-та децимална апроксимација по недостиг**

$n, a_1a_2\ldots\overline{a_n+1} \quad \equiv n, a_1a_2\ldots\overline{a_n+1}^+ \quad =$ **n-та децимална апроксимација по додаток**

И двата децимални броја се рационални броеви и се приближна замена за мерената величина со точност од n - децимали или велиме со точност $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ и пишуваме:

$$\overline{OM} \approx n, a_1a_2\ldots a_n \;\text{ или }\; \overline{OM} \approx n, a_1a_2\ldots\overline{a_n+1}.$$

Забелешка. Мерењето на тежини се врши на сличен принцип. Мерената тежина се определува меѓу две приближни тежини, од кои едната поттежнува, а втората претежнува.

1.15 Воведување на реален број

Ако постапката на децималното мерење има крај, т.е. ако, на пример по n - чекори $M \equiv A_n$, за некое n, мерниот број на $\overline{OM}$ е децимален број со конечен број децимали $n, a_1a_2a_3 \dots a_n$, каде

$$n, a_1a_2a_3 \dots a_n = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Во случај кога постапката на децималното мерење нема крај таков децимален број со конечен број децимали едноставно нема. Точката M се наоѓа меѓу почетната и крајнита точки на две отсечки од последната поделба, на кои им одговараат два децимални броја со конечен број децимали, т.е.

$$n \cdot E + a_1 \cdot \frac{E}{10} + a_2\frac{E}{10^2} + \cdots + a_n\frac{E}{10^n} < \overline{OM} <$$

$$< n \cdot E + a_1 \cdot \frac{E}{10} + a_2\frac{E}{10^2} + \cdots + a_n\frac{E}{10^n} + 1\frac{E}{10^n}$$

т.е.

$$n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + a_n\frac{1}{10^n} < \overline{OM} < n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + a_n\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

т.е.

$$n, a_1a_2 \dots a_n < \overline{OM} < n, a_1a_2 \dots \overline{a_n + 1}$$

Оваа постапка на децимално мерење може да продолжи до бескрајност, т.е. да нема крај. Тогаш ќе имаме дека левиот и десниот децимален број се "претвораат" во еден ист децимален број со безброј децимали т.е. доаѓаме до броеви од облик:

$$\overline{OM} = n, a_1a_2a_3 \dots a_na_{n+1} \dots a_m \dots a_p \dots$$

$$\overline{OM} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{a_m}{10^m} + \cdots + \frac{a_p}{10^p} + \dots$$

Да резимираме: Во постапката на децимално мерење дојдовме до броеви од облик:

$$(i) \qquad n, a_1a_2a_3 \dots a_n = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \ \ 0 \le a_i \le 9, \ \ n \in \mathbb{N}_0$$

Овој број го нарекуваме **позитивна конечна десетична дропка** или **позитивен децимален број со n-децимали.**

Видовме дека $n, a_1a_2 \dots a_n \in \mathbb{Q}$.

$-n, a_1a_2 \dots a_n = -\left(n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right)$ е **негативна конечна десетична дропка**.

ii) $n, a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\cdots = \left(n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}\ldots\right)$, каде $0 \le a_i \le 9$, $n \in \mathbb{N}_0$ и го викаме **позитивна бесконечна десетична дропка** или **позитивен децимален број со безброј децимали**. Бројот
$-n, a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\cdots = -\left(n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}\ldots\right)$
претставува **негативна бесконечна десетична дропка** или **негативен децимален број со безброј децимали.**

Дефиниција. Произволна десетична дропка се нарекува реален број.

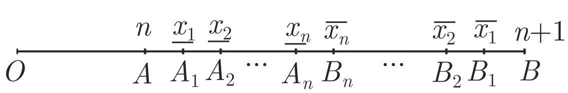
Множеството на реални броеви ќе го означиме со $\mathbb{R}$. Множеството на позитивни реални броеви ќе го означиме со $\mathbb{R}^+$, а на негативни реални броеви со $\mathbb{R}^-$.

Во продолжение ќе користиме скратена ознака за збир т.е. ознака $\sum_{i=1}^{n} a_i$ - за конечен збир и $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ - за бесконечен збир.

Видовме дека во случајот (ii) во $(n+1)$-от чекор, за бројот $x = \overline{OM}$ најдовме рационални броеви $n, a_1a_2\ldots a_n = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^n}$ и $n, a_1a_2\ldots \overline{a_n + 1} = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^n} + \frac{1}{10^n}$, да ги означиме со $\underline{x_n}$ и $\overline{x_n}$, соодветно, за кои важи $\underline{x_n} = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} < x < n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n} = \overline{x_n}$.

Бројот $\underline{x_n} = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} = n, a_1a_2\ldots a_n$ го нарековме **n-та децимална апроксимација по недостиг** или уште се нарекува **долно n-значно рационално приближување на реалниот број** x, а бројот $\overline{x_n} = n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^n} + \frac{1}{10^n}$ го нарековме **n-та децимална апроксимација по додаток** или уште се нарекува **горно n-значно рационално приближување на реалниот број** x.

На овие рационални броеви $\underline{x_1}, \underline{x_2}, \underline{x_3}, \ldots, \underline{x_n}, \ldots, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \ldots$ одговараат рационални точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ распоредени на бројна права на следниот начин:



Всушност, во постапката на децимално мерење добивме две низи $\{\underline{x_n}\}$ и $\{\overline{x_n}\}$ со следните својства:

1^0. $\{\underline{x_n}\}$ е таква што $\underline{x_n} < \underline{x_{n+1}}$, за секој $n \in \mathbb{N}$, а $\{\overline{x_n}\}$ е таква што $\overline{x_{n+1}} < \overline{x_n}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

2^0. $\underline{x_n} < n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\overline{x_n} > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3^0. Разликата меѓу два соодветни члена на низите $\{\underline{x_n}\}$ и $\{\overline{x_n}\}$ е $\frac{1}{10^n}$ т.е. $\overline{x_n} - \underline{x_n} = \frac{1}{10^n}$, па ако се земат доволно голем број на членови на низите, таа разлика може да се направи произволно мала.

4^0. Секој член на првата низа е помал од секој член на втората низа.

1.16 Постапка на делење (Евклидов алгоритам) и два облика на рационалниот број. Ирационален број.

Да се потсетиме: да се измери a со b значи да се подели a со b т.е. математички да се најде $a : b$ или $\frac{a}{b}$. По дефиниција на делењето, да се поделат два природни броја a и b, значи да се најде трет број c така да важи $a = b \cdot c$ т.е.

$$\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \cdot c \qquad (*)$$

Видовме, b **е делител на** a (или a **го дели** b) ако и само ако c е природен број. Ако не може да се најде природен број c за кој важи (*), тогаш b **не е делител на** a т.е. a **не го дели** b. Во тој случај при делењето на a со b, освен бројот c, се добива уште еден број r. Тоа математички го пишуваме вака:

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} \qquad (\triangle)$$

каде c е природен број и r е природен број таков да $r < b$. Велиме c е **количник**, а r - **остаток**, при делењето на a со b.

Да забележиме: $(\triangle) \Leftrightarrow a = bc + r$

Ова е познатата **теорема на Евклид: за кои било природни броеви a и b постојат еднозначно определени ненегативни цели броеви c и r, $r < b$ така што важи** $a = bc + r$. (Оваа теорема беше дадена во делот 1.7).

Доколку, сакаме поголема прецизност на делењето тогаш слично како и при децималното мерење и овде, спроведуваме една децимална постапка на делењето. Таа се состои во следното: r не се дели со b, па секоја единица на r ја делиме на 10 еднакви дела и тогаш имаме $10 \cdot r$ нови, помали делови. Бројот $10r$ е поголем од b и можно е да се случи да се дели со b. При оваа повторна постапка на делењето на $10r$ со b добиваме, по Теоремата на Евклид, еднозначно определени природни броеви: количник c_1 (c_1 може да биде и 0) и остаток r_1 (и r_1 може да биде 0), $r_1 < b$, такви што

$$\frac{10r}{b} = c_1 + \frac{r_1}{b} \qquad (1)$$

Од (1) имаме $r = \frac{bc_1}{10} + \frac{r_1}{10}$, и со замена на r во $(\triangle)$, се добива

$$\frac{a}{b} = c + \frac{c_1}{10} + \frac{r_1}{10b} = c, c_1 + \frac{r_1}{10b} \qquad (2)$$

Бидејќи $\frac{r}{b} < 1$, $\frac{10r}{b} < 10$ па заради (1) $c_1 < 10$ $\left(\frac{r_1}{b} \geq 0\right)$ т.е. $c_1 \leq 9$. Бидејќи $c_1 \in \mathbb{N}_0$ следува дека c_1 е цифра.

Постапката продолжува на сличен начин, па постојат еднозначно определени природни броеви c_2 (c_2 може да е и 0) и природен број r_2 (r_2 може да е и 0), $r_2 < b$ така што

$$\frac{10r_1}{b} = c_2 + \frac{r_2}{b} \tag{3}$$

Од (3) добиваме $r_1 = \frac{bc_2}{10} + \frac{r_2}{10}$, и со замена во (2) се добива:

$$\frac{a}{b} = c + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 b} \tag{4}$$

На сличен начин се утврдува дека $c_2 \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le c_2 \le 9$.

Продолжувајќи ја оваа постапка, се добиваат природни броеви $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, $0 \le c_i \le 9$, $0 \le r_{n-1} < b$ (сите еднозначно определени) така што важи

$$\frac{a}{b} = c + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{r_{n-1}}{10^{n-1}b} = c, c_1c_2\ldots c_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{10^{n-1}b} \tag{5}$$

Сега може да настапат два случаи:
(i) Бројот b да биде делител на $10r_{n-1}$, т.е. да постои природен број c_n така што $\frac{10r_{n-1}}{b} = c_n$ (остатокот $r_n = 0$). Тогаш, со замена во (5) се добива

$$\frac{a}{b} = c + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{c_n}{10^n} = c, c_1c_2\ldots c_n,\ 0 \le c_i \le 9,\ \ c_i \in \mathbb{N} \tag{6}$$

т.е. $\frac{a}{b}$ е конечен децимален број со n децимали.
(ii) Ниту еден десетократен остаток не се дели со b. Тогаш постапката на делење нема крај. Но сите остатоци r_i се природни броеви помали од b, b е конечен број, а чекори (постапки) има безброј, што значи по извесен број чекори, најмногу b чекори, ќе мора да се повтори некој остаток. Но ако се повтори остатокот, бидејќи секогаш делиме со еден ист број b, ќе мора да се повтори и количникот. Така, на пример, нека по k постапки (чекори) се повтори i - тиот количник и i - тиот остаток т.е. повторно се појави c_i и r_i. Тогаш, ќе мора да се повторат сите количници од c_i до c_k и соодветно остатоците од r_i до r_k т.е. цела една група на количници и остатоци, бидејќи всушност се повторува истото делење. И се ќе се повтори уште еднаш, па уште еднаш итн. Така групата $c_ic_{i+1}\ldots c_k$ ќе се **повторува бескрајно и периодично**, а бидејќи делењето нема крај добиваме

$$\frac{a}{b} = c, c_1c_2c_3\ldots c_ic_{i+1}c_{i+2}\ldots c_kc_ic_{i+1}c_{i+2}\ldots c_kc_ic_{i+1}c_{i+2}\ldots c_k\ldots \tag{7}$$

и пишуваме $\frac{a}{b} = c, c_1c_2\ldots c_{i-1}(c_ic_{i+1}c_{i+2}\ldots c_k)$

Ваква дропка (децимален број) се нарекува **бесконечно-периодична** со период $c_i c_{i+1} c_{i+2} \dots c_k$ и одговара на децималниот број $\frac{a}{b}$, ако делењето нема крај. Од (6) и (7) следува следното основно својство во аритметиката т.е.:

15.1. Секој рационален број $\frac{a}{b}$ е или конечен децимален број или е децимален број со бесконечен број на децимали, но така што една децимална група безброј пати периодично се повторува.

Во децималното мерење видовме дека има и други броеви, тоа се децимални броеви со безброј децимали но без периодично повторување. Таквите броеви ги викаме **ирационални**, со ознака за тоа множество $\mathbb{I}$.

Заедно, рационалните и ирационалните броеви ги даваат реалните броеви, со ознака $\mathbb{R}$.

Забелешка. Броевите со децимални записи:

$$c, c_1 c_2 \dots c_m(0) = c, c_1 c_2 \dots c_m 000 \dots$$

и

$$c, c_1 c_2 \dots c_{m-1} \overline{c_m - 1}(9) = c, c_1 c_2 \dots c_{m-1} \overline{c_m - 1} 999 \dots$$

$$(c_m > 0)$$

ќе ги сметаме за еднакви меѓу себе и еднакви на рационалниот број $c, c_1 c_2 \dots c_m$. Во книгата ќе го користиме само последното запишување.

Така

$$1,235000 \dots = 1,235(0) = 1,2349999 \dots = 1,234(9) = 1,235$$

Да резимираме:

При децимално мерење на отсечката OM со единечната отсечка PQ, можни беа следните три случаи:

(i) $\overline{OM}$ има вид на конечна десетична дропка (конечен децимален број) т.е. е рационален број.

(ii) $\overline{OM}$ има вид на бесконечна периодична десетична дропка (бесконечен периодичен децимален број) т.е. повторно е рационален број.

(iii) $\overline{OM}$ има вид на бесконечна непериодична десетична дропка (бесконечен непериодичне децимален број) т.е. е ирационален број.

Во случаите (i) и (ii) велиме дека OM и PQ се **сомерливи отсечки**, а во случајот (iii), OM и PQ се **несомерливи отсечки**.

Општо, за две отсечки AB и CD важи дека се **сомерливи отсечки** ако односот од нивните должини, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ претставува рационален број;

Ако пак, односот $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ е ирационален број, тогаш велиме дека AB и CD се **несомерливи отсечки**.

1.17 Подредување во $\mathbb{R}$

Нека реалните броеви $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ и $b = b_0, b_1 b_2 \dots a_n \dots$ определени со бесконечни десетични дропки (децимални броеви), немаат период 9. Велиме дека a и b се **еднакви** и пишуваме $a = b$ ако и само ако $a_k = b_k$, за секој $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

За позитивните реални броеви $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ и $b = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ кои немаат период 9, велиме дека a **е помал** од b (b **е поголем** од a) и пишуваме $a < b$ ($b > a$) ако и само ако $a_0 < b_0$, или ако постои индекс n така што $a_k = b_k$, за сите k, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, но $a_{n+1} < b_{n+1}$.

Ако $a, b \in \mathbb{R}$ се такви што $a < 0, b > 0$, тогаш по дефиниција $a < b$.

Ако $a, b \in \mathbb{R}$ се такви што $a < 0, b < 0$ и $-b < -a$, тогаш, по дефиниција $a < b$. Се проверува дека вака дефинираното подредување е согласно со подредувањето во $\mathbb{Q}$.

Како и досега, $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$

Пример 1. $3,1234567896 \dots > 3,1234567887 \dots$

Релациите "$=$", "$<$", "$\leq$" ги имаат следните својства:

17.1^0 За $a, b, c \in \mathbb{R}$, точни се следните својства:

(i) $a = b,\ b = c \Rightarrow a = c$

(ii) $a < b,\ b < c \Rightarrow a < c$

(iii) $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(iv) За $a, b \in \mathbb{R}$ точен е само еден од условите

$$a < b, a = b, a > b.$$

Релацијата "$\leq$" е подредување во $\mathbb{R}$ и тоа линеарно подредување.

17.2^0 **(аксиома на Архимед)**

За секој реален број $a \in \mathbb{R}$, постои природен број $n \in \mathbb{N}$ таков што $n > a$.

Доказ.

(i) Ако $a \leq 0, a \in \mathbb{R}$, тогаш $n = 1$ е првиот таков број.

(ii) Ако $a > 0, a \in \mathbb{R}$, и $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ е неговиот децимален запис, тогаш $n = a_0 + 1$ е еден таков.

1.18 Операции во $\mathbb{R}$ и некои својства на операциите во $\mathbb{R}$

Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и нека $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ и $b = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ се нивните децимални записи. Нека $\underline{x_n}, \underline{y_n}$ се долните рационални приближувања на a и b, соодветно, а $\overline{x_n}, \overline{y_n}$ се горните рационални приближувања на a и b соодветно. За реалниот број c велиме дека е **збир** на броевите a и b, ако за секој $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$\underline{x_n} + \underline{y_n} \ \leq \ c \ \leq \ \overline{x_n} + \overline{y_n}$$

Пишуваме $c = a + b$.

18.1^0. За $a, b \in \mathbb{R}$ со долни и горни приближувања $\underline{x_n}$ и $\underline{y_n}$ и $\overline{x_n}$ и $\overline{y_n}$, $n \in \mathbb{N}$, соодветно, точно е дека

$$c = a + b = sup\{\underline{x_n} + \underline{y_n} | n \in \mathbb{N}\} = inf\{\overline{x_n} + \overline{y_n} | n \in \mathbb{N}\}$$

Нека a, b се ненегативни реални броеви со долни и горни приближувања $\underline{x_n}$ и $\underline{y_n}$ и $\overline{x_n}$ и $\overline{y_n}$, $n \in \mathbb{N}$, соодветно. За бројот d велиме дека е **производ** на броевите a и b, ако за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $\underline{x_n} \cdot \underline{y_n} \leq d \leq \overline{x_n} \cdot \overline{y_n}$.

Пишуваме $d = a \cdot b$.

Притоа, дефинираме $(-a)b = a(-b) = -ab$ и $(-a)(-b) = ab$, за $a, b > 0$.

18.2^0 За $a, b \in \mathbb{R}$ со долни и горни приближувања $\underline{x_n}$ и $\underline{y_n}$ и $\overline{x_n}$ и $\overline{y_n}$, $n \in \mathbb{N}$, соодветно точно е дека

$$d = a \cdot b = sup\{\underline{x_n} \cdot \underline{y_n} | n \in \mathbb{N}\} = inf\{\overline{x_n} \cdot \overline{y_n} | n \in \mathbb{N}\}$$

Разлика и **количник** на два реални броја се дефинираат преку **збир** и **производ** на реални броеви соодветно. Како и досега, разликата $x = a - b$ на $a, b \in \mathbb{R}$ се дефинира со

$$x = a - b \Leftrightarrow a = b + x$$

Количникот $y = \dfrac{a}{b}$ на $a, b \in \mathbb{R}$ се дефинира со

$$y = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = b \cdot y.$$

За даден рационален број x, $x \neq 0$, бројот $\dfrac{1}{x}$ се нарекува **реципрочен** на x или **инверзен** на x и се запишува со x^{-1} т.е. $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

Нека a е реален број, $a \neq 0$ со долни и горни приближувања $\underline{x_n}$ и $\overline{x_n}$ соодветно.

За реалниот број a' велиме дека е **инверзен** на бројот a ако за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\underline{x_n}^{-1} \leq a' \leq \overline{x_n}^{-1}$$

Заради

$$\underline{x_n} \leq a \leq \overline{x_n}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\underline{x_n}^{-1} \leq a' \leq \overline{x_n}^{-1}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

имаме

$$\underline{x_n} \cdot \underline{x_n}^{-1} \leq a \cdot a' \leq \overline{x_n} \cdot \overline{x_n}^{-1}, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{т.е.}$$

$$1 \leq a \cdot a' \leq 1, \quad \text{па} \qquad a \cdot a' = 1$$

Во продолжение ќе пишуваме $a' = a^{-1} \left(= \dfrac{1}{a}\right)$.

Го докажавме следното својство.

18.3^0 За $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, точно е дека $a \cdot a^{-1} = 1$.

Во продолжение, без доказ ќе наведеме некои својства што се однесуваат на операциите во $\mathbb{R}$ и подредувањето во $\mathbb{R}$.

Нека $a, b, c \in \mathbb{R}$. Точни се следните својства:

18.4^0 (комутативност на "$+$" и "$\cdot$" во $\mathbb{R}$)

(i) $a + b = b + a$

(ii) $a \cdot b = b \cdot a$

18.5^0 (асоцијативност на "$+$" и "$\cdot$" во $\mathbb{R}$)

(i) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

18.6^0 (неутрален елемент за "$+$" и "$\cdot$" во $\mathbb{R}$)

(i) $a + 0 = a$

(ii) $a \cdot 1 = a$

18.7^0 (инверзен елемент за $a \in \mathbb{R}$ во однос на "$+$" и "$\cdot$" т.е. спротивен и реципрочен за $a \in \mathbb{R}$)

(i) $a + (-a) = 0$

(ii) $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$

За $a, b \in \mathbb{R}$, $a - b = a + (-b)$, а при $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} = a \cdot \dfrac{1}{b}$.

18.8^0 (Дистрибутивност на "$\cdot$" во однос на "$+$")

(i) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

18.9^0 (Закон за кратење за "$+$" и "$\cdot$" во $\mathbb{R}$)

(i) $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b, \ c \in \mathbb{R}$

(ii) $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b, \ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$18.10^0 (i) a > b, \ \Leftrightarrow a + c > b + c, \ \forall c \in \mathbb{R}$

$(ii) a > b, \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c, \ \forall c \in \mathbb{R}^+$

$(ii) a > b, \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c, \ \forall c \in \mathbb{R}^-$

18.11^0 $a, b \in \mathbb{R}, \ \ a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

Степенувањето на реален број $a \in \mathbb{R}$ со експонент цел број $n \in \mathbb{Z}$ се дефинира како и досега т.е.:

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n-\text{пати}}$$

$$a^{-n} = (\frac{1}{a})^n \ \ \big(= (a^{-1})^n\big), \ \text{ за } \ n \in \mathbb{N}, \text{ и } \ a \neq 0$$

За $m, n \in \mathbb{Z}$ и $a, b \in \mathbb{R}$ точни се следните својства:

18.12^0 (i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(ii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

(iii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

(iv) Ако $a \geq 1, b \geq 1$, тогаш од $a^m \leq b^m$ следува дека $a \leq b$ за секој $m \in \mathbb{N}$

18.13^0 Нека a е даден позитивен реален број, а n е даден природен број. Тогаш постои еден и само еден позитивен реален број x таков што $x^n = a$.

Бројот x се нарекува **n-ти корен од** a, и пишуваме $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Значи, $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x^n = a$

Ако $a < 0$ и n е непарен број, тогаш $\sqrt[n]{a}$ постои.

Во продолжение ќе дефинираме степен на реален број со рационален експонент.

Нека $a \in \mathbb{R}^+$, $k, n \in \mathbb{N}$. Дефинираме:

$$a^{\frac{k}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^k \quad \text{и} \quad a^{-\frac{k}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{k}{n}}$$

Точни се следните својства:

18.14^0 За секои $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ важи:

(i) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(ii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, при $b \neq 0$

18.15^0 Нека $n \in \mathbb{N}$.

(i) ако $a > 1$, тогаш $\sqrt[n]{a} > 1$

(ii) ако $0 < a < 1$, тогаш $0 < \sqrt[n]{a} < 1$

Последица од 18.15^0. Нека $r \in \mathbb{Q}$.

(i) ако $a > 1$, $r > 0$, тогаш $a^r > 1$.

(ii) ако $0 < a < 1$, $r > 0$, тогаш $0 < a^r < 1$.

(i) ако $a > 1$, $r < 0$, тогаш $0 < a^r < 1$.

(iv) ако $0 < a < 1$, $r < 0$, тогаш $a^r > 1$.

18.16^0 Ако $p, q \in \mathbb{Q}^+$, $p < q$ тогаш:

(i) $x \geq 1 \Rightarrow x^p \leq x^q$

(ii) $0 < x < 1 \Rightarrow x^p > x^q$

(iii) $x, y \geq 0$, $x^p = y^p \Leftrightarrow x = y$

(iv) $x > 0$, $x^p = x^q \Leftrightarrow p = q$

1.19 Њутнова Биномна формула

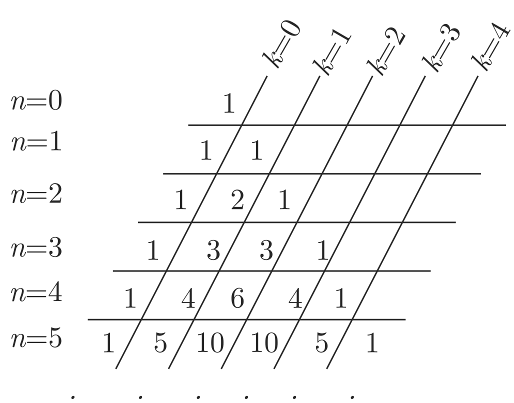
Важна низа во теоријата и праксата е низата чиишто општ член е n-ти степен од збирот на два броја, a и b т.е. низата

$$\{a_n\}, a_n = (a+b)^n$$

Членовите на оваа низа можеме да ги запишеме во развиена форма, на следениов начин:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\
(a+b)^6 &= (a+b)^5(a+b) = \dots
\end{aligned}$$

Коефициентите пред мономите $a^k b^j$ можеме да ги напишеме во вид на шема:

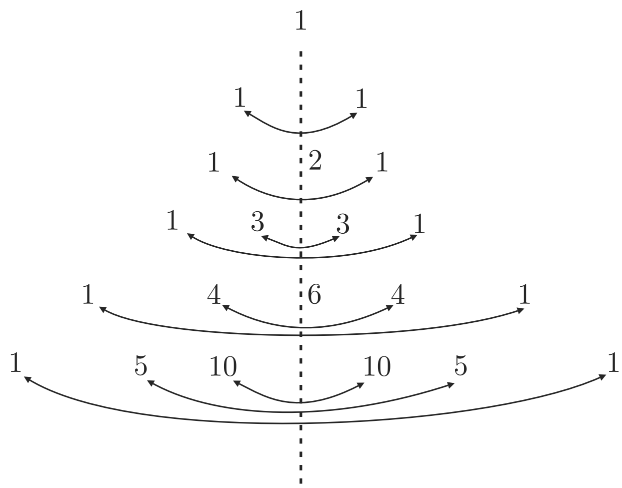


Оваа шема се вика **Паскалов триаголник**.

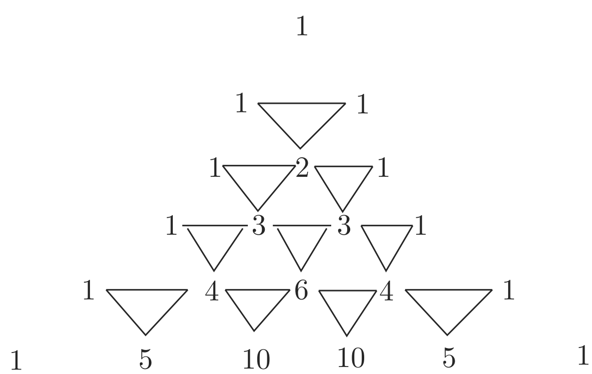
Ако ја проучиме оваа шема може да ги констатираме следните две особини:

I **Симетрија во однос на висината кон основата**

Во секој ред првиот и последниот коефициент се исти, второт и претпоследниот се исти, третиот од почетокот и третиот од крајот се исти и.т.н...



II **Збирот на два соседни коефициенти од ист ред е еднаков на коефициент од следниот ред.**



Природно се поставува прашањето дали има правило според кое секој од овие коефициенти може да се изрази со помош на степенот n на биномот $(a+b)^n$ и местото k на тој коефициент во развојот на мономите $a^{n-k}b^k,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n$. За првите неколку природни броеви забележуваме дека е точно следното:

Во $(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$; $1 = 1$; $1 = \dfrac{1}{1}$.

Во $(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$; $1 = 1$; $2 = \dfrac{2}{1}$; $1 = \dfrac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}$.

Во $(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$; $1 = 1$; $3 = \dfrac{3}{1}$; $1 = \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}$; $1 = \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

$$\text{Во } \left(a+b\right)^4 = 1\cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\cdot b^4$$

$$1 = 1;\ \ 4 = \frac{4}{1};\ \ 6 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2};\ \ 4 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3};\ \ 1 = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$n = 4 \qquad k = 0 \quad k = 1 \quad k = 2 \qquad k = 3 \qquad k = 4$$

$$4 = \frac{n}{k};\ 6 = \frac{n\left(n-1\right)}{1\cdot 2}; \qquad 4 = \frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Интуитивно насетуваме (се разбира дека тоа не е доказ), дека во n-тиот степен на $(a+b)$ т.е. во $(a+b)^n$ на k-тото место т.е. пред мономот $a^{n-k}b^k$ стои коефициентот

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot k}$$

Ова ќе го докажеме подоцна.

Дефинираме ознака за биномен коефициент, $\binom{n}{k}$, со

$$\binom{n}{k} \overset{df}{=} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot k}, \text{ за } k = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{и } \binom{n}{0} \overset{df}{=} 1$$

Од дефиницијата е јасно дека

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} = 1 \text{ т.е. } \binom{n}{n} = 1$$

Користејќи ја ознаката $n!$, за производот на првите n природни броеви т.е. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$ и $0! = 1$, ќе докажеме дека

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k} =$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots(k+1)k\dots 2\cdot 1}{k!(n-k)!} =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ т.е. докажавме дека } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Забележуваме дека за $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ важи симетријата I што ја воочивме во Паскаловиот триаголник, односно точно е :

За $n=1$ $\binom{1}{0}=\binom{1}{1}$

За $n=2$ $\binom{2}{0}=\binom{2}{2}$

За $n=3$ $\binom{3}{0}=\binom{3}{3}$; $\binom{3}{1}=\binom{3}{2}$

За $n=4$ $\binom{4}{0}=\binom{4}{4}$; $\binom{4}{1}=\binom{4}{3}$

За $n=5$ $\binom{5}{0}=\binom{5}{5}$; $\binom{5}{1}=\binom{5}{4}$; $\binom{5}{2}=\binom{5}{3}$
итн.

Следново својство докажува дека оваа особина на биномните коефициенти важи и во општ случај.

19.1^0 (Симетричност на биномните коефициенти)

За $n\in\mathbb{N},\ k\in\{0,1,\ldots,n\}$ важи $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Доказ.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\ldots(k+1)k(k-1)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\ldots k\cdot(n-k)!}=$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{(n-k)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-k)+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-k)}\overset{df}{=}\binom{n}{n-k}$$

Докажавме дека $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ за $n\in\mathbb{N},\ k\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Во II забележавме дека

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}=\binom{5}{1}$$

$$\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=\binom{6}{2}$$

итн.

Следново својство докажува дека оваа особина на биномните коефициенти важи и во опст случај.

19.2 (адитивност на биномните коефициенти).

За $n\in\mathbb{N},\ k\in\{0,1,\ldots,n\}$, важи $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Доказ.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\overset{df}{=}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots k}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-(k+1)+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots k(k+1)}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots k}+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)}{1\cdot 2\cdot\ldots k\cdot(k+1)}=$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k}\left[1+\frac{n-k}{k+1}\right]=$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k}\cdot\frac{k+1+n-k}{k+1}=$$
$$=\frac{(n+1)n(n-1)\dots((n+1)-(k+1)+1)}{1\cdot 2\dots k\cdot(k+1)}\overset{df}{=}\binom{n+1}{k+1}.$$

На крај, ќе го дадеме законот според кој се прави развивањето на биномот $(a+b)^n$ во општ случај т.е. она што интуитивно го насетувавме.

19.3^0 (**Њутнова биномна формула**)

За секој природен број $n\in\mathbb{N}$, важи:

$$(a+b)^n=\tbinom{n}{0}a^n+\tbinom{n}{1}a^{n-1}b+\tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2+\tbinom{n}{3}a^{n-3}b^3+\dots$$
$$\dots+\tbinom{n}{k}a^{n-k}b^k+\dots+\tbinom{n}{n}b^n$$

Доказ. Доказот ќе го спроведеме со индукција по n.

За $n=1$ имаме $(a+b)^1=1\cdot a+1\cdot b=\binom{1}{0}a^1+\binom{1}{1}b^1$

Нека формулата важи за некој $n\in\mathbb{N}$. Ќе докажеме дека важи и за $n+1$.

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)^n(a+b)=\left[\tbinom{n}{0}a^n+\tbinom{n}{1}a^{n-1}b+\right.$$
$$+\tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\tbinom{n}{k}a^{n-k}b^k+\tbinom{n}{k+1}a^{n-k-1}b^{k+1}+\dots$$
$$\left.\dots+\tbinom{n}{n}b^n\right](a+b)=$$
$$\tbinom{n}{0}a^{n+1}+\tbinom{n}{1}a^nb+\tbinom{n}{2}a^{n-1}b^2+\dots+\tbinom{n}{k}a^{n-k+1}b^k+$$
$$\tbinom{n}{k+1}a^{n-k}b^{k+1}+\dots+\tbinom{n}{n}ab^n+\tbinom{n}{0}a^nb+\tbinom{n}{1}a^{n-1}b^2+\dots$$
$$\dots+\tbinom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}+\dots+\tbinom{n}{n}b^{n+1}=$$
$$=\tbinom{n}{0}a^{n+1}+\left[\tbinom{n}{0}+\tbinom{n}{1}\right]a^nb+\left[\tbinom{n}{1}+\tbinom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2+\dots$$
$$\dots+\left[\tbinom{n}{k}+\tbinom{n}{k+1}\right]a^{n-k}b^{k+1}+\dots+\tbinom{n}{n}b^{n+1}=$$

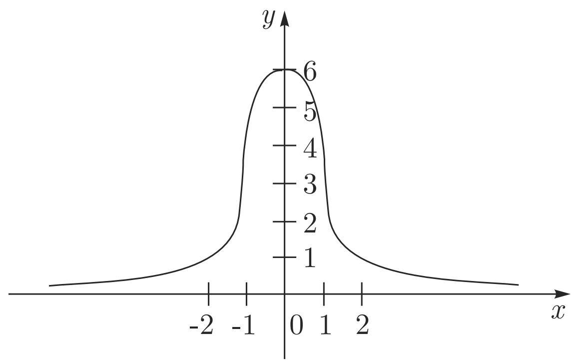
$$\overset{(19.1^0\text{и}19.2^0)}{=}\tbinom{n+1}{0}a^{n+1}+\tbinom{n+1}{1}a^{n+1-1}b+\tbinom{n+1}{2}a^{n+1-2}b^2+\dots$$
$$\dots+\tbinom{n+1}{k+1}a^{n+1-(k+1)}b^{k+1}+\tbinom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$$

Њутнова биномна формула ја запишуваме кратко:

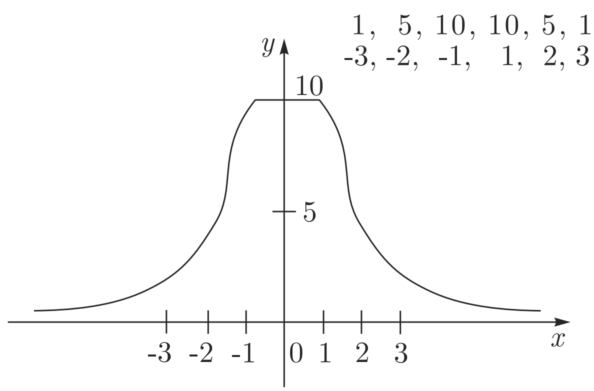
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Биномна крива: Коефициентите на $(a+b)^n$ може да се претстават во координатната рамнина со точки чии апсциси се:

$\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ а ординатите се самите биномни коефициенти. За $n = 4$, биномни коефициенти се: $1, 4, 6, 4, 1$ и за нив требаат 5 апсциси: $-2, -1, 0, 1, 2$. Имаме 5 точки: $(-2, 1), (-1, 4), (0, 6), (1, 4), (2, 1)$



Овие точки лежат на таканаречената **биномна крива**. За $n = 5$, имаме:



1.20 Својство на густина на реалните броеви

20.1^0 Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Тогаш

(i) Постои реален број $x \in \mathbb{R}$ таков што $a < x < b$.
(ii) Постои рационален број $r \in \mathbb{Q}$ таков што $a < r < b$.

Доказ. (i) Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

Тогаш $2a = a + a < a + b$ и $2b = b + b > a + b$, па $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. Значи, $x = \dfrac{a+b}{2} \in \mathbb{R}$ е еден таков број.
(ii) Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Ништо не губиме од општоста ако претпоставиме дека $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Нека $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ и $b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ се соодветно децималните записи на a и b, при што бројот 9 не се јавува како период во ниеден од нив. Нека $\overline{x_n}$ е горното рационално приближување на a, а $\underline{y_n}$ е долното рационално приближување на b.

Од $a < b$, имаме дека постои $n \in \mathbb{N}$, така што $a_i = b_i$, за $0 \le i \le n-1$ и $a_n < b_n$ т.е. $b_n - a_n > 0$. Уште повеќе, $b_n - a_n \ge 1$, бидејќи $b_n, a_n \in \mathbb{N}$. Имаме:

$$\begin{aligned}
&\underline{y_n} - \overline{x_n} = b_0 + \frac{b_1}{10} + \dots \frac{b_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{b_n}{10^n} - \\
&- \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}\right) = \\
&= b_0 - a_0 + \frac{b_1 - a_1}{10} + \dots + \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{b_n - a_n}{10^n} - \frac{1}{10^n} = \\
&= 0 + 0 + \dots + 0 + \frac{b_n - a_n}{10^n} - \frac{1}{10^n} \ge 0.
\end{aligned}$$

Докажавме, дека $\underline{y_n} - \overline{x_n} \ge 0$ т.е. $\overline{x_n} \le \underline{y_n}$, за $n \in \mathbb{N}$ определено како погоре. Од последното и $a < \overline{x_n}$, $\underline{y_n} < b$, добивме дека $a < \overline{x_n} \le \underline{y_n} < b$. Бидејќи $\overline{x_n}, \underline{y_n} \in \mathbb{Q}$, следува дека постои $r \in \mathbb{Q}$ ($r = \overline{x_n}$ или $r = \underline{y_n}$, а постојат и други $r \in \mathbb{Q}$, $\overline{x_n} < r < \underline{y_n}$) така што $a < r < b$.

1.21 Неравенство на Бернули

21.1^0 За секој $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$ и за секој природен број $n \in \mathbb{N}$, важи $(1+a)^n \ge 1 + na$.

Доказ. Доказот ќе го спроведеме со ПМИ по n.
За $n = 1$, $(1+a)^1 = 1 + a = 1 + 1 \cdot a$.
Нека неравенството е точно за $n \in \mathbb{N}$ т.е. $(1+a)^n \ge 1 + na$.
За $n+1$, имаме
$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \ge (1+na)(1+a) =$
$= 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \ge 1 + (n+1)a$ т.е.

$$(1+a)^{n+1} \ge 1 + (n+1)a.$$

1.22 Апсолутна вредност. Интервал. Околина

Дефиниција 1. За даден број $a \in \mathbb{R}$, **апсолутна вредност** на a, со ознака $|a|$, е дефинирана со:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Од дефиницијата произлегува дека $|a| \ge 0$, за секој број $a \in \mathbb{R}$. Важат следните својства:

22.1^0 а) За секој $a \in \mathbb{R}$, $|-a| = |a|$.

б) За секои, $a, b \in \mathbb{R}$ $|a|^2 = a^2$, $|ab| = |a| \cdot |b|$ и
$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ (при $b \neq 0$).

в) За секој $c > 0$, $|a| < c$ е еквивалентно со $-c < a < c$.

г) За секој $c > 0$, $|a| > c$ е еквивалентно со $a > c$ или $a < -c$.

д) За секои $a, b \in \mathbb{R}$ важи $|a + b| \leq |a| + |b|$.

ѓ) За секои $a, b \in \mathbb{R}$, важи $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

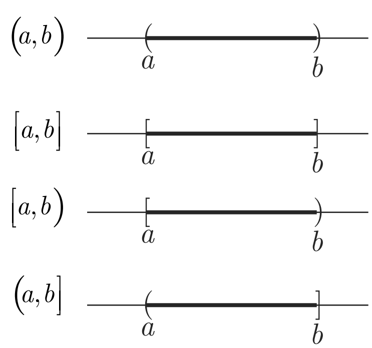
Отворен интервал, со ознака (a, b), е множеството $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

Затворен интервал (или **сегмент**), со ознака $[a, b]$, е множеството $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

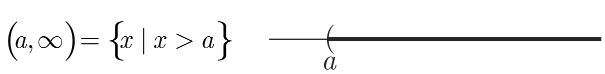
Множеството $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ е **полузатворен (полуотворен) интервал**.

Множеството $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ е исто така **полузатворен (полуотворен) интервал**.

