МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

МАРИЈА ОРОВЧАНЕЦ
ПЕТАР СОКОЛОСКИ

Скопје 2024

УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ – СКОПЈЕ
Природно-математички факултет
Институт за математика

МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

Марија Оровчанец Петар Соколоски

Скопје, 2024

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Биљана Ангелова, ректор

Уредник на публикацијата:
проф. д-р Марија Оровчанец и проф. д-р Петар Соколоски
Природно - математички факултет– Скопје

Рецензенти:
1. проф. д-р Љупчо Настовски, ПМФ, Скопје
2. проф. д-р Билјана Крстеска, ПМФ, Скопје

Техничка обработка:

проф. д-р Марија Оровчанец и проф. д-р Петар Соколоски

Лектура на македонски јазик:

Кристина Дукоска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

515.124(075.8)
517.518(075.8)

ОРОВЧАНЕЦ, Марија
Метрички простори [Електронски извор] / Марија Оровчанец, Петар Соколоски. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Природно-математички факултет, Институт за математика, 2024

Начин на пристапување (URL):
https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/PMF/Metrichki_prostori.pdf. - Текст во PDF формат, содржи 280 стр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 13.05.2024. - Фусноти кон текстот. - Библиографија: стр.
273-275. - Регистар

ISBN 978-9989-43-513-3

1. Соколоски, Петар [автор]
а) Метрички простори -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 63658757

Предговор

Овој учебник е напишан врз основа на материјалите собрани од предавањата и вежбите по предметот Метрички простори што сме ги држеле на Природно - математичкиот факултет во Скопје минативе десетина години. Целна група, пред сè, се студентите што го слушаат овој предмет. Покрај на студентите што се запишани на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет, учебников може да им користи и на студенти од други институти и факултети (Институтот за физика, ФЕИТ, ФИНКИ и др.), кои може да го запишат предметот како изборен, но и на секој поединец заинтересиран за оваа проблематика.

За успешно користење на оваа книга потребно е читателот да ги има усвоено основите на математичката анализа, односно теоријата за реални функции од една реална независна променлива.

Накратко ќе ја изложиме содржината на учебникот. Во првата глава се дадени дефинициите на многу основни поими кои се користат во понатамошниот текст и се наведени многу типови метрички простори со цел читателите да се стекнат со што поширока основа и да можат подобро да ги разберат и препознаваат апстрактните поими. Во втората глава се воведуваат поимите за растојание меѓу множества и дијаметар на множество. Во наредните две глави се опишани отворените и затворените множества и со нив поврзаните концепти за внатрешни, надворешни и рабни точки. Петтата глава е посветена на низите во метрички простори и поимот за лимес на низа. Во шестата глава се обработени комплетните метрички простори. Во наредните четири глави се изучуваат функциите во метрички простори, граничните вредности и непрекинатоста на функциите, со посебен осврт на функциите меѓу Евклидски простори. Во единаесеттата глава е формулирана и докажана теоремата на Банах за неподвижна точка и некои нејзини примени. Во наредните две глави се обработени компактните метрички простори, а последната глава е посветена на сврзаните метрички простори.

Секоја од главите започнува со дефиниции, а потоа следуваат докажани теореми и својства илустрирани со многу решени примери. На крајот од секој дел се дадени задачи за вежбање со кои читателот може да го провери своето знаење. Во Додатокот се наведени поважните теореми и својства што се користат во редовниот текст, а за кои се претпоставува дека читателот ги има усвоено од претходните курсеви. На крајот се дадени решенијата на некои од потешките задачи.

Текстот на книгата е компјутерски обработен, при што е користен софтвер за математички текстови AMS-TeX. Во книгата наместо вообичаената реченица што означува крај на доказ на одредено тврдење се користи симболот $\blacksquare$, а крајот на разгледуван пример се означува со $\blacklozenge$.

Им благодариме на рецензентите на овој учебник: проф. д-р Љупчо Настовски и проф. д-р Билјана Крстеска за нивните сугестии со кои придонесоа овој учебник да биде подобар. Им изразуваме благодарност на сите студенти што активно учествуваа во наставата. Благодарност до Jacob Jaffe за дизајнот на корицата. Му благодариме на издавачот - Универзитетот „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје, кој го финансираше издавањето на овој учебник. И, на крајот, но не најмалку, сме им благодарни на нашите најблиски за нивното огромно трпение и разбирање што ни овозможија да се посветиме на пишувањето на овој текст.