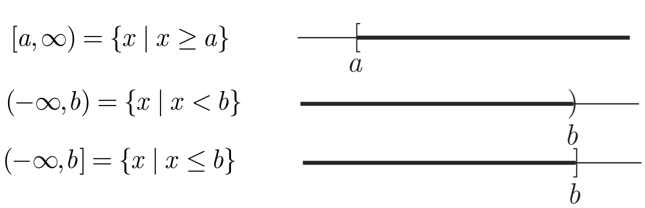
Точките a и b се нарекуваат **краеви** или **крајни точки** на интервалот. Геометриски, овие интервали ги прикажуваме на следниов начин



Множеството од сите реални броеви x, такви што $x > a$ се означува со (a, ∞) т.е.



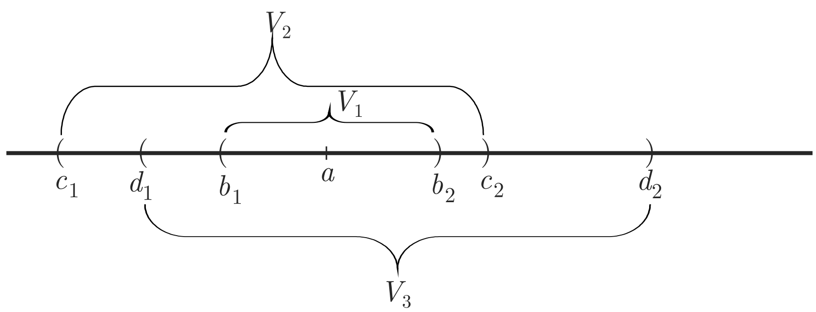
Слично,



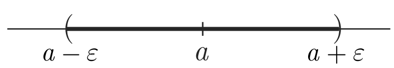
Овие интервали се нарекуваат **бесконечни**.

Дефиниција 2. **Околина** на бројот a е секој отворен интервал што го содржи бројот a.

Така, $V_1 = (b_1, b_2)\,, V_2 = (c_1, c_2)\,, V_3 = (d_1, d_2)$ се околини на бројот a.



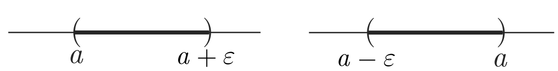
Дефиниција 3. Нека $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Отворениот интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ се нарекува ε**-околина** на a.



Значи, ε-околина на a е отворен интервал со центар во a и широчина 2ε.

Десна ε**-околина** на a е отворениот интервал $(a, a+\varepsilon)$.

Лева ε**-околина** на a е отворениот интервал $(a-\varepsilon, a)$.



десна околина лева околина

22.2^0 Бројот x припаѓа на ε-околина ($\varepsilon > 0$) на бројот $a \in \mathbb{R}$, ако и само ако $|x-a| < \varepsilon$.

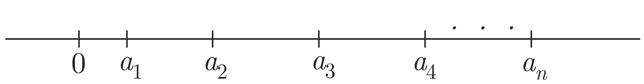
Доказ. x припаѓа на ε-околина на $a \Leftrightarrow x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Leftrightarrow a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon-a < x-a < a+\varepsilon-a \Leftrightarrow -\varepsilon < x-a < \varepsilon \overset{23.1^0\text{в})}{\Leftrightarrow} |x-a| < \varepsilon$.

1.23 Низи од реални броеви. Монотони низи. Ограничени низи

Секое пресликување од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{R}$ дефинира низа, наречена **низа од реални броеви** или **реална низа**.

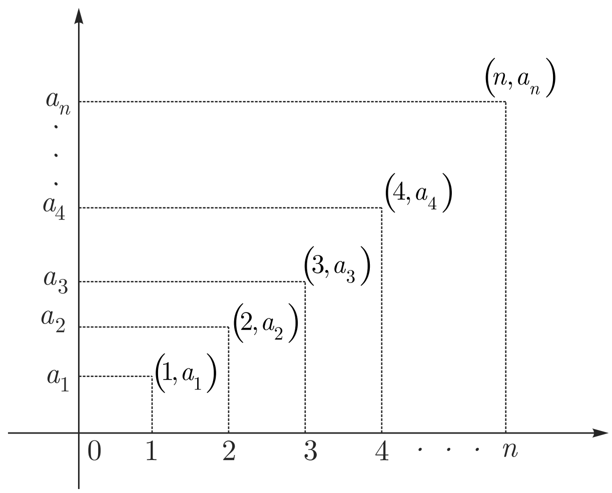
Геометриски низите може да ги претставиме на два начина:

I Како множество точки на бројната права т.е.



или

II Како точки од рамнината, при што x-оската ја земаме како оска на природните броеви, а y-оската како оска на членовите од низата.



Дефиниција 1. Низата $\{a_n\}$ се вика **монотона** ако за секој $n \in \mathbb{N}$, важи само едно од неравенствата:

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ или } a_n \geq a_{n+1}.$$

При тоа:

(1) Низата $\{a_n\}$ **(строго) монотоно расте** ако важи $a_n < a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

(2) Низата $\{a_n\}$ **(нестрого) монотоно расте** (или не опаѓа) ако важи $a_n \leq a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

(3) Низата $\{a_n\}$ **(строго) монотоно опаѓа**, ако важи

$$a_n > a_{n+1}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}$$

(4) Низата $\{a_n\}$ **(нестрого) монотоно опаѓа** (или не расте), ако важи $a_n \geq a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Проверка на монотоноста се сведува на докажување на неравенства.

Пример 1. Докажи дека низата $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1}{n}$ строго монотоно опаѓа.

Решение.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \text{ за секој } n \in \mathbb{N} \text{ т.е.}$$

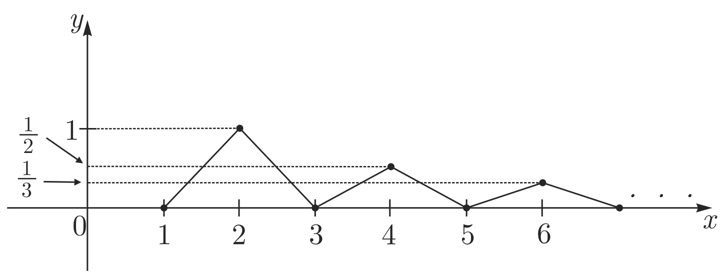
$a_n > a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Пример 2. Докажи дека низата $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$ строго монотоно опаѓа.

Решение.
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n-1} > \frac{2n-1}{2n-1} = 1, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$
Од $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ и $a_n > 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$, добваме дека $a_n > a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$ што значи дека низата строго монотоно опаѓа.

Има многу низи, коишто не се монотони.

Пример 3. Низата $\{a_n\}$ со општ член $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$ не е монотона. (Воочи дека $\{a_n\}:\ 0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \ldots$).



Дефиниција 2. Низата $\{a_n\}$ е **ограничена** ако постојат реални броеви m и M такви што $m \leq a_n \leq M$, за секој $n \in \mathbb{N}$.
Почесто за ограниченост на низи ја користиме следната еквивалентна дефиниција.
Дефиниција $2'$. Низата $\{a_n\}$ е **ограничена**, ако апсолутната вредност од секој нејзин член е помала од некој позитивен реален број k т.е. ако постои $k > 0$ така што
$$|a_n| \leq k, \quad \text{за секој} \quad n \in \mathbb{N}$$

Пример 4. Докажи дека низата $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1}{n}$ е ограничена.

Решение. Од $n > 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$, добиваме дека $a_n = \dfrac{1}{n} > 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Од $n \geq 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$, добиваме дека $a_n = \dfrac{1}{n} \leq 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Заклучуваме дека $0 < a_n \leq 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$, па значи $\{a_n\}$ е ограничена низа.
Забелешка. Ако постои $M \in \mathbb{R}$, таков што $a_n \leq M$, за секој $n \in \mathbb{N}$, велиме дека низата $\{a_n\}$ е **ограничена од горе (десно)**.

Ако постои $m \in \mathbb{R}$, таков што $a_n \geq m$, за секој $n \in \mathbb{N}$, велиме низата $\{a_n\}$ е **ограничена од долу (лево)**.

Значи низата е ограничена ако е ограничена од горе и ограничена од долу.

Пример 5. Докажи дека низата $\{a_n\}$, $a_n = n + \dfrac{1}{n}$ е ограничена од долу и не е ограничена од горе.

Решение. За секој $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n + \dfrac{1}{n} > 0$, па значи низата $\{a_n\}$ е ограничена од долу.

Нека M е произволно избран реален број. Од Архимедовото својство следува дека постои природен број $n_0 \in \mathbb{N}$, така што важи $n_0 > M$. Тогаш $a_{n_0} = n_0 + \dfrac{1}{n_0} > n_0 > M$. Докажавме, дека за секој реален број M, постои член на низата $\{a_n\}$, a_{n_0}, таков што $a_{n_0} > M$ односно дека не постои реален број M, таков што $a_n \leq M$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Значи, $\{a_n\}$ не е ограничена од горе.

Дефиниција 3. Ако $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$ се реални низи, дефинираме:

(i) **збир**, $A + B$, со $A + B = \{a_n + b_n\}$;

(ii) **разлика**, $A - B$, со $A - B = \{a_n - b_n\}$;

(iii) **производ**, $A \cdot B$, со $A \cdot B = \{a_n \cdot b_n\}$;

(iv) За $\lambda \in \mathbb{R}$, λA, со $\lambda A = \{\lambda a_n\}$;

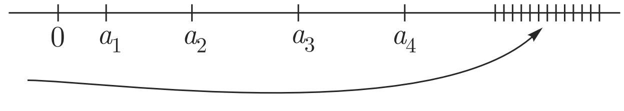
(v) Ако $b_n \neq 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$, **количник**, $\dfrac{A}{B}$, со $\dfrac{A}{B} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$.

Пример 6. Ако $A = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $B = \{n^2\}$, тогаш

$A + B = \left\{\dfrac{1}{n} + n^2\right\}$, $A - B = \left\{\dfrac{1}{n} - n^2\right\}$, $A \cdot B = \{n\}$, $3A = \left\{\dfrac{3}{n}\right\}$, $\dfrac{A}{B} = \left\{\dfrac{1}{n^3}\right\}$.

1.24 Точка на натрупување на низи

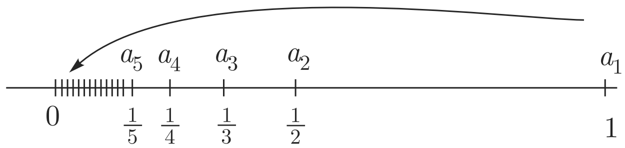
Нека е дадена една низа $\{a_n\}$. Ако членовите на низата ги разгледуваме како точки од бројна права, тогаш измената на членовите на низата по ред од првиот, вториот и сите следователни членови може да се разбере како движење на точките по бројната права т.е.



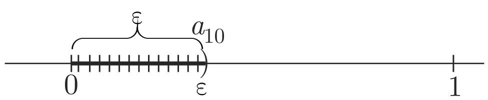
Притоа, може да настане една карактеристична појава при која скоро сите членови од низата се наоѓаат во еден мал интервал.

Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. Да ја разгледаме $\{a_n\}$, каде $a_n = \dfrac{1}{n}$, и да претставиме на бројна права неколку нејзини почетни членови.

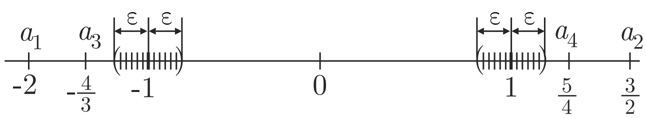


Можеме да забележиме дека точките кои одговараат на овие членови од низата се движат од 1, монотоно опаѓајќи кон нулата, која не е член на низата. Ако земеме ε, на пример $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, во ε-околината на 0 т.е. интервалот $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ќе се најдат членовите $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$, и нив ги има бесконечно многу.



Надвор од оваа ε-околина има 10 членови. Во овој случај велиме дека низата се натрупува околу точката $a = 0$.

Пример 2. Дадена е низата $\{a_n\}$, со општ член $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$ т.е. низата $-2,\ \dfrac{3}{2},\ -\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{4},\ \ldots$



Се воочува дека членовите со парен индекс се наоѓаат десно од 1, а членовите со непарен индекс лево од -1. И во двете ε-околини (за било какво $\varepsilon > 0$), $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ на $a = 1$ и $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ на $b = -1$ има бесконечно многу членови на низата, но и надвор од нив има бесконечно многу членови на низата.

Значи, низата се натрупува околу две точки, $a = 1$ и $b = -1$.

Дефиниција 1. Точката $a \in \mathbb{R}$ се вика **точка на натрупување** (или **адхерентна точка**) за низата $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$ ако во секоја нејзина ε-околина се наоѓаат бесконечно многу членови од низата т.е. ако за секое $\varepsilon > 0$, важи $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, за бесконечно многу $n \in \mathbb{N}$ т.е. $|a_n - a| < \varepsilon$, за бесконечно многу $n \in \mathbb{N}$.

Во примерите 1 и 2, со помош на графичко претставување на низа, воочивме точки на натрупување за дадените низи. Во ниеден од нив немаше математички доказ. Во следниот пример ќе илустрираме, како математички се докажува дека некоја точка е навистина точка на натрупување на дадената низа.

Пример 3. Нека низата $\{a_n\}$ е зададена со општиот член $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$. Ќе покажеме дека $a = 1$ и $b = -1$ се точки на натрупување на $\{a_n\}$.

Решение. Низата е: $-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ -\dfrac{5}{6},\ \dfrac{6}{7},\ \ldots$.
Прво да ги разгледаме членовите на низата со парни индекси. Тоа се: $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{6}{7},\ldots$, т.е. од обликот $a_{2k} = \dfrac{2k}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.
Имаме $|a_{2k}-1| = \Big|\dfrac{2k}{2k+1} - 1\Big| = \Big|\dfrac{2k-2k-1}{2k+1}\Big| = \Big|\dfrac{-1}{2k+1}\Big| = \dfrac{1}{2k+1}$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен избран број. Сакаме да докажеме дека $\dfrac{1}{2k+1} < \varepsilon$ за бесконечно многу $k \in \mathbb{N}$, од каде ќе имаме дека $|a_{2k}-1| < \varepsilon$, за бесконечно многу $k \in \mathbb{N}$.
Точно е

$$\frac{1}{2k+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2k+1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\varepsilon} - 1\Big) < k.$$

Сега, ако $\varepsilon > 0$ е произволно избран број, $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\Big) \in \mathbb{R}$, па согласно Архимедовото својство, постои природен број $k_0 \in \mathbb{N}$, таков што $k_0 > \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\Big)$. Тогаш, за сите $k > k_0$, (а нив ги има бесконечно многу) заради погорните еквиваленции, имаме дека

$$|a_{2k}-1| = \frac{1}{2k+1} \overset{k>k_0}{<} \frac{1}{2k_0+1} < \varepsilon$$

Докажавме дека сите членови на низата $\{a_n\}$ со парни индекси $n = 2k$, за кои $k > k_0$, т.е. членовите:

$$a_{2(k_0+1)}, a_{2(k_0+2)}, \ldots, a_{2(k_0+m)}, \ldots$$

се такви што $|a_n - 1| < \varepsilon$, т.е. бесконечно многу членови од дадената низа се наоѓаат во ε-околина на 1, каде $\varepsilon > 0$ беше произволно избран број. Значи, $a = 1$ е точка на натрупување за $\{a_n\}$.

За членовите на низата со непарни индекси, добиваме: $-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{5}{6},\ldots$ т.е. од обликот $a_{2k-1} = -\dfrac{2k-1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Го разгледуваме множеството $B = \Big\{ -\dfrac{2k-1}{2k} \;\Big|\; k \in \mathbb{N}\Big\}$.
Имаме:

$$\Big| -\frac{2k-1}{2k} - (-1)\Big| = \Big|\frac{-2k+1}{2k} + 1\Big| = \Big|\frac{-2k+1+2k}{2k}\Big| = \Big|\frac{1}{2k}\Big| = \frac{1}{2k}$$

Нека сега $\varepsilon > 0$ е произволно избран број. Сакаме да докажеме дека $\dfrac{1}{2k} < \varepsilon$, за бесконечно многу $k \in \mathbb{N}$.

Бројот $\dfrac{1}{2\varepsilon} \in \mathbb{R}$, па согласно Архимедовото својство, постои природен број $k_0 \in \mathbb{N}$, таков што $k_0 > \dfrac{1}{2\varepsilon}$.

Сега, за секое $k > k_0$, добиваме

$$\Big| -\frac{2k-1}{2k} - (-1)\Big| = \frac{1}{2k} \overset{k>k_0}{<} \frac{1}{2k_0} \overset{k_0>\frac{1}{2\varepsilon}}{<} \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2\varepsilon}} = \varepsilon$$

Докажавме дека сите членови од множеството B, за кои $k > k_0$ (значи бесконечно многу од нив) се такви што $\Big| -\dfrac{2k-1}{2k} - (-1)\Big| < \varepsilon$. Бидејќи елементите на B се всушност членови на низата $\{a_n\}$, најдовме бесконечно многу членови од низата (тоа се оние со непарни индекси $n = 2k-1$, и со услов $k > k_0$) кои задоволуваат услов $|a_n - (-1)| < \varepsilon$. Од произволноста на $\varepsilon > 0$, следува дека $b = -1$ е точка на натрупување за $\{a_n\}$.

1.25 Гранична вредност на низа. Конвергенција. Дивергенција. Поднизи

Дефиниција 1. Бројот $a \in \mathbb{R}$ се вика **гранична вредност** на низата $\{a_n\}$, ако за секој ε, $\varepsilon > 0$, постои природен број $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што за сите членови на низата $\{a_n\}$ чии индекси $n > n_0$, важи $|a_n - a| < \varepsilon$.

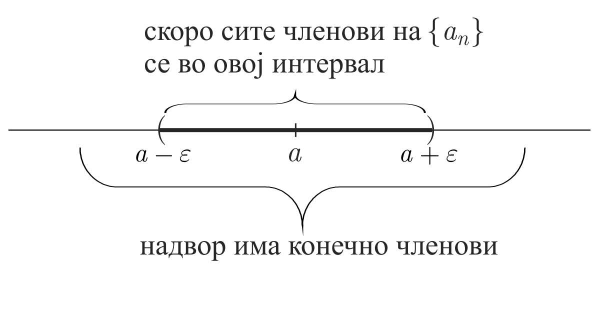
Пишуваме, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$, при $n \to \infty$.

Имајќи го предвид својството 23.2^0, Дефиницијата 1 е еквивалентна на следната дефиниција.

Дефиниција 1'. Бројот $a \in \mathbb{R}$ се вика гранична вредност на низата $\{a_n\}$, ако за секој ε, $\varepsilon > 0$, постои природен број $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што за сите членови на низата $\{a_n\}$ чии индекси $n > n_0$, важи $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Тоа значи дека една низа $\{a_n\}$ има гранична вредност $a \in \mathbb{R}$, ако за која било ε-околина на a, може да се најде природен број $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што членовите на низата: $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots, a_{n_0+m}, \dots$, коишто ги има бесконечно многу, се наоѓаат во ε-околината на a, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а само конечен број членови од низата $\{a_n\}$, имено членовите $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$, се надвор од тој интервал.

Графички:



Дефиниција 2. Низата која што има конечна гранична вредност се вика **конвергентна низа**.

Од дефиницијата на поимот гранична вредност на низа следуваат следните својства:

25.1^0 Граничната вредност на низа $\{a_n\}$, доколку постои, е единствена.

Доказ. Нека претпоставиме дека $\{a_n\}$ има две гранични вредности $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \neq b$. Тогаш или $a < b$ или $b < a$. Не губиме од општоста ако претпоставиме дека $a < b$.
Избираме $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3} > 0$
Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{3}, \quad \text{за сите } \ n > n_0.$$

Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, следува дека постои $n_1 \in \mathbb{N}$, таков што

$$|a_n - b| < \frac{b-a}{3}, \quad \text{за сите } \ n > n_1.$$

Нека $n_2 = max(n_0, n_1)$ т.е. $n_2 \geq n_0$ и $n_2 \geq n_1$. За $n > n_2$, заради својството на апсолутната вредност и ова погоре, имаме
$b - a = |b - a| = |a_n - a - a_n + b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| <$
$< \dfrac{b-a}{3} + \dfrac{b-a}{3} = \dfrac{2}{3}(b-a).$
Добивме $b - a < \dfrac{2}{3}(b-a) \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}(b-a) < 0 \Leftrightarrow b < a$, што е противречност.
Слично, се добива противречност и ако претпоставиме $b < a$. (Во тој случај, за ε ќе земеме $\dfrac{a-b}{3}$).
Заклучуваме дека граничната вредност на низа, доколку постои, мора да е единствена.
Дека 25.1^0 е точно следува и од следното размислување: ако претпоставиме дека една низа има две различни гранични вредности, a и b, тогаш во две нивни блиски околини би морало да има бесконечно многу членови од низата, а надвор од нив само конечно многу, што истовремено не е можно.

25.2^0 Граничната вредност на една низа $\{a_n\}$ е и точка на натрупување на низата.

Доказот следува директно од дефинициите.

25.3^0 Конвергентните низи имаат само една точка на натрупување.

Доказот на 25.3^0 јасно следува од 25.1^0 и 25.2^0.

25.4^0 Секоја конвергентна низа е ограничена.

Доказ. Нека $\{a_n\}$ е конвергентна низа т.е. постои $a \in \mathbb{R}$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(i) Ако $a \neq 0$, тогаш за секое $\varepsilon > 0$, па и за $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што $|a_n - a| < \dfrac{|a|}{2}$, за сите $n \geq n_0$. Од својствата на апсолутна вредност имаме

$$|a_n| - |a| \leq ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2}, \text{ за сите } n > n_0$$

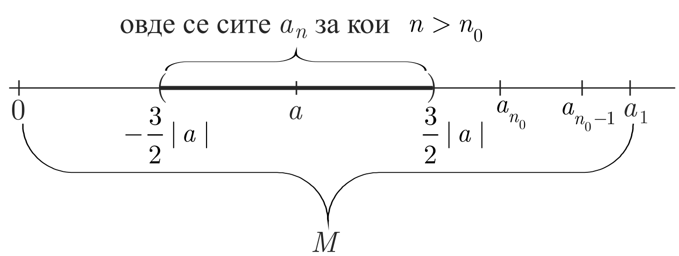
т.е.

$$|a_n| < \frac{3}{2}|a|, \text{ за сите } n > n_0.$$

Ако избереме $M = max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, \dfrac{3}{2}|a|\}$, тогаш

$$|a_n| < M, \text{ за сите } n \in \mathbb{N} \text{ т.е } \{a_n\} \text{ е ограничена.}$$

Графички



За ситуација како на горниот цртеж $M = a_1$.

(ii) Ако $a = 0$, тогаш за $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што $|a_n| < \dfrac{1}{2}$, за сите $n > n_0$. Тогаш за M избираме, $M = max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, \dfrac{1}{2}\}$ и добиваме дека $|a_n| < M$, за сите $n \in \mathbb{N}$ т.е. $\{a_n\}$ е ограничена.

Дефиниција 3. Низа која што не е конвергентна се нарекува **дивергентна** низа.

Дефиниција 4. За низата $\{a_n\}$ велиме дека се стреми кон ∞ и пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ или $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$, ако за секој $M > 0$, постои природен број $n_0 \in \mathbb{N}$, така што за сите членови на низата $\{a_n\}$ чии индекси $n > n_0$, важи $a_n > M$.

Значи, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ако за било кој $M > 0$, може да се најде природен број $n_0 \in \mathbb{N}$, така што бесконечно многу членови од низата (т.е. сите членови на низата со индекси поголеми или еднакви на n_0), имено членовите: $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots, a_{n_0+m}, \ldots$ се поголеми од бројот M.

Дефиниција 5. За низата $\{a_n\}$ велиме дека се стреми кон $-\infty$ и пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ или $a_n \to -\infty$ при $n \to \infty$, ако за секој $M > 0$, постои природен број $n_0 \in \mathbb{N}$, така што за сите членови на низата $\{a_n\}$ чии индекси $n > n_0$, важи $a_n < -M$.

Значи, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ако за кој било $M > 0$, може да се најде природен број $n_0 \in \mathbb{N}$, така што бесконечно многу членови од низата, имено членовите: $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots, a_{n_0+m}, \ldots$ се помали од бројот $-M$.

Низите коишто се стремат кон $+\infty$ или кон $-\infty$, при $n \to \infty$, се нарекуваат уште **дивергентни низи во потесна смисла**. Имајќи ги предвид својствата на апсолутна вредност, Дефиниција 4 и Дефиниција 5, заедно се еквивалентни со следната дефиниција:

Дефиниција 6. Низата $\{a_n\}$ е **дивергентна во потесна смисла**, ако за секој $M > 0$, постои природен број $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што важи:

$$|a_n| > M, \text{ за секој } n > n_0.$$

Дефиниција 7. Низата $\{a_n\}$ е **дивергентна во поширока смисла**, ако има повеќе различни точки на натрупување.

Пример 1. Испитај ги низите $\{a_n\}$, во однос на конвергенција и дивергенција, каде:

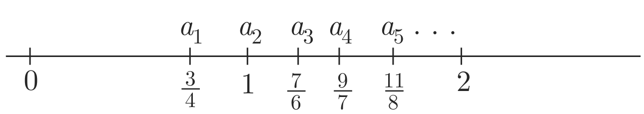
а) $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$

б) $a_n = n^2 + 1$

в) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

Решение.

а) $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$



Бидејќи однапред не знаеме за каква низа станува збор, ги претставуваме првите десетина (повеќе или помалку во други случаи) членови на бројната права. Се насетува дека $\{a_n\}$ би требало да конвергира кон 2. Но, ова не е математички доказ туку е само **интуитивно** насетување. Математичкиот доказ е следниот.

Прво го упростуваме изразот $|a_n - 2|$.

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &= \left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2n-6}{n+3}\right| = \\ &= \left|\frac{-5}{n+3}\right| = \frac{5}{n+3} \end{aligned}$$

Сакаме да докажеме дека за секое $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што за $n > n_0$ важи

$$|a_n - 2| = \frac{5}{n+3} < \varepsilon$$

Последното е еквивалентно со

$$n + 3 > \frac{5}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Тогаш $\dfrac{5}{\varepsilon} - 3 \in \mathbb{R}$, па заради својството на Архимед, постои природен број, да го означиме со n_0, таков што

$$n_0 > \frac{5}{\varepsilon} - 3.$$

Нека $n > n_0$. Тогаш имаме

$$|a_n - 2| = \frac{5}{n+3} \overset{n>n_0}{<} \frac{5}{n_0+3} \overset{n_0>\frac{5}{\varepsilon}-3}{<} \frac{5}{\frac{5}{\varepsilon} - 3 + 3} = \frac{5}{\frac{5}{\varepsilon}} = \varepsilon \text{ т.е.}$$

$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \text{за секој}\, n > n_0$$

Заклучуваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

б) $a_n = n^2 + 1$

Нека $M > 0$ е произволно избран реален број. Тогаш и $M - 1 \in \mathbb{R}$. Според својството на Архимед постои природен број n_0, $n_0 > M - 1$.

Нека $n > n_0$. Тогаш

$$a_n = n^2 + 1 \overset{n>n_0}{>} n_0^2 + 1 \overset{n_0^2\geq n_0}{>} n_0 + 1 > M - 1 + 1 = M$$

т.е.

$a_n > M$, за секој $n > n_0$.

Заклучуваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

в) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

Низата $\{a_n\}$ е:

$$-1,\ \frac{1}{2} + 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4} + 1,\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{6} + 1,\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{8} + 1,\ \ldots$$

Членовите на низата со парни индекси:
$\frac{1}{2}+1,\ \frac{1}{4}+1,\ldots,\frac{1}{2k}+1,\ldots$ се натрупуваат околу точката $a=1$ т.е. како во доказот на а) може да се покаже дека во било која околина на точката $a=1$ има бесконечно многу членови. (се остава на читателот да го покаже тоа.)

Членовите на низата со непарни индекси:
$-1,\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{7},\ldots,-\frac{1}{2k-1},\ldots$ се натрупуваат околу точката $b=0$. (се остава на читателот да го докаже тоа).

Значи, $\{a_n\}$ е дивергентна низа во поширока смисла.

Да се навратиме уште еднаш на последниот пример. Разгледувајќи ги членовите на низата $\{a_n\}$,
$a_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$, коишто имаат парни индекси, ние всушност добиваме броеви:
$\frac{1}{2}+1,\ \frac{1}{4}+1,\ldots,\frac{1}{2k}+1,\ldots$ коишто и самите формираат една нова низа, $\{a_k\}$, со општ член $a_k=\frac{1}{2k}+1,\ k\in\mathbb{N}$.

Новата низа е дел од дадената низа, и за да ја нагласиме оваа врска, наместо $\{a_k\}$, ја означуваме со $\{a_{2k}\}$, $k\in\mathbb{N}$. Велиме дека $\{a_{2k}\}$ е една **подниза** од дадената низа.

Дефиниција 8. Нека $\{a_n\}$ е дадена низа и нека $\{n_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, се такви што $n_1<n_2<\cdots<n_k<\ldots$ т.е. $\{n_k\}$ е строго растечка низа од природни броеви. Тогаш за низата $\{a_{n_k}\}$, $\quad k\in\mathbb{N}$, велиме дека е **подниза** од дадената низа.

Значи, во примерот што го разгледавме т.е. за $\{a_n\}$,
$a_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$, издвоивме две поднизи на следениов начин:

$$-1,\frac{1}{2}+1,-\frac{1}{3},\frac{1}{4}+1,-\frac{1}{5},\frac{1}{6}+1,\ldots\ ,\ \ -\frac{1}{2k-1},\ \frac{1}{2k}+1,\ldots$$

т.е. поднизите:
$\{a_{2k}\}$, $a_{2k}=\frac{1}{2k}+1,\ k\in\mathbb{N}$
$\{a_{2k-1}\}$, $a_{2k-1}=-\frac{1}{2k-1},\ k\in\mathbb{N}$
И доколку читателот докажал дека $\{a_n\}$ има две точки на натрупување, тој всушност покажал дека низата $\left\{\frac{1}{2k}+1\right\}\to 1,\ n\to\infty$, и $\left\{-\frac{1}{2k-1}\right\}\to 0,\ n\to\infty$

Забелешка. Овие две поднизи од дадената низа $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ секако не се единствени поднизи од $\{a_n\}$. Всушност можеме да избереме, согласно дефиницијата за подниза, бесконечно многу поднизи од дадената низа. Но овие две беа од посебен интерес, како конвергентни поднизи од дадената низа. Така во примерот видовме низа којашто не е конвергентна, но содржи две конвергентни поднизи. Од друга страна, ќе покажеме дека за една конвергентна низа не може да се најде дивергентна подниза.

25.5^0 Секоја подниза од конвергентна низа со гранична вредност a, е конвергентна и има иста гранична вредност a.

Доказ. Нека $\{a_{n_k}\}$ е произволно избрана подниза од $\{a_n\}$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, следува дека важи

$$(*) \qquad \text{постои } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ таков што } |a_n - a| < \varepsilon, \text{ за сите } n > n_0.$$

Но $\{n_k\}$ е растечка низа од природни броеви којашто се стреми кон $+\infty$, па тоа значи дека за бројот n_0 (најден погоре) постои $k_0 \in \mathbb{N}$ така што $n_k > n_0$, за сите $k > k_0$.

Сега, за $k > k_0$, заради $n_k > n_0$, $a_{n_k} \in \{a_n\}$ и $(*)$, имаме дека $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Забелешка. Ако низата $\{a_n\}$ има две конвергентни поднизи кои конвергираат кон различни граници тогаш $\{a_n\}$ е дивергентна низа (во поширока смисла). Ако $\{a_n\}$ има барем една дивергентна подниза, тогаш и $\{a_n\}$ е дивергентна низа .

1.26 Бескрајно мали и бескрајно големи низи

Дефиниција 1. Низата чијашто гранична вредност е нула се нарекува **бескрајно мала** или **нула-низа**.

Во следните својства ќе дадеме примери на такви низи.

26.1^0 Низата $\{a_n\}$, каде $a_n = \dfrac{1}{n}$ е нула-низа.

Доказ. Точно е $|a_n - 0| = |\dfrac{1}{n} - 0| = \dfrac{1}{n}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Од својството на Архимед, постои $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Нека $n > n_0$. Тогаш $|a_n - 0| = \dfrac{1}{n} \overset{n>n_0}{<} \dfrac{1}{n_0} < \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, па $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} =$

0, т.е. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ е нула-низа.

26.2^0 Низата $\{a_n\}$, каде $a_n = \dfrac{1}{n^k}$, $k > 0$ е нула-низа.

Дефиниција 2. Низата којашто се стреми кон $+\infty$ при $n \to \infty$ се нарекува **бескрајно голема низа**.

26.3^0 Низата $\{A_n\}$, каде $A_n = n$ (низата од природни броеви) е бескрајно голема низа.

Доказ. Нека $M > 0$ е кој било реален број. Од својството на Архимед, следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > M$. Тогаш за сите $n > n_0$, имаме $A_n = n > n_0 > M$ т.е. $\{n\} \to \infty$.

26.4^0 Низата $\{A_n\}$, каде $A_n = n^k$, $k > 0$ е бескрајно голема.

26.5^0 Низата $\{A_n\}$, каде $A_n = q^n$, $q > 1$ е бескрајно голема.

Доказ. Бидејќи $q > 1$, следува дека постои p таков што $q = 1+p$ и $p > 0$. Сега, нека $M > 0$ е произволно избран. Тогаш

$$A_n = q^n = (1+p)^n \overset{23.1}{\geq} 1 + p\cdot n > p \cdot n$$

Од својството на Архимед, за $\dfrac{M}{p} \in \mathbb{R}$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$, така што $n_0 > \dfrac{M}{p}$. За $n > n_0$, имаме

$$A_n > p\cdot n > p\cdot n_0 > p \cdot \frac{M}{p} = M$$

т.е. $\{q_n\}$ за $q > 1$ е бескрајно голема низа.

26.6^0 Збир, разлика и производ од две бескрајно мали низи е бескрајно мала низа.

26.7^0 Нека $\{a_n\}$ е бескрајно мала низа и $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогаш низата $\{A_n\}$, $A_n = \dfrac{1}{a_n}$ е бескрајно голема низа. Важи и обратното, т.е. ако $\{A_n\}$ е бескрајно голема низа, тогаш $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1}{A_n}$ е бескрајно мала низа.

Доказ. Нека $\{a_n\}$ е таква што $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Нека $M > 0$ е произволно избран број. Од својството дека помеѓу два реални броја постои реален број, следува дека постои ε, таков што $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{M}$. Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, за ε избран како погоре, постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$, за сите $n > n_0$.

Од овде пак имаме дека $A_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\frac{1}{M}} = M$, за сите $n > n_0$ т.е. $A_n > M$, за сите $n > n_0$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \infty$.
Обратното се докажува на сличен начин и се остава на читателот.

26.8^0 Низата $\{a_n\}$, $a_n = q^n$, $|q| < 1$ е нула-низа.

Доказ. Да ја разгледаме $\{A_n\}$, каде $A_n = \frac{1}{a_n}$.

$$|A_n| = \left|\frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{1}{q^n}\right| = \left|\frac{1}{q}\right|^n \text{ и } \left|\frac{1}{q}\right| = \frac{1}{|q|} > 1$$

Од 26.5^0, имаме дека $\{|A_n|\}$ е бескрајно голема низа, од каде заради 26.7^0, добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|A_n|}\right) = 0$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

26.9^0 Збир и производ од две бескрајно големи низи е бескрајно голема низа.

За граничните вредности на низите:

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$– количник од две бескрајно мали низи

$\left\{\frac{A_n}{B_n}\right\}$– количник од две бескрајно големи низи

$\left\{a_n \cdot B_n\right\}$– производ од бескрајно мала со бескрајно голема низа

$\left\{A_n - B_n\right\}$– разлика од две бескрајно големи низи

добиваме **неопределености од облик**,

$$\frac{0}{0},\ \ \frac{\infty}{\infty},\ \ 0\cdot\infty,\ \ \infty-\infty,\ \ \text{соодветно.}$$

Исто така и за граничните вредности на низите:

$\left\{\alpha_n^{A_n}\right\}$, $\{\alpha_n\} \to 1$, $\{A_n\} \to \infty$ при $n \to \infty$

$\left\{a_n^{b_n}\right\}$, $\{a_n\} \to 0$, $\{b_n\} \to 0$ при $n \to \infty$

$\left\{a_n^{A_n}\right\}$, $\{a_n\} \to 0$, $\{A_n\} \to \infty$ при $n \to \infty$

$\left\{A_n^{b_n}\right\}$, $\{A_n\} \to \infty$, $\{b_n\} \to 0$ при $n \to \infty$

добиваме

$$1^\infty,\ \ 0^0,\ \ 0^\infty,\ \ \infty^0,\ \ \text{соодветно.}$$

Неопределеноста $\infty - \infty$ ќе ја илустрираме во следниот пример.

Пример 1. а) Нека $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ се низи зададени со $A_n = n^2 + \frac{1}{n}$, $B_n = n^2$. Да ја испитаме конвергенцијата на $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ и $\{A_n\} - \{B_n\}$.

Решение. Од $A_n = n^2 + \frac{1}{n} > n^2 > M$, за секој однапред избран M, почнувајќи од некој природен број n_0 добиваме дека $A_n \to \infty$ и $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Од $A_n - B_n = n^2 + \frac{1}{n} - n^2 = \frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n - B_n) = 0$.

Во овој пример, имавме

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} B_n = \infty \ \text{ но } \lim_{n\to\infty}(A_n - B_n) = 0 \text{ т.е.} \quad \infty - \infty = 0.$$

Пример 2. Нека $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ се низи зададени со $A_n = 2n$, $B_n = n$. Да ја испитаме конвергенцијата на $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ и $\{A_n\} - \{B_n\}$.

Решение. Точно е дека $A_n \to +\infty$, $B_n \to +\infty$, при $n \to \infty$. Од $A_n - B_n = 2n - n = n$ јасно следува дека $\{A_n - B_n\}$ се стреми кон ∞ при $n \to \infty$.

Во овој пример, имавме

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} B_n = \infty \text{ и } \lim_{n\to\infty}(A_n - B_n) = \infty \text{ т.е.} \quad \infty - \infty = \infty.$$

Забелешка. Нека низата $\Big\{A_n\Big\}$, е таква што $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = -\infty$. Ставајќи $B_n = -A_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ се добива низа $\Big\{B_n\Big\}$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \infty$ (види дефиницијата). Поради ова теоремите за бескрајно големи низи ги дадовме само ако низите се стремат кон $+\infty$, а слични теореми важат и за низи кои се стремат кон $-\infty$.
Нека на пример, $\Big\{A_n\Big\}$ и $\Big\{C_n\Big\}$ се такви што $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = -\infty$. Ставајќи $\Big\{B_n\Big\} = \Big\{-A_n\Big\}$, $\Big\{D_n\Big\} = \Big\{-C_n\Big\}$ (кои се стремат кон ∞) се добива

$$\lim_{n\to\infty}(A_n + C_n) = \lim_{n\to\infty}(-((-A_n) + (-C_n))) = \lim_{n\to\infty}(-E_n),$$

каде $E_n = (-A_n) + (-C_n) \to \infty$, заради 26.9^0, па $\lim\limits_{n\to\infty}(-E_n) = -\infty$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n + C_n) = -\infty$. т.е.

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Притоа горниот запис $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ значи збир на две низи што се стремат кон $-\infty$ е низа која се стреми кон $-\infty$. Слично, се добиваат останатите теореми.

1.27 Операции со гранични вредности на низи

27.1^0 Збирот на две конвергентни низи $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ е конвергентна низа, и притоа граничната вредност од збирот на низите е збир од граничните вредности на низите т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ и нека $\varepsilon>0$ е произволно избран. Од конвергенција на $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ следува дека $\exists n_1,n_2\in\mathbb{N}$ такви што $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, за секој $n>n_1$ и $|b_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, за секој $n>n_2$.

Нека $\{c_n\}=\{a_n+b_n\}$, $c=a+b$ и $n_0=max\ (n_1,n_2)$. За $n>n_0$, имаме

$$\begin{aligned}|c_n-c|&=|(a_n+b_n)-(a+b)|=|(a_n-a)+(b_n-b)\leq\\&\leq|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

Заради произволноста на ε, следува дека за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbb{N}$, $\Big(n_0=max\ (n_1,n_2)\Big)$ така што $|c_n-c|<\varepsilon$, за сите $n>n_0$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$. Оттука имаме $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

27.2^0 Разликата од две конвергентни низи $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ е конвергентна низа, и притоа гранична вредност од разликата на низите е разлика од граничните вредности на низите т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n.$$

27.3^0 Производот од две конвергентни низи $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ е конвергентна низа, и притоа гранична вредност од производот на низите е производ од граничните вредности на низите т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран.