Иако текстот го прочитавме многупати, свесни сме дека може да сме направиле некои грешки. Ќе им бидеме благодарни на читателите што ќе ни укажат на евентуалните пропусти.

Скопје, 2024 год. Авторите

Содржина

Вовед

Метрички простор е множество во кое што може да се каже колкаво е растојанието помеѓу кои било два негови елементи и знаеме како да го измериме тоа растојание. Но, што е тоа растојание? Овој поим го среќаваме од најрана возраст. На пример, дури и мало дете може да разбере која од две играчки се наоѓа поблиску до него, односно знае да споредува растојанија. Од друга страна, во секојдневниот живот поимот растојание го среќаваме и го употребуваме во различни контексти и со различни значења, од кои некои се поразбирливи, а други не се толку јасни. На пример, велиме дека растојанието помеѓу Велес и Скопје е помало отколку растојанието помеѓу Битола и Скопје, но и дека Тони е поблизок со Јована отколку со Мила или дека црвената боја е поблиска до портокаловата отколку до зелената. Слично, се кажува дека колку што е поголем степенот $n \in \mathbb{N}$ на полиномот $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$, толку тој е поблизок до експоненцијалната функција $y = e^x$; колку се поблиски големините на полуоските, толку елипсата е поблиска до кружница итн. Затоа, убаво и корисно е некако да се определи што е заедничко кај сите овие разбирања на поимот за растојание во претходно наведените, но и во други примери за тој поим прецизно да се дефинира.

Во математиката поимот растојание се воведува на првите часови по геометрија. Интуитивно, под растојание помеѓу две точки на права или во рамнина се мисли на должината на најкратката можна патека со краеви во тие точки - отсечката што ги поврзува. Понатаму следува изучувањето на многу метрички својства на геометриските слики и фигури кои се поврзани со поимот растојание, како на пример: плоштина, волумен, складност, сличност итн. Во повисоките класови, на часовите по аналитичка геометрија и математичка анализа, постепено се согледува подлабокото значење на овој поим и неговите примени, кои се многубројни. Го користиме за дефинирање на некои фундаментални поими во математичката анализа кај функции од една реална променлива, како што се: околина на точка, отворено и затворено множество, гранична вредност на низа и на функција, непрекинатост на функција, извод, инеграл и сѐ што е поврзано со нив.

Природно се појавила потребата за обопштување на овие поими преку дефинирање на нивни аналогии, и тоа најпрвин во реалната рамнина, во реалниот простор, па во повеќедимензионални Евклидови простори, и на крајот кај посложените структури како што се бесконечнодимензионалните простори од низи и функционалните простори од ограничени, непрекинати, диференцијабилни или глатки функции (функции што имаат изводи од произволен ред).

Уште пред појавата на геометриите на Лобачевски и на Риман математичарите сфатиле дека растојанието не мора секогаш да биде поврзано со некоја права или отсечка. Уште поважно, сфатиле дека она на што треба да се внимава се својствата на просторот во кој се работи и карактеристиките на растојанието кои мора да се непроменливи во различни простори. Значи, на растојанието во множество треба да се гледа како на функција што на секој подреден пар елементи од тоа множество му придружува некој реален број и таа функција треба да поседува некои својства!

Ваквите својства на растојанието прв ги истакнал францускиот математичар Морис Фреше[1] во неговата фантастична докторска дисертација „Sur quelques points du calcul fonctionnel“ („За неколку точки од функционалната анализа“) во 1906 година. Тој своите пронајдоци ги базирал на трудовите на својот ментор Адамар и делата на Волтера. Иако Фреше ги посочил особините кои треба да ги задоволува една функција за да биде растојание, поимот метрички простор бил воведен од Феликс Хаусдорф[2] во 1914 година во својата книга „Grundzüge der Mengenlehre“ ("Општа теорија на множества"). Понатамошниот развој на метричките простори бил многу брз и тој одел паралелно со развојот

[1] `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frechet/`
[2] `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hausdorff/`

на топологијата, теоријата на Банахови простори (поим воведен од Фреше во 1928 год.) и другите функционални простори поврзани со нив.