Низата $\{b_n\}$ е конвергентна низа, па таа е и ограничена (тоа го докажавме претходно). Значи, постои $M>0$, така што $|b_n|<M$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Сега, за $\dfrac{\varepsilon}{M+|a|}>0$, постојат природни броеви n_1 и n_2 така што важи

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{M+|a|},\ \text{за сите } n>n_1$$

$$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{M+|a|},\ \text{за сите } n>n_2.$$

Нека сега $n_0 = max\ (n_1, n_2)$ т.е. $n_0 \geq n_1$ и $n_0 \geq n_2$.
За $n > n_0$ имаме

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\
&\leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\
&< \frac{\varepsilon}{M + |a|} \cdot M + |a| \frac{\varepsilon}{M + |a|} \\
&= \frac{\varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot |a|}{M + |a|} = \frac{\varepsilon(M + |a|)}{M + |a|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Докажавме дека за секој $\varepsilon > 0$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$, така што за секој $n > n_0$ важи $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

27.4^0 Гранична вредност од константна низа $\{a_n\}$, $a_n = a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ е a т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$, $\Big(\{a\} : a, a, a, \ldots, a, \ldots\Big)$

Од 27.3^0 и 27.4^0 следува 27.5^0.

27.5^0 Ако $\{a_n\}$ е конвергентна низа, $c \in \mathbb{R}$, тогаш и $\{c \cdot a_n\}$ е конвергентна низа и важи

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

27.6^0 Количникот на две конвергентни низи $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, при што $b_n \neq 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, е конвергентна низа, и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $b \neq 0$, $b_n \neq 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Бидејќи $\{b_n\}$ е конвергентна следува дека $\{b_n\}$ е ограничена. Од ограниченоста на $\{b_n\}$ и $b \neq 0$, $b_n \neq 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$ следува дека постојат $m, M > 0$ така што $m < |b_n| < M$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен и нека $\varepsilon_1 = \dfrac{m\ |b|\ \varepsilon}{|a| + |b|} > 0$. Од конвергенцијата на низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ следува постојат $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ така што $|a_n - a| < \varepsilon_1$ за секој $n > n_1$ и $|b_n - b| < \varepsilon_1$ за секој $n > n_2$. Нека $n_0 = max(n_1, n_2)$, и $n > n_0$. Тогаш имаме

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_nb-ab_n}{b_nb}\right| = \left|\frac{a_nb-ab+ab-ab_n}{b_nb}\right| =$$

$$= \left|\frac{(a_n-a)b-a(b_n-b)}{b_nb}\right| \leq \frac{|a_n-a||b|+|a||b_n-b|}{|b_n||b|} <$$

$$< \frac{\varepsilon_1\cdot|b|+|a|\cdot\varepsilon_1}{|b|\cdot m} = \varepsilon_1\frac{|a|+|b|}{|b|\cdot m} = \frac{m\cdot|b|\cdot\varepsilon}{|a|+|b|}\cdot\frac{|a|+|b|}{|b|\cdot m} = \varepsilon$$

т.е. $\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right| < \varepsilon$ за сите $n > n_0$, од каде следува дека важи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

27.7^0 (Обопштување на 27.1^0 и 27.3^0)
Ако $\{a_n^{(m)}\}$, $m\in\{1,2,\ldots,k\}$ се k конвергентни низи, тогаш и нивниот збир и производ се конвергентни низи и важи

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\ldots a_n^{(k)}) = \lim_{n\to\infty}a_n^{(1)}+\lim_{n\to\infty}a_n^{(2)}+\cdots+\lim_{n\to\infty}a_n^{(k)}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{(1)}\cdot a_n^{(2)}\cdot\ldots a_n^{(k)}) = \lim_{n\to\infty}a_n^{(1)}\cdot\lim_{n\to\infty}a_n^{(2)}\cdot\cdots\cdot\lim_{n\to\infty}a_n^{(k)}.$$

Специјално. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^k) = (\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^k$ за $k\in\mathbb{N}$.

1.28 Операции меѓу конвергентни низи и бескрајно големи низи

28.1^0 Ако $\{a_n\}$ е конвергентна низа со гранична вредност a, а $\{B_n\}$ е бескрајно голема низа што се стреми кон $+\infty$ при $n\to\infty$, тогаш важи

(*i*) $\{a_n+B_n\}$ е бескрајно голема низа што се стреми кон $+\infty$ при $n\to\infty$.

Пишуваме $a+\infty=\infty$

(*ii*) $\{a_n-B_n\}$ се стреми кон $-\infty$, при $n\to\infty$.

Пишуваме $a-\infty=-\infty$

$$(iii)\quad a_n\cdot B_n = \begin{cases}\text{се стреми кон } +\infty \text{ при } n\to\infty & \text{ако } a>0\\ \text{се стреми кон } -\infty \text{ при } n\to\infty & \text{ако } a<0\\ \text{неопределеност} & \text{ако } a=0\end{cases}$$

$$\text{Пишуваме}\quad a\cdot\infty = \begin{cases}\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\\ \text{неопределеност}, & a=0\end{cases}$$

(iv) $\left\{\dfrac{a_n}{B_n}\right\}$ е бесконечно мала низа.

Пишуваме $\dfrac{a}{\infty} = 0$.

Забелешка. Слични својства важат и кога $B_n \to -\infty$ при $n \to \infty$. Притоа, $a + (-\infty) = -\infty$, $a - (-\infty) = +\infty$ и

$$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ \infty, & a < 0 \\ \text{неопределеност}, & a = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{a}{-\infty} = 0.$$

1.29 Неколку критериуми за конвергенција на низа: Сендвич принцип, Теорема за монотоност и ограниченост

Сендвич принцип: Нека $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ се три низи за кои важи:
(i) $a_n \leq b_n \leq c_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ се конвергентни низи со иста гранична вредност т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Тогаш и $\{b_n\}$ е конвергентна низа со иста гранична вредност a т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, следува дека постојат $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N}$ такви што $|a_n - a| < \varepsilon$, за секој $n > n_1$ и $|c_n - a| < \varepsilon$, за секој $n > n_2$. Оттука добиваме $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ за секој $n > n_1$ и $-\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$, за секој $n > n_2$.

Нека $n_0 = max(n_1, n_2)$ и $n > n_0$.

Тогаш важи

$$-\varepsilon < a_n - a \overset{(i)}{\leq} b_n - a \overset{(i)}{\leq} c_n - a < \varepsilon \quad \text{т.е.}$$

$-\varepsilon < b_n - a < \varepsilon$, за секој $n > n_0$, од каде следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Пример 1. Докажи дека низата $\{a_n\}$, каде $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$ е конвергентна со гранична вредност 1.

Решение. Од $n^2 + k \geq n^2 + 1, \forall k \in \mathbb{N}$ имаме

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq$$

$$\leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} =$$

$= n \cdot \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$
т.е.

$$a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Слично,

$$a_n \geq \frac{n^2}{n^2+n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

т.е.

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{I}$$

Од (I) и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = 1$, и сендвич принципот, добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ =1

Во продолжение ќе ја наведеме теоремата за монотони низи и ограничени низи.

I. Нека низата $\{a_n\}$

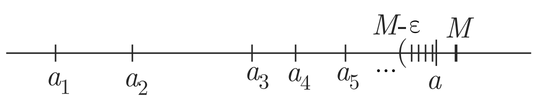
1^0 монотоно расте: $a_n \leq a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$

2^0 е ограничена од десно (горе) (постои $M > 0$ така што $a_n \leq M$, за секој $n \in \mathbb{N}$).

Тогаш таа е конвергентна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq M$.

Теоремата ќе ја илустрираме без доказ.

Бидејќи низата монотоно расте и е ограничена од горе сите членови на низата се "ближат" кон M, но не го надминуваат па така во било кој интервал $(M-\varepsilon, M]$ ќе се најдат бесконечно многу членови од низата, а надвор од тој интервал само конечно многу. т.е.



Значи, постои $a \in (M-\varepsilon, M]$ така што $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \leq M$.

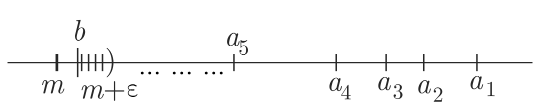
II. Нека низата $\{a_n\}$

1^0 монотоно опаѓа: $a_n \geq a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$

2^0 е ограничена од долу (лево): постои $m > 0$ така да $a_n \geq m$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Тогаш низата $\{a_n\}$ е конвергентна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq m$.

Слично и овде, од монотоноста и ограниченоста следува дека бесконечно многу членови на низата ќе се најдат во интервалот $[m, m+\varepsilon)$, а само конечно многу членови надвор од тој интервал т.е.



Значи, ќе постои $b \in [m, m+\varepsilon)$ така што $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq m$.

Овие две теореми заедно ги искажуваме во еден принцип:

Принцип за монотони и ограничени низи: Секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.

Пример 2. Докажи дека низата $\{x_n\}$, $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ е конвергентна и најди $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решение. (i) Од $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \dfrac{(n+1)\cdot n!\, n^n}{(n+1)^n (n+1)\cdot n!} =$ $\dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1^n = 1$ добиваме дека $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Од $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и од ова погоре, добиваме дека $x_{n+1} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ т.е. $\{x_n\}$ монотоно опаѓа.

(ii) Јасно е дека $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, т.е. $\{x_n\}$ е ограничена од долу.

Од (i), (ii) и II добиваме дека постои $l \in \mathbb{R}$, $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ќе покажеме дека $l = 0$. Заради (II), имаме дека важи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \geq 0. \tag{1}$$

Од друга страна,

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \overset{\text{Н.Б.}}{\leq} \dfrac{1}{1+n\cdot\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$ т.е.

$x_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} x_n$, па $l \leq \dfrac{1}{2} l$ т.е.

$$l \leq 0. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека $l = 0$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

1.30 Реален број како граница на низа рационални броеви

Да се вратиме на децималното мерење на отсечките и дефиницијата на реалниот број. Нека x е позитивен реален број т.е. x е бесконечна десетична дропка од обликот

$x = a + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{10^n} + \dfrac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \ldots$, каде $0 \leq a_i \leq 9$, $a, a_i \in \mathbb{N}_0$.

За $\underline{x_n} = a + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{10^i}$ - долното n-значно рационално приближување на x, и $\overline{x_n} = a + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{10^i} + \dfrac{1}{10^n}$ - горното n-значно рационално приближување на x, видовме (во параграф 1.17) дека важат одредени

својства. Користејќи ги поимите монотоност, ограниченост и конвергенција на низа, лесно се воочува дека тие својства се соодветно еквивалентни на:
1^0. $\{\underline{x_n}\}$ монотоно расте, $\{\overline{x_n}\}$ монотоно опаѓа.
2^0. $\underline{x_n} < a+1$, за секој $n \in \mathbb{N}$ т.е. $\{\underline{x_n}\}$ е ограничена од горе и $\overline{x_n} \geq a$, за секој $n \in \mathbb{N}$ т.е. $\{\overline{x_n}\}$ е ограничена од долу.
3^0. $\{\overline{x_n} - x_n\} = \left\{\dfrac{1}{10^n}\right\} \to 0, n \to \infty$.
4^0. $\underline{x_n} < x < \overline{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Од принципот за монотоност и ограниченост како и 1^0 и 2^0 следува дека постојат: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \underline{x}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x_n} = \overline{x}$.

Ако во 3^0 земеме $\lim\limits_{n\to\infty}$, добиваме: $\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{x_n} - \underline{x_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{10^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{10}\right)^n = 0$ т.е. $\overline{x} - \underline{x} = 0$ т.е. $\overline{x} = \underline{x}$. Значи, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x_n}$.

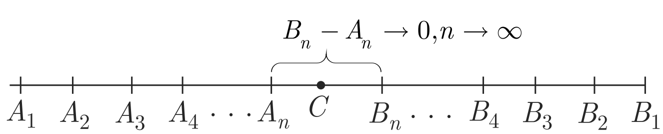
Од последното, 4^0 и сендвич принципот добиваме дека $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x_n} = x$. Јасно $\{\underline{x_n}\}$ и $\{\overline{x_n}\}$ се низи од рационални броеви. Можеме да заклучиме дека важи следното својство.
30.1^0 Секој реален број е граница на низа од рационални броеви.
Важи и поопшта теорема.

Теорема на **Кантор-Дедекинд**:

Ако $\{I_n\}$, $I_n = [A_n, B_n]$ е низа вложени сегменти т.е. $I_n \supseteq I_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$, и ако

$$\{B_n - A_n\} \to \infty, \;\; n \to \infty,$$

тогаш постои реален број C, кој е содржан во секој од сегментите I_n, т.е. $C \in I_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.



1.31 Степен на реален број со реален експонент

Пред да дефинираме степен a^x, за $a \in \mathbb{R}^+$ и $x \in \mathbb{R}$, ќе наведеме (без доказ) некои својства.
31.1^0. За секоја низа од рационални броеви $\{r_n\}$ такви што $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ и за секој $a \in \mathbb{R}^+$, важи $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$.
31.2^0 Ако $\{r_n\}$ е конвергентна низа од рационални броеви, тогаш за секој $a \in \mathbb{R}^+$ низата $\{a^{r_n}\}$ е конвергентна низа.

Прво ќе дефинираме a^x, за $a > 1$ и $x \in \mathbb{R}^+$.

Нека $\{\underline{x_n}\}$ и $\{\overline{x_n}\}$ се, соодветно, низите од долни и горни $n-$значни приближувања на бројот x. За нив се исполнети следните својства:
(i) $\{\underline{x_n}\}$, $\{\overline{x_n}\}$ $\in\mathbb{Q}$ (во овој случај на $\mathbb{Q}^+$) за секој $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\overline{x_n} = x$.
(ii) $\{\underline{x_n}\}$ е монотоно растечка низа, а $\{\overline{x_n}\}$ е монотоно опаѓачка низа
(iii) $\underline{x_n} < \overline{x_n}$, за секој $n\in\mathbb{N}$
(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{x_n}-\underline{x_n}) = 0$.

Да ги разгледаме низите $\{a^{\underline{x_n}}\}$ и $\{a^{\overline{x_n}}\}$. Тие ги задоволуваат следните особини:

(I) $\{a^{\underline{x_n}}\}$ и $\{a^{\overline{x_n}}\}$ се конвергентни низи.

(заради (i) и 31.2^0)

(II) $\{a^{\underline{x_n}}\}$ е монотоно растечка низа, а $\{a^{\overline{x_n}}\}$ е монотоно опаѓачка низа. ($\{\underline{x_n}\}$ е монотоно растечка низа, т.е. имаме $\underline{x_n} < \underline{x_{n+1}}$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Од $a>1$ и 18.16^0 имаме дека $a^{\underline{x_n}}< a^{\underline{x_{n+1}}}$, за секој $n\in\mathbb{N}$ т.е. $\{a^{\underline{x_n}}\}$ е монотоно растечка низа. Слично, се покажува дека $\{ a^{\overline{x_n}}\}$ е монотоно опаѓачка низа).
$(III.)$ $a^{\underline{x_n}}< a^{\overline{x_n}}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.
(Од (iii), $a>1$ и 18.16^0 следува (III)).
(IV) $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{\overline{x_n}}- a^{\underline{x_n}}) = 0$.
$(\lim\limits_{n\to\infty}(a^{\overline{x_n}}- a^{\underline{x_n}}) = \lim\limits_{n\to\infty}a^{\underline{x_n}}(a^{\overline{x_n}-\underline{x_n}}-1) \underset{31.1^0,(IV)}{=} \lim\limits_{n\to\infty}a^{\underline{x_n}}(1-1) = \lim\limits_{n\to\infty}a^{\underline{x_n}}\cdot 0 = 0.)$

Заради својствата $(I),(II),(III)$ и (IV), добиваме дека $\{I_n\}$, $I_n = [a^{\underline{x_n}},\ a^{\overline{x_n}}]$ е низа од вложени сегменти со должини $a^{\overline{x_n}}-a^{\underline{x_n}}$ што се сремат кон нула при $n\to\infty$. Од Теоремата на Кантор-Дедекинд, следува дека постои единствен реален број, C, кој што припаѓа на секој од интервалите I_n. Тој реален број се нарекува **степен на бројот $a>1$ со експонент $x>0$, и се означува со a^x.**

Значи, $a^x = \lim\limits_{n\to\infty}a^{\underline{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}a^{\overline{x_n}}$.

Ако $x<0$, $a>1$, тогаш $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$. $(-x>0)$

Ако $0<a<1$, $x\in\mathbb{R}$, $a^x = \dfrac{1}{(\frac{1}{a})^x}$ $(\dfrac{1}{a}>1)$.

Точни се следните својства:

31.3^0 (i) $a^x\cdot a^y = a^{x+y}$, за $a>0$ и $x,y\in\mathbb{R}$.
(ii) $(a^x)^{-1} = a^{-x}$, за $a>0$.
(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$ за $a>0$, $x,y\in\mathbb{R}$.
(iv) $a^x = a^y \Leftrightarrow x=y$, за $a>0$.
(v) Ако $0<a<b$, тогаш $a^x<b^x$, за $x>0$ и $a^x>b^x$, за $x<0$.

Во продолжение ќе наведеме некои својства од операции со конвергентни низи.
31.4^0 Ако $\{a_n\}$ е конвергентна низа од реални броеви и $a_n > 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$, и ако $t \in \mathbb{R}$ е произволен реален број, тогаш низата $\{a_n^t\}$ е конвергентна и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^t) = (\lim_{n\to\infty} a_n)^t$$

31.5^0 Ако $\{a_n\}$ е конвергентна низа од реални броеви и $C \in \mathbb{R}^+$ е произволен, позитивен реален број, тогаш и $\{C^{a_n}\}$ е конвергентна низа и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty}(C^{a_n}) = C^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$

31.6^0 Ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни низи од реални броеви со граници a и b соодветно и ако a^b не е неопределен израз, тогаш важи

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

1.32 Аритметичка прогресија

Дефиниција 1. Низата броеви $\{a_n\}$, со својството, почнувајќи од вториот член, разликата меѓу секој член и неговиот претходен член да е постојана т.е. некоја константа, d, се нарекува **аритметичка прогресија** или **ариметичка низа**.

Константата, d се нарекува **разлика** на прогресијата.

Значи, аритметичка прогресија $\{a_n\}$ со разлика d е дадена со рекурентната врска $a_{n+1} - a_n = d$, $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{$\triangle$}$$

Така, ако првиот член е a_1, тогаш $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$, $a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$, итн.
Интуитивно насетуваме дека $a_n = a_1 + (n-1)d$. Точна е следнава формула

32.1^0 (Формула за општ член на аритметичка прогресија)

Општиот член a_n на аритметичката прогресија $\{a_n\}$ со разлика d е

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \ \ n \in \mathbb{N} \tag{$*$}$$

Доказ. Доказот ќе го спроведеме со ПМИ.
За $n = 2$, $a_2 = a_1 + d = a_1 + (2-1)d$
Нека $(*)$ важи за $n \in \mathbb{N}$ т.е. нека $a_n = a_1 + (n-1)d$. Тогаш за a_{n+1} имаме

$$a_{n+1} \underset{(\triangle)}{=} a_n + d \underset{(*)}{=} a_1 + (n-1)d + d = a_1 + (n-1+1)d = a_1 + ((n+1)-1)d$$

Согласно ПМИ важи $(*)$.

Заради 32.1^0, имаме дека секој член на аритметичката прогресија може да го пресметаме ако се познати почетниот член a_1 и разликата d т.е. една аритметичка прогресија е зададена (определена) ако се познати почетниот член a_1 и разликата d.

Примери:

1) Природната низа е аритметичка прогресија со разлика $d = 1$ и почетен член $a_1 = 1$.
2) Низата: $1, 4, 7, 10 \ldots, 3n-2, \ldots$ е аритметичка прогресија со разлика $d = 3$ и почетен член $a_1 = 1$.
3) Низата $5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots, 6-n, \ldots$ е аритметичка прогресија со разлика $d = -1$ и почетен член $a_1 = 5$.

32.2^0 Нека $\{a_n\}$ е аритметичка прогресија со разлика d.

(i) ако $d > 0$, тогаш $\{a_n\}$ е строго монотоно растечка низа.

(ii) ако $d < 0$, тогаш $\{a_n\}$ е строго монотоно опаѓачка низа.

(iii) за секои три едноподруги членови на прогресијата a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, важи

$$a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$$

т.е. секој член на аритметичката прогресија е аритметичка средина од неговиот претходен и неговиот следен член.

Доказ. (i) Ако $d > 0$, тогаш $a_{n+1} - a_n > 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$ што е еквивалентно со $a_{n+1} > a_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Последното значи дека $\{a_n\}$ е строго монотоно растечка низа.
(ii) Слично, како (i).
(iii) Од $(\triangle)$ имаме $a_{k+1} - a_k = d$, $a_k - a_{k-1} = d$.
Ако ги одземеме двете равенства, добиваме

$$a_{k+1} - a_k - a_k + a_{k-1} = 0 \quad \text{т.е.} \quad \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2} = a_k$$

32.3^0 Нека $\{a_n\}$ е аритметичка прогресија. Тогаш, за секој $n \in \mathbb{N}$, и за сите $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ важи

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Доказ. Нека d е разликата на аритметичката прогресија и нека $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq k \leq n$. Од формулата за општиот член, добиваме

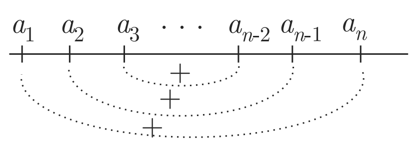
$$
\begin{aligned}
& a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k+1-1)d = \\
& = a_1 + a_1 + ((k-1+n-k)d = \\
& = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{=a_n} = a_1 + a_n
\end{aligned}
$$

Да забележиме дека

За $k = 2$ во 32.3^0 добиваме: $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$

За $k = 3$ во 32.3^0 добиваме: $a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$

За $k = 4$ во 32.3^0 добиваме: $a_4 + a_{n-3} = a_1 + a_n$



Својството 32.3^0 всушност значи дека збирот на членовите кои се подеднакво "оддалечени" од членовите a_1 и a_n е еднаков на збирот на a_1 и a_n.

32.4^0 (Формула за збир на првите $n-$членови од аритметичката прогресија)

Збирот S_n на првите $n-$членови од аритметичка прогресија $\{a_n\}$ е еднаков на $\dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$ т.е. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Доказ.

Собирајќи ги $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots + a_{n-k+1} + \cdots + a_n$ и

$$
\begin{aligned}
& S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n-k+1} + \cdots + a_k + \cdots + a_2 + a_1 \\
& 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_k + a_{n-k+1}) + \ldots \\
& \cdots + (a_{n-k+1} + a_k) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \overset{32.3^0}{=} \\
& \overset{32.3^0}{=} n(a_1 + a_n) \text{ т.е. } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).
\end{aligned}
$$

Забелешка. Формулата за збир на првите $n-$членови од аритметичка прогресија, може да се изрази и на следниот начин:

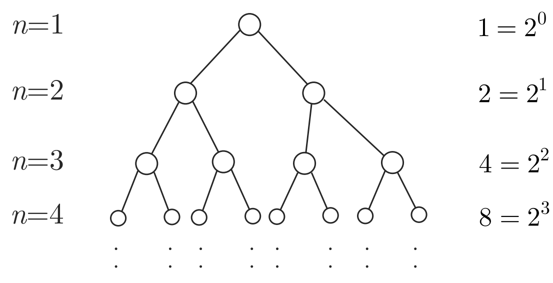
$$
S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \overset{33.1^0}{=} \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]
$$

т.е. преку првиот член, a_1, и разликата d.

1.33 Геометриска прогресија

Да разгледаме еден делбен процес во кој една целина се дели на две, потоа секоја од овие две се дели уште на по две нови, па од четирите добиваме осум нови итн.

Бројот на целините во секој чекор е:



На овој начин, за бројот на целините во секој чекор, добиваме една низа, којашто го има следното својство:

$$\frac{2^1}{2^0} = \frac{2^2}{2^1} = \frac{2^3}{2^2} = \cdots = \frac{2^n}{2^{n-1}} = \cdots = 2$$

т.е. количникот од било кои два едноподруги члена во низата е еден ист број. Оваа низа се нарекува геометриска прогресија.

Дефиниција 1. Низа од броеви $\{a_n\}$, такви што количникот на секој член од низата со неговиот претходен член е ист број, q, се нарекува **геометриска прогресија** или **геометриска низа**.

Бројот q се нарекува **количник** на прогресијата.

Значи, геометриска прогресија $\{a_n\}$ со количник q е дадена со рекурентната врска:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \ , \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$\text{т.е.} \quad a_n = q \cdot a_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \qquad (\triangle)$$

Ако првиот член на прогресијата е a_1, тогаш

$a_2 = q \cdot a_1, \ \ a_3 = q \cdot a_2 = q \cdot q \cdot a_1 = q^2 a_1, a_4 = q \cdot a_3 = q \cdot q^2 \cdot a_1 = q^3 a_1,$ итн.

Важи следнава формула

33.1^0 (Формула за општ член на геометриска прогресија)

Општиот член a_n на геометриска прогресија, $\{a_n\}$ со количник q е

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

Доказ. Доказот ќе го спроведеме со ПМИ.

За $n = 1$, $(*)$ е тривијално исполнета.

За $n = 2$, $a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^{2-1}$

Нека $(*)$ важи за секој $n \in \mathbb{N}$ т.е. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Тогаш за a_{n+1} добиваме $a_{n+1} \stackrel{(\triangle)}{=} a_n \cdot q \stackrel{(*)}{=} a_1 q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n = a_1 q^{(n+1)-1}$.

Значи, $(*)$ важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

Од 33.1^0, произлегува дека геометриска прогресија е определена со нејзиниот прв член a_1 и количникот q.

Примери. 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ е геометриска прогресија со $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$.

2) $1, -2, 4, -8, \ldots, (-2)^{n-1}, \ldots$ е геометриска прогресија со $a_1 = 1,\ \ q = -2$.

33.2^0 Нека $\{a_n\}$ е геометриска прогресија со количник q и $a_n > 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ако $q > 1$, тогаш низата $\{a_n\}$ строго монотоно расте

(ii) Ако $0 < q < 1$, тогаш низата $\{a_n\}$ строго монотоно опаѓа

(iii) За било кои три едноподруги членови a_{k-1}, a_k, a_{k+1} од геометриска прогресија важи

$$a_k = \sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}$$

Забелешка. Заради (iii) велиме дека секој член од една позитивна геометриска прогресија е геометриска средина од неговиот претходен и неговиот следен член.

Доказ. (i) Нека $q > 1$. Тогаш од $(\triangle)$ имаме дека

$$a_n = q \cdot a_{n-1} > a_{n-1}, \quad \text{за секој } n > 1,$$

т.е. $\{a_n\}$ строго монотоно расте.

(ii) слично како (i).

(iii) Од $(\triangle)$ имаме

$a_{k+1} = q \cdot a_k$, $a_k = q \cdot a_{k-1}$, од каде добиваме

$$a_{k-1}a_{k+1} = \frac{a_k}{q} \cdot q \cdot a_k = a_k^2 \text{ т.е. } a_k = \sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}$$

33.3^0 Нека $\{a_n\}$ е геометриска прогресија. Тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ и за сите $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$, важи

$$a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 \cdot a_n.$$

Доказ. Нека $\{a_n\}$ е геометриска прогресија со количник q. Нека $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ и $1 \le k \le n$. Тогаш

$$a_k \cdot a_{n-k+1} \stackrel{33.1^0}{=} a_1 \cdot q^{k-1} \cdot a_1 \cdot q^{n-k+1-1} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{k-1+n-k} =$$

$$a_1 \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n} \stackrel{33.1^0}{=} a_1 \cdot a_n$$

Коментар. Слично како кај 32.3^0 и овде својството 33.3^0 всушност значи дека производот на било кои два члена од една геометриска прогресија, коишто се еднакво "оддалечени" од членовите a_1 и a_n, е еднаков на производот на a_1 и a_n.
33.4^0 (Формула за збир на првите $n-$членови на геометриска прогресија)
Збирот S_n, на првите $n-$членови на геометриска прогресија$\{a_n\}$ со прв член a_1 и количник q, $q \neq 1$ е еднаков на $\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ т.е.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Доказ. Заради 33.1^0, за $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ имаме $S_n = a_1 + a_1q^1 + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}$. Множејќи го последното равенство со q, добиваме

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

Оттука, $S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$ т.е. $(1-q)S_n = a_1(1-q^n)$ т.е.

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

1.34 Поим за ред

Дефиниција 1. Нека е дадена низа $\{a_n\}$. Изразот

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots$$

го нарекуваме **бесконечен ред** или само **ред**.

Бесконечниот ред $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots$ кратко ќе го запишуваме со $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \neq \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_k\right)$

Со едноподруго собирање на членови од низата $\{a_n\}$ добиваме нова низа што ќе ја означуваме со $\{S_n\}$, на следниов начин:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1\\
&S_2 = a_1 + a_2\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&\vdots\\
&S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\\
&S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

т.е

$$\{S_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}.$$

Секој член од низата $\{S_n\}$ е **конечен збир** на првите $n-$ членови од низата $\{a_n\}$, и кратко ќе запишуваме $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Збирот S_n се нарекува **n−та парцијална сума** (или **n−та делимична сума**) од членовите на низата $\{a_n\}$.

Дефиниција 2. Ако постои конечна гранична вредност, S, на низата од $n-$тата парцијална сума, $\{S_n\}$, т.е. $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, тогаш велиме дека бесконечниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a_i е **конвергентен** со збир S и пишуваме $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Дефиниција 3. Ако низата $\{S_n\}$ е дивергентна, тогаш велиме редот $\sum_{i=1}^{n} a_i$ е **дивергентен**.

Пример 1. Од геометриската низа $\{q^n\}$: $1, q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$ формираме **геометриски ред** $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$.
$n-$тата парцијална сума е

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = 1\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Од овде имаме $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Но, бидејќи $\lim_{n\to\infty} q^n$ постои за $|q| < 1$ и тогаш $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = q \cdot 0 = 0$, се добива дека при $|q| < 1$, геометрискиот ред е конвергентен со збир $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$ т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$, при $|q| < 1$.

За $|q| > 1$, геометрискиот ред $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ е дивергентен.

Пример 2. Ако разгледуваме поопшт геометриски ред
$a + aq + aq^2 + \ldots aq^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, $n-$тата парцијална сума е
$S_n = a + aq + \cdots + aq^n = a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Па, добиваме

за $|q| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1 - q}$, а за $|q| > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ е дивергентен ред.

Пример 3. Ако $\{a_n\} = \{a + (n-1)d\}$ е аритметичка прогресија, формираме аритметички ред:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a + (n-1)d)$. $n-$тата парцијална сума е

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\Big[a_1 + a_n\Big] = \frac{n}{2}\Big[a + a + (n-1)d\Big] = \\ &= \frac{n}{2}\Big[2a + (n-1)d\Big] \end{aligned}$$

Очигледно, $\lim S_n = \infty$, т.е. секој аритметички ред е дивергентен.

1.35 Теорема за апроксимација. Заокружување на децималите

Претходно видовме дека реалниот број (ирационалниот број) е бесконечен децимален број. Во практиката е тешко да се работи со броеви кои имаат безброј децимали. Од тие причини правиме **заокружување** на бесконечен децимален број со конечен децимален број.
35.1^0 Во реалниот број $c, c_1c_2c_3 \ldots c_nc_{n+1} \ldots$, децималниот дел $\alpha = 0, c_1c_2c_3 \ldots c_nc_{n+1} \ldots$ е секогаш помал или еднаков на 1.

Доказ.

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, c_1c_2c_3 \ldots c_nc_{n+1} \ldots, = \\ &= \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} + \ldots \end{aligned}$$

Бидејќи c_i се цифри, $c_i \leq 9$, за секој $i \in \mathbb{N}$, добивме

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots \leq \\ &\leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10^{n-1}} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10^n} + \cdots = \\ &= \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1, \text{ т.е. } \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

35.2^0 Во реалниот број $x = c, c_1c_2c_3 \ldots c_nc_{n+1} \ldots c_{n+p} \ldots$ **остатокот**

$R_n = 0,\underbrace{00\ldots0}_{n}c_{n+1}c_{n+2}\ldots c_{n+p}\ldots$ е помал или еднаков на $\dfrac{1}{10^n} = 0,\underbrace{00\ldots01}_{n}$.

Доказ.

$$R_n = 0,00\ldots0c_{n+1}c_{n+2}\ldots c_{n+p}c_{n+p+1}\cdots =$$

$$= \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \cdots + \frac{0}{10^n} + \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{c_{n+p+1}}{10^{n+p+1}} + \cdots \leq$$

$$\leq \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{n+p}} + \frac{9}{10^{n+p+1}} + \cdots =$$

$$= \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+1}} \cdot \frac{1}{10} + \cdots + \frac{9}{10^{n+1}} \cdot \frac{1}{10^p} + \cdots =$$

$$\overset{a_1=\frac{9}{10^{n+1}},q=\frac{1}{10})}{=} \frac{\frac{9}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10^{n+1}}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{10^n} \text{ т.е. } R_n \leq \frac{1}{10^n}$$

Во делот 1.30, видовме дека зе секој реален број (ирационален број) $x = c,c_1c_2c_3\ldots c_nc_{n+1}\ldots$ постојат рационални броеви $\underline{x} = c,c_1c_2\ldots c_n$ и $\overline{x} = c,c_1c_2\ldots\overline{c_n+1}$ такви што

$$\underline{x_n} < x < \overline{x_n} \quad \text{т.е.}$$

$$c,c_1c_2\ldots c_{n-1}c_n < c,c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}\ldots c_{n+p}\cdots < c,c_1c_2\ldots c_{n-1}\overline{c_n+1}$$

и притоа $\overline{x_n} - \underline{x_n} = \dfrac{1}{10^n}$.

$\underline{x_n}, \overline{x_n}$– се приближни вредности на x со точност 10^{-n}. Велиме x го заокружуваме со $\underline{x_n}$, $\overline{x_n}$ и притоа пишуваме $x \approx \underline{x_n}$, $x \approx \overline{x_n}$.

Пример. За $x = 5,123456789\ldots$, $\underline{x_5} = 5,12345$, $\overline{x_5} = 5,12346$ и $\underline{x_5}$ и $\overline{x_5}$ се приближни вредности на x со точност 10^{-5}.

Во пракса го користиме следното правило:

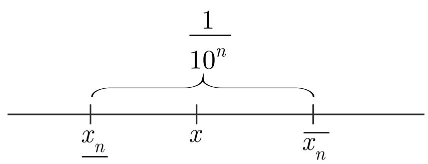
Ако x го заокружуваме со децимален број со n децимали, тогаш:

– ако $0 \leq c_{n+1} < 5$, тогаш $x \approx \underline{x_n}$

– ако $\quad c_{n+1} \geq 5$, тогаш $x \approx \overline{x_n}$

Така $1,2356789\cdots \approx 1,2357$ со точност 10^{-4}.

$1,2356389\cdots \approx 1,2356$ со точност 10^{-4}.



Коментар.

$x - \underline{x_n} = R_n \leq 10^{-n}\Big(= \dfrac{1}{10^n}\Big)$

$\overline{x_n} - x < \overline{x_n} - \underline{x_n} = \dfrac{1}{10^n}$

Значи, и во двата случаи: $x \approx \underline{x_n}$ или $x \approx \overline{x_n}$, разликата меѓу бројот x и приближната негова вредност ($\underline{x_n}$ или $\overline{x_n}$) земена по апсолутна вредност е помала или еднаква на $\dfrac{1}{10^n}$. Во овој случај, велиме грешката што се прави со заокружувањето е помала или еднаква на $\dfrac{1}{10^n}$.

1.36 Природни низи. Бројот e

Пример 1. Во делот за геометриска прогресија се запознавме со идеализирана шема на бесконечно делење на една целина на два дела. За бројот на новодобиените клетки, по чекори, добивме шема од видот размножување на клетка, тогаш

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow \dots$$

т.е. бројот на клетките $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ или $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots, 2^n, \dots$ неограничено и брзо расте.

Но, во практиката овој процес не се одвива според ваква правилна шема. Вообичаено, еден дел од клетките изумира без да даде потомство, другиот дел не се дели во исто време како и другите т.е. доцни со делбата и со размножувањето, и сето ова го забавува растењето 2^n.

Бидејќи во голема маса клетки не е можно да се изброи кои клетки изумираат, а кои навреме не се размножуваат, процесот се разгледува статистички во маса и низ процент.

Нека е констатирано дека од почетната бројност m_0, по некоја единица време, процентот на размножување изнесува $p\%$. Значи имаме зголемување на бројот на клетки, да го означиме со $\triangle m_1$ и

$$\triangle m_1 = p\% \text{ од } m_0 = \frac{p}{100} m_0.$$

Бројот на првата генерација, заедно со новодобиените клетки е

$$m_1 = m_0 + \triangle m_1 = m_0 + \frac{p}{100} m_0 = m_0\Big(1 + \frac{p}{100}\Big)$$

По истекот на втората единица време, ќе имаме ново размножување, и притоа процентот на клетки што се размножуваат обично останува ист. Така, ќе имаме зголемување

$\triangle m_2 = p\%$ од $m_1 = \dfrac{p}{100} \cdot m_1$, а по истекот на втората единица време бројноста на клетките ќе изнесува

$$m_2 = m_1 + \triangle m_2 = m_1 + \frac{p}{100} m_1 = m_1 \Big(1 + \frac{p}{100}\Big) = m_0 \Big(1 + \frac{p}{100}\Big)^2$$

Продолжувајќи вака се добива дека, по истекот од $n-$единици време, бројот на клетки изнесува:

$$m_n = m_0 \Big(1 + \frac{p}{100}\Big)^n \tag{$*$}$$

Забелешка. Заради $p < 100$ следува дека $1 + \dfrac{p}{100} < 1 + 1 = 2$, па бројот на клетки, при реалното размножување, $m_n = m_0\Big(1 + \dfrac{p}{100}\Big)^n < m_0 \cdot 2^n$. Ако $m_0 = 1$ (како при разгледување кај геометриска прогресија), добивме дека растењето на бројноста е помало од 2^n.

Меѓутоа поради големиот број на клетки, практично во секој момент имаме некоја делба и единицата време од $1s$ е премногу груба, преголема, за во неа да можеме да ги сместиме сите процеси на делба. Затоа, единицата време (на пример) од $1s$, мораме да ја делиме на голем број N мали временски интервали (делови од секунда) со времетраење $\dfrac{1}{N}$. Процентот на размножување во текот на овој мал временски интервал од $\dfrac{1}{N}$ не е еднаков на $p\%$, коешто е процентот на размножување за $1s$, туку е пропорционално помал и изнесува $\dfrac{p}{N}\%$.

Така, по истекот на $n-$единици време, бројот на мали временски интервали изнесува $n \cdot N$, процентот на размножување во мал временски интервал изнесува $\dfrac{p}{N}\%$ и по истиот начин на расудување како на почетокот, се добива формула на размножување од ист облик како и $(*)$, но приспособена да прикаже размножување во мали временски интервали со должина $\dfrac{1}{N}$ т.е. важи

$$m_n = m_0 \Big(1 + \frac{p}{100 \cdot N}\Big)^{n \cdot N} \tag{$**$}$$

Сосема слична ситуација на претходниот пример ќе добиеме ако наместо размножување на клетки и мерење на бројност, разгледуваме процес на растење на дрво и мерење на нарастот на дрвото за одредени временски интервали.

Пример 2. Нека m_0 е почетната висина на едно дрво, на пример елка, која се размножува непрекинато. По време од 1 година, констатирана е промена, пораст на оваа висина за $\triangle m_1$.

Обично растењето е многу правилно и изнесува $p\%$ од почетната висина, каде што овој процент p е различен за секој вид дрво.

Така $\triangle m_1 = p\%$ од $m_0 = \frac{p}{100} \cdot m_0$.

На крајот на првата година е измерено

$$m_1 = m_0 + \triangle m_1 = m_0 + \frac{p}{100} m_0 = m_0 \Big(1 + \frac{p}{100}\Big)$$

Втората година започнува со оваа зголемена висина, која продолжува да расте. Дрвото обично расте со исто темпо, т.е. со ист процент од почетната висина, сега m_1. Така,

$\triangle m_2 = p\%$ од $m_1 = \frac{p}{100} \cdot m_1$, па на крај на втората година

$$m_2 = m_1 + \triangle m_2 = m_1 + \frac{p}{100} m_1 = m_1 \Big(1 + \frac{p}{100}\Big) = m_0 \Big(1 + \frac{p}{100}\Big)^2$$

Продолжувајќи на сличен начин, по време од $n-$години, добиваме вкупна висина:

$$m_n = m_0 \Big(1 + \frac{p}{100}\Big)^n \qquad (\triangle)$$

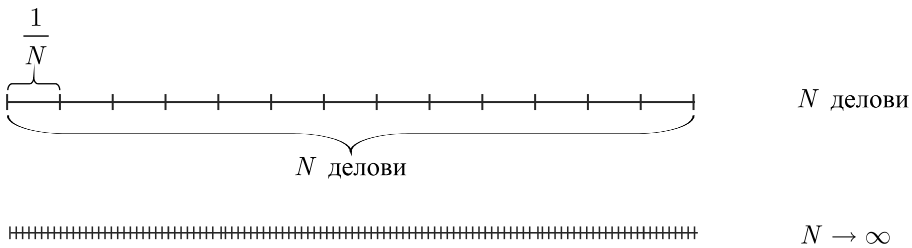
Меѓутоа и овој процес е разгледуван малку неприродно, дисконтинуирано, во скокови од една година. Секоја биомаса расте **непрекинато** т.е. постојано.

Временскиот интервал од 1 година е многу голем, па затоа го делиме на поголем број, на пример N, мали временски интервали во траење од $\frac{1}{N}$. Но сега процентот на растење во текот на овој мал временски интервал, $\frac{1}{N}$, не може да биде еднаков на $p\%$, коешто е годишниот процент на растење, туку е пропорционално помал и изнесува $\frac{p}{N}\%$.

После n години, бројот на мали временски интервали, коишто се со траење од $\frac{1}{N}$, а ги има N во една година, изнесува $n \cdot N$, процентот на растење во еден ваков мал интервал изнесува $\frac{p}{N}\%$ и по истиот начин на расудување како и на почетокот, се добива формула за растење од ист облик како и $(\triangle)$, но приспособена да прикаже растење во мал интервал $\frac{1}{N}$ т.е. важи:

$$m_n = m_0 \Big(1 + \frac{p}{100N}\Big)^{n \cdot N} \qquad \big({}^{\triangle}_{\triangle}\big)$$

Вистински непрекинат процес (и најреална слика) ќе добиеме со операција гранична вредност, кога бројот на малите делови се стреми кон бесконечност, а нивното времетраење кон нулата т.е. $N \to \infty$, $\frac{1}{N} \to 0$.



На овој начин се добива вистинска слика во секој момент. Математички, тоа го правиме со операција **limes** т.е.

$$m_n = \lim_{N\to\infty} m_0\left(1+\frac{p}{100N}\right)^{n\cdot N} \qquad \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\triangle\triangle}{\triangle}\right)$$

Пример 3. Ако на сличен начин разгледуваме едно природно изумирање, на пример на колонија микроорганизми (лишени од храна и светлина), во која почетната бројност на микроорганизмите е m_0 и во текот на првиот временски интервал се намалува за $p\%$, ќе имаме смалена бројност, по истекот на првиот временски интервал, која изнесува

$$m_1 = m_0 - \triangle m_1 = m_0 - \frac{p}{100}m_0 = m_0\left(1-\frac{p}{100}\right)$$

На сличен начин, по истекот на вториот временски интервал, имајќи предвид дека намалувањето (умирањето) на микроорганизмите процентуално е исто (по еден временски период), се добива дека би имале

$$m_2 = m_1 - \triangle m_2 = m_1 - \frac{p}{100}\cdot m_1 = m_1\left(1-\frac{p}{100}\right) = m_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^2.$$

По некое време од n единици временски интервали се добива дека бројот на микроорганизми изнесува:

$$m_n = m_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^n \qquad (*)$$

Забелешка. Слични вакви формули се добиваат при трошење на активна материја во тек на која било хемиска реакција, во процес на радиоактивно распаѓање и други процеси од ваков тип.

Меѓутоа, и овде процесите се непрекинати, постојани, не во скокови, па затоа за точно да ги опишеме, временските интервали се делат на N-мали временски интервали, со времетраење од $\frac{1}{N}$, притоа, после $n-$временски интервали ќе имаме $n\cdot N$ мали временски интервали, процентот на намалување за мал временски интервал ќе биде $\frac{p}{N}\%$ и формулата ќе гласи

$$m_n = m_0\left(1-\frac{p}{100N}\right)^{n\cdot N} \qquad (**)$$

Оваа формула е подобра слика, во смисла на реална претстава за процесот, но најдобра односно најреална претстава се има ако бројот на малите временски интервали се зголемува, т.е. тие се сé помали, па се добива претстава во **секој момент**. Математички, тоа е опишано со процесот на гранична вредност т.е.

$$m_n = \lim_{N\to\infty} m_0 \Big(1 - \frac{p}{100N}\Big)^{n\cdot N} \qquad (***)$$

Да ги разгледаме сите претходни примери и да ги споредиме. Во сите нив величините m_0, p, n се постојани, а се менува само N т.е. имаме промени од облик:

$$\Big(1 + \frac{1}{N}\Big)^N \quad \text{и} \quad \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^N, \quad \text{и во кои пуштаме} \quad N \to \infty.$$

За $N = n \in \mathbb{N}$ проучувањето на овие природни процеси и многу други, слични на нив, се сведува на проучување на низите

$$a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \quad \text{и} \quad b_n = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^n.$$

Овие низи се нарекуваат **природни низи**. Низата $\{a_n\}$ е низа на природно растење, а $\{b_n\}$ е **низа на природно умирање**.
Да ја разгледаме првата низа $\{a_n\}$.
Прво ќе запишеме и пресметаме неколку нејзини членови:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \Big(1 + \frac{1}{1}\Big)^1 = 2^1 = 2\\
a_2 &= \Big(1 + \frac{1}{2}\Big)^2 = \Big(\frac{3}{2}\Big)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} = 2,25\\
a_3 &= \Big(1 + \frac{1}{3}\Big)^3 = \Big(\frac{4}{3}\Big)^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27} = 2,36\\
a_4 &= \Big(1 + \frac{1}{4}\Big)^4 = \Big(\frac{5}{4}\Big)^4 = \frac{625}{256} = 2\frac{113}{256} = 2,48\\
&\vdots\\
a_{10} &= \Big(1 + \frac{1}{10}\Big)^{10} = \cdots = 2,68\\
&\vdots\\
a_{100} &= \Big(1 + \frac{1}{100}\Big)^{100} = \cdots = 2,72\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Забележуваме дека сите членови на низата што ги запишавме се во растечки редослед, но ни одблиску толку брзо како што е растењето на членовите од низата $\{2^n\}$. Исто така сите пресметани членови се помали од 3. Овие својства важат за сите членови на низата и тоа ќе го докажеме. За таа цел, низата ја развиваме по Њутнова биномна формула. Добиваме

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}1^{n-2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}1^{n-3}\frac{1}{n^3} + \dots$
$\dots + \binom{n}{k}1^{n-k}\frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n}1^{n-n}\frac{1}{n^n} = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \dots +$
$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\frac{1}{n^n} =$
$1+1+\frac{1}{2!}1\cdot(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{k!}1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-$
$\frac{k-1}{n}) + \dots + \frac{1}{n!}1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n}) < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+$
$\frac{1}{k!}+\dots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{k-1}}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} =$
$1+2(1-\frac{1}{2^n}) = 1+2-\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$

Значи,

$$a_n < 3, \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Во продолжение ќе докажеме дека низата монотоно расте. Постапувајќи како погоре, добиваме дека

$$a_{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\dots(1-\frac{k-1}{n+1}) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\dots(1-\frac{n-1}{n+1}) +$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\dots(1-\frac{n+1-1}{n+1}).$$

Бидејќи $n < n+1$, следува $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, па за секој $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ имаме дека важи $\frac{k}{n} > \frac{k}{n+1}$ т.е.

$$1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1}, \quad k \in \{1,2,\dots,n-1\} \tag{2}$$

Исто така точно е

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n+1-1}{n+1}\right) > 0 \tag{3}$$

Користејќи ги (2) и (3), за a_{n+1} ја добиваме следната оценка

$$a_{n+1} \overset{(3)}{>} 1+1+\frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)+\frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)+\cdots+\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\ldots\Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big)+\cdots+\frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\ldots\Big(1-\frac{n-1}{n+1}\Big) \overset{(2)}{>} 1+1+\frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+\frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)+\cdots+\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)+\cdots+\frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big)=a_n \text{ т.е.}$$

$$a_{n+1} > a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Докажавме дека низата $\{a_n\}$ е ограничена од горе и монотоно расте, што значи дека $\{a_n\}$ е **конвергентна низа** т.е. постои

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Овој лимес го означуваме со e т.е.

$$e \overset{df}{=} \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Од доказот е јасно дека $e < 3$, бидејќи $a_n = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, па значи и $e < 3$.

Од друга страна: $a_n = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n > a_{n-1} > a_{n-1} > \cdots > a_1 = (1+\dfrac{1}{1})^1 = 2$ т.е. $a_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, па значи дека $e > 2$ т.е. бројот **e** што го дефиниравме како $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n$ е број помеѓу 2 и 3 т.е. $2 < e < 3$. Се покажува дека $e \in \mathbb{I}$.

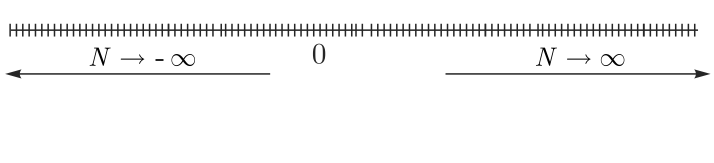
Втората низа $\{b_n\}$ може да ја разгледуваме на ист начин како и првата, со развивање со Њутнова биномна формула и оценување. Ќе добиеме дека $0 \le b_n < 1$ и $b_{n+1} > b_n$ т.е. $\{b_n\}$ е ограничена и монотоно растечка, па според тоа и конвергентна. Меѓутоа ние тоа ќе го направиме, полесно, сведувајќи ја $\{b_n\}$ на $\{a_n\}$ на следен начин:

$$b_n = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n = \Big[\Big(1+\frac{1}{(-n)}\Big)^{(-n)}\Big]^{(-1)}$$

Ставајќи $-n = N$, и $n \to \infty$ ќе повлече $N \to -\infty$, па добиваме

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{N\to-\infty}\Big[\Big(1+\frac{1}{N}\Big)^N\Big]^{(-1)} = \Big[\lim_{N\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{N}\Big)^N\Big]^{(-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Забелешка. Со оваа замена, всушност проблемот од цели позитивни броеви го префрламе на цели негативни броеви т.е. броевите n ги "преименуваме" во $-n$ и



процесот $n \to \infty$ се заменува со процес $N \to -\infty$ т.е. во спротивна насока, но суштината останува иста.

Сега, да се вратиме на последната формула од нашите примери т.е. на $\binom{\triangle\triangle}{\triangle}$ и $(***)$. Имаме

$$m_n = \lim_{N\to\infty} m_0 \left(\left(1 + \frac{p}{100 \cdot N}\right)^{\frac{100N}{p}} \right)^{\frac{p}{100} \cdot n}.$$

Ставајќи $\dfrac{p}{100N} = \dfrac{1}{T}$, $N \to \infty$, $T \to \infty$, добиваме

$$m_n = m_0 \lim_{T\to\infty} \left[\left(\left(1 + \frac{1}{T}\right)^T \right)^{\frac{p}{100} \cdot n} \right] =$$

$$= m_0 \left[\left(\lim_{T\to\infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^T \right) \right]^{\frac{p}{100} \cdot n} = m_0 e^{\frac{p}{100} n}$$

т.е. го добиваме **Малтусовиот закон** за природно растење без отпори, односно

$$m_n = m_0 e^{kn}, k = \frac{p}{100} \text{е коефициент на природно растење.}$$

Слично се добива законот на природно умирање:

$$m_n = \lim_{N\to\infty} m_0 \left(1 - \frac{p}{100N}\right)^{n \cdot N}$$
$$= m_0 \left(\lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{p}{100N}\right)^{\frac{100N}{p}} \right)^{\frac{p}{100} n}$$
$$= m_0 \left(\lim_{T\to\infty} \left(1 - \frac{1}{T}\right)^T \right)^{\frac{p}{100} n} = m_0 (e^{-1})^{\frac{p}{100} n} =$$
$$= m_0 e^{-\frac{p}{100} n}$$

т.е.

$$m_n = m_0 e^{-kn}, \ \ k = \frac{p}{100}.$$

1.37 Теорема за пресметување на бројот e

37.1^0 Редот од реципрочни факториели е конвергентен и неговата гранична вредност е **e** т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) =$$
$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\dots$$

Користејќи го 37.1^0 и собирајќи ги:

$1 = 1,00000,\ \frac{1}{1!} = 1,00000,\ \frac{1}{2!} = 0,50000,\ \frac{1}{3!} \approx 0,16667^+$

$\frac{1}{4!} \approx 0,04167^+,\quad \frac{1}{5!} \approx 0,00833^-,\quad \frac{1}{6!} \approx 0,00139^+,\quad \frac{1}{7!} = 0,00019^-,$

добиваме приближна вредност за **e** еднаква на $2,71825$, со точност 10^{-5}.

2

РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

2.1 Основни поими

Во природата зависноста на една величина од друга (или повеќе други величини) е многу честа појава.

При изучувањето на процеси во биолошки, хемиски, технички и други науки се сретнуваме со величини кои се менуваат во текот на разгледуваниот процес. При тоа со менување на едната величина се менува и другата која е во зависност од првата.

Пример 1. Познато е дека плоштината P на квадрат со страна a изнесува a^2. Така, квадратите со поголеми страни имаат и поголеми плоштини, што значи дека плоштината на квадратот т.е. величината P зависи од должината на страната на квадратот т.е. од величината a. Велиме, P е функција од a.

Пример 2. При слободно паѓање на тело, познато е дека изминатиот пат S се пресметува со формулата $s = \dfrac{gt^2}{2}$, каде g е фиксен број (константа), а t е изминатото време за кое е поминат патот s. Значи, изминатиот пат т.е. величината s зависи од времето т.е. од величината t. Велиме, s е функција од t.

Пример 3. Малтусовиот закон на растење:

$$m(t) = m_0 e^{kt}$$

каде k е константа на популацијата, t е време, m_0 е популациска бројност на почетокот на разгледуваниот процес на размножување на популацијата.

Да се потсетиме: ако D и K се две дадени множества, тогаш секое пресликување од D во K се нарекува функција на D.

Дефиниција. Нека D и K се две дадени множества. Ако на секој елемент x од D, според некој определен закон (правило), му е придружен точно еден елемент y од K, тогаш велиме дека на D

е зададена (определена) функција, f, и пишуваме $y = f(x)$, $x \in D$ или $f : x \to y$.

Функциите најчесто ги означуваме со мали латински букви.

Множеството D се нарекува **дефинициона област**, **област на определеност на функцијата** или **домен**, а множеството K се нарекува **кодомен**.

За елементот $x \in D$, кој се менува независно во D, велиме дека е **независно променлива величина** или **аргумент**, а елементот y којшто му е придружен на x, и се менува во зависност од менувањето на елементот x, го нарекуваме **зависно променлива величина** или **слика на x при f**.

Множеството $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$ се нарекува **слика на D при** f. Јасно, $f(D) \subseteq K$.

Во продолжение, ќе работиме со функции зададени на множества D кои што се подмножества од множеството реални броеви $\mathbb{R}$ и чиишто слики $f(D)$ се исто така подмножества од $\mathbb{R}$.

Таквите функции ги викаме **реалнозначни функции од реални променливи**, или кратко **реални функции**.

Во природните процеси, како што видовме, постојат зависности на една величина од друга величина и притоа природата на величините е различна, но секоја величина се карактеризира со својот мерен број, којшто е реален број, па така може да се смета дека зависноста, т.е. функциите што се јавуваат во природните процеси се реални функции.

Во примерот 1, функцијата $P = a^2$, која е зададена конкретно има исто правило на пресликување како и функцијата $y = x^2$, каде $x, y \in \mathbb{R}$. Овде меѓутоа треба да ја забележиме и можната разлика меѓу конкретно зададената функција и апстрактната функција што и кореспондира на конкретната. Така, функцијата $P = a^2$ е дефинирана само за $a > 0$, т.е. нејзината дефинициона област е $(0, +\infty)$, бидејќи величината должина на отсечка има мерен број, којштo е позитивен. Функцијата $y = x^2$ е дефинирана за секој реален број.

Една функција е определена ако е зададена нејзината дефинициона област, кодоменот и **законот (правилото)** по кое се определуваат вредностите на функцијата за сите вредности на независно променливата.

Забелешка. Ако една реална функција е зададена само со законот (правилото) на придружување, т.е. $y = f(x)$, тогаш ќе сметаме дека дефиниционата област на функцијата f се состои од сите реални броеви x, за кои равенството $y = f(x)$ има математичка смисла. Притоа, кодомен не таа функција ќе го сметаме множеството реални броеви.

Пример 4. Реалната функција $f(x) = \dfrac{1}{x}$ има дефинициона област

$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ т.е. $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$, бидејќи делењето со 0 нема математичка смисла.

Пример 5. а) Ако реалната функција е зададена со правилото $g(x) = \sqrt{1-x}$, тогаш дефиниционата област на оваа функција g е $D_f = (-\infty, 1]$, бидејќи коренување на негативен број нема математичка смисла.

б) Ако $f(x) = x^2 + 2x + 3$, тогаш изразот има смисла за секој реален број, па $D_f = \mathbb{R}$.

в) Кај $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-5x+6}$ изразот има смисла за сите реални броеви x, за кои важи $x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Од $x^2 - 5x + 6 = 0$ ако и само ако $x = 2$ или $x = 3$, следува дека $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$.

г) Ако $f(x) = \frac{x^2}{|x|-1}$, изразот има смисла за сите реални броеви x, за кои важи $|x| - 1 \neq 0$. Од $|x| - 1 = 0$ ако и само ако $x = -1$ или $x = 1$, па следува дека $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

д) Дефиниционата област на $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ е $\mathbb{R}$, бидејќи изразот има смисла за секој реален број.

ѓ) Кај $f(x) = \sin\left(x^2 + 1\right)$, изразот има смисла за секој реален број, па $D_f = \mathbb{R}$.

е) За $f(x) = \sqrt{2^{x-1}}$, изразот има смисла за секој реален број, бидејќи $2^{x-1} > 0$, за секој реален број x, па $D_f = \mathbb{R}$.

ж) Ако $f(x) = \frac{x-1}{e^{\frac{1}{x}}}$, тогаш изразот има смисла за сите реални броеви x, за кои важи $x \neq 0$, па следува дека $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Ако правилото (законот) на функциите е даден со некоја формула, како што беше случај со погоре изнесените примери, или описно со зборови, велиме дека функцијата е зададена **аналитички**.

Притоа, можно е законот на придружување да биде даден со повеќе од еден аналитички израз. На пример, ако

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \, x \geq 0 \\ x^3, \, x < 0 \end{cases}$$

тогаш законот е даден со два аналитички изрази и притоа: ако $x \geq 0$, соодветните вредности за y, се пресметуваат по формулата $y = x^2$, а ако $x < 0$, соодветните вредности за y, се пресметуваат по формулата $y = x^3$.

Во експерименталните науки, најчесто се сретнуваат функции зададени **со шеми**, како што е следниот пример:

Пример 6. Нека y е температура на болен, а x е времето во кое таа температура се мери. При мерење на температурата нека се добиени следните податоци:

$x = 7h$, $y = 40°C$

$x = 8h$, $y = 39,5°C$

$x = 9h$, $y = 39°C$

$x = 10h$, $y = 39,5°C$

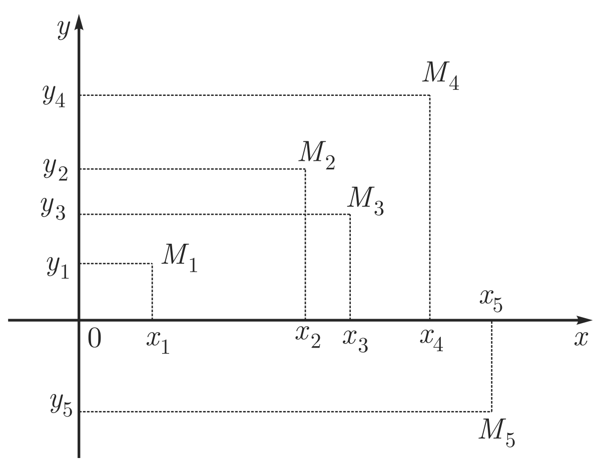
$x = 11h,\ y = 40°C$
$x = 12h,\ y = 40°C$
$x = 13h,\ y = 39,5°C$
$x = 14h,\ y = 39°C.$

На овој начин е определена функција $y = f(x)$, каде независно променливата x се менува во множеството $D = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ и соодветните вредности на y може лесно да се прочитаат од следнава шема:

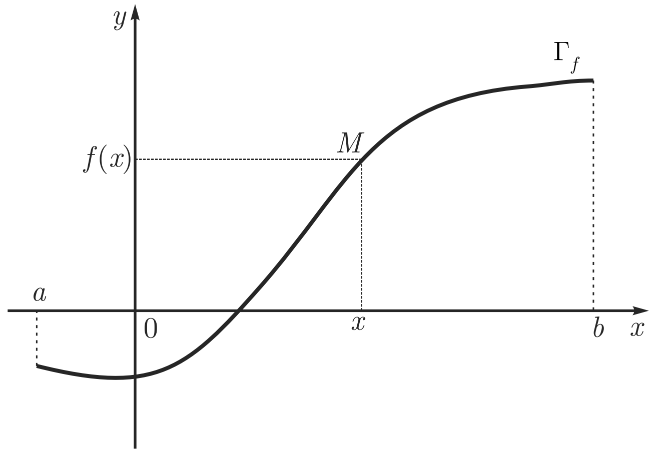
x	7	8	9	10	11	12	13	14
y	40	39,5	39	39,5	40	40	39,5	39

Една функција може да биде зададена и **графички**. **График** на функцијата f со дефинициона област D е множеството подредени парови $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in D\}$. Па, ако во рамнината е избран Декартов правоаголен координатен систем xOy, во однос на него може да се нанесат точките $(x, f(x))$ од Γ_f и тогаш велиме дека функцијата $y = f(x)$ е зададена **графички**.

Пример 7. Ако $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, а $y_i = f(x_i)$, за $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, се вредностите на функцијата $y = f(x)$ во секоја од точките x_i од D, тогаш точките $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_1, y_2), \ldots,$ $M_5 = (x_5, y_5)$ го образуваат графикот на $y = f(x)$.



Пример 8.



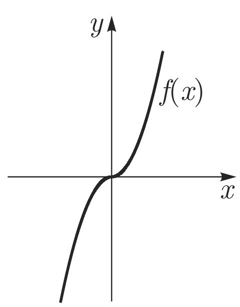
На цртежот во пример 8 непрекинатата крива линија е график на функција $y = f(x)$ со дефинициона област $D = [a, b]$. Значи, графикот на една функција може, но не мора, да биде непрекината линија. Важни видови функции се оние чии графици се состојат од една или повеќе непрекинати линии.

Графикот на една функција е многу добро нагледно средство за нејзиното запознавање, па затоа ние секогаш ќе се стремиме дадените функции да ги претставуваме и графички.

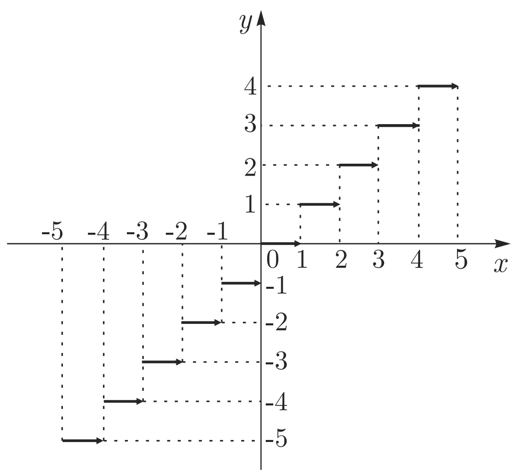
Пример 9. Скицирај го графикот на функцијата, зададена со законот а) $y = x\,|x|$.

б) $y = [x]$, каде $[x]$ го означува целиот дел од x, т.е. најголемиот цел број што не е поголем од x.

Решение. а) Користејќи ја дефиницијата за апсолутната вредност, добиваме дека $D_f = \mathbb{R}$ и $f(x) = \begin{cases} x^2, \; x \geq 0 \\ -x^2, \; x < 0 \end{cases}$, па така, знаејќи ги графиците на x^2 и $-x^2$, добиваме дека графикот на нашата функција е:



б) Дефиниционата област на функцијата е целото множество на реални броеви и притоа $f(x) = \begin{cases} n, \; x \in [n, n+1) \\ -n-1, \; x \in [-n-1, -n) \end{cases}$, за секој природен број n. Од овде следува дека графикот на дадената функција е:



Забелешка. При скицирање на графикот на функции, како во б) од претходниот пример, употребуваме стрелка за да се каже дека во таа точка вредноста на функцијата не е во стрелката, туку во другиот дел од кривата. Така, во овој пример, $f(1) = 1$ а не $f(1) = 0$.

Дефиниција. За две функции f и g се вели дека се **еднакви** ако се еднакви нивните графици т.е. ако $\Gamma_f = \Gamma_g$. Пишуваме $f = g$.

Од $\Gamma_f = \Gamma_g$ добиваме $\{(x, f(x))|x \in D_f\} = \{(x, g(x))|x \in D_g\}$ каде D_f и D_g се дефинициони области на f и g, соодветно. Одовде имаме дека $D_f = D_g$ и $f(x) = g(x)$ за секој $x \in D_f = D_g$.

Значи $f = g$ ако f и g имаат иста дефинициона област, ист кодомен и исто правило на придружување.

Пример 10. Дали се еднакви функциите f и g, ако:

а)$f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = x$,

б)$f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = |x|$,

в) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x, g(x) = \cos(2x)$

г) $f(x) = \frac{x^2}{x}, g(x) = x$.

Решение. а) Заради $f(-1) = 1$ и $g(-1) = -1$ следува дека функциите немаат исто правило, па не се еднакви. Притоа имаат ист домен и кодомен, множеството реални броеви.

б) Да, затоа што имаат исто правило, домен и кодомен.

в) Како б), и овие функции се еднакви.

г) Дефиниционата област на f е $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, а на g е $\mathbb{R}$, па функциите не се еднакви.

Дефиниција. Бројот $x_0 \in D_f$ за кој важи $f(x_0) = 0$ се нарекува **нула на функцијата** $y = f(x)$, $x \in D_f$.

Ако x_0 е нула на функцијата $y = f(x)$, тогаш $(x_0, 0) \in \Gamma_f$. Значи графикот на функцијата ја сече x-оската во точките чии први координати се нулите на функцијата.

Пример 11. Определи ги нулите на функцијата f, ако:

а) $f(x) = x^2 + x - 2$;

б) $f(x) = \ln(1 - 2x)$;

в) $f(x) = \cos(2x + 1)$;

г) $f(x) = 3^{x+3}$.

Решение.

а) Функцијата $f(x)$ е определена на множеството реални броеви и има нули за оние вредности на x, за кои важи $x^2 + x - 2 = 0$, па нули на функцијата се корените на квадратната равенка $x^2+x-2 = 0$, а тоа се $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$;

б) $D_f = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ и $x_0 = 0$ е нула на функцијата $f(x)$;

в) $D_f =\mathbb{R}$ и броевите $x_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)+k\frac{\pi}{2},\ k \in\mathbb{Z}$ се нули на функцијата;

г) $D_f =\mathbb{R}$, а бидејќи $3^{x+3} > 0$, за секој реален број x, следува дека функцијата нема нули.

2.2 Збир, разлика, производ, количник на функции, производ на функција со реален број, сложена функција

Нека f и g се две зададени функции на исто множество D. Тогаш може да определиме нови функции на D на следниот начин:
Збир, $f + g$, е функција дефинирана со

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in D$$

Разлика, $f - g$, е функција дефинирана со

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in D$$

Производ, $f \cdot g$, е функција дефинирана со

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$$

Количник, $\dfrac{f}{g}$, е функција дефинирана со

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D$$

Да забележиме дека при дефинирање на количник, претпоставуваме дека функцијата g е таква што $g(x) \neq 0$, за секој $x \in D$.

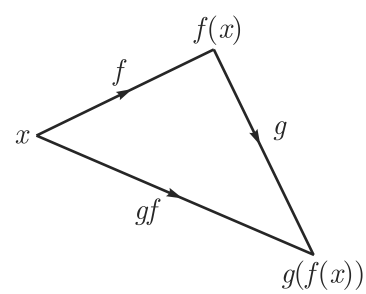
Ако f е произволна функција на D, а g е константна функција на D т.е. $g(x) = c, x \in D$ каде $c \in \mathbb{R}$, тогаш производот $f \cdot g$ е всушност производ на функција со реален број т.е.

$$(cf)(x) = c \cdot f(x), x \in D.$$

Нека f е функција дефинирана на D, а g е функција дефинирана на множество E, $E \supseteq f(D)$. Тогаш на D може да се дефинира **композиција (сложена функција)**, gf, на следен начин:

$$(gf)(x) = g(f(x)), x \in D.$$

Шематски:



Пример 1. Нека $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ а $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$. Тогаш $(gf)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$, а $(fg)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2, x \in \mathbb{R}$

2.3 Инверзна функција

Нека f е дадена функција со дефинициона област D и множество слики $F = f(D)$. Ако ставиме $x = g(y)$ секогаш кога $y = f(x)$, ќе добиеме ново придружување, сега, на елементите од F. Се поставува прашање: дали ваквото придружување е функција со дефинициона област F и множество слики D. Одговорот на ова прашање е потврден само ако функцијата f е таква што различни елементи од D, при f, имаат различни слики во F, т.е. од $x \neq y$, $x, y \in D$ следува $f(x) \neq f(y)$, односно ако f е инјекција.

Во спротивно, ако постојат $x, y \in D$, $x \neq y$ за кои $f(x) = f(y) = z$, се добива дека елементот z од F би имал две различни придружувања x и y.

Да забележиме дека, и вториот услов за едно придружување да биде функција, е исполнет, бидејќи придружувањето g го дефинираме на елементи од множеството $F = f(D) = \{f(x) | x \in D\}$. Така, секој елемент од F има свој придружник со веќе дефинирано придружување.

Заклучуваме дека вака дефинирано придружување g е функција на $F = f(D)$ само ако f е инјекција на D (Да забележиме дека преликувањето f е и сурјекција, па и биекција). Множеството вредности (слики) на g е D. Во овој случај велиме дека функцијата f има инверзна функција g и g ја означуваме со f^{-1}.

Ако со I ја означиме идентичната функција, т.е. $I(x) = x$, $x \in D$, тогаш ако f^{-1} е инверзна за f добиваме дека е точно равенството:

$$f^{-1}f = I_D \text{ и } ff^{-1} = I_F.$$

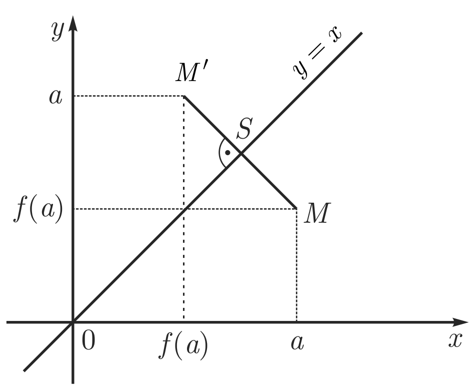
Навистина, за $x \in D$, $(f^{-1}f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_D(x)$ и за $y \in F$, $\left(ff^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y = I_F(y)$

Во практиката, ако функцијата f има инверзна функција f^{-1}, тогаш ако $f(x) = y$, ставаме $f^{-1}(y) = x$. Значи, равенката $f(x) = y$ ја решаваме по x и добиваме зависност $x = f^{-1}(y)$, па $f^{-1} : x \to g(x)$ е инверзната функција за функцијата f.

Пример 1. Функцијата $f : x \to x^3$ има инверзна бидејќи од $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ се добива $x^3 \neq y^3$, т.е. $f(x) \neq f(y)$. Да ја најдеме f^{-1}.

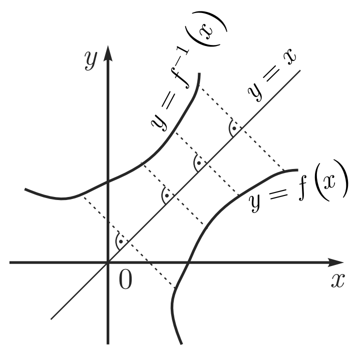
Од $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y} = f^{-1}(y)$ добиваме дека $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ е инверзна за $f(x) = x^3$.

Се прашуваме каков однос постои меѓу графиците на една функција и нејзината инверзна функција? Ако f е дадена функција и Γ_f е график на f, и ако $M(a, f(a)) \in \Gamma_f$ тогаш $M'(f(a), a) \in \Gamma_{f^{-1}}$.



Се докажува геометриски дека точките M и M' се симетрични во однос на симетралата на I и III квадрант. т.е. **правата** $y = x$ е нормална на MM' и ако S е нивна прсечна точка, тогаш $\overline{M'S} = \overline{MS}$. Значи графикот на инверзната функција е симетричен со графикот на функцијата во однос на симетралата на првиот и третиот квадрант т.е. правата $y = x$.

Пример 2.



2.4 Парност на функција

Нека f е дадена функција со дефинициона област D и нека D е симетрично множество во однос на координатниот почеток, т.е. од $x \in D$ следува $-x \in D$.

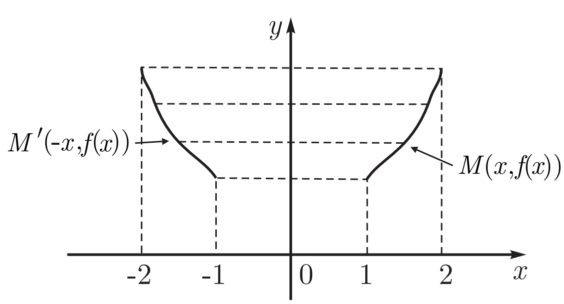
За функцијата f велиме дека е **парна** ако е исполнет условот $f(-x) = f(x)$, за секој $x \in D$.

За функцијата f велиме дека е **непарна** ако е исполнет условот $f(-x) = -f(x)$, зе секој $x \in D$.

Во општ случај, кога функцијата $f(x)$ е парна, точките $M(x, f(x))$ и $M'(-x, f(x))$, за секое $x \in D_f$, коишто се симетрични во однос на $y-$оската, истовремено припаѓаат на графикот на функцијата, од каде што следува дека графикот на парната функција е симетричен во однос на $y-$оската.

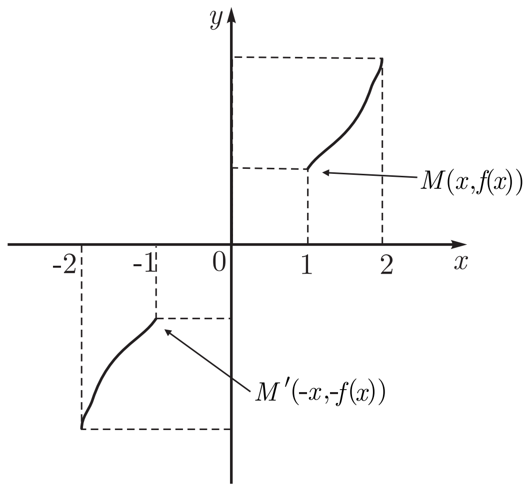
Слично, графикот на непарна функција е симетричен во однос на координатниот почеток, бидејќи, за секое $x \in D_f$, точките $M(x, f(x))$ и $M'(-x, -f(x))$ коишто се симетрични во однос на координатниот почеток, истовремено припаѓаат на графикот на функцијата.

Пример 1.



$D = [-2, -1] \cup [1, 2]$. Се забележува дека графикот на парна функција е симетричен во однос на y-оската.

Пример 2.

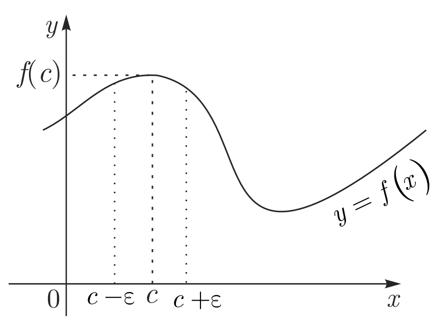


Се забележува дека графикот на непарна функција е симетричен во однос на координатниот почеток.

2.5 Локални екстреми на функција

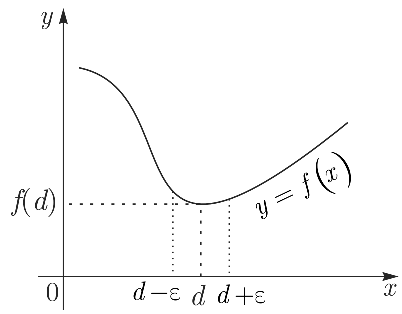
Дефиниција 1. Функцијата $y = f(x)$, $x \in D$, има **локален максимум** во точката $c \in D$, ако постои $\varepsilon-$околина $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ на c, таква што $f(x) < f(c)$ за сите $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap D$, $x \neq c$.

Графички:



Дефиниција 2. Функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ има **локален минимум** во точката $d \in D$, ако постои $\varepsilon-$околина, $(d-\varepsilon, d+\varepsilon)$, на точката d, таква што $f(x) > f(d)$ за сите $x \in (d-\varepsilon, d+\varepsilon) \cap D, x \neq d$.

Графички:



Ако функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ има било локален минимум било локален максимум во точката $x = x_0 \in D$, тогаш велиме дека $x = x_0$ е точка на **локален екстрем**.

Пример 1. Определи ги локалните екстреми (ако постојат) на функцијата $f(x)$, зададена со:

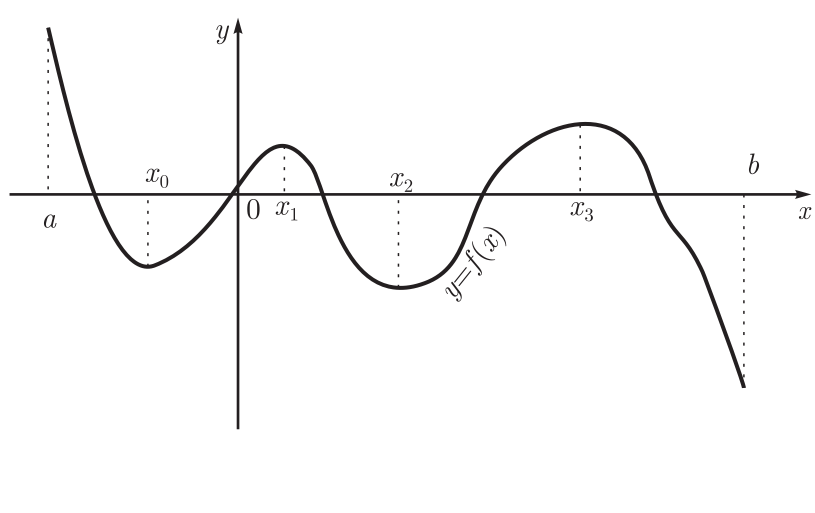
а) $f(x) = -x^2 + 2x - 5$; б). $f(x) = |x - 1|$.

Решение.

а) Од $f(x) = -x^2 + 2x - 5 = -(x-1)^2 - 4 \leq -4 = f(1)$, за сите $x \in D_f = R$, следува дека функцијата $f(x)$ има максимум во точката $x = 1$, еднаков на -4.

б) Од $f(x) = |x - 1| \geq 0 = f(1)$, за сите $x \in D_f = R$, следува дека функцијата $f(x)$ има минимум во точката $x = 1$, еднаков на 0.

Забелешка. Зборот локален во термините локален минимум и локален максимум произлегува од потребата да се нагласи дека тоа се најмалата, односно најголемата вредност на функцијата во околина на дадена точка, а не на целата дефинициона област. Така, на следниов цртеж гледаме дека вредноста $f(a)$ е поголема од вредностите на локалните максимуми $f(x_1)$ и $f(x_3)$, а вредноста $f(b)$ е помала од вредноста на локалниот минимум $f(x_2)$.