Денес, современиот свет не може да се замисли без концептот за метрички простори, кој се користи во сите негови сфери, како на пример во информатичките и телекомуникациските технологии, во маркетингот, здравството, лексиката, генетиката итн.

Глава 1

Дефиниција и примери

1.1 Поим за метрички простор

Дефиниција 1.1.1. *Нека X е непразно множество. За пресликување $d : X \times X \to \mathbb{R}$ што за секои $x, y, z \in X$ ги исполнува следниве аксиоми:*

$M_1)$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *(аксиома за ненегативност)*

$M_2)$ $d(x, y) = d(y, x)$, *(аксиома за симетричност)*

$M_3)$ $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, *(неравенство на триаголник)*

велиме дека е ***метрика*** *или* ***растојание*** *во X. Подредениот пар (X, d) се вика* ***метрички простор****.*

Изразот „(X, d) е метрички простор" значи дека d е метрика на множеството X. Со избор на различни метрики на истото множество X, добиваме различни метрички простори. Во таков случај секогаш мора да ја нагласиме метриката.

Забелешка 1.1.2. *Понекогаш, ако знаеме за која метрика се работи и ако тоа не нè води до забуна, наместо „метрички простор (X, d)" ќе* *пишуваме „метрички простор X“.*

Забелешка 1.1.3. *Во математичка анализа 1 дефинииравме растојание помеѓу две точки x, y во $\mathbb{R}$ со $|x - y|$ и ги утврдивме неговите основни својства. Сега овие својства ги земаме за дефинициски својства за генералниот поим растојание и доаѓаме до метрички простор.*

Аксиомите $M_1), M_2)$ и $M_3)$ од дефиницијата 1.1.1 се обопштување на соодветните својства за растојание помеѓу точките во физичкиот простор. Затоа, елементите на кој било метрички простор ги нарекуваме точки, а $d(x, y)$ растојание помеѓу точките x и y. Значи, под поимот „точки“ не секогаш подразбираме геометриски точки, туку тоа може да бидат низи, функции, слики, звуци, сигнали итн.

Оваа дефиниција за метрички простор ја дал францускиот математичар **Морис Фреше**[1], во 1906 година,

Забелешка 1.1.4. *Во дефиницијата 1.1.1 за метрички простор е нагласено дека множеството X над кое што се дефинира растојание е непразно. Сепак, од теориски причини, може да се дефинира метрика и на празното множество. Метриката е празната функција - функција чиј домен е празното множество. Овој метрички простор од практична гледна точка е тривијален и бескорисен.* ♦

Пример 1.1.5. *Еден тривијален пример за метрички простор е едноелементното множество $\{x\}$ со метриката $d : \{x\} \times \{x\} \to \mathbb{R}$ дадена со $d(x, x) = 0$.*♦

Теоремата 1.1.6 е варијанта на неравенството на триаголник (разликата на должините на две страни во триаголник е помала од третата страна). Се појавува во **„Елементите“**[2] на **Евклид**[3].

[1] Maurice René Fréchet, француски математичар, 1878-1973.

[2] Епохално дело за елементарна математика од III век пред нашата ера. Многумина го сметаат како најуспешното и најзначајното дело што некогаш било напишано.

[3] $E\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\varsigma$, антички математичар, средина на IV век - средина на III век пр.н.е.

Теорема 1.1.6. *Во секој метрички простор важи неравенството:*

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leqslant d(y,z), \qquad \text{за } x,y,z \in X \ . \tag{1.1}$$

Доказ. Од неравенствата

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y);$$

и

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z);$$

добиваме

$$d(x,y) - d(x,z) \leqslant d(z,y) = d(y,z);$$

и

$$-d(x,y) + d(x,z) \leqslant d(y,z);$$

односно

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leqslant d(y,z).$$

■

Забелешка 1.1.7. *Ако во последното неравенство ставиме $z = x$ и ја искористиме аксиомата за симетрија, добиваме:*

$$0 \leqslant |d(x,y) - d(x,x)| \leqslant d(y,x) = d(x,y).$$

Значи, може да заклучиме дека секоја метрика d е ненегативна функција, односно важи

$$d(x,y) \geqslant 0, \qquad \forall x,y \in X.$$

Забелешка 1.1.8. *Во дефиницијата за метрички простор можеме да се ограничиме на две аксиоми за $d\,(x,y)$:*