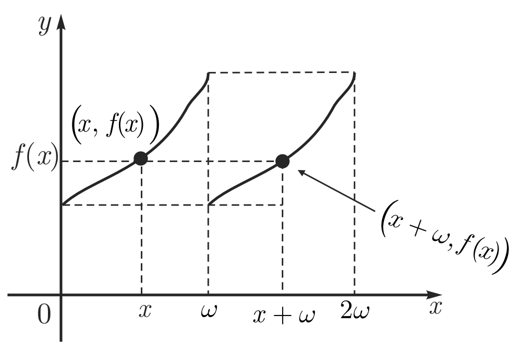
2.6 Периодичност на функција

За функцијата f зададена на множеството D, велиме дека е **периодична** ако постои реален број ω, $\omega \neq 0$ таков што $f(x+\omega) = f(x)$, за секој $x \in D$. Притоа множеството D го има својството: од $x \in D$ да следува $x + \omega \in D$.

Се докажува дека ако f е периодична функција тогаш важи $f(x+n\omega) = f(x)$, за секој цел број n и секој $x \in D$.

Најмалиот позитивен број ω (ако постои) со својството $f(x+\omega) = f(x)$, $x \in D$, се нарекува **период** на функцијата f.

Така, ако f е периодична функција со период ω, од $(x, f(x)) \in \Gamma_f$ следува $(x+\omega, f(x)) \in \Gamma_f$, од каде се добива дека за да се нацрта график на периодична функција доволно е да се нацрта график во $[0, \omega]$, а потоа со транслација за ω по x-оската се доцртува целиот график.

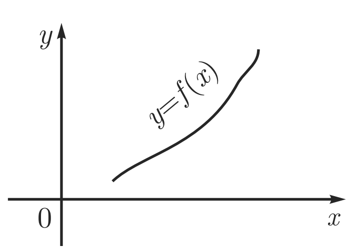


2.7 Монотоност на функција

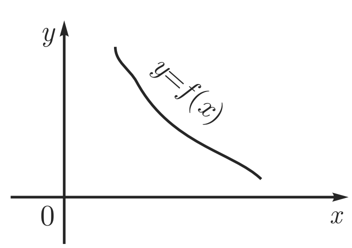
За функцијата f велиме дека е **(строго) монотоно растечка** на множеството D, ако од $x_1, x_2 \in D$ и $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) < f(x_2)$.

За функцијата f велиме дека е **(строго) монотоно опаѓачка** на множеството D, ако од $x_1, x_2 \in D$ и $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) > f(x_2)$.

Монотоно растечка и монотоно опаѓачка под заедничко име се викаат **монотони функции**.



растечка функција



опаѓачка функција

Пример 1. $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ е строго монотоно растечка бидејќи од $x_1 < x_2$ следува $x_1^3 < x_2^3$.

Теорема 3. Нека f е монотоно растечка функција на D и $F = f(D)$. Тогаш f има инверзна функција f^{-1} која е дефинирана на F и која е исто така монотоно растечка функција.

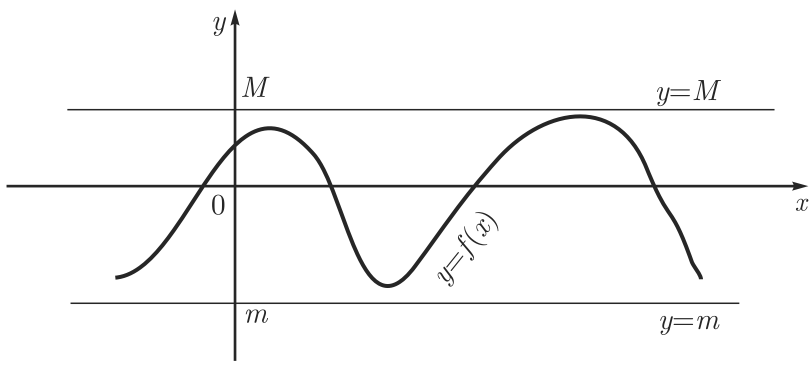
Јасно, слична теорема важи и за монотоно опаѓачка функција на D.

2.8 Ограниченост на функција

За функцијата f дефинирана на множеството D велиме дека е **ограничена** ако е ограничено множеството слики на D, $f(D)$, т.е. ако постојат реални броеви m и M такви што

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{за секој } \; x \in D.$$

Графикот на ограничена функција се наоѓа меѓу две хоризонтални прави $y = m$ и $y = M$ т.е.

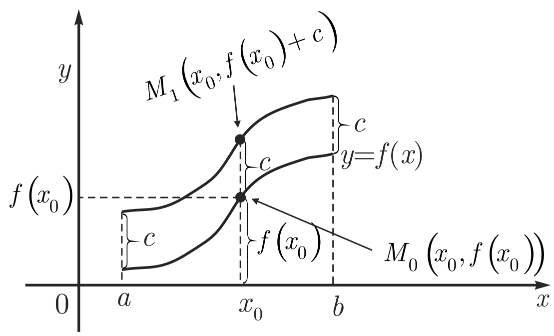


Условот за ограниченост на $y = f(x)$ може да се замени со постоење на позитивен број K така што важи:

$$|f(x)| \leq K, \;\text{ за секој } x \in D.$$

2.9 Скицирање графици на функции со помош на графиците на некои основни елементарни функции

I. Нека $\Gamma_f = \{(x, f(x))|x \in D\}$ е график на некоја функција, зададена на множество D, во координатен систем xOy.



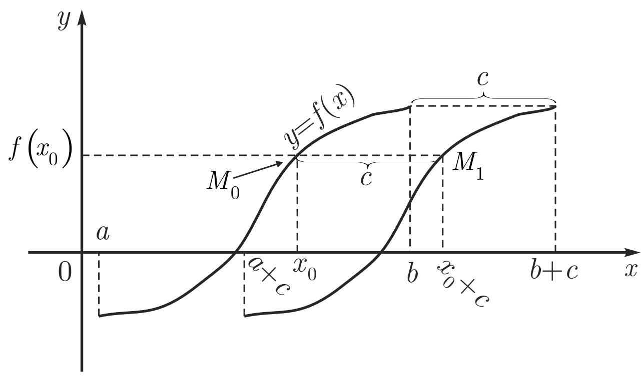
Се поставува прашањето дали постои врска меѓу графикот на функцијата $g(x)$, каде $g(x) = f(x)+C$, $x \in D$ и C-дадена реален број и графикот на функцијата $f(x)$, $x \in D$.

Ако $M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma_f$, тогаш $M_1(x_0, f(x_0) + C) \in \Gamma_g$. Тоа значи дека M_1 има иста $x-$координата со M_0 додека $y-$координатата на M_1 се добива кога на $y-$координатата на M_0 ќе се додаде реалниот број C, што покажува дека точката M_1 се добива со транслација (поместување) на точката M_0, по права паралелна со $y-$оската, за C единици. Ова важи за секоја точка од графикот на f, па заклучуваме дека графикот Γ_g се добива со транслација (поместување) на графикот Γ_f, по права паралелна со y-оската, за c-единици.

Забелешка. Графикот, Γ_g, на функцијата $y = g(x)$, $g(x) = f(x) + b$, каде b е даден реален број се добива со транслација на графикот Γ_f во правец на $y-$оската за $|b|$ единици и, притоа, ако $b > 0$, поместувањето е во позитивната насока на $y-$оската, а ако $b < 0$, поместувањето е во негативната насока на $y-$оската.

II. Нека $\Gamma_f = \{(x, f(x))|x \in D\}$ е график на некоја функција, зададена на множеството D, во координатен систем xOy.

И овде се поставува прашање како се однесува графикот Γ_h, на функција $h(x) = f(x - c)$, во однос на Γ_f, графикот на фукцијата f, каде c-даден реален број.

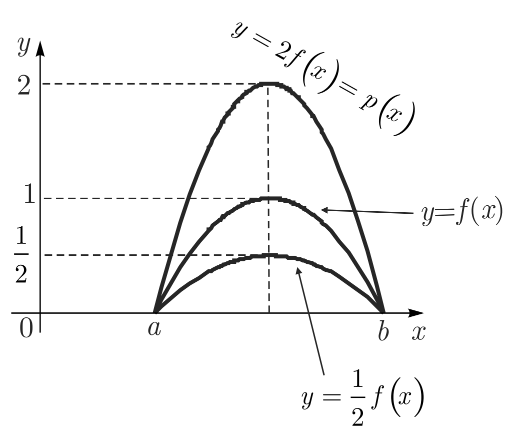


Прво да ја определиме која е дефиниционата област на h. Бидејќи $h(x) = f(x-c)$, а дефинициона област на f е D, следува дека $x-c \in D$, т.е. $x \in c+D = \{c+z|z \in D\}$ па дефиниционата област на h е $c+D = \{c+z|z \in D\}$.

Ако $M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma_f$, тогаш $M_1(x_0+c, h(x_0+c)) \in \Gamma_h$ т.е. $M_1(x_0+c, f(x_0)) \in \Gamma_h$. Тоа значи M се добива кога точката M_0 ќе се транслатира (помести) за c единици, по права паралелна со x-оската. Заклучуваме: графикот Γ_h се добива кога графикот Γ_f се поместува за c единици, по права паралелна со x-оската.

Забелешка. Графикот Γ_h, на функцијата $y = h(x)$, $h(x) = f(x-a)$, каде a е даден реален број се добива со транслација на графикот Γ_f во правец на $x-$оската за $|a|$- единици и, притоа, ако $a > 0$, поместувањето е во позитивната насока на $x-$оската, а ако $a < 0$, поместувањето е во негативната насока на $x-$оската.

III. Нека $f(x)$ е зададена на множеството D со график Γ_f. Тогаш $p(x) = c \cdot f(x)$, е зададена на D и графикот на p се добива кога секоја y-координата на точки од Γ_f се помножи со c, бидејќи ако точката $(x, f(x)) \in \Gamma_f$, тогаш точката $(x, c \cdot f(x)) \in \Gamma_p$.

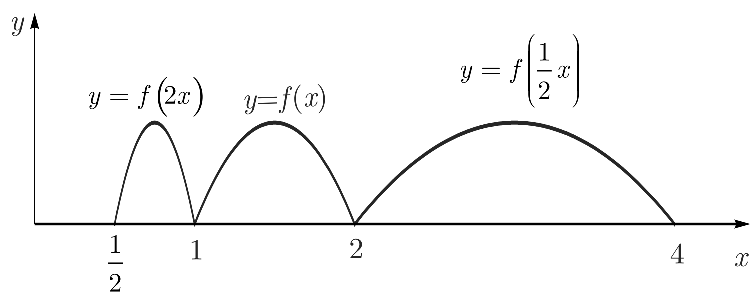


Забелешка. Графикот, Γ_p, на функцијата $y = p(x)$, $p(x) = bf(x)$, каде b е даден позитивен реален број, се добива со "растегнување” или ”стегање” на графикот Γ_f во правец на $y-$оската во зависност од тоа дали $b>1$ или $0<b<1$.

IV. Нека $f(x)$ е зададена на D со график Γ_f. Тогаш $r(x)=f\left(\frac{x}{c}\right)$ има дефинициона област $c\cdot D=\{cx \mid x\in D\}$ и притоа, ако точката $(x,f(x))\in\Gamma_f$, тогаш точката $(x\cdot c, f(x))\in\Gamma_r$.

Забелешка. Графикот, Γ_r, на функцијата $y=r(x)$, $r(x)=f\left(\frac{x}{a}\right)$, каде a е даден позитивен реален број, со домен $D_r=aD_f=\{at\,|\,t\in D_f\}$, се добива со ”растегнување” или ”стегање” на графикот Γ_f во правец на $x-$оската во зависност од тоа дали $a>1$ или $0<a<1$.

Специфично. $y=f(-x)$ има график симетричен на графикот $y=f(x)$ во однос на $y-$оската.



2.10 Гранична вредност на функција

Дефиниција. Нека D е дефинициона област на функцијата f и нека $a\in\mathbb{R}$ е таков што во секоја негова ε $(\varepsilon>0)$ околина има точка од D различна од a. Бројот $b\in\mathbb{R}$ се нарекува **гранична вредност** (**лимес**) на функцијата f кога x тежи кон a и пишуваме:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

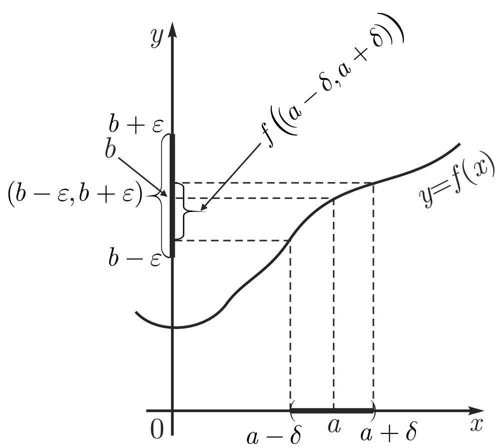
ако важи

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in D\backslash\{a\},\,|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon).$$

Со други зборови, точките што се блиски до a се пресликуваат во точки што се блиски до b, бидејќи за секоја ε-околина на точката b, $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ постои δ-околина на точката a, $(a-\delta,a+\delta)$ со следното својство: сите точки од D што припаѓаат во $(a-\delta,a+\delta)\backslash\{a\}$ се пресликуваат во $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$, т.е.

$$x\in(D\backslash\{a\})\cap(a-\delta,a+\delta)\Rightarrow f(x)\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon).$$

Значи, $f((D\backslash\{a\})\cap(a-\delta,a+\delta))\subseteq(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$.



Геометриски гледано, преку график на функција, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ значи за секоја $\varepsilon-$ околина на бројот b на $y-$оската да може да се најде $\delta-$околина на бројот a на $x-$оската чијашто слика при f е подмножество од ε-околината на b.

Пример 1. Ако $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, тогаш $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c$, т.е. лимес од константа е константа.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Да избереме $\delta = \varepsilon > 0$. Тогаш, за $x \in \mathbb{R}$, и $|x - a| < \delta = \varepsilon$ следува $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Значи, $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

Да забележиме дека точката a не мора да припаѓа на дефиниционата област на функцијата.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$

Доказ. Овде точката 0 не припаѓа на дефиниционата област на функцијата. Притоа, секоја $\varepsilon-$околина на 0 содржи точки од дефиниционата област на $x\ \sin\dfrac{1}{x}$, бидејќи $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Да го провериме условот за гранична вредност на функција.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран и да избереме $\delta = \varepsilon > 0$. Тогаш за $x \in D$ и $|x - 0| < \delta$ имаме

$$\begin{aligned} |f(x) - 0| &= |x\ \sin\frac{1}{x} - 0| = |x||\sin\frac{1}{x}| < \\ &< |x| \cdot 1 = |x| = |x - 0| < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Значи $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Теорема 1. Ако постои гранична вредност на функција кога x тежи кон a тогаш таа е единствена.

Теорема 2. Нека D е дефиниционата област на f. Точката b е лимес на функција $f(x)$ кога x тежи кон a ако и само ако е исполнет условот:

$(*)$ за секоја низа $\{x_n\}$, $x_n \in D$ која конвергира кон a, соодветната низа $\{f(x_n)\}$ да конвергира кон b.

Доказ. Нека $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Ќе докажеме дека важи $(*)$. Од $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ имаме дека важи

$$(\circ) \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D\backslash\{a\}, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран и $\{x_n\}$ е произволна низа таква што $x_n \in D\backslash\{a\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогаш постои $n_0 = n_0(\delta)$, така што $|x_n - a| < \delta$, за секој $n \geq n_0$. За $n \geq n_0$, од претходното и од $(\circ)$, имаме дека важи: $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Значи, важи $(*)$.

Обратно. Нека важи условот $(*)$. Сакаме да докажеме дека $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Ќе претпоставиме спротивно, т.е. дека не важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, т.е. постои $\varepsilon > 0$, така што за сите $\delta > 0$, постои $x \in D\backslash\{a\}$, $|x - a| < \delta$ за кој $|f(x) - b| \geq \varepsilon$.

Ако земеме $\delta = \dfrac{1}{n}$, согласно погоре напишаното, постои $x_n \in D\backslash\{a\}$, $0 < |x_n - a| < \delta = \dfrac{1}{n}$ и $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ т.е. постои $\{x_n\}$, $x_n \in D\backslash\{a\}$, така што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (сендвич принцип) и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$, што е спротивно со $(*)$.

Условот (*) може да го сметаме за дефиниција на лимес на функција, која е преку низи и се нарекува низовна дефиниција на лимес на функција.

Теорема 3. Нека f и g се две функции за кои постојат гранични вредности b_0 и c_0 кога x тежи кон a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c_0$.

Тогаш:

$$1^\circ \lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b_0 \pm c_0 = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$
$$2^\circ \lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b_0 \cdot c_0 = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$
$$3^\circ\text{ако } c \neq 0, \text{ тогаш } \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b_0}{c_0} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$
$$4^\circ \lim_{x\to a}|f(x)| = |b_0|.$$

Исто така: $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = 0$ повлекува $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Доказот на оваа теорема $(1^\circ, 2^\circ, 3^\circ)$ следува од низовната дефиниција на гранична вредност на функција и од теоремата за операции со конвергентни низи. Доказот на 4° следува од својства на апсолутна вредност и дефиницијата.

Забелешка. Ако се дадени n функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ и ако постојат граничните вредности

$$\lim_{x\to a} f_i(x) = b_i, \ \ i = 1, 2, \dots, n, \ \text{ тогаш важи:}$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + \cdots + \lim_{x\to a} f_n(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \cdot \cdots \cdot \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Последните тврдења се докажуваат со математичка индукција и користејќи 1° и 2° од Теорема 3.

Специјални случаи:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}(c + f(x)) = \lim_{x\to a} c + \lim_{x\to a} f(x) = c + \lim_{x\to a} f(x)\\
&\lim_{x\to a}(c \cdot f(x)) = \lim_{x\to a} c \cdot \lim_{x\to a} f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)\\
&\lim_{x\to a} \frac{c}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to a} c}{\lim_{x\to a} f(x)} = \frac{c}{\lim_{x\to a} f(x)}.
\end{aligned}$$

Теорема 4. Нека се дадени три функции f, g и h така што $\lim_{x\to a} f(x) = b_0 = \lim_{x\to a} g(x)$ и нека постои δ_0-околина на точката a за која $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, за секој $x \in (a - \delta_0, a + \delta_0)$. Тогаш и $\lim_{x\to a} h(x) = b_0$.

Повторно, за доказ на Теорема 4 се користи низовната дефиниција на гранични вредности на функција и сличната теорема за низи.

Теорема 5. Нека $h : T\backslash\{t_0\} \to P\backslash\{x_0\}$ и $f : P\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ се реални функции. Ако постојат

$$\lim_{t\to t_0} h(t) = x_0, \ \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0,$$

тогаш постои $\lim_{t\to t_0} f(h(t))$, и притоа важи $\lim_{t\to t_0} f(h(t)) = y_0$.

Често пати има потреба да го разгледаме однесувањето на функцијата кога агрументот x се приближува кон x_0 само од лево или само од десно. На тој начин доаѓаме до поимите лева и десна гранична вредност на функцијата.

Дефиниција. Нека D е дефинициона област на функцијата f и нека $a \in \mathbb{R}$ е таков што во секоја негова лева околина има точка од D различна од a. Бројот $b \in \mathbb{R}$ се нарекува **лева гранична**

вредност (**лев лимес**) на функцијата f кога x тежи кон a од лево и пишуваме:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D, x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Дефиниција. Нека D е дефинициона област на функцијата f и нека $a \in \mathbb{R}$ е таков што во секоја негова десна околина има точка од D различна од a. Бројот $b \in \mathbb{R}$ се нарекува **десна гранична вредност** (**десен лимес**) на функцијата f кога x тежи кон a од десно и пишуваме:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

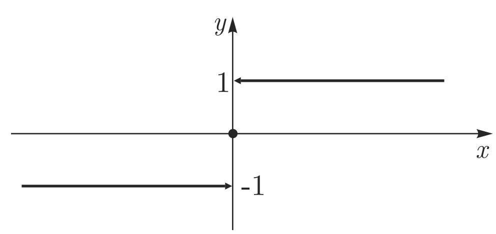
ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D, x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

2.11 Непрекинатост на функција

Да го разгледаме графикот на функцијата

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



Интуитивно се забележува дека има "прекин" во $x = 0$. Ќе дадеме дефиниција за непрекинатост на функција и тоа прво во точка, а потоа на множество.

Дефиниција. За функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ велиме дека е **непрекината** во точката $a \in D$ ако важи $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

За функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ велиме дека е непрекината на множеството A, $A \subseteq D$ ако функцијата $y = f(x)$ е непрекината во секоја точка од множеството A.

Пример 1. Полиномната функција $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, каде што $a_0, a_1, \ldots, a_n$ се реални броеви, е непрекината функција на $\mathbb{R}$.

Навистина, за секој $a \in \mathbb{R}$ важи

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} p(x) = \lim_{x\to a}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \\
&\overset{\text{Т. 3 од 2.10}}{=} \lim_{x\to a} a_0 + \lim_{x\to a} a_1x + \cdots + \lim_{x\to a} a_nx^n = \\
&a_0 + a_1 \cdot \lim_{x\to a} x + \cdots + a_n(\lim_{x\to a} x)^n = \\
&a_0 + a_1 \cdot a + \cdots + a_n \cdot a^n = p(a).
\end{aligned}
$$

Пример 2. Рационалната функција $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, каде $p(x), q(x)$ се полиномни функции, е непрекината во секоја точка $a \in \mathbb{R}$ за која $q(a) \neq 0$.

Навистина, $p(x), q(x)$ се полиномни функции, па од пример 1 следува $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} q(x) = q(a)$. Од друга страна, нека $a \in \mathbb{R}$ е таков што $q(a) \neq 0$.

Тогаш, од теоремата за гранична вредност, имаме:

$$\lim_{x\to a} r(x) = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} \overset{\text{Т. 3 од 2.10}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to a} p(x)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = r(a).$$

Ако ја разгледаме дефиницијата за непрекинатост уште еднаш имаме: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$, т.е. последното значи дека кај непрекинати функции со лимес може да се "влезе" во функцијата.

Од дефиницијата на непрекинатост на функција следува точноста на следната теорема:

Теорема 1. Следните три услови се еквивалентни:

1° функцијата f со дефинициона област D е непрекината во $a \in D$

2° за секоја низа $\{x_n\}$, $x_n \in D$ со својство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

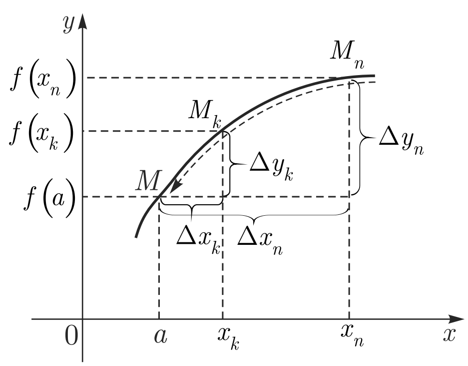
3° за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ така што
од $x \in D$ и $|x - a| < \delta$ следува $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Теорема 2. Ако f и g се непрекинати во a тогаш и $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ се непрекинати функции во a.

Теорема 3. Ако f е непрекината во a, g е непрекината во $f(a)$, тогаш и gf е непрекината во a.

Веќе видовме дека природните процеси се опишуваат со некои закони, т.е. функции $y = f(x)$.

Ако процесот е непрекинат во некоја точка a, тогаш $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, па ако Γ е график на функција $y = f(x)$, имаме:



90 % од природните процеси се непрекинати т.е. се опишани со непрекинати функции.

2.12 Бескрајно големи лимеси и лимеси кога x тежи кон бескрајност

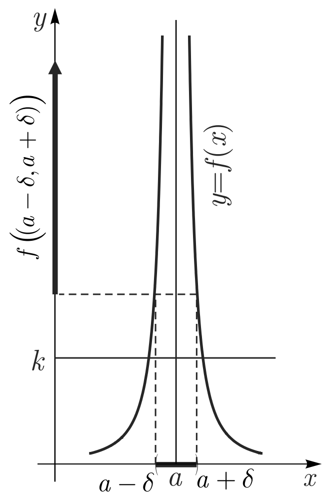
Ако ја разгледаме функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1)$ се забележува дека $f(x)$ неограничено расте кога x тежи кон 0 и ќе пишуваме $\dfrac{1}{x} \to \infty$, при $x \to 0$, $x > 0$.

Дефиниција. За функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ велиме дека тежи кон $+\infty$ кога x тежи кон a, и пишуваме $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, ако се исполнети условите

1° во секоја $\varepsilon-$околина на a постои точка од D, различна од a.

2° за секој позитивен реален број k постои $\delta > 0$ така што од $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$, следува $f(x) > k$ или

$$x \in \big((D \cap (a - \delta, a + \delta)) \setminus \{a\}\big) \Rightarrow f(x) \in (k, \infty).$$



$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Пример 1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

јасно е дека условот 1° е исполнет.

2° Нека $k > 0$ е произволен. Избираме $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{k}} > 0$, и нека $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ и $|x - 0| < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Тогаш $f(x) = \dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{k}} = k$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Дефиниција. За функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ велиме дека тежи кон $-\infty$ кога x тежи кон a и пишуваме $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ако:

1° во секоја $\varepsilon-$околина на a постои точка од D, различна од a.

2° за секој негативен реален број T, постои $\delta > 0$ така што од $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$ следува $f(x) < T$.

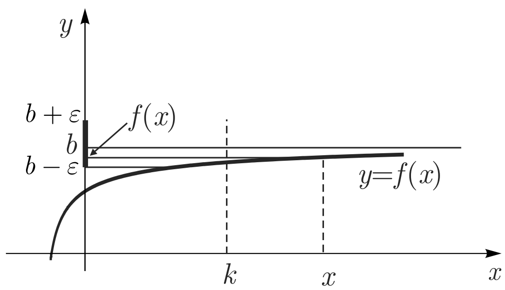
Граничните вредности $+\infty$ и $-\infty$ се викаат бесконечни лимеси на функција f.

Теорема. 1° Ако $y = f(x)$, $x \in D$ не е идентично еднаква на 0, во околината на a и ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ тогаш $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

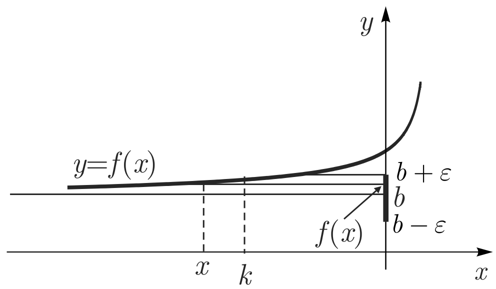
2° Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, тогаш $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Дефиниција. Нека $y = f(x)$, $x \in D$. Реалниот број b е лимес на функцијата f кога x тежи кон $+\infty$ и пишуваме $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои позитивен реален број k така што од $x > k$ следува $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Дефиниција. Нека $y = f(x)$, $x \in D$. Реалниот број b е лимес на функцијата f кога x тежи кон $-\infty$ и пишуваме $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои негативен реален број k така што од $x < k$ следува $|f(x) - b| < \varepsilon$.



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$



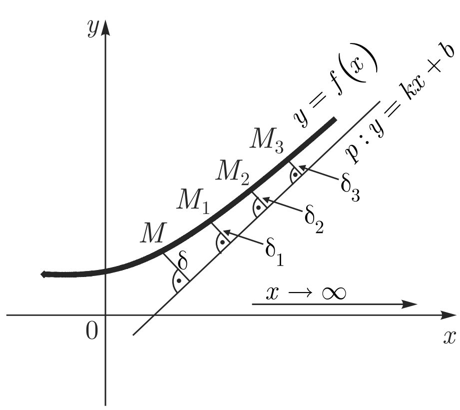
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

2.13 Асимптоти на криви

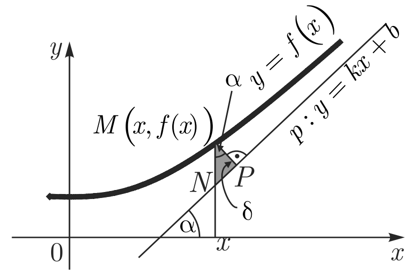
Дефиниција. **Асимптота** на крива, која е график на функцијата $y = f(x)$, е правата p, со својството растојанието δ од точката M на кривата до правата p да тежи кон нула кога x тежи кон a.

Притоа, тежењето може да биде и кон a^- или a^+, а a може да биде и ∞ или $-\infty$.

Коса асимптота се нарекува асимптотата p ако таа има равенка $p : y = kx + b$ каде, $k \neq 0$.



Да ги пресметаме параметрите k и b, на асимптотата $y = kx+b$, на дадена функција $y = f(x)$.



Нека α е аголот што $y = kx + b$ го зафаќа со x-оската, $M(x, f(x)) \in \Gamma$, каде Γ е графикот на функцијата, $N \in p$, $N(x, kx + b)$ и P е ортогоналната проекција на M врз p.

Од правоаголниот триаголник MNP имаме дека $\overline{MP} = \delta = \overline{MN}\cos\alpha$ (бидејќи $\angle NMP = \alpha$ како агли со нормални краци.)

Јасно, $\delta \to 0$ ако и само ако $\overline{MN} \to 0$. Но $\overline{MN} = |f(x) - (kx + b)|$ и од дефиницијата за асимптота, $x \to \infty$, повлекува $\delta \to 0$ т.е. $\overline{MN} = |f(x) - (kx + b)| \to 0$.

Значи, ако $x \to \infty$, тогаш $\overline{MN} \to 0$ и $\dfrac{\overline{MN}}{x} \to 0$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0. \tag{$*$}$$

Но, $\dfrac{b}{x} \to 0$, кога $x \to \infty$ па од $(*)$ добиваме дека $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - k\right) = 0$ т.е.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{1}$$

Од $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ се добива

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx). \tag{2}$$

Ако постојат лимесите (1) и (2) и се конечни и $k \neq 0$, тогаш правата $y = kx + b$ е коса асимптота на $y = f(x)$ кога $x \to \infty$. Притоа, k и b се определени со (1) и (2).

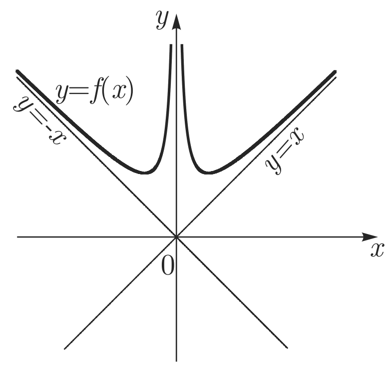
Специјално, ако $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, т.е. $k = 0$, тогаш $y = b$ е **хоризонтална асимптота** за $y = f(x)$ кога $x \to \infty$.

На сличен начин се определуваат и косата и хоризонталната асимптота на функцијата $y = f(x)$ кога $x \to -\infty$. Притоа може да се добијат различни прави, кога $x \to \infty$ и $x \to -\infty$.

Пример 1. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x > 0 \\ -\left(x + \frac{1}{x}\right), & x < 0 \end{cases}$$

Ако $x \to \infty$ имаме $k = 1$ и $b = 0$, па правата $y = x$ е коса асимптота кога $x \to \infty$. Слично, кога $x \to -\infty$ добиваме $k = -1$ и $b = 0$, па правата $y = -x$ е коса асимптота кога $x \to -\infty$.



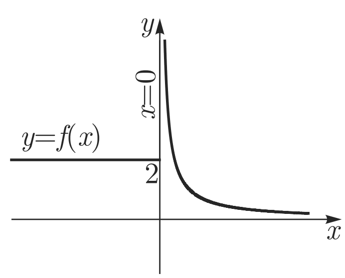
Нека $a \in \mathbb{R}$. Ако $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty(-\infty)$, тогаш $x = a$ е **вертикална асимптота** за $y = f(x)$ кога $x \to a^+$, а ако $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty(-\infty)$, тогаш $x = a$ е **вертикална асимптота** за $y = f(x)$ кога $x \to a^-$.

Пример 2. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 2, & x \leq 0 \end{cases}$$

За неа имаме $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$, па правата $x = 0$ е вертикална асимптота само кога $x \to 0^+$.

Исто така, оваа функција има хоризонтална асимптота $y = 0$ само кога $x \to +\infty$.



2.14 Елементарни функции

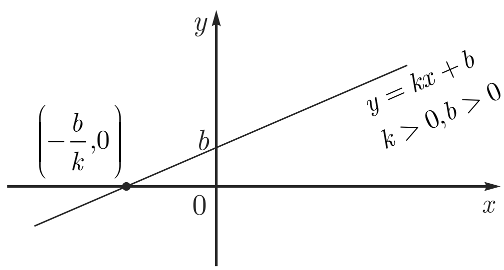
2.14.1 Линеарна функција

Наједноставна функција е линеарната функција т.е. функцијата $f(x) = kx + b$ или $y = kx + b$, $k \neq 0$. Дефиниционата област е $\mathbb{R}$. Линеарната функција е монотона функција и тоа: строго монотоно растечка ако $k > 0$ и строго монотоно опаѓачка ако $k < 0$.

Да ја најдеме инверзната на $y = kx + b$ (инверзната постои бидејќи функцијата $y = kx + b$ е биекција на $\mathbb{R}$).

$x = \dfrac{y-b}{k}$, т.е. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{k}x - \dfrac{b}{k}$ која исто така е линеарна функција.

Графикот на оваа функција е права.



Правата е основен геометриски облик. Од тие причини ќе ја проучиме малку повеќе, од аналитички аспект.

Нека во координатен систем xOy е зададена една права која што минува низ координатниот почеток O и зафаќа агол α со позитивниот дел од $x-$оската. Да ја најдеме нејзината равенка и да ја опишеме.

Нека $M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$ се точки од правата. Тогаш, лесно се воочува дека правоаголните триаголници $\triangle_i$ со темиња во точката O, $(x_i, 0)$ и $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ се слични, т.е.

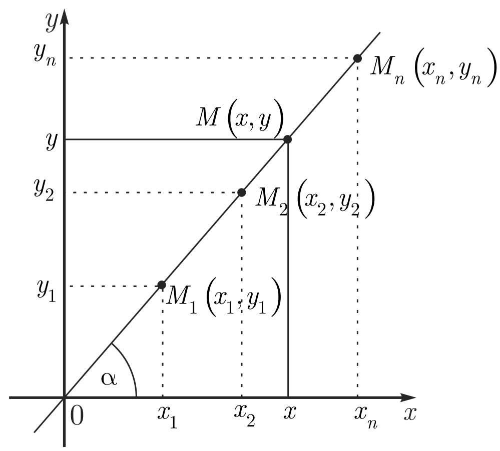
$$\triangle_1 \sim \triangle_2 \sim \cdots \sim \triangle_n.$$

Од сличноста се добива дека:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = tg\alpha$$

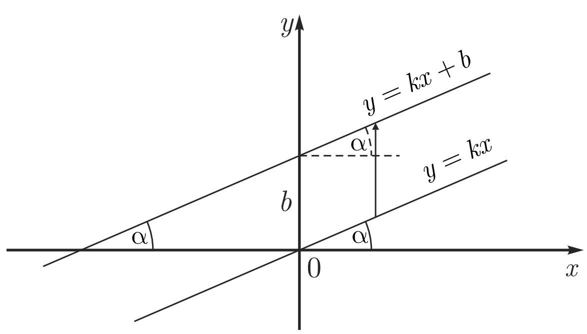
или општо: ако $M(x, y)$ е која било точка од правата, точно е дека $\dfrac{y}{x} = tg\alpha$ т.е. $y = tg\alpha \cdot x$. Ставајќи $k = tg\alpha$ добиваме $y = k \cdot x$. Значи $x = tg\alpha$ е параметар кој геометриски гледано ја определува стрмнината на правата и се нарекува **коефициент на правец.**

Општиот каноничен облик $y = kx + b$ е равенка на права која се добива кога правата $y = kx$ се транслатира (поместува) по $y-$оската за b-единици.



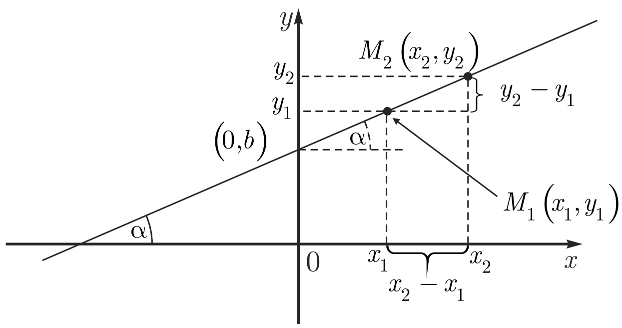
Значи, и оваа права зафаќа агол α со позитивниот дел од $x-$оската и $k = \mathrm{tg}\alpha$.

Така, $k = \mathrm{tg}\alpha$ и b се параметри кои ја определуваат правата и имаат геометриско значење: $k = \mathrm{tg}\alpha$ е коефициент на правец т.е. ја определува стрмнината на правата, а $(0, b)$ е точката во која правата ја сече $y-$оската.



Од геометрија е познато дека две различни точки определуваат единствена права. Да ја определиме равенката на правата низ две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Нека $M(x, y)$ е произволна точка од правата p и нека k и b се параметри што ја определуваат правата т.е. $p: \ y = kx + b$. Од $M_1 \in p$, имаме дека важи $y_1 = kx_1 + b$. Ако $y = kx + b$ и $y_1 = kx_1 + b$ ги одземеме, се добива $y - y_1 = kx + b - kx_1 - b$, т.е. $y - y_1 = k(x - x_1)$. Останува да го одредиме k.



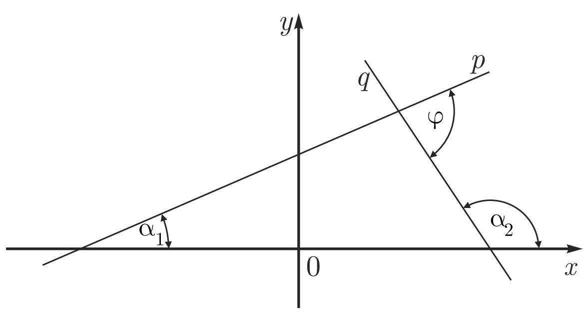
Од дефиницијата на $\mathrm{tg}\alpha$ и цртежот погоре се добива дека $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$ $\mathrm{tg}\alpha$ т.е. $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$

Конечно, $p : y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$

Во продолжение, некои геометриски односи меѓу правите ќе ги опишеме преку нивните параметри.

I. **Агол меѓу две прави**

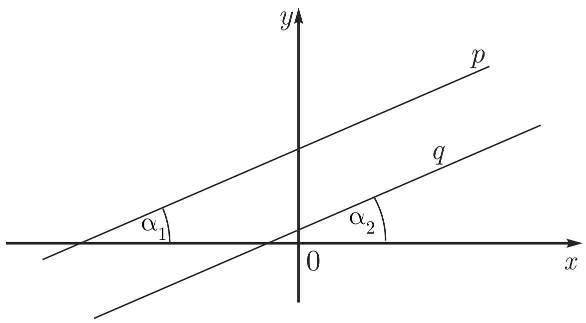
Нека $p: \;\; y = k_1 x + b_1, \; q: \;\; y = k_2 x + b_2$ се две прави кошто се сечат. Нека φ е аголот меѓу нив.



Користејќи дека збирот на аглите во секој триаголник изнесува 180°, имајќи го предвид цртежот погоре и $k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1, \; k_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$, добиваме: $\alpha_1 + 180^\circ - \alpha_2 + 180^\circ - \varphi = 180^\circ$, т.е. $\varphi = \alpha_1 + 180^\circ - \alpha_2 = 180^\circ + (\alpha_1 - \alpha_2)$ па $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(180^\circ + (\alpha_1 - \alpha_2)) = \mathrm{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) =$ $= \dfrac{\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2}{1 + \mathrm{tg}\alpha_1 \mathrm{tg}\alpha_2} = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$

Добиваме: $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$

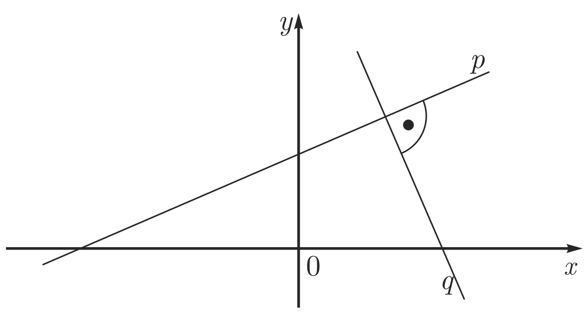
II. **Паралелни прави**



Ако $p:\ y=k_1x+b_1$ и $q:\ y=k_2x+b_2$ се две паралелни прави, тогаш тие зафаќаат еднакви агли со $x-$оската, т.е. $\alpha_1=\alpha_2$, па значи и $\mathrm{tg}\alpha_1=\mathrm{tg}\alpha_2$ т.е. $k_1=k_2$.

Значи услов за паралелност на p и q е $k_1=k_2$.

III **Ортогонални прави**



Ако $p:\ y=k_1x+b_1$ и $q:\ y=k_2x+b_2$ зафаќаат агол од 90°, т.е. ако p и q се ортогонални една на друга, пишуваме $p\perp q$, тогаш: $\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}90^\circ=\infty$, па значи $1+k_1k_2=0$ т.е. $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$

Значи условот за ортогоналност на p и q е $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$.

Ако правите се дадени во облик: $p:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ и $q:\ A_2x+B_2y+C_2=0$, тогаш со средување се добива $p:\ y=-\dfrac{A_1}{B_1}x-\dfrac{C_1}{B_1}$, $q:\ y=-\dfrac{A_2}{B_2}x-\dfrac{C_2}{B_2}$ и оттука $k_1=-\dfrac{A_1}{B_1}$, $k_2=-\dfrac{A_2}{B_2}$, па условот за ортогоналност го добива обликот: $1+\Big(-\dfrac{A_1}{B_1}\Big)\Big(-\dfrac{A_2}{B_2}\Big)=0$, т.е. $A_1A_2+B_1B_2=0$.

IV **Пресек на две прави**

Ако се дадени правите: $p:\ y=k_1x+b_1$ и $q:\ y=k_2x+b_2$, тогаш од геометрија е познато дека нивниот пресек е точка (доколку p

и q не се паралелни или не се поклопуваат) и координатите на пресечната точка $S(x,y)$ се одредуваат како решение на системот од две равенки со две непознати

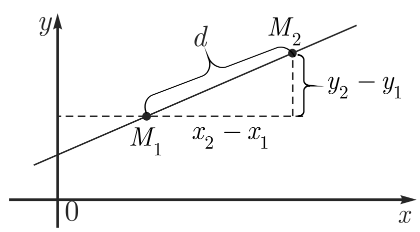
$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

V **Растојание меѓу две точки**

Ако $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ се две точки тогаш M_1M_2 е отсечка што лежи на единствена права определена со M_1 и M_2. Должината на таа отсечка се определува по формулата

$$\overline{M_1M_2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

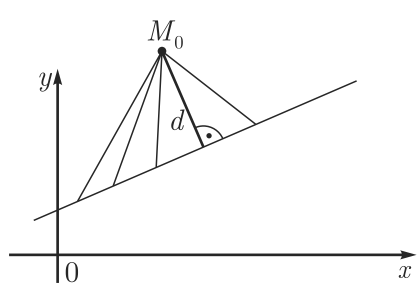
(за доказ се користи Питагоровата теорема).



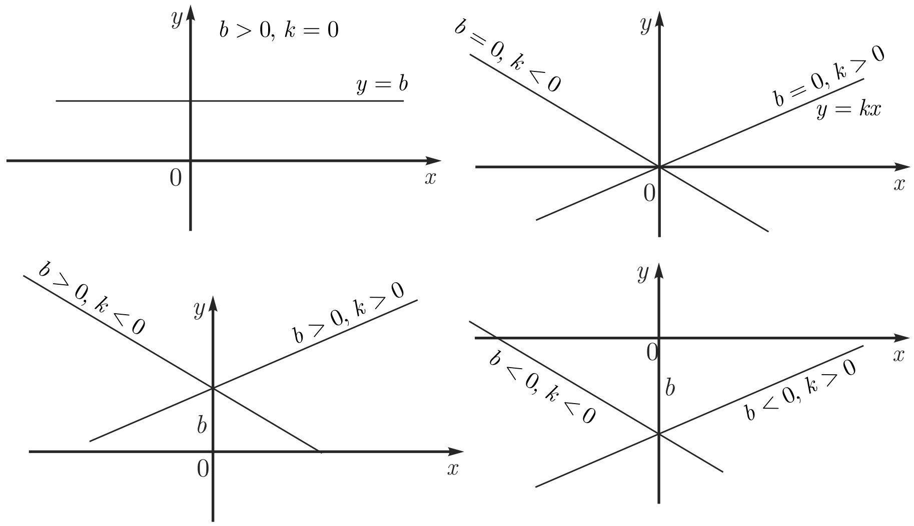
VI **Растојание од точка** $M_0(x_0, y_0)$ **до права**

Под растојание од M_0 до p, каде $p:\ Ax + By + C = 0$, се подразбира најкраткото (а тоа е нормалното) растојание од M_0 до p и се пресметува по формулата

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Да резимираме. Во зависност од тоа какви се по знак k и b правата $y = kx + b$, може да ги има следните положби:

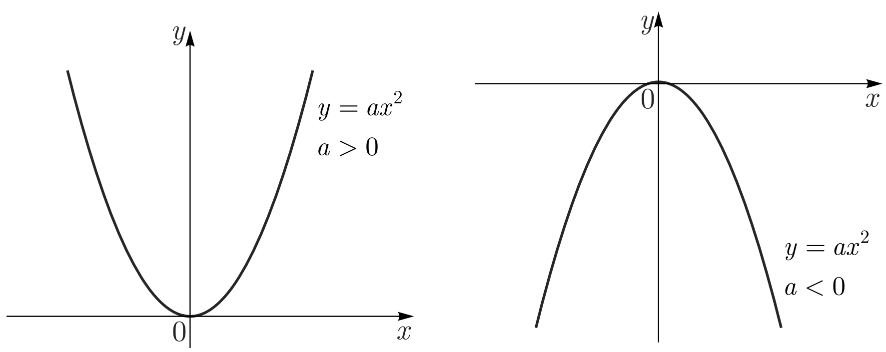


Линеарната зависност се јавува секаде каде што има пропорционалност. Во биологијата растењата се пропорционални.

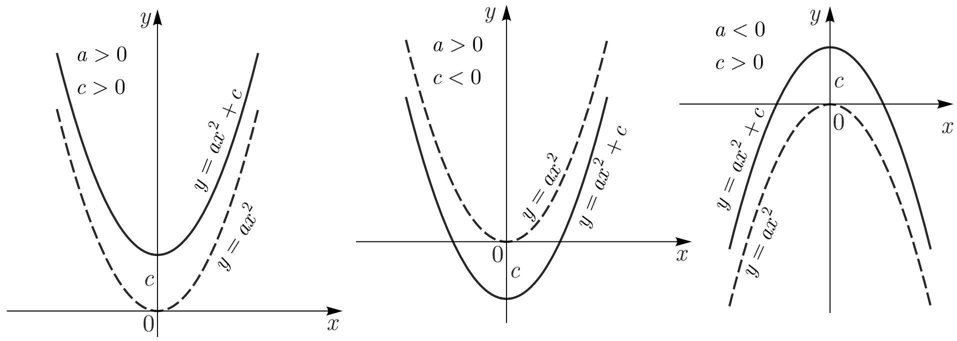
2.14.2 Квадратна функција

Функцијата $f(x) = ax^2 + bx + c$ каде $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$ се нарекува **квадратна функција**. Дефиниционата област на оваа функција е $\mathbb{R}$. Ако некој од коефициентите b или c или и двата се нули, тогаш се добиваат неполни квадратни функции од обликот:

I. $y = ax^2$ со графици:

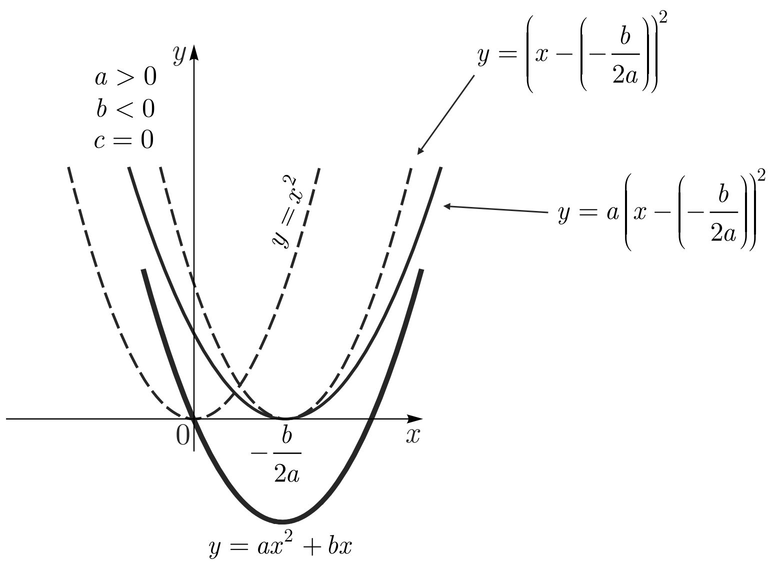


II. $y = ax^2 + c$ со графици:



III.

$$y = ax^2 + bx = a(x^2 + \frac{b}{a}x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} =$$
$$= a\big(x - \big(-\frac{b}{2a}\big)\big)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$



Графиците на сите овие неполни квадратни функции се **параболи**. Да ја разгледаме квадратната функција од најопшт облик:

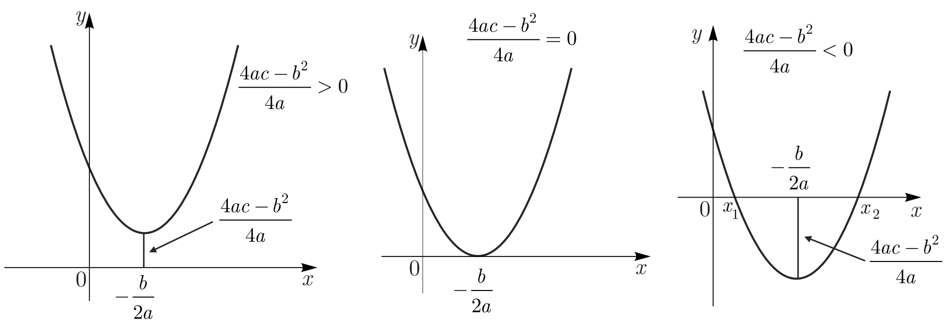
$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a\big[\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\big] + c$$
$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = f(x)$$

т.е. $f(x) = a(x - (-\frac{b}{2a}))^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

Па, графикот на оваа функција се добива ако графикот на функцијата $f(x) = ax^2$ се транслатира за $-\dfrac{b}{2a}$, по права паралелна со $+x-$оската, а потоа тој график се транслатира за $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$, по права паралелна со $+y-$оската. Јасно е дека графикот на опишаната квадратна функција е парабола. Да ја видиме положбата на оваа парабола во зависност од знакот на a.

1. $a > 0$

Во зависност од знакот на $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, графикот има една од следните положби:



Функцијата монотоно опаѓа во $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$, а монотоно расте во $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Во првиот случај $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ и нема нули.

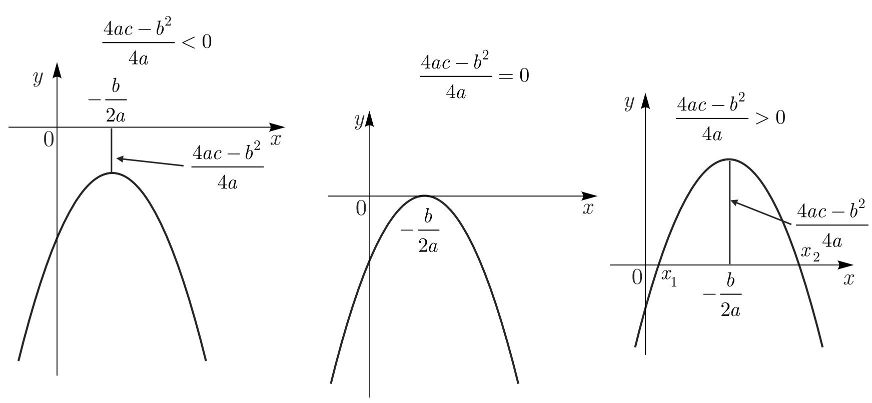
Во вториот случај $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ и има една нула $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Во третиот случај $f(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ и има две нули x_1 и x_2.

Притоа, f е непрекината функција на $\mathbb{R}$.

2. $a < 0$

Повторно имаме повеќе случаи:



Во овој случај, $f(x)$ расте за $x \in (-\infty, -\dfrac{b}{2a}]$, и $f(x)$ опаѓа за

$x \in [-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Слично, може да се определи знакот и нулите на оваа функција во зависност од знакот на $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Точката со $x-$координатата $-\frac{b}{2a}$, за која $y-$координатата е

$$a \cdot \Big(-\frac{b}{2a}\Big)^2 + b\Big(-\frac{b}{2a}\Big) + c = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

е специјална точка, наречена **теме** на параболата со ознака T.

Значи $T\Big(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\Big)$ е теме на параболата $y = ax^2 + bx + c$.

Да ги најдеме нулите на оваа функција. Тие се добиваат како решение на системот равенки:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

т.е. како пресек на $x-$оската со параболата.

Добиваме: $ax^2 + bx + c = 0$, што е еквиалентно со

$$\begin{aligned}
& a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = 0 \\
& a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a} \\
& \Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2},\ b^2 - 4ac \geq 0 \\
& x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ a > 0 \\
& x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

при претпоставка $b^2 - 4ac \geq 0$

За корените x_1, x_2 очигледно важи $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Горните врски меѓу x_1, x_2 се нарекуваат **Виетови правила.**

Во продолжение ќе дадеме неколку примери на квадратна функција во математиката и другите природни науки.

Пример 1. Плоштина на квадрат со страна a

$$P = a^2$$

Пример 2. Плоштина на круг со радиус r

$$P = r^2\pi$$

Пример 3. Ферхилстов закон за растење со некој внатрешен отпор.

Брзина (средна) на растење на некоја популација со бројност x, со коефициент на природно растење на таа популација во идеални услови, k, коефициент на внатрешен отпор (заради неповолни еколошки фактори) на растењето λ, е даден со формулата

$$V = kx - \lambda x^2 \quad \text{т.е. е квадратна функција}$$

Знацни, природното растење, kx, на популацијата е намалено за отпорот (пречките) на растење.

Пример 4. Закон за одржување на маса (Гулдберг-Вагеов закон). Ако се има една бимолекуларна реакција т.е.

$$1mol \text{ од супстанца } A + 1mol \text{ од супстанца} B = \text{продукт} X$$

$$(1mol \text{ од } H_2O = (2 \cdot 1 + 8)g \text{ вода})$$

Нека во реакција учествуваат a gr од A и b gr од B, а по некое време се добива x gr продукт. Законот за одржување на маса вели: брзината на хемиската реакција е пропорционална со активната хемиска маса во моментот т.е.

$$V = k \cdot (a - x)(b - x) = k(x^2 + Cx + D),$$

каде $C = -a - b$ и $D = ab$.

2.14.3 Дробно-линеарна функција

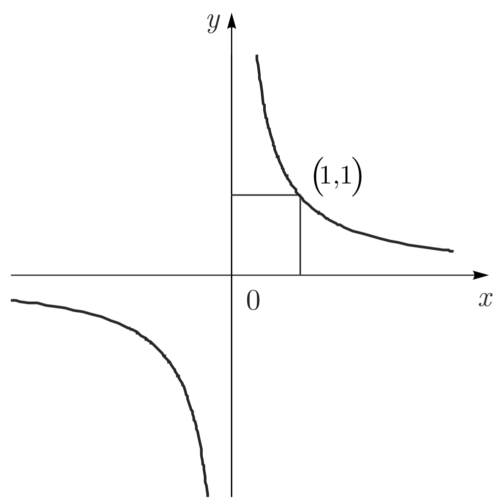
За функцијата $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, $c \neq 0$, која е дефинирана на $D = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{d}{c}\}$ велиме дека е **дробно-линеарна функција**.

Оваа функција со делење може да се трансформира:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(x + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$$

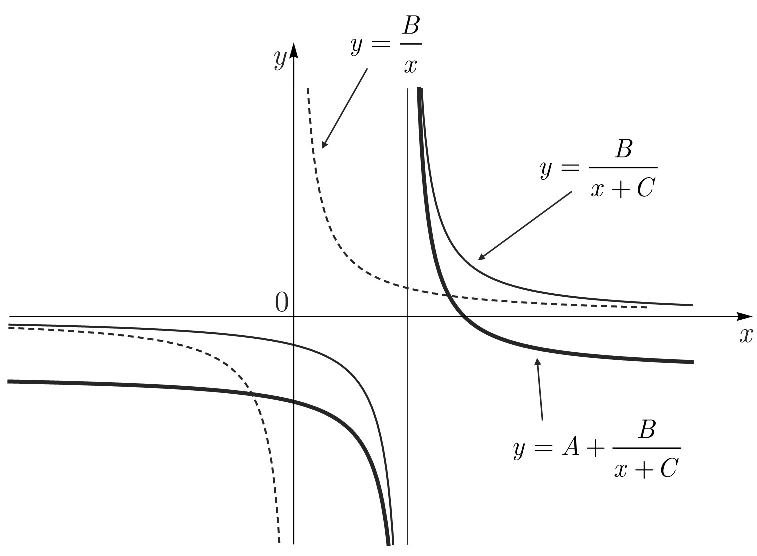
па ставајќи $A = \dfrac{a}{c}$, $B = \dfrac{bc - ad}{c^2}$, $C = \dfrac{d}{c}$ се добива $y = A + \dfrac{B}{x + C}$.

За $C = 0 = A$, $B = 1$, го имаме едноставниот облик $y = \dfrac{1}{x}$ чиј график е:



и тој е наречен рамнокрака хипербола.

Графикот на $y = A + \dfrac{B}{x+C}$ се добива со множење со B на секоја $y-$координата на $y = \dfrac{1}{x}$, па поместување на тој за $-C$ по $x-$оска, па поместување на тој за A по $y-$оска т.е.



Пример 1. Гасниот закон за идеален гас

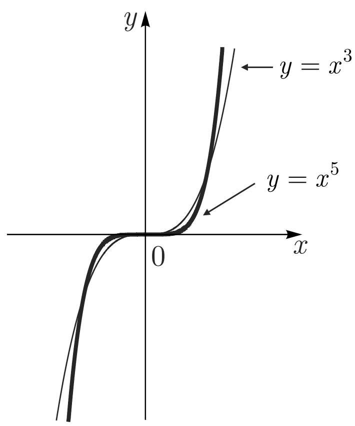
Ако p е притисокот на гас кој зафаќа волумен V, тогаш важи $P \cdot V = C = const.$ т.е. $P = \dfrac{C}{V}$. Значи со функцијата $y = \dfrac{a}{x}$ е претставен овој закон.

2.14.4 Степенска функција со рационален показател

I. Ќе разгледаме прво степенска функција со природен показател т.е.:

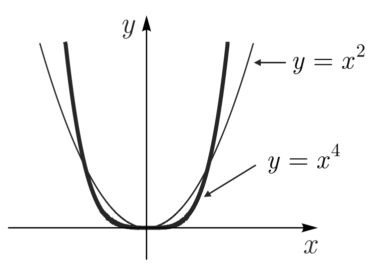
$$y = x^n,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ D = \mathbb{R}$$

Ако n е непарен број, тогаш графикот на $y = x^n$ е сличен со графикот на $y = x^3$ т.е.



Функцијата строго монотоно расте, има инверзна и $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$. Јасно, $f(x) = x^n$ е непрекината функција на $\mathbb{R}$.

Ако n е парен број, тогаш графикот на $y = x^n$ е сличен со графикот на $y = x^2$.

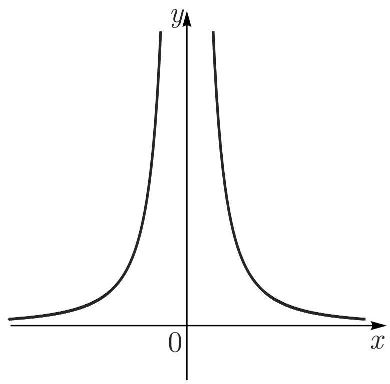


$f(x)$ расте за $x \in (0,\infty)$ и $f(x)$ опаѓа за $x \in (-\infty, 0)$. Оваа функција има инверзна само на делот $(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} x^n$ и $f(x) = x^n$ е непрекината на $\mathbb{R}$.

II. Да ја разгледаме $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. По дефиниција на степен со негативен показател

$$y = \frac{1}{x^n}$$

Дефинициoната област е $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Веќе го видовме графикот на $y = \dfrac{1}{x}$. Графикот на $y = \dfrac{1}{x^2}$ е познат под името **Њутнова крива.**



III. $y = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ т.е. $y = \sqrt[n]{x}$.

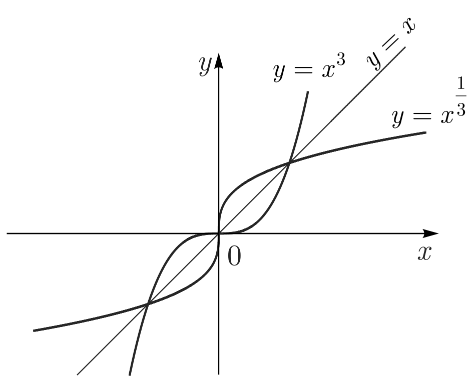
Ако n е непарен број, тогаш функцијата $y = \sqrt[n]{x}$ е инверзна функција на $y = x^n$, па значи е дефинирана за секое $x \in \mathbb{R}$. Навистина, ако $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, n е непарен, тогаш видовме таа има инверзна за секое $x \in \mathbb{R}$. Таа се наоѓа на следниов начин:

равенката $y = x^n$ ја решаваме по x, па добиваме: $y = \sqrt[n]{x}$ т.е. $f^{-1} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Значи, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Забелешка. Дека $y = \sqrt[n]{x}$ е инверзна на $y = x^n$ е јасно од самата дефиниција на $y = \sqrt[n]{x}$ т.е. заради

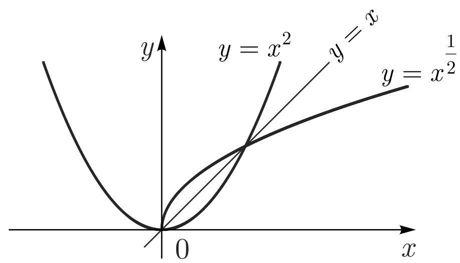
$$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$$

Бидејќи $y = \sqrt[n]{x}$ е инверзна на $y = x^n$ графикот на $x^{\frac{1}{n}}$ е симетричен со графикот на $y = x^n$ во однос на правата $y = x$. Така, имаме:



Ако n е парен број, тогаш функцијата $y = x^{\frac{1}{n}}$ е дефинирана на $[0, \infty)$ и е инверзна на функцијата $y = x^n$ на делот $[0, \infty)$.

На пример, графикот на $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ е:



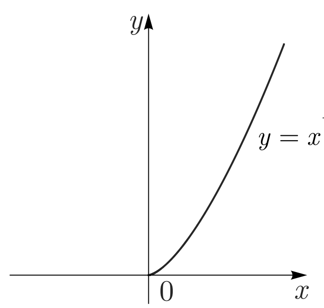
IV. Нека $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $(m, n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогаш дефиниционата област на функцијата $y = x^r$ е $[0, \infty)$ при $n-$парен број, а целото множество $\mathbb{R}$ при $n-$непарен број.

$$y = x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Ако $r > 0$, тогаш функцијата $y = x^r$ строго монотоно расте, а ако $r < 0$ тогаш функцијата строго монотоно опаѓа.

На пример, графикот на функција: $y = x^{\frac{3}{2}}$ е:



Пример 2. Њутнов закон за универзална гравитација

Две маси m и M се привлекуваат една со друга со сила F која е правопропорционална на нивните маси, а обратнопропорционална со квадратот на нивното растојание R т.е.

$$F = k\frac{m \cdot M}{R^2} \text{ или функција од облик } y = \frac{a}{x^2} = ax^{-2}$$

2.14.5 Експоненцијални функции

Во првата глава дефиниравме степен a^r, $r \in \mathbb{Q}$. Да се потсетиме: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n}$ за $n \in \mathbb{N}$, $a^0 \overset{df}{=} 1$ и $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Притоа, важат следниве особини:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ за $m, n \in \mathbb{Z}$, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$,

$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, r \in \mathbb{Q}$.

Кај функцијата $y = a^r$, $r \in \mathbb{Q}$, a е даден позитивен рационален број а r се нарекува **експонент**. Дефиниционата област на оваа функција е $\mathbb{Q}$. Да дадеме некои нејзини својства:

Прво ќе го разгледаме случајот $a > 1$.

Теорема 1. Функцијата $y = a^r$ е поголема од 1 за $r > 0$, помала од 1 за $r < 0$ и еднаква на 1 за $r = 0$.

Доказ. За $r = 0$, $a^0 \stackrel{df}{=} 1$

Ако $r > 0$, тогаш $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, па $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Но, $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m} \stackrel{a>1}{>} a \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \stackrel{a>1}{>} 1$, па $\sqrt[n]{a^m} > \sqrt[n]{1} = 1$, т.е. $a^r > 1$, при $r > 0$

Ако $r < 0$, тогаш $r = -s$, $s > 0$, па $a^r = a^{-s} = \dfrac{1}{a^s} < < \dfrac{1}{1} = 1$, т.е. $a^r < 1$, при $r < 0$.

Теорема 2. $y = a^r$ монотоно расте.

Доказ. Нека $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ и $r_1 < r_2$ т.е. $r_2 - r_1 > 0$. Тогаш $a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1)$. Но, $a > 1$ па $a^{r_1} > 0$, а од $r_2 - r_1 > 0$ и Теорема 1 следува дека $a^{r_2 - r_1} > 1$ т.е. $a^{r_2 - r_1} - 1 > 0$. Се на се, $a^{r_2} - a^{r_1} > 0$ т.е. $a^{r_1} < a^{r_2}$ т.е. $y = a^r$ монотоно расте.

Теорема 3. $\lim\limits_{r \to \infty} a^r = \infty$

Доказ. Прво ќе докажеме за a^n каде $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = \infty$.

Од $a > 1$, имаме дека $a = 1 + h$, $h > 0$. Според тоа $a^n = (1 + h)^n \stackrel{\text{Н. Б.}}{\geq} 1 + n \cdot h > n \cdot h$, т.е. $a^n \geq n \cdot h$. Значи

$$a^n \geq n(a - 1). \tag{$*$}$$

Нека M е произволно избран број и нека $n_0 \in \mathbb{N}$ е избран така што $n_0 > \dfrac{M}{a-1}$ (аксиома на Архимед).

За $n \geq n_0$, имаме: $a^n \stackrel{(*)}{\geq} n(a-1) \geq \dfrac{M}{a-1}(a-1) = M$ т.е. за секој $M > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n \geq n_0$ важи $a_n = a^n \geq M$ т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = \infty$.

Сега, нека $r \in \mathbb{Q}$. Нека M е произволно избран реален број. тогаш од $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = \infty$ следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за $n \geq n_0$ важи $a^n > M$.

Нека $r \geq n_0$. Бидејќи функцијата a^r монотоно расте, се добива $a^r \geq a^{n_0}$, а пак од $a^{n_0} > M$, следува $a^r > M$, при $r \geq n_0$ т.е. $\lim\limits_{r \to \infty} a^r = \infty$.

Теорема 4. $\lim\limits_{r\to-\infty} a^r = 0.$

Доказ. Ставајќи $r = -s, r \to -\infty,\ s \to \infty$ добиваме $\lim\limits_{r\to-\infty} a^r = \lim\limits_{s\to\infty} a^{-s} = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{1}{a^s} = \dfrac{1}{\lim\limits_{s\to\infty} a^s} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

Својствата на $y = a^r$, за $0 < a < 1$ се добиваат лесно од претходните теореми, имајќи предвид дека:

$a^r = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^r}$, каде $\dfrac{1}{a} > 1$ ако е $0 < a < 1$.

Така за $0 < a < 1$ имаме:

Теорема 5. За функцијата $y = a^r$, $0 < a < 1$ важи

i) $a^r < 1$, за $r > 0$

ii) $a^r > 1$, за $r < 0$

iii) $a^r = 1$, за $r = 0$.

Теорема 6. Функцијата $y = a^r$ монотоно опаѓа за $0 < a < 1$.

Теорема 7. $\lim\limits_{r\to\infty} a^r = 0$ за $0 < a < 1$.

Теорема 8. $\lim\limits_{r\to-\infty} a^r = +\infty$ за $0 < a < 1$.

Функцијата $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$ е даден реален број), со дефинициона област $\mathbb{R}$, се нарекува **општа експоненцијална функција**.

Бидејќи $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\underline{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\overline{x_n}}$ каде $\underline{x_n}$, $\overline{x_n}$ се $n-$значните приближувања на x, својствата на функцијата $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ следуваат од претходно дадените својства на $y = a^r$, $r \in \mathbb{Q}$.

Да ги наведеме:

I. $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ т.е. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ за $f(x) = a^x$, $a > 0$.

II. а) За $a > 1$ важи

i) $a^x < 1$, за $x < 0$

ii) $a^x > 1$, за $x > 0$

iii) $a^x = 1$, за $x = 0$.

б) За $0 < a < 1$ важи

i) $a^x < 1$, за $x > 0$

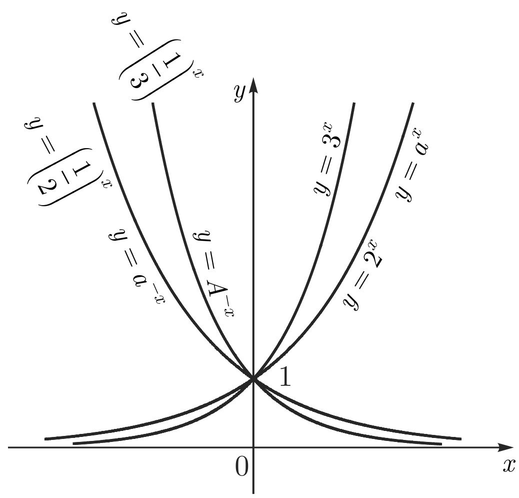
ii) $a^x > 1$, за $x < 0$

iii) $a^x = 1$, за $x = 0$.

III. Функцијата $y = a^x$ монотоно расте при $a > 1$ и монотоно опаѓа при $0 < a < 1$. Така, $y = a^x$ има инверзна функција.

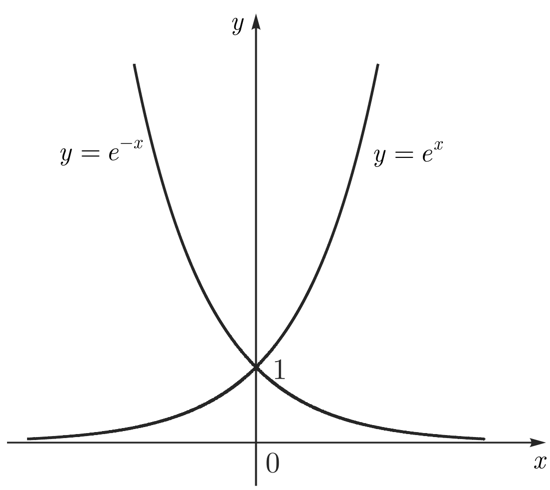
IV. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, при $a > 1$ и
$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$, при $0 < a < 1$.

Примери на графици за некои вредности на a се:



Ако основата на експоненцијалната функција е $a = e$, тогаш се добива експоненцијална функција $y = e^x$ која се нарекува **функција на природно растење**.

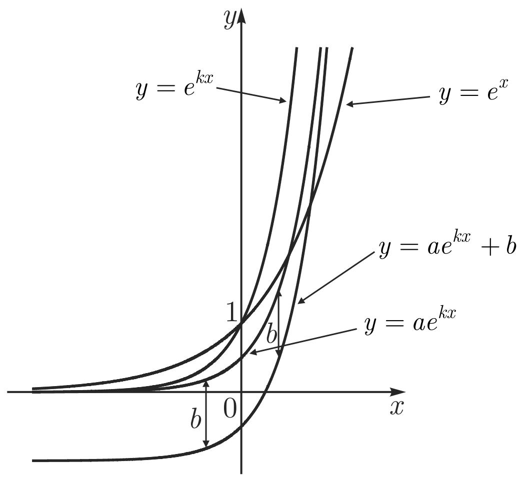
Функцијата пак $y = e^{-x} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x$ се нарекува **функција на природно опаѓање**.



Обично, во природните процеси се јавуваат посложени експоненцијални функции од облик: $y = \pm Ae^{kx}$, $y = \pm Be^{-kx}$, $k \in \mathbb{R}$ или пак $y = ae^{kx} \pm b$, чии графици се добиваат со поместување на графикот на $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ по $x-$ оската или по $y-$оската.

Пример. За $k > 1$, $0 < a < 1$, $b < 0$ ќе ја скицираме функцијата $y = ae^{kx} + b$.

Имаме $e^{kx} = (e^k)^x = A^x$, каде $A = e^k > e^1$, па графикот е



Во првата глава видовме дека

$$e^1 = 1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \cdots + \frac{1^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!}.$$

Напоменуваме дека за природната експоненцијална функција e^x важи

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

за секој реален број x.

Примери во природните науки

Појавата на експоненцијалната функција во природните процеси ја забележавме во првата глава, т.е.имавме:

1) Процесот на растење, размножување оди по законот $m(t) = m_0 e^{kt}$ т.е. функцијата $y = m_0 e^{kx}$ попозната како Малтусов закон на растење без пречки и отпори (m_0-почетна бројност, $k-$коефициент на растење, $t-$изминато време).

2) Процесот на умирање, трошење, радиоактивно распаѓање оди по законот на опаѓачка експоненцијална функција $m(t) = m_0 e^{-kt}$ т.е. функцијата $y = m_0 e^{-kx}$.

3) Процесот на активен хемиски остаток од материја A по некое време t на реакција е:

$$a(t) = Ae^{-kt},$$

каде k е коефициент на брзина на хемиска реакција.

4) Процесот на формирање на продукт на бимолекуларна хемиска реакција оди по законот:

$$c = ab\frac{e^{k(b-a)t} - 1}{be^{k(b-a)t} - a},$$

каде a е почетна количина од материја A, b е почетна количина од материја B и k е коефициент на брзина на хемискиот процес.

Всушност, основна математичка функција во природните науки не е наједноставната, линеарната функција, туку експоненцијалната функција, бидејќи истата се јавува секаде каде што има појава на голем број мали елемент, а тоа се основни својства на природата! Голем број атоми и молекули во секоја материја, потоа голем број клетки во ткивата на живата материја и слично.

2.14.6 Хиперболични функции

Разни комбинации на функциите e^x и e^{-x} одговараат на многу чести појави во природата и техниката. Тие комбинации се многу почести од полиномните, алгебарски функции и ирационални изрази во практиката и имаат големо значење, буквално во сите области од човечката дејност.

Така, ако обесиме синџир од алки за двата краја, без да затегнуваме, тој ќе добие карактеристичен вдлабнат облик.

Слично однесување има и секое повеќе или помалку еластично тело: греда потпрена на двата краја на која има товар гума, жица, (мостови, виткања на гранки по тежина на плод или удар и други). Се докажува дека сите овие извиткувања се одвиваат по законот

$$y = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

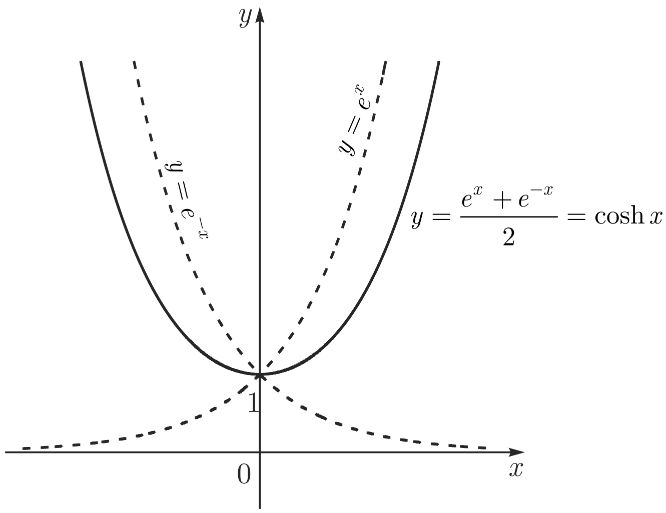
каде a е некоја константа што зависи од својства на материјалот и разни други фактори.

Затоа, е важна функцијата од облик:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ , x \in \mathbb{R}$$

која се означува со $\cosh$ (**косинус хиперболикум од x**) со дефинициона област $\mathbb{R}$ и $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\} = [1, \infty)$.

Нејзиниот график се добива со собирање на графиците на функциите e^x и e^{-x} и земање на $\frac{1}{2}$ од вредноста на $y-$координатата од овој график т.е.



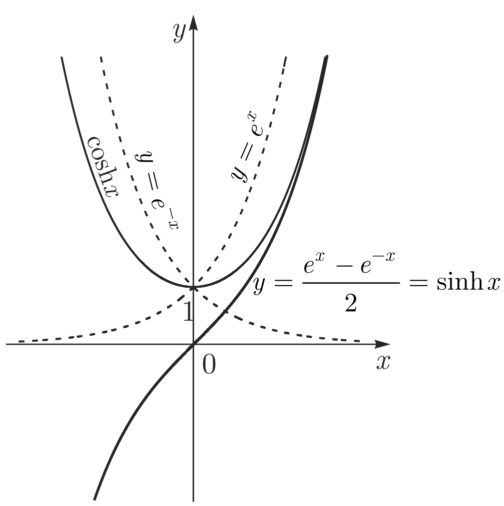
Се докажува дека за мали вредности на x важи приближувањето $\cosh x \approx 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Друга значајна функција е функцијата:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

која се означува со $\sinh x$ (**синус хиперболикум од** x) со дефинициона област $\mathbb{R}$ и $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Се докажува дека за мали вредности на x важи приближувањето $\sinh x \approx x + \dfrac{x^3}{3!}$. Графикот на $y = \sinh x$ е:



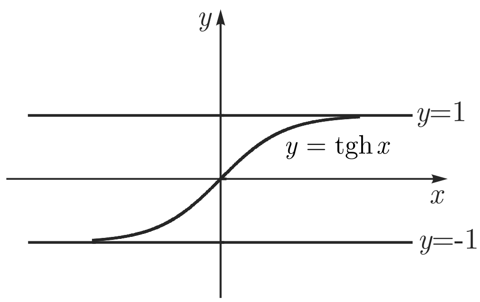
Количникот од функците $y = \sinh x$ и $y = \cosh x$ се нарекува **тангенс хиперболичен** од x и се бележи со:

$$y = \mathrm{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Нејзината дефинициона област е $\mathbb{R}$ и $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Од $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$ следува дека $y = 1$ и $y = -1$ се хоризонтални асимптоти за функцијата $y = \mathrm{tgh} x$.

Графикот на $\mathrm{tgh} x$ е:

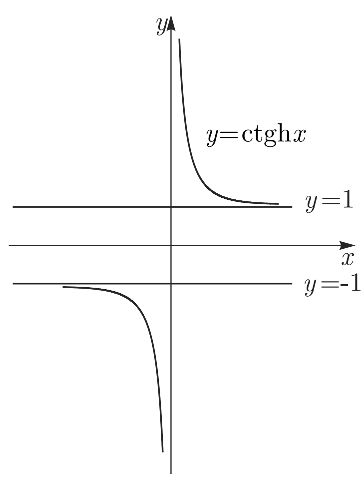


Количникот од функциите $\cosh x$ и $\sinh x$ се вика **котангенс хиперболикум од** x и се бележи со $\mathrm{ctgh} x$. Значи

$$\mathrm{ctgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

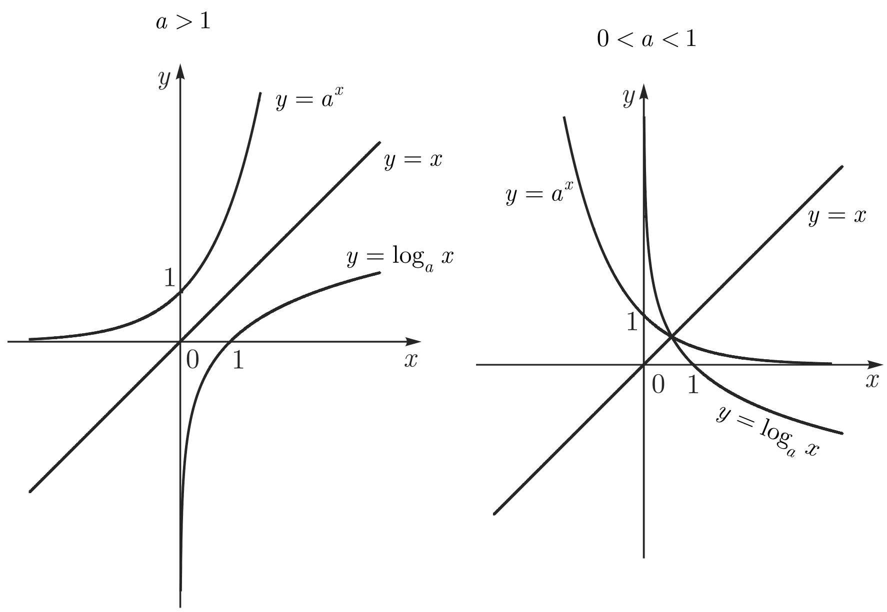
Притоа, нејзината дефинициона област е $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ и $f(D) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Графикот на оваа функција има прекин во точка $x = 0$ т.е. $x = 0$ е вертикална асимптота за функцијата, а $y = 1$ и $y = -1$ се хоризонтални асимптоти.



2.14.7 Логаритамска функција

Веќе ја разгледавме општата експоненцијална функција $y = a^x$, $x \in D$. Видовме дека таа е монотона и тоа монотоно расте за $a > 1$ и монотоно опаѓа за $0 < a < 1$. Според тоа, таа има инверзна функција. Бидејќи $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, инверзната функција на $y = a^x$ ќе биде дефинирана од $(0, +\infty)$ во $\mathbb{R}$. Инверзна функција на $y = a^x$ се нарекува **логаритамска функција со основа** a. Се означува со $y = \log_a x$. Нејзината дефинициона област е $(0, +\infty)$. Имајќи ја предвид теоремата за графици на инверзна функција, график на $y = \log_a x$, за разни вредности на a е:



Јасно, ако $a > 1$, функцијата $y = \log_a x$ е монотоно растечка, а за $0 < a < 1$, функцијата $y = \log_a x$ е монотоно опаѓачка.

Правата $x = 0$ е вертикална асимптота за $y = \log_a x$.

Својствата (правилата) за операции со логаритми произлегуваат од својствата (правилата) за операции со степени.

Прво, да нагласиме дека, од дефиницијата на логаритамска функција имаме:

$$x = \log_a y \overset{df}{\Leftrightarrow} a^x = y$$

т.е.

$$m = \log_a M \overset{df}{\Leftrightarrow} a^m = M.$$

т.е. да се најде логаритам од некој број M за основа a, значи да се најде таков број m со кој ако се степенува основата a ќе се добие бројот M.

Сега ќе ја дадеме врската меѓу логаритми со различни основи.

Нека $\log_a A = x$ и $\log_b A = y$. Тогаш важи:

$$\begin{aligned} & a^x = A, \;\; b^y = A \\ & \quad \Leftrightarrow a^x = b^y \;/\log_a \\ & \quad \Leftrightarrow \log_a a^x = \log_a b^y \Leftrightarrow x = y \log_a b \\ & \quad \Leftrightarrow \log_a A = (\log_b A) \cdot (\log_a b) \end{aligned}$$

1. $\log_a 1 = 0$.

2. $\log_a a = 1$

3. $a^{\log_a M} = M, \;\; M > 0$.

4. За $M_1, M_2 > 0$, важи $\log_a M_1 = \log_a M_2 \Rightarrow M_1 = M_2$.

5. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N, \; M, N > 0$.

Доказ. Од 3 имаме:

$$M = a^{\log_a M} \;\text{ и }\; N = a^{\log_a N}$$

од каде добиваме $M \cdot N = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N}$ т.е. $M \cdot N = a^{\log_a M + \log_a N}$. Повторно, ако се примени 3, се добива $a^{\log_a M \cdot N} = M \cdot N = a^{\log_a M + \log_a N}$ т.е. $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$.

6. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$, за $M, N > 0$.

7. $\log_a M^k = k \log_a M, \; M > 0, k \in \mathbb{R}$.

Доказ. Од 3. $M = a^{\log_a M}$ па $M^k = \left(a^{\log_a M}\right)^k = a^{k \log_a M}$ односно $\log_a M^k = k \log_a M$.

8. $\log_a b = \dfrac{\log_a A}{\log_b A}, \;\; A > 0$.

Попознати се три вида логаритми:

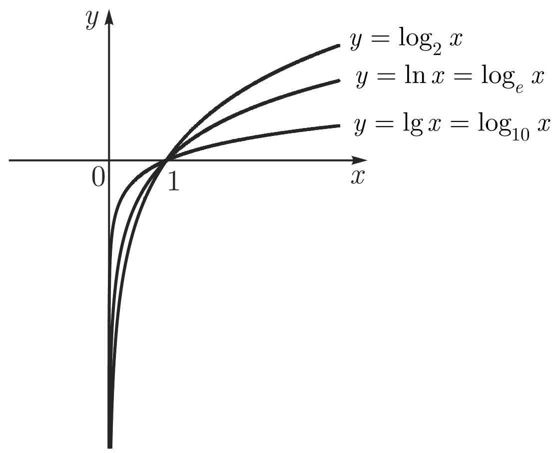
- логаритми со основа e, и притоа функцијата $y = \log_e x$ е позната како **природен логаритам** т.е. **природна логаритамска функција**. Таа, специјално, се означува со $y = \ln x$.

- логаритам со основа 10, и притоа функцијата $y = \log_{10} x$ е позната како **декаден (Бригсов) логаритам**, т.е. **декадна логаритамска функција**.

- логаритам со основа 2, и притоа функција $y = \log_2 x$ е позната како **бинарен логаритам** т.е. **бинарна логаритамска функција**.

Специјално важи $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

9. За $x > 1$, $\log_{10} x < \ln x < \log_2 x$ и за $0 < x < 1$, $\log_2 x < \ln x < \log_{10} x$.



Примери на $y = \log_a x$ во природните процеси

Видовме дека експоненцијалната функција $y = a^x$ е во основа на природните процеси. Од тие причини, логаритамската функција како инверзна на експоненцијалната ќе биде исто толку многу застапена во природните процеси.

1) Да го разгледаме Малтусовиот закон за растење односно размножување т.е. $m = m_0 e^{kt}$, каде m_0 е почетен број на популација, k е коефициент на размножување и m е бројност на популација по изминато време t.

Многу често може да се измери почетната бројност, m_0, бројноста m по изминато време t и се бара кој е коефициентот на размножување за таа популација. Во тој случај имаме:

$$\frac{m}{m_0} = e^{kt} \Leftrightarrow kt = \ln \frac{m}{m_0} \Leftrightarrow k = \frac{1}{t} \ln \frac{m}{m_0}.$$

2) Ако се има предвид дека законот за радиоактивно распаѓање гласи: $m = m_0 e^{-kt}$, каде k е коефициент на распаѓање за даден елемент, m_0 е почетно количество маса и m е количество маса по некое време t.

Може да се постави прашање: да се одреди времето за кое од одредени елементи со почетна маса m_0 со коефициент на распаѓање k, ќе се добие маса m. Тогаш: $\dfrac{m}{m_0} = e^{-kt}$, $-kt = \ln \dfrac{m}{m_0} \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{k} \ln \dfrac{m}{m_0}$.
Ако се бара времето T после кое радиоактивната маса ќе се смали на половина е познато како **време на распаѓање** и се добива:

$$T = -\frac{1}{k} \ln \frac{(m_0/2)}{m_0} = -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{k}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{\ln 2}{k}, \text{ т.е. } T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Уште една корист од логаритамот:

Ако треба да се работи со многу големи (или многу мали) броеви, тогаш е поздгодно да работиме со нивните логаритми. Така, на пример наместо да работиме со:

$12\,000\,000\,000 = 12 \cdot 10^9$ ќе работиме со многу помал број $\log_{10} 12\,000\,000\,000 = \log_{10}(12 \cdot 10^9) = \log_{10} 12 + \log_{10} \cdot 10^9 = \log_{10} 12 + 9 = 1,20 + 9 \approx 10,20$.

2.14.8 Степенска функција со реален показател

Досега степенската функција $f(x) = x^r$ беше определена за рационален показател, r. Но, својството на логаритмите $x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x}$ ни овозможува да дефинираме степенска функција $f(x) = x^b$, за $b \in \mathbb{R}$, на следниот начин:

$$f(x) = x^b \stackrel{df}{=} e^{b \ln x}, \;\; x \in (0, \infty).$$

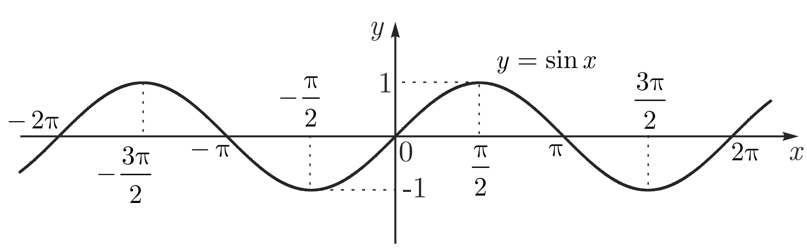
Оваа функција е непрекината како композиција од непрекинати функции и строго монотоно расте за $b > 0$, а строго монотоно опаѓа за $b < 0$.

2.14.9 Тригонометриски функции

1° Од дефиницијата на $y = \sin x$, јасно е дека $y = \sin x$ е $\mathbb{R}$.

Од $\sin(-x) = -\sin x$, добиваме дека $y = \sin x$ е непарна функција. Нулите на $y = \sin x$, се точките $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Јасно е дека $|\sin x| \leq 1$, за секој $x \in \mathbb{R}$ и $\sin x = 1$, за $x = (4k+1)\dfrac{\pi}{2}$, а $\sin x = -1$ за $x = (4k-1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.

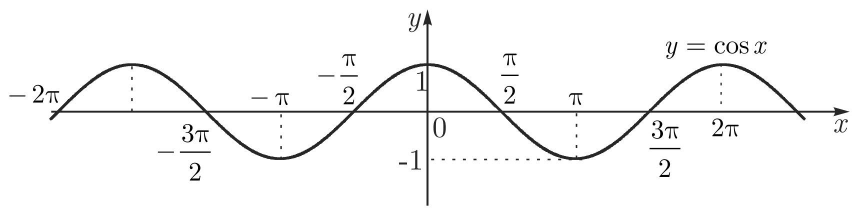
Од $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, за секој $x \in\mathbb{R}$, добиваме дека $\omega = 2\pi$ е период за $y = \sin x$. Нејзиниот график е:



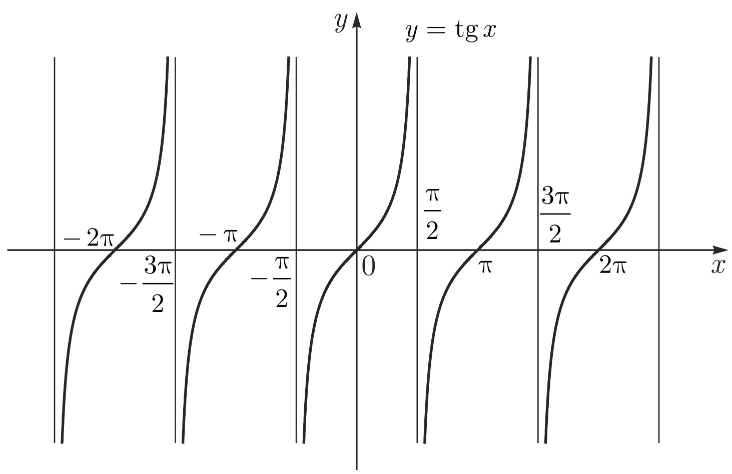
Графикот на $y = \sin x$ се нарекува **синусоида**.

2° За функцијата $y = \cos x$ дефиниционата област е $\mathbb{R}$.

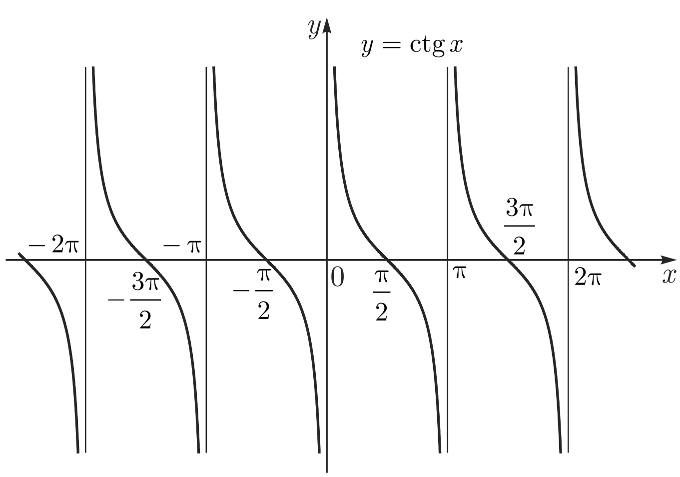
Од $\cos(-x) = \cos x$, за секој $x \in \mathbb{R}$, следува дека $y = \cos x$ е парна функција. Нулите на $y = \cos x$ се добиваат за $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Јасно $|\cos x| \leq 1$ и $\cos x = 1$ за $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а $\cos x = -1$ за $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Функцијата е периодична со период $\omega = 2\pi$. Нејзиниот график е:



3° За функцијата $y = \mathrm{tg}x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$. Таа е непарна функција, има нули за $x = k\pi, x \in \mathbb{Z}$, е периодична со период $\omega = \pi$ и $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ се вертикални асимптоти за $y = \mathrm{tg}x$. Нејзиниот график е



4° За функцијата $y = \mathrm{ctg}x$ имаме $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, таа е непарна периодична функција со период $\omega = \pi$, има нули за $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{Z}$ и правите $x = k\pi$ се вертикални асимптоти за $y = \mathrm{ctg}x$. Нејзиниот график е



2.14.10 Циклометриски функции

Функциите што се инверзни на тригонометриските функции се викаат **циклометриски**. Тие се:

$y = \arcsin x$ (аркус синус од x) $\Leftrightarrow x = \sin y$

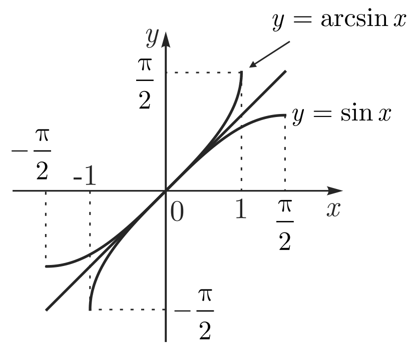
$y = \arccos x$ (аркус косинус од x) $\Leftrightarrow x = \cos y$

$y = \mathrm{arctg} x$ (аркус тангенс од x) $\Leftrightarrow x = \mathrm{tg}\, y$

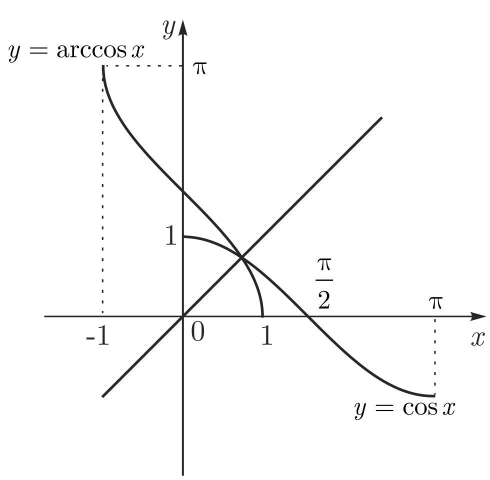
$y = \mathrm{arcctg} x$ (аркус котангенс од x) $\Leftrightarrow x = \mathrm{ctg}\, y$

Бидејќи тригонометриските функции не се монотони функции, за да постои инверзна функција ќе се ограничиме на делови од $\mathbb{R}$ на кои функцијата е монотона.

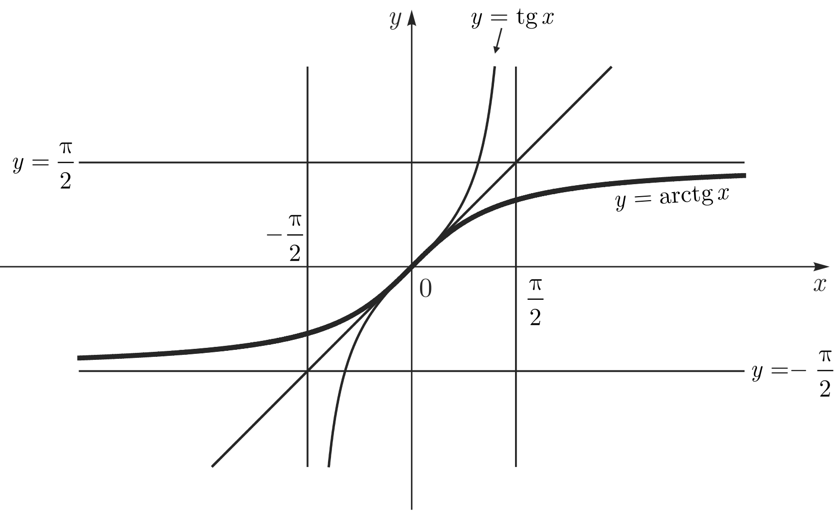
Така, $y = \sin x$ е монотоно растечка на $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ па на овој дел ќе постои нејзина инверзна функција $y = \arcsin x$. Бидејќи $|\sin x| \leq 1$, т.е. $\sin x \in [-1, 1]$, функцијата $y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$ постои и нејзините вредности се во $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Нејзиниот график е:



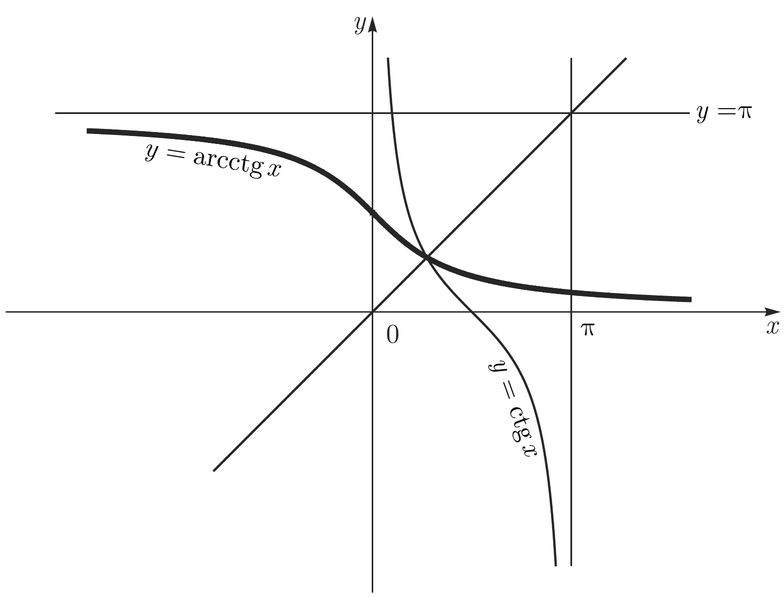
Функцијата $y = \arccos x$ е дефинирана на $[-1, 1]$ и нејзините вредности се во интервалот $[0, \pi]$ (Ја разгледуваме функцијата $y = \cos x$ на $[0, \pi]$.)



Функцијата $y = \mathrm{tg}x$ е строго растечка на $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $f\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (-\infty, \infty)$. Според тоа, за овој дел од $y = \mathrm{tg}x$ постои инверзна функција и таа е дефинирана на $(-\infty, \infty)$.



Графикот на $y = \mathrm{arcctg}x$ (дефинирана за $x \in (-\infty, +\infty)$ со вредности во интервалот $(0, \pi)$) е:



Дефиниција. Функцијата $y = f(x)$ е **елементарна функција**, ако е:

а) степенска
б) експоненцијална
в) тригонометриска

г) инверзна на некоја од претходните
д) збир, разлика, производ, количник или композиција на функциите а)-г).

Забелешка. Да напоменеме дека елементарните функции се непрекинати на својата дефинициона област.

2.15 Некои карактеристични гранични вредности

Без доказ ќе наведеме накои карактеристични граничи вредности, кои ќе се користат при пресметките:
I. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
II. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
III. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
IV. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
V. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \ a>0$
VI. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2.16 Функции од повеќе реални аргументи

Нека D е множеството n-торки од реални броеви $(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Притоа:

$$(a_1,a_2,\dots,a_n)=(b_1,b_2,\dots,b_n)\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,\dots,a_n=b_n.$$

Секое пресликување f од D во множеството реални броеви $\mathbb{R}$, се нарекува **функција од n-реални аргументи**.

Ако $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D$ и $y\in\mathbb{R}$ е елемент во кој се пресликува $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, тогаш пишуваме $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

3

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ

3.1 Мерење на промени во процеси. Средна брзина на биолошки процес. Биолошки коефициент

Веќе видовме дека природните процеси математички се опишуваат со функции т.е. функциите претставуваат математички модел на природните процеси. Нека $y = f(x)$ опишува некој природен процес во зависност од времето x т.е. зависност на некоја величина, во процесот од времето x. Значи, процесот го разгледуваме (набљудуваме) меѓу две едно по други временски положби x и $x+\triangle x$, Δx е изминатото време од почетокот до крајот на разгледувањето на процесот и притоа разгледуваните величини во процесот што одговараат на овие временски положби се $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$, соодветно.

Промена на процесот за изминато време Δx се определува како разлика меѓу двете едноподруги вредносни положби во процесот, т.е. $\Delta y \stackrel{df}{=} f(x + \Delta x) - f(x)$.

Релативна промена на процесот е количникот од промената на процесот Δy и изминатото време Δx, т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} \stackrel{df}{=} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Значи, релативната промена на процесот покажува за колку се има изменето мерената големина Δy со промена на времето Δx.

Релативната промена на процесот уште се нарекува **средна брзина на процесот** во временски интервал Δx.

Означуваме:

$$v_{\text{средна}} = \overline{v} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пример 1. Средна брзина на хемиска реакција

Нека се дадени две хемиски материи A и B со почетни количества $a\,g$ и $b\,g$, соодветно. Нека кај нив се одвива некоја едноставна биомолекуларна хемиска реакција, според следната функција:

$$1mol\ A + 1mol\ B = 1mol\ C = (\text{продукт})$$

($1mol\ A =$онолку g од А колку што изнесува молекуларната тежина на А.)

Се покажува дека, трошењето на А оди по формула $a(x) = ae^{-kx}$, каде k е коефициент на брзина на хемиската реакција во зависност од времето x.

Слично, трошење на В оди по функција: $b(x) = be^{-kx}$, во зависност од времето x.

Забелешка. До овие функции се доаѓа како при процеси на изумирање во прва глава.

Значи, $a(x)$ и $b(x)$ се остатоците на А, односно В, по изминато време x.

Она што е потрошено од a и b за изминато време x е:

$$\Delta a = a - a(x) = a - ae^{-kx} = a(1 - e^{-kx})$$
$$\Delta b = b - b(x) = b - be^{-kx} = b(1 - e^{-kx})$$

А она што е потрошено од А и В заедно, оди во продуктот С, значи по некое време x е добиен продукт

$$C = C(x) = \Delta a + \Delta b = (a + b)(1 - e^{-kx})$$

т.е.

$$C(x) = (a + b)(1 - e^{-kx})$$

е позната формула за продукт С во хемиската реакција од типот што го опишуваме. Сега, го имаме математичкиот модел на оваа хемиска реакција т.е. $C(x) = (a + b)(1 - e^{-kx})$ ја дава големината на продуктот во зависност од времето x.

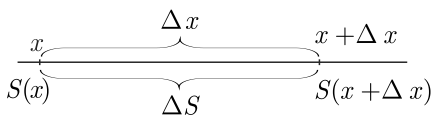
По некое изминато време Δx, значи во временска положба $x + \Delta x$ ќе имаме големина на продукт $c(x + \Delta x) = (a + b)(1 - e^{-k(x+\Delta x)})$. Промената на големината (продуктот, по изминато време Δx, е

$$\begin{aligned}\Delta C &= C(x + \Delta x) - C(x) = \\ &= (a + b)(1 - e^{-k(x+\Delta x)}) - (a + b)(1 - e^{-kx}) = \\ &= (a + b)e^{-kx}(1 - e^{-k\Delta x})\end{aligned}$$

Средна брзина на овој хемиски процес е:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = (a + b)e^{-kx} \cdot \frac{1 - e^{-k\Delta x}}{\Delta x}$$

Пример 2. Нека разгледуваме нерамномерно праволиниско движење на некое тело. Ако телото почнувајќи од време x до време $x + \Delta x$ изминува дел од патот, од $s(x)$ до $s(x + \Delta x)$, т.е. пат $\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x)$



тогаш средната брзина на движење на телото е количникот $\dfrac{\Delta s}{\Delta x} = \overline{v}$.

Пример 3. Нека набљудуваме размножување на една колонија микроорганизми. Ако почнувајќи од време x до $x + \Delta x$, колонијата од $m_0 = m(x)$ е зголемена на $m_1 = m(x + \Delta x)$, тогаш промената за изминато време Δx е $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$, а количникот $\overline{v} = \dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ се вика средно растење на колонијата микроорганизми.

Во општ случај $y = f(x)$ е математички модел на некој процес и притоа x не мора да означува време, туку било која променлива (зависно од разгледуваниот процес). Функцијата $y = f(x)$ ја покажува зависноста на некоја веичина во разгледуван процес од промената на x.

За две положби на променливата x и $x + \Delta x$, одговараат **две** положби на величините во процесот т.е. $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$, соодветно.

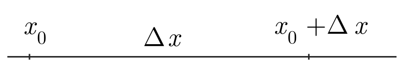
Како што видовме, $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ е нараснување на функцијата за промена Δx на променливата x или **промена на процесот**. Количникот:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

се нарекува и **диференцијален количник** или **средна брзина на процесот**.

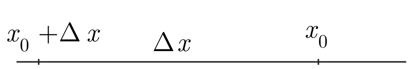
Ако оваа средна брзина се сведе на единица мерка, таа, тогаш се нарекува **коефициент на биолошки (хемиски) процес**.

Забелешка. Δx може да биде и позитивен и негативен. Ако x_0 е некоја положба на променлива, тогаш имаме случај



при $\Delta x > 0$

и случај

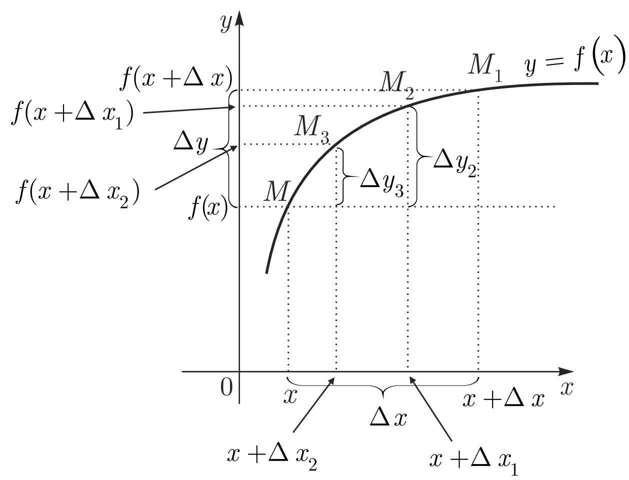


при $\Delta x < 0$.

3.2 Моментна брзина на процес. Извод на функција

3.2.1 Дефиниција на извод на функција

Ако во диференцијалниот количник $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ на дадена функција $y = f(x)$, поминеме на гранична вредност, кога Δx тежи кон нула, тогаш точката $x + \Delta x$ ќе се движи кон Δx.



Тоа пак има за последица и Δy да тежи кон нула. Така всушност добиваме две низи од мали големини $\{\Delta x_n\}$ и $\{\Delta y_n\}$. Ако граничната вредност $\lim\limits_{\Delta x_n \to 0} \dfrac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$ постои, таа се вика **извод на функцијата** $y = f(x)$ **во точката** x, односно

Дефиниција. Нека $y = f(x)$ е дадена функција со дефинициона област D и $x_0 \in D$. Ако постои граничната вредност, и е конечна,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

таа се нарекува **извод на** f **во** x и се бележи со $y'(x_0)$.

Тогаш функцијата f се нарекува **диференцијабилна во точката** x_0. Ако функцијата е диференцијабилна во секоја точка од D таа се нарекува **диференцијабилна на** D.

Ако $y = f(x)$ опишува некој природен процес тогаш извод во точката x_0, $y'(x_0)$ е всушност **моментна брзина на процесот** $y = f(x)$ **во точката** x_0**.** Ставајќи $x_0 + \Delta x = x$, добиваме $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow x - x_0 \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$ па $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Постоењето на извод ќе овозможи подетално испитување на дадена функција, попрецизно цртање на графикот на функцијата, како што ќе илустрираме подоцна.

Пример 1. Извод од константна функција е нула.

Доказ. Нека $f(x) = c$, каде c е константа. Тогаш $f(x + \Delta x) = c$, па $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$. Оттука добиваме $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$, па $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \Rightarrow (C)' = 0$

Пример 2. Извод од идентичната функција, $f(x) = x$ е 1.

Доказ. $f(x)=x,\ \ x\in\mathbb{R}$. Тогаш $f(x+\Delta x)=x+\Delta x$, па $\Delta y=\Delta f=x+\Delta x-x=\Delta x$. Оттука добиваме $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1=1\Rightarrow (x)'=1$

Пример 3. Извод од линеарната функција, $f(x)=ax+b$, е константата a.

Доказ. Нека $f(x)=ax+b$ каде $a,b\in\mathbb{R}$. Тогаш $f(x+\Delta x)=a(x+\Delta x)+b=ax+a\Delta x+b$, па $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=a\Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=a\frac{\Delta x}{\Delta x}=a$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}a=a$ па $(ax+b)'=a$.

Пример 4. Извод од квадратна функција, $f(x)=x^2$ е $2x$.

Доказ.$f(x)=x^2$. Тогаш $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2$, па $y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$. Оттука добиваме $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta \mathrm{x}\to 0}\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}=2x$ па $(x^2)'=2x$.

Пример 5. Изводот од степенска функција, $f(x)=x^n, n\in\mathbb{R}$, изнесува nx^{n-1}.

Доказ. Од $f(x)=x^n$, $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^n$ добиваме $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\binom{n}{k}x^{n-k}\Delta x^k+\cdots+\binom{n}{n}\Delta x^n-x^n=n\cdot x^{n-1}\Delta x+\binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\binom{n}{k}x^{n-k}\Delta x^k+\cdots+\Delta x^n$. Оттука $\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+\binom{n}{k}x^{n-k}\Delta x^{k-1}+\cdots+(\Delta x)^{n-1}$, па $\lim\limits_{\Delta \mathrm{x}\to 0}\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}=nx^{n-1}+0+0+\ldots+0=nx^{n-1}$, т.е. $(x^n)'=nx^{n-1}$, $n\in\mathbb{R}$.

Без доказ ќе ја наведеме следнава

Теорема 1 Ако f има извод во x, тогаш f е непрекината во x.

Теорема 2. Нека $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни функции на D. Ако f и g имаат извод во $x\in D$, тогаш:

а) $f+g$ има извод во $x\in D$ и важи

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$

б) $f\cdot g$ има извод во $x\in D$ и важи

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

в) Ако $g(x)\neq 0$, $\frac{f}{g}$ има извод во $x\in D$ и важи

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}.$$

Доказ. а) Нека $Y=f+g$. Тогаш $Y(x)=f(x)+g(x)$, $Y(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)$, па

$\Delta Y=Y(x+\Delta x)-Y(x)=f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-$
$-(f(x)+g(x))=f(x+\Delta x)-f(x)+g(x+\Delta x)-g(x)$.

Следува

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta Y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(y).$$

Добивме $Y'(x) = (f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$, т.е. $Y' = (f+g)' = f' + g'$.

б) Нека $Y = f \cdot g$. Тогаш $Y(x) = f(x) \cdot g(x)$, $Y(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x)$, па

$\frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$
$\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} =$
$\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x} =$
$= \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Следува

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Добивме $Y' = (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

в) Нека $Y = \frac{f}{g}$, $g(x) \neq 0$. Тогаш $Y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $Y(x+\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}$, па

$\frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{Y(x+\Delta x)-Y(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} =$
$= \frac{1}{\Delta x} \frac{(f(x+\Delta x)-f(x))g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} =$
$= \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x) - \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x}\cdot f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$.

Следува

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)g(x)}.$$

Добивме $Y'(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}$, т.е. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - g'\cdot f}{g^2}$.

Последица. Ако f и g се дефинирани на D, $c \in \mathbb{R}$ е даден број и f, g имаат извод во $x \in D$, тогаш и

а) $c \cdot f$ има извод во $x \in D$ и важи
$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
б) $f - g$ има извод во $x \in D$ и важи
$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

Теорема 3. Нека $g(x)$ е дефинирана и строго монотона на D и $x \in D$. Нека $f(x)$ е дефинирана во околина на $y = g(x)$. Ако $g'(x)$

и $f'(y)$ постојат, тогаш и сложената функција $h(x) = f(g(x))$ има извод во $x \in D$ и важи $h'(x) = f'(y) \cdot g'(x), \quad y = g(x)$.

Доказ. Имаме $f'(y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y}$. Од $y = g(x)$ следува $\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x)$, т.е. $g(x + \Delta x) = \Delta y + g(x) = y + \Delta y$. Тогаш

$$
\begin{aligned}
& h'(x) \overset{df}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \\
& \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \\
& = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\
& = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
& = f'(y) \cdot g'(x), \quad \text{што требаше да се докаже.}
\end{aligned}
$$

Теорема 4. Нека $f : D \to f(D)$ е дефинирана и строго монотона на D. Ако функцијата f има извод во $x \in D$ и $f'(x) \neq 0$, тогаш и функцијата f^{-1} има извод во $y = f(x)$ и важи $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Доказ. Од условот следува дека f^{-1} постои. Заради

$$\frac{1}{f'(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

следува

$$
\begin{aligned}
& (f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \\
& = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \\
& \overset{\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.
\end{aligned}
$$

Објаснување за: $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$.
Нека $\Delta y \to 0$. Од f има извод во x се добива дека f е непрекината во x, f^{-1} постои заради строгата монотоност на f па и f^{-1} е непрекината функција. Од непрекинатоста на f^{-1} следува дека $\lim\limits_{\Delta y \to 0} f^{-1}(y+\Delta y) = f^{-1}(y)$. Од друга страна, $f^{-1}(y+\Delta y) = x + \Delta x$, па значи $\lim\limits_{\Delta y \to 0} f^{-1}(y+\Delta y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0}(x + \Delta x) = f^{-1}(y)$, т.е. $\lim\limits_{\Delta y \to 0}(x + \Delta x) = f^{-1}(y) = x$. Следува дека $x + \lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = x$ па ако $\Delta y \to 0$ тогаш и $\Delta x \to 0$.

Пример 6.

$a)$ $(2x^2-\sqrt{3}\cdot x^3)'=(2x^2)'-(\sqrt{3}\cdot x^3)'=2\cdot(x^2)'-\sqrt{3}\cdot(x^3)'=$
$=2\cdot 2x-\sqrt{3}\cdot 3x^2=4x-3\sqrt{3}x.$

$b)$ $((x+1)(x-1))'=(x+1)'(x-1)+(x+1)(x-1)'=$
$=(1+0)(x-1)+(x+1)(1-0)=x-1+x+1=2x$

$v)$ $$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$g)$ $((2x+3)^2)'=f'(2x+3)\cdot g'(x)=2(2x+3)\cdot 2=8x+12$
$f(x)=x^2,\;\; g(x)=2x+3$
$f'(x)=2x,\;\; g'(x)=2$

$d)$ $f(x)=x^2,\quad f^{-1}(x)=\sqrt{x},\quad x\in\mathbb{R}^+$
$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{2\cdot x},\quad y=f(x)=x^2\Leftrightarrow x=\sqrt{y}$$
Добивме $f^{-1}(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, т.е. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3.3 Изводи од елементарните функции

Теорема 1. $(a^x)'=a^x\ln a$ $(a>0-$ реален број$)$

Доказ. $(a^x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x\cdot a^{\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^x\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=$
$a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$

Последица. $(e^x)'=e^x$

Теорема 2. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$ $(a>0,\, a\neq 1-$ реален број$)$

Доказ.

$f^{-1}(x)=g(x)=\log_x a$ е инверзна функција на $f(x)=a^x$.
$$f^{-1}(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{a^x\ln a},\; y=a^x,$$
$$\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{a^x\ln a},\;\text{ т.е. }\;(\log_a y)'=\frac{1}{y\ln a}$$

Последица. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Теорема 3. $(x^r)'=rx^{r-1}, r\in\mathbb{R}.$

Доказ.

$$x^r = e^{r\ln x} \Rightarrow$$
$$(x^r)' = (e^{r\ln x})' = e^{r\ln x} \cdot (r\ln x)' =$$
$$= e^{r\ln x} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^r \cdot \frac{1}{x} = rx^{r-1}.$$

Специјално $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Теорема 4. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказ.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\dfrac{x+\Delta x - x}{2}\cos\dfrac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = 2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot$$
$$\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\cos\frac{2x+0}{2} = \cos x.$$

Теорема 5. $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказ.

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-2\sin\dfrac{x+\Delta x - x}{2}\sin\dfrac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$
$$= -2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{2x+\Delta x}{2} =$$
$$(-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(\frac{2x+\Delta \mathrm{x}}{2}\right) = -\sin x.$$

Теорема 6. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Доказ.

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cos x + \sin x\sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема 7. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Доказ. Слично како теорема 6.

Теорема 8. $(\mathrm{arcsin}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \ x \in (-1,1)$.

Доказ.

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(x) = \arcsin x \quad \text{е инверзна за } f(x) = \sin x. \\
&(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}, \ \ y = \sin x \\
&\cos x = \sqrt{1-\sin x^2} = \sqrt{1-y^2}, \ \ y \in (-1,1) \\
&\Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \ \ y \in (-1,1).
\end{aligned}$$

Теорема 9. $(\mathrm{arccos}x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказ. Слично како теорема 8.

Теорема 10. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Доказ. Слично на теорема 9.

Теорема 11. $(\mathrm{cosh}x)' = \mathrm{sinh}x$.

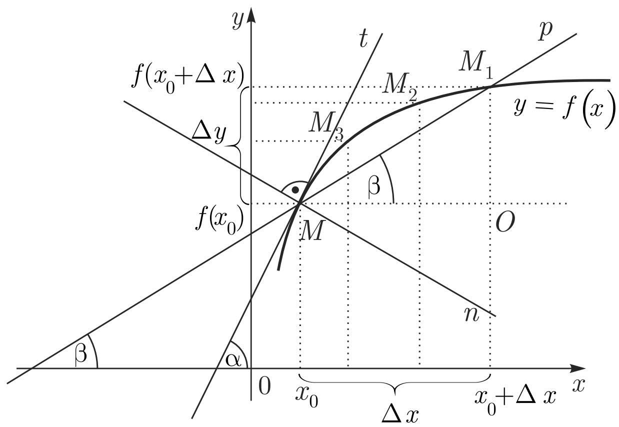
Доказ. $(\mathrm{cosh}x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sinh}x$.

Теорема 12. $(\mathrm{sinh}x)' = \mathrm{cosh}x$.

Доказ. $(\mathrm{sinh}x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{cosh}x$.

3.4 Геометриско значење на изводот

Нека F е график на функцијата $y = f(x)$, со дефинициона област D, која **има извод во секоја точка** $x \in D$. Ги разгледуваме точките $M(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ од Γ и правата p која минува низ точките M и M_1. Правата p ја нарекуваме **секанта**. Нека β е аголот што оваа секанта го зафаќа со x-оската. Тогаш, од правоаголниот триаголник $\triangle MOM_1$, имаме дека $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Ако $\Delta x \to 0$, тогаш точката M_1 се приближува кон точката M по кривата Γ т.е. $M_1 \to M$ и $\Delta y \to 0$, па правата $MM_1 = p$ во општ случај се приближува кон правата t, која се вика **тангента** на кривата Γ во точката M.



Нека аголот што t го зафаќа со x-оската е α. Ако во $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ т.е. $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ пуштиме $\Delta x \to 0$, имајќи предвид дека тогаш $\beta \to \alpha$, па и $\mathrm{tg}\beta \to \mathrm{tg}\alpha$, се добива

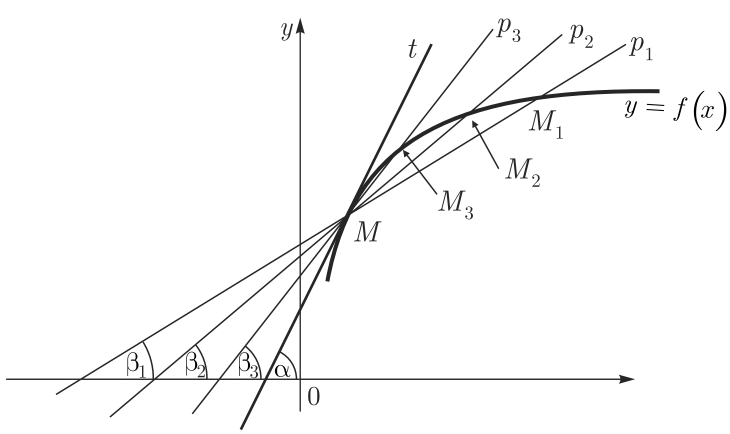
$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \overset{df}{=} f'(x_0)$$

т.е. $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$. Значи, $f'(x_0)$ е **коефициент на правец на тангентата на $y=f(x)$ во точката x_0.**

Равенката на тангентата е $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ (t минува низ $M(x_0, f(x_0))$ и има коефициент на правец $k = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Повторно, ако се потсетиме на делот што се однесува на права, јасно е дека **равенката на нормалата n на Γ во** $M(x_0, f(x_0))$ е $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Следниот цртеж го илустрира движењето на секантата MM_1 кога $\Delta x \to 0$ и M_1 се движи по кривата Γ.



Забелешка. Ако функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во x_0 тогаш постои гранична положба на секантата, т.е. постои тангента t на Γ во x_0.

3.5 Биолошко значење на изводот

Веќе видовме, дека во природните процеси изводот ја дава моментната брзина на процесот. Така,

1) Ако се има процес на растење, опишан со Малтусовиот закон, $m(t) = m_0e^{kt}$, k е константа за даден процес, тогаш брзината на растење во зависност од времето t е дадена со $m'(t) = m_oke^{kt}$.

2) Ако се има процес на умирање, опишан со Малтусовиот закон, $m(t) = m_0e^{-kt}$, брзината на умирање во секој момент t е дадена со $m'(t) = -m_oke^{-kt}$.

3) Ако се има процес на формирање на продукт од две супстанци A и B со почетна маса a и b, кој се одвива по формулата $c(t) = (a + b)(1 - e^{-kt})$, тогаш брзината на формирање на продуктот во зависност од времето t е $c'(t) = (a+b)(0-(-k)e^{-kt}) = (a+b)ke^{-kt}$.

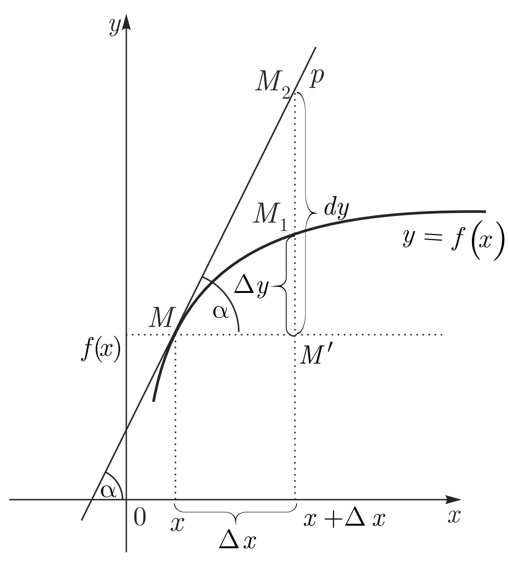
3.6 Диференцијал на функција

Дефиниција. Нека функцијата $y = f(x)$ има извод во точката x и нека аргументот x има нараснување Δx. **Првиот диференцијал** или само **диференцијал** на функцијата $f(x)$ во точката x, означен со dy или $df(x)$, е производот од изводот на функцијата во точката x и нараснувањето (промената) на независно променливата, Δx, т.е.

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{1}$$

Пример 1. Ако $y = x^2$, $y' = 2x$ па $dy = 2x \cdot \Delta x$.

Геометриското толкување на диференцијалот е следното:



Нека $M(x, f(x)) \in \Gamma_f$, $M_1(x+\Delta x, f(x+\Delta x) \in \Gamma_f$ и $M'(x+\Delta x, f(x))$.

Нека p е тангентата на $y = f(x)$ во M и α е аголот што го зафаќа p со позитивниот дел од x-оската. Од геометриското толкување на изводот имаме дека $\mathrm{tg}\alpha = f'(x)$. Нека $M_2 \in p$, и x-координата на M_2 е $x+\Delta x$. Од цртежот имаме: $\dfrac{\overline{M_2M'}}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha = f'(x)$ т.е. $\overline{M_2M'} = f'(x) \cdot \Delta x = df = dy$.

Значи, диференцијалот претставува нараснување на ординатата во $x+\Delta x$ по тангентата. Да забележиме дека $\overline{M_2M'} = dy$, $\overline{M_1M'} = \Delta y$, $dy - \Delta y = \overline{M_1M_2}$.

Ако ја разгледаме функцијата $y = x$, имаме $y'_x = 1$, па $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, т.е.

$$dx = \Delta x. \tag{2}$$

Од (1) и (2), следува $dy = df = f'(x)dx$ т.е. $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx}$.

Од дефиницијата на извод, имаме

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

па за мали вредности на Δx, ја добиваме приближната формула $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ т.е. $\Delta y \approx f'(x)\Delta x = dy$. Значи, $\Delta y \approx dy$.

За мали промени на аргументот, т.е. за мали Δx важи $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$. $(*)$

Примери:

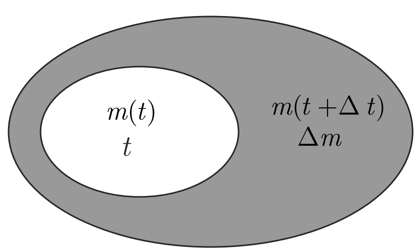
1) **Растење на колонија микроорганизми**

Растење на колонија микроорганизми оди по Малтусов закон $m(t) = m_0e^{kt}$, k е коефициент на растење на таа специфична колонија. На пример, ако е позната бројноста m, во времето на мерење t, а нас не интересира бројноста по време Δt, т.е во времето $t+\Delta t$.

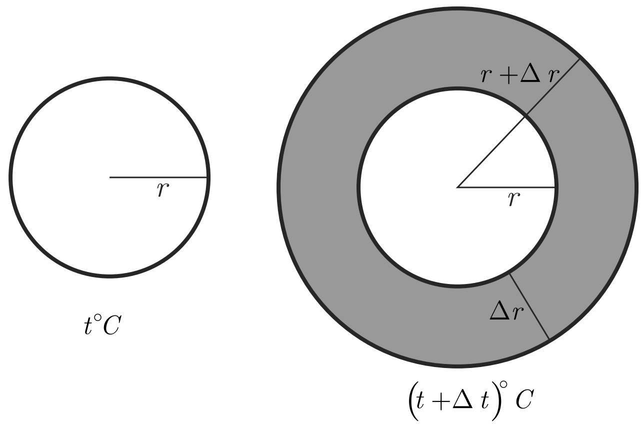
Од претходното имаме, $\Delta m \approx dm = m'(t) \cdot \Delta t = m_0ke^{kt} \cdot \Delta t$, т.е. $\Delta m \approx m_0ke^{kt} \cdot \Delta t$, $m(t+\Delta t) = m + \Delta m$.

Значи, кај колонии на микроорганизми, каде бројноста е голема и е тешко да се брои, користиме $\Delta m \approx m_0ke^{kt}\Delta t$, коешто лесно се пресметува и се добива

$$m(t+\Delta t) \approx m + \Delta m.$$

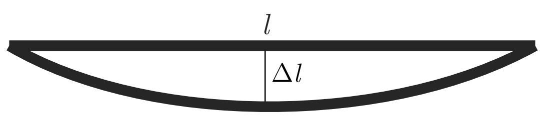


2) **Ширење на кружна плоча при загревање**



Нека на $t^\circ C$ кружна плоча има радиус $r = r(t)$, а на температура $(t + \Delta t)^\circ C$ кружната плоча има радиус $r(t + \Delta t) = r + \Delta r$. Плоштината P на кружната плоча се менува во зависност од r, по формула $P = r^2\pi$. Таа на температура $t^\circ C$ има плоштина $P(t)$ и на $(t+\Delta t)^\circ C$ има плоштина $P(t + \Delta t) = P + \Delta P$ каде $\Delta P \approx P'_r \cdot \Delta r = 2r\pi \cdot \Delta r$.

3) **Издолжување на греда под товар**



Издолжување на греда под товар оди по законот $l = a\cosh kt$ каде a и k се константи кои зависат од многу услови (за гредата, нејзина почетна должина, еластичност и други), а t е масата на товарот

$$\Delta l \approx l'(r) \cdot \Delta t = \left(a\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}\right)' \cdot \Delta t = a\left(\frac{ke^{kt}-ke^{-kt}}{2}\right)\Delta t = ak\sinh t \cdot \Delta t.$$

4) **Растење на волумен**

Нека некое тело е во форма на коцка, со должина на страна l. Волуменот што тоа тело го зафаќа изнесува $V = l^3$. Ако, под некои услови, дојде до зголемување на должината на страната за Δl, промената на волуменот ΔV (неговото зголемување) ќе изнесува $\Delta V \approx 3l^2 \cdot \Delta l$, па новиот волумен е $V_1 \approx V + \Delta V = l^3 + 3l^2\Delta l$.

5) **Прираст на население**

Нека n_0 е почетна бројност на населението во одредено место, $n(t) = n_0e^{kt}$ зависи од времето и k е карактеристичен коефициент на растење на население во тоа место.

Ако имаме бројност во момент t по некое време Δt, бројот на население приближно ќе биде $n(t + \Delta t) \approx n(t) + \Delta n = n(t) + n_0ke^{kt} \cdot \Delta t$.

3.7 Изводи од повисок ред

Нека е дадена функција $y = f(x)$, $x \in D$ и нека таа е диференцијабилна функција на $A \subseteq D$. Тогаш добиваме нова функција $y = f'(x)$, $x \in A$. Ако $y = f'(x)$, $x \in A$ има извод во сите точки $x \in B$, $B \subseteq A$, тогаш тој извод го означуваме со $f''(x)$ и го викаме **извод од втор ред** или **втор извод** на f во $x \in B$, т.е. $f''(x) = (f'(x))'_x$.
Пример 1.
$f(x) = x^2 + 2x + 5$
$f'(x) = 2x + 2$
$f''(x) = 2.$

Ако постои извод и за функцијата $f''(x)$, на некое подмножество од B, тогаш тој извод го викаме **извод од трет ред** или **трет извод** на $f(x)$ и го бележиме со $f'''(x)$.

Оваа постапка можеме да ја продолжиме се додека постои услов за постоење на следниот извод. Така доаѓаме до **n-ти извод** од f или **извод од n-ти ред** што го означуваме со $f^{(n)}(x)$ и $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$. Функцијата која има n-ти извод се вика **n-пати диференцијабилна**.
Пример 2. Функцијата $f(x) = \cos x$ е произволно пати диференцијабилна во секоја точка од $\mathbb{R}$.
Навистина, $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = +\sin x$, $f^{(iv)}(x) = \cos x$, и општо

$$(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, \ n = 4k, \ k \in \mathbb{N} \\ -\sin x, \ n = 4k+1, \ k \in \mathbb{N} \\ -\cos x, \ n = 4k+2, \ k \in \mathbb{N} \\ \sin x, \ n = 4k+3, \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.8 Теоремите на Ферма, на Рол, на Лагранж и на Коши и правилото на Лопитал

Теорема на Ферма[1]**.** Ако функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ има локален екстрем во точката $x = x_0 \in D$ и ако во таа точка функцијата $f(x)$ е диференцијабилна, тогаш $f'(x_0) = 0$.
Доказ. Нека во x_0 функцијата има локален екстрем и нека тоа биде локален максимум. Тогаш постои $\varepsilon-$околина на x_0, т.е. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ така што за сите $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$, важи $f(x) \leq f(x_0)$.

Нека $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$. Тогаш $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, бидејќи $x - x_0 < 0$ и $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Ако во последниот количник, пуштиме $x \to x_0$, добиваме дека

$$f'(x_0) \geq 0. \tag{1}$$

[1] Pierre de Fermat, 1601−1665

Нека $x \in (x_0, x_0+\varepsilon)$. Тогаш $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, бидејќи $x - x_0 > 0$, $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Ако во последниот количник, пуштиме $x \to x_0$, добиваме дека

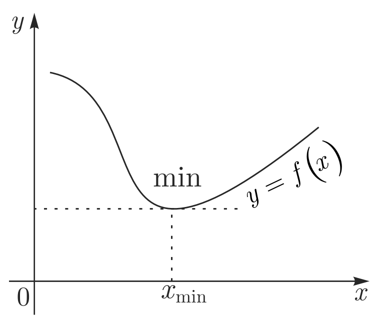
$$f'(x_0) \leq 0. \tag{2}$$

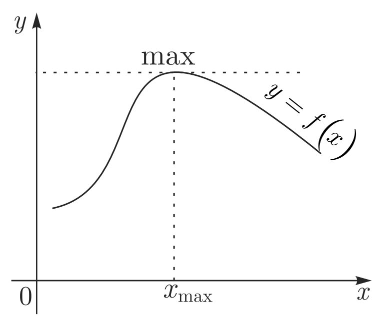
Од (1) и (2) следува дека $f'(x_0) = 0$ што требаше да се докаже.

Слично, се разгледува ако во $x = x_0$, функцијата има локален минимум.

Геометриско значење на теоремата на Ферма.

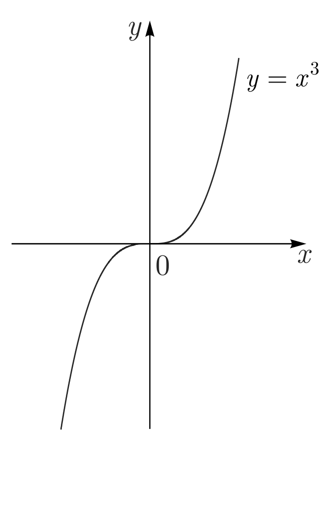
Ако функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ е непрекината на $A \subset D$, A е околина на точка $x_0 \in D$, $y = f(x)$ има тангента во секоја точка од A и ако $y = f(x)$ има локален екстрем во x_0, тогаш според Теоремата на Ферма, $f'(x_0) = 0$, а бидејќи $f'(x_0)$ е коефициент на правец на тангентата, тоа значи дека коефициентот на правец на тангентата во x_0, е 0, т.е. $\mathrm{tg}\alpha = 0$, каде α е аголот што го зафаќа тангентата со позитивниот дел на x-оската. Следува дека $\alpha = 180°$, т.е. тангентата е паралелна со x-оската.





Обратното тврдење не мора да важи:

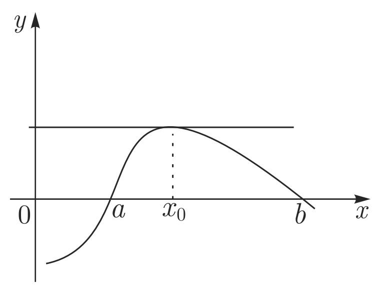
Пример. Функцијата $f(x) = x^3$ е дефинирана на $\mathbb{R}$ и $f'(x) = 3x^2$ и $f'(0) = 0$, но $x = 0$ не е точка на локален екстрем, ниту минимум, ниту максимум.



Теорема на Рол[2]. Нека функцијата $y = f(x)$, $x \in D$, е непрекината на $[a, b] \subseteq D$, диференцијабилна на (a, b) и нека $f(a) = f(b)$, Тогаш постои точка $x_0 \in (a, b)$, таква што $f'(x_0) = 0$.

Геометриско значење на Теоремата на Рол.

Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на $[a, b]$, ако има тангента во секоја точка од (a, b) и ако $f(a) = f(b)$, од теоремата на Рол следува дека постои точка $x_0 \in (a, b)$ во која $f'(x_0) = 0$, т.е. тангентата во x_0 е паралелна со x-оската.



Теорема на Лагранж[3]. Нека функцијата $f(x)$, $x \in D$ е непрекината на сегментот $[a, b] \subseteq D$ и диференцијабилна на (a, b). Тогаш постои точка $x_0 \in (a, b)$ така што

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ т.е. } f(b) = f(a) + (b - a)f'(x_0)$$

Доказ. Функцијата $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ е непрекината на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b), бидејќи $f(x)$ е непрекината на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b). Уште важи

$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a - a) = f(a) - 0 = f(a)$

$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$.

Значи, $F(a) = F(b)$.

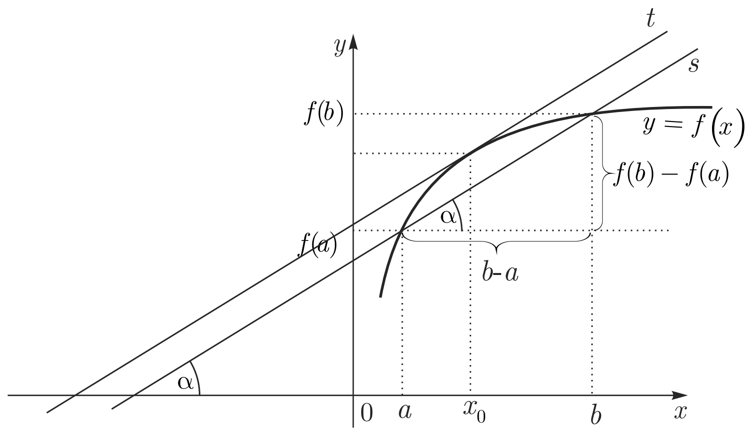
Според тоа, $F(x)$ ги исполнува условите од теоремата на Рол на $[a, b]$, па значи постои точка $x_0 \in (a, b)$ така што $F'(x_0) = 0$. Бидејќи $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, следува дека $f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ т.е. $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, за некој $x_0 \in (a, b)$, што требаше да се докаже.

Геометриско значење на теоремата на Лагранж.

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \mathrm{tg}\alpha$ каде α е аголот што правата низ $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ го зафаќа со $+x$-оската т.е. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ е коефициентот на правец на секантата низ $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

[2]Michel Rolle, 1652–1719

[3]Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813



Имајќи предвид дека $f'(x_0)$ е коефициентот на правец на тангентата на $y = f(x)$ во $x = x_0$ добиваме дека тангентата во $(x_0, f(x_0))$ и секантата низ $A = (a, f(a))$ и $B = (b, f(b))$ имаат ист коефициент на правец, т.е. се паралелни прави.

Значи, геометриското значење на теоремата на Лагранж е: Ако функцијата $y = f(x)$ е непрекината на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) (т.е. има тангента во секоја точка од (a, b)), тогаш постои точка $x_0 \in (a, b)$ таква што тангентата на $y = f(x)$ во $(x_0, f(x_0))$ е паралелна со секантата низ $A = (a, f(a))$ и $B = (b, f(b))$.

Теорема на Коши[4]**.** Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати на $[a, b] \subseteq D$, диференцијабилни на (a, b) и нека $g'(x) \neq 0$ за секој $x \in (a, b)$. Тогаш постои $x_0 \in (a, b)$ така што

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказ. Нека f и g ги исполнуваат условите од теоремата на Коши.

Прво да забележиме дека $g(b) \neq g(a)$. Навистина, ако претпоставиме спротивно, т.е. дека $g(b) = g(a)$, тогаш функцијата g ги исполнува условите од теоремата на Рол, па постои $x_1 \in (a, b)$ така што $g'(x_1) = 0$ што не е можно заради условите на теоремата на Коши.

Сега, да ја формираме функцијата

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(x) - g(a)\right).$$

Лесно се проверува дека $F(x)$ е непрекината на $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b) и $F(a) = F(b) (= f(a))$, па F ги исполнува условите од теоремата на Рол. Следува дека постои $x_0 \in (a, b)$ така што

[4] Augustin Louis Cauchy, 1789 − 1857

$F'(x_0) = 0$. Бидејќи $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$ следува дека $f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x_0) = 0$, т.е. $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Теорема на Лопитал[5] (Лопиталово правило). Нека за функциите f и g важи:

1) тие се непрекинати на $[a, b] \subseteq D$ и диференцијабилни на (a, b)

2) постои $x_0 \in (a, b)$ така што $f(x_0) = g(x_0) = 0$

3) $g'(x) \neq 0$ за секој $x \neq x_0$.

Ако постои $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ тогаш постои и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример. 1) Да ги разгледаме функциите $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ на $[-1, 1]$ и нека $x_0 = 0$. Функциите се непрекинати на $[-1, 1]$, диференцијабилни на $(-1, 1)$ и важи $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g'(x) = 1 \neq 0$ за секој $x \neq 0$, и постои $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$, па од Лопиталовото правило следува дека

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Значи $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) Нека $f(x) = \ln(1 + x)$, $g(x) = x$, $x_0 = 0$, $[a, b] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Тогаш $f(0) = \ln(1 + 0) = 0, g(0) = 0, g'(x) = 1 \neq 0$ за секој $x \neq 0$ и постои $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$. Од Лопиталовото правило важи $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$.

Значи $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Забелешка. Теоремата на Лопитал важи и во случаите

1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ и

2) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.

3.9 Испитување на функции

3.9.1 Растење и опаѓање на функции

Теорема. Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна функција на $(a, b) \subseteq D$. Тогаш таа

1) расте на (a, b) ако и само ако $f'(x) \geq 0$ за секој $x \in (a, b)$ и

[5] Guillaume de L'Hopital, 1661 – 1704

2) опаѓа на (a, b) ако и само ако $f'(x) \leq 0$ за секој $x \in (a, b)$.

Пример. 1) За функцијата $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ важи $f'(x) = 2x$. Значи f расте ако и само ако $f'(x) = 2x \geq 0$, т.е. $x \geq 0$. Слично, f опаѓа ако и само ако $f'(x) = 2x \leq 0$, т.е. $x \leq 0$.

Да заклучиме: $f(x)$ расте на $(0, \infty)$ и опаѓа на $(-\infty, 0)$.

2) Нека $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. За неа важи $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, па $f'(x) \geq 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$. Следува дека f расте на $\mathbb{R}$.

3.9.2 Локални екстреми

Од теоремата на Ферма следува дека ако функцијата $y = f(x)$ има екстрем во точката x_0 тогаш $f'(x_0) = 0$. Видовме дека обратното тврдење не мора да важи, т.е. може да се случи $f'(x_0) = 0$ во точка x_0 но таа точка да не е локален екстрем за f. Наредното тврдење ги дава условите при кои точката x_0 за која важи $f'(x_0) = 0$, е локален екстрем и од каков вид е тој екстрем.

Теорема. Нека функцијата $y = f(x)$ во точката x_0 е двапати диференцијабилна и нека $f'(x_0) = 0$. Тогаш важи

1) ако $f''(x_0) < 0$, тогаш функцијата f во x_0 има **локален максимум**

1) ако $f''(x_0) > 0$, тогаш функцијата f во x_0 има **локален минимум**.

Значи, за да ги определиме локалните екстреми на двапати диференцијабилната функција f потребно е:

1) да ги определиме изводите $f'(x)$ и $f''(x)$

2) да ја решиме равенката $f'(x) = 0$

3) да го испитаме знакот на $f''(x)$ во секоја точка x_0 која е решение на равенката $f'(x) = 0$.

Примери.

1) Нека $f(x) = x^2$. Тогаш $f'(x) = 2x$ и $f''(x) = 2$. Имаме

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

па точката за која е можен локален екстрем е $x_0 = 0$. Бидејќи $f''(x) = 2 > 0$ за секој x следува дека точката $(0, 0)$ е локален минимум за f.

2) Нека $f(x) = \sin x$. Тогаш $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ и

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x_k = \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Во точките $x_{2k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ важи $f''(x_{2k}) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1 < 0$ па точките $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$ се точки на локален максимум за секој $k \in \mathbb{Z}$.

Слично, во точките $x_{2k+1} = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ важи $f''(x_{2k+1}) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) = 1 > 0$, па точките $\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -1\right)$ се локални минимуми за f, за секој $k \in \mathbb{Z}$.

Да забележиме дека функцијата може да има локален екстрем и во точки во кои нема прв извод а е непрекината во нив. Нека таква точка е c. Проверката за видот на локалниот екстрем (и дали го има) во c се одвива на следниов начин:

Ако постои интервал (c_1, c) така што на тој интервал f расте (т.е. $f'(x) > 0$ за секој $x \in (c_1, c)$) и постои интервал (c, c_2) така што на тој интервал f опаѓа (т.е. $f'(x) < 0$ за секој $x \in (c, c_2)$) тогаш c е локален максимум.

Ако постои интервал (c_1, c) така што на тој интервал f опаѓа (т.е. $f'(x) < 0$ за секој $x \in (c_1, c)$) и постои интервал (c, c_2) така што на тој интервал f расте (т.е. $f'(x) > 0$ за секој $x \in (c, c_2)$) тогаш c е локален минимум.

Притоа, претпоставуваме дека на (c_1, c) и (c, c_2) функцијата има извод.

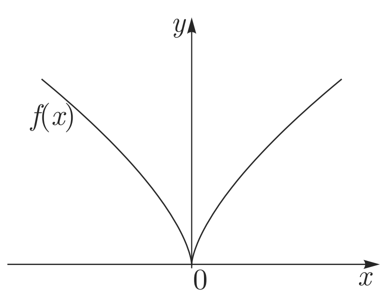
Пример. Нека $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Оваа функција е непрекината во секој $x \in \mathbb{R}$. Уште $f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3\sqrt{x}}$ постои во секој $x \neq 0$. Но, за $x = 0$ имаме

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} \to \begin{cases} +\infty, \ \Delta x \to 0^+ \\ -\infty, \ \Delta x \to 0^- \end{cases}$$

Значи, во 0 оваа функција нема извод (а е непрекината во 0).

Сепак, на $(-1, 0)$ првиот извод на функцијата е негативен па f опаѓа, а на $(0, 1)$ тој е позитивен па f расте. Следува дека точката 0 е локален минимум.

Оваа ситуација графички изгледа вака



3.9.3 Конвексност и конкавност

Дефиниција. За диференцијабилната функција f велиме дека е

1) **конкавна** ("држи вода") на $(a, b) \subseteq D$ ако коефициентот на правец на тангентата расте на (a, b), т.е. f' расте на (a, b).

2) **конвексна** ("не држи вода") на $(a, b) \subseteq D$ ако коефициентот на правец на тангентата опаѓа на (a, b), т.е. f' опаѓа на (a, b).

3) **строго конкавна** на $(a, b) \subseteq D$ ако коефициентот на правец на тангентата стрго расте на (a, b), т.е. f' строго расте на (a, b).

4) **строго конвексна** на $(a, b) \subseteq D$ ако коефициентот на правец на тангентата стрго опаѓа на (a, b), т.е. f' строго опаѓа на (a, b). Бидејќи

f' расте на (a, b) ако и само ако $f''(x) \geq 0$ за секој $x \in (a, b)$

и

f' опаѓа на (a, b) ако и само ако $f''(x) \leq 0$ за секој $x \in (a, b)$

следува дека точна е следнава

Теорема. Нека $y = f(x)$ е двапати диференцијабилна функција на $(a, b) \subseteq D$. Тогаш таа е:

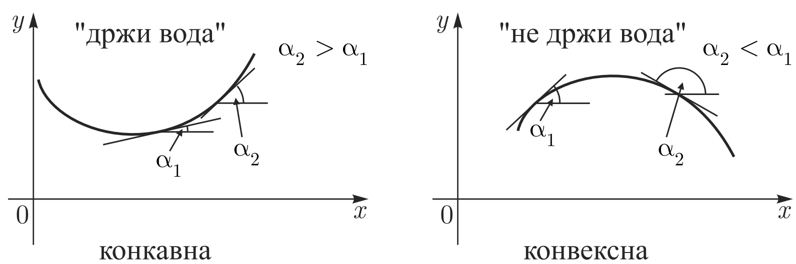
1) конкавна на (a, b) ако и само ако $f''(x) \geq 0$ за секој $x \in (a, b)$

2) конвексна на (a, b) ако и само ако $f''(x) \leq 0$ за секој $x \in (a, b)$

3) строго конкавна на (a, b) ако и само ако $f''(x) > 0$ за секој $x \in (a, b)$

4) конвексна на (a, b) ако и само ако $f''(x) < 0$ за секој $x \in (a, b)$.

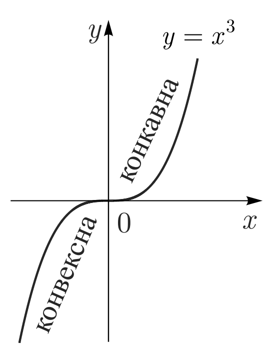
Геометриски гледано,



Примери. Нека $f(x) = x^3$. Тогаш $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$, па следува дека f расте на $\mathbb{R}$. За f'' имаме $f''(x) = 6x$, па

$f''(x) \geq 0$ ако и само ако $x \geq 0$, па на $[0, \infty)$ функцијата е конкавна и

$f''(x) \leq 0$ ако и само ако $x \leq 0$, па на $[-\infty, 0)$ функцијата е конвексна.

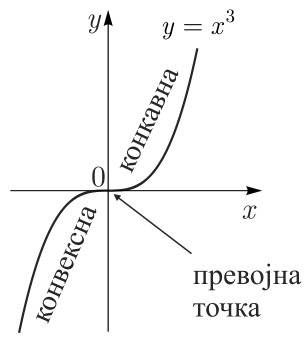


2) Нека $f(x) = e^x$. Тогаш $f'(x) = e^x > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$ и $f''(x) = e^x > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$, па функцијата е стрго конкавна на $\mathbb{R}$.

3.9.4 Превојни точки

Дефиниција. Нека функцијата f е непрекината на $[a, b] \subseteq D$ и диференцијабилна на (a, b). Точката $x_0 \in (a, b)$ се нарекува **превојна точка** на функцијата f ако f е строго конвексна на (a, x_0) и строго конкавна на (x_0, b) или строго конкавна на (a, x_0) и строго конвексна на (x_0, b).

Пример 1.



Теорема. Нека функцијата f е трипати диференцијабилна во некоја околина на x_0, и нека $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) \neq 0$. Тогаш точката x_0 е превојна.

Практично, за определување на превојните точки на функцијата $y = f(x)$ треба:

1) да го најдеме $f''(x)$

2) да ја решиме равенката $f''(x) = 0$

3) да провериме за кои решенија x_0 на равенката $f''(x) = 0$ важи $f'''(x_0) \neq 0$.

Пример 2. Нека $f(x) = x^3$. Тогаш $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ и $f'''(x) = 6$. Равенката $f''(x) = 0$, т.е. $6x = 0$ има едно решение $x_0 = 0$. Бидејќи $f'''(0) = 6 \neq 0$ следува дека точката $(0, 0)$ е превојна.

3.9.5 Испитување на текот и скицирање на графикот на функција

За да го испитаме текот и да го скицираме графикот на функцијата f зададена со аналитички израз, обично постапуваме по следниов редослед:

1) Ја определуваме дефиниционата област на f

2) Испитуваме специјални својства на функцијата, како парност, периодичност.

3) Ги одредуваме нулите не функцијата (пресечните точки со x-оската) и пресечните точки со y-оската.

4) Го наоѓаме првиот извод на функцијата и ги определуваме интервалите на монотоност (растење и опаѓање).

5) Го наоѓаме вториот извод на функцијата и ги определуваме локалните екстреми.

6) Ги определуваме интервалите на конвексност и конкавност и превојните точки.

7) Ги наоѓаме асимптотите на функцијата.

8) Го скицираме графикот на функцијата.

Пример 1. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x) = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$.

1) Функцијата е дефинирана за сите $x \in \mathbb{R}$ за кои $x - 1 \neq 0$, т.е. $x \neq 1$. Значи $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2) Бидејќи $f(-x) = \frac{(-x-3)^2}{4(-x-1)} = -\frac{(x+3)^2}{4(x+1)}$ следува дека $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, па функцијата не е ни парна ни непарна. Јасно е дека таа не е ни периодична.

3) Заради

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

следува дека точката $x = 3$ е нула на f, т.е. $(3, 0) \in \Gamma_f$ е пресечна точка на графикот со x-оската.

Ако, $x = 0$ тогаш $y = -\frac{9}{4}$, па точката $\left(0, -\frac{9}{4}\right) \in \Gamma_f$ е прсечна точка на графикот со y-оската.

4) Заради $f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$ имаме

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$$

па следува дека

f расте на $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ и опаѓа на $(-1, 3)$.

5) Од $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ добиваме $f''(3) = 1 > 0$, па точката $(3, 0)$ е локален минимум и $f''(-1) = -1 < 0$, па $(-1, -2)$ е локален максимум.

6) Бидејќи

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

следува дека f е конкавна на $(1, \infty)$ и е конвексна на $(-\infty, 1)$.

Заради $f''(x) \neq 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$ следува дека f нема превојни точки.

7) Бидејќи $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = \infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = -\infty$ следува дека функцијата нема хоризонтални асимптоти.

Единствен кандидат за вертикална асимптота е правата $x = 1$. Заради $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = \infty$ и $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = -\infty$ следува дека таа права е вертикална асимптота.

Од

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^2}{4x(x-1)} = \frac{1}{4} = k$$

и

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4x-4} = -\frac{5}{4}$$

следува дека правата $y = \frac{x-5}{4}$ е коса асимптота кога $x \to \infty$.

Слично, заради

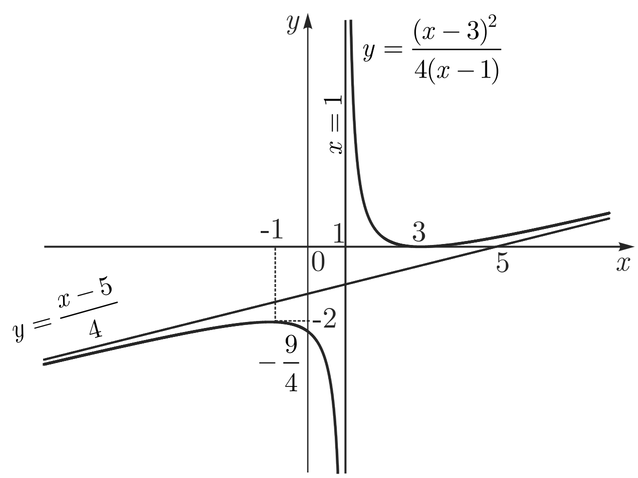
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)} = \frac{1}{4}$$

и

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-5x+9}{4x-4} = -\frac{5}{4}$$

следува дека таа права е коса асимптота и кога $x \to -\infty$.

8) Од претходното следува дека графикот на f изгледа вака



ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Димитровски, Математика, Скопје, 1987

[2] Н. Ивановски, Математичка анлиза I, Скопје, 1981

[3] Н. Пандески, Математичка анлиза I, Скопје, 2000

[4] Ј. Митевска, В. Манова-Ераковиќ, Л. Грибовска-Поповиќ, Ф. Митрушева, Математика, Скопје, 2004

[5] М. Оровчанец, Математика, Скопје, 2002

[6] Н. Шекутковски, Математичка анлиза I, Скопје, 2008

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР **3**

1 РЕАЛНИ БРОЕВИ **5**

1.1 **Поимот множество, примери и претставување на множества** 5

1.1.1 **Некои елементи од теоријата на множества и алгебрата** 5

1.1.2 **Елементи од математичка логика и некои корисни математички симболи** 7

1.1.3 **Празно множество, еднаквост на множества, подмножество** 8

1.1.4 **Унија и пресек на множества и некои нивни својства** 9

1.1.5 **Разлика на множества, комплемент на множество** 10

1.1.6 **Директен (Декартов) производ на множества** 10

1.1.7 **Уште малку за Веновите дијаграми и нивна примена** 11

1.2 **Кореспонденција, релација, пресликување и операција** 12

1.2.1 **Дефиниција на кореспонденција и релација и некои основни својства** 12

1.2.2 **Дефиниција за супремум и инфимум во подредено множество** 13

1.2.3 **Дефиниција на пресликување и видови на пресликувања** 14

1.3 **Еквивалентни множества. Конечни и бесконечни множества. Природен број** 15

1.3.1 **Еквивалентни (истобројни) множества** 15

1.3.2 **Конечни и бесконечни множества** 17

1.3.3 **Природен број** 17

1.4 **Множеството на природни броеви, $\mathbb{N}$** 18

1.4.1 **Конструкција на множеството на природни броеви $\mathbb{N}$** 18
1.4.2 **Пеанови аксиоми. Принцип на математичка индукција** 19
1.4.3 **Операции во $\mathbb{N}$: Собирање, множење, степенување** 20
1.4.4 **Подредување во $\mathbb{N}$** 22
1.4.5 **Одземање во $\mathbb{N}$** 23
1.5 **Множеството на цели броеви $\mathbb{Z}$** 25
1.6 **Множеството на рационални броеви $\mathbb{Q}$** 28
1.7 **Однос и пропорција** 30
1.8 **Величини, пропорционални величини, обратно-пропорционални величини** 32
1.9 **Проценти** 35
1.10 **Видови на процентни задачи** 41
1.11 **Примери** 42
1.12 **Бројна права** 47
1.13 **Поим за низа** 49
1.14 **Метод на децимално мерење на отсечките** 50
1.15 **Воведување на реален број** 57
1.16 **Постапка на делење (Евклидов алгоритам) и два облика на рационалниот број. Ирационален број.** 59
1.17 **Подредување во $\mathbb{R}$** 62
1.18 **Операции во $\mathbb{R}$ и некои својства на операциите во $\mathbb{R}$** 62
1.19 **Њутнова Биномна формула** 66
1.20 **Својство на густина на реалните броеви** 71
1.21 **Неравенство на Бернули** 72
1.22 **Апсолутна вредност. Интервал. Околина** 72
1.23 **Низи од реални броеви. Монотони низи. Ограничени низи** 74
1.24 **Точка на натрупување на низи** 77
1.25 **Гранична вредност на низа. Конвергенција. Дивергенција. Подниза** 80
1.26 **Бескрајно мали и бескрајно големи низи** 86
1.27 **Операции со гранични вредности на низи** 90
1.28 **Операции меѓу конвергентни низи и бескрајно големи низи** 92
1.29 **Неколку критериуми за конвергенција на низа: Сендвич принцип, Теорема за монотоност и ограниченост** 93
1.30 **Реален број како граница на низа рационални броеви** 95
1.31 **Степен на реален број со реален експонент** 96
1.32 **Аритметичка прогресија** 98
1.33 **Геометриска прогресија** 101
1.34 **Поим за ред** 103

1.35 **Теорема за апроксимација. Заокружување на децималите** 105
1.36 **Природни низи. Бројот e** 107
1.37 **Теорема за пресметување на бројот e** 115

2 РЕАЛНИ ФУНКЦИИ **117**
2.1 **Основни поими** 117
2.2 **Збир, разлика, производ, количник на функции, производ на функција со реален број, сложена функција** 123
2.3 **Инверзна функција** 124
2.4 **Парност на функција** 126
2.5 **Локални екстреми на функција** 127
2.6 **Периодичност на функција** 129
2.7 **Монотоност на функција** 129
2.8 **Ограниченост на функција** 130
2.9 **Скицирање графици на функции со помош на графиците на некои основни елементарни функции** 131
2.10 **Гранична вредност на функција** 133
2.11 **Непрекинатост на функција** 137
2.12 **Бескрајно големи лимеси и лимеси кога x тежи кон бескрајност** 139
2.13 **Асимптоти на криви** 141
2.14 **Елементарни функции** 143
2.14.1 **Линеарна функција** 143
2.14.2 **Квадратна функција** 149
2.14.3 **Дробно-линеарна функција** 153
2.14.4 **Степенска функција со рационален показател** 154
2.14.5 **Експоненцијални функции** 157
2.14.6 **Хиперболични функции** 162
2.14.7 **Логаритамска функција** 164
2.14.8 **Степенска функција со реален показател** . . 168
2.14.9 **Тригонометриски функции** 168
2.14.10 **Циклометриски функции** 170
2.15 **Некои карактеристични гранични вредности** . . . 172
2.16 **Функции од повеќе реални аргументи** 172

3 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ **173**
3.1 **Мерење на промени во процеси. Средна брзина на биолошки процес. Биолошки коефициент** 173
3.2 **Моментна брзина на процес. Извод на функција** . 175
3.2.1 **Дефиниција на извод на функција** 175
3.3 **Изводи од елементарните функции** 180
3.4 **Геометриско значење на изводот** 182

3.5 **Биолошко значење на изводот** 184
3.6 **Диференцијал на функција** 184
3.7 **Изводи од повисок ред** 187
3.8 **Теоремите на Ферма, на Рол, на Лагранж и на Коши и правилото на Лопитал** 187
3.9 **Испитување на функции** 191
3.9.1 **Растење и опаѓање на функции** 191
3.9.2 **Локални екстреми** 192
3.9.3 **Конвексност и конкавност** 193
3.9.4 **Превојни точки** 195
3.9.5 **Испитување на текот и скицирање на графикот на функција** 195

ЛИТЕРАТУРА **198**