M_1') $d\,(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M_2') $d\,(x,y) \leqslant d\,(z,x) + d\,(z,y)\,, \qquad \forall x,y,z \in X.$

Навистина, условот M_1') *е* M_1) *од дефиницијата 1.1.1 за метрика. Ако во* M_2') *земеме* $z = y$, *добиваме:*

$$d(x,y) \leqslant d(y,x) + d(y,y) = d(y,x)\,. \tag{1.2}$$

Ако, сега, во M_2') x *и* y *си ги заменат местата и притоа земеме* $z = x$, *добиваме:*

$$d(y,x) \leqslant d(x,y) + d(x,x) = d(x,y)\,. \tag{1.3}$$

Од неравенствата (1.2) *и* (1.3), *се добива* M_2) *од дефиницијата 1.1.1, односно* $d(x,y) = d(y,x)$ *за секои* x *и* y *од* X. *Тогаш,* M_2') *може да се запише:*

$$d(x,y) \leqslant d(z,x) + d(z,y) = d(x,z) + d(z,y)\,,$$

а тоа е M_3) *од дефиницијата за метрика.*

Од забелешката гледаме дека аксиомите M_1) $-$ M_3) во дефиницијата за метрика може да се сведат на помалку (два) услова. Сепак, од историски и методолошки причини, тие сѐ уште се користат како такви.

Во продолжение, ќе дадеме неколку примери од метрички простори. Некои од нив играат важна улога во математичката анализа.

1.2 Евклидски простори

Пример 1.2.1. ***Метрички простор од реални броеви.*** *Основен пример за метрички простор е множеството од реални броеви* $\mathbb{R}$ *со метриката*

$$d(x,y) = |x-y|\,. \tag{1.4}$$

Оваа метрика се вика ***Евклидска или Евклидова****. Се среќава и како* ***обична или стандардна метрика на*** $\mathbb{R}$. *Метричкиот простор се* *вика **еднодимензионален Евклидов простор** и, покрај вообичаената ознака $\mathbb{R}$, често се означува и со $\mathbb{E}^1$ или само со $\mathbb{E}$.*

Забележуваме дека метриката зависи од алгебарската структура на $\mathbb{R}$, но и од подредувањето во $\mathbb{R}$. Имено, за $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & a \geqslant b, \\ b-a, & b \geqslant a. \end{cases}$$

Велиме дека точката x е помеѓу точките a и b ако $a \leqslant x \leqslant b$ или $b \leqslant x \leqslant a$. Истото можеме да го кажеме и користејќи го поимот растојание: точката x е помеѓу точките a и b ако растојанијата од x до a и од x до b се помали или еднакви на растојанието од a до b или, уште попрецизно, ако $|a-b| = |a-x| + |x-b|$.◆

Една од главните мотивации за изучување на метричките простори е да се пренесат својствата на Евклидовото растојание од реалната права $\mathbb{R}$ на апстрактен метрички простор.

Пример 1.2.2. ***Евклидска метрика во*** $\mathbb{R}^2$. *Растојанието d помеѓу точките $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ и $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ е дефинирано со:*

$$d(a,b) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}. \tag{1.5}$$

*Метричкиот простор $(\mathbb{R}^2, d)$ се вика **дводимензионален Евклидов простор** и се означува со $\mathbb{E}^{\mathbf{2}}$.*◆

Пример 1.2.3. ***Евклидска метрика во*** $\mathbb{R}^3$. *Растојание во $\mathbb{R}^3$ може да се зададе со $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; за $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3, (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$,*

$$d((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}. \tag{1.6}$$

*Метричкиот простор $(\mathbb{R}^3, d)$ се вика **тридимензионален Евклидов простор** и се означува со $\mathbb{E}^{\mathbf{3}}$.*◆

Пример 1.2.4. ***Евклидска метрика во*** $\mathbb{R}^k$. *На векторскиот простор* $\mathbb{R}^k$, *(видете додаток 15.2) може да се дефинира растојание.*

Теорема 1.2.5. *За произволни* $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ *и* $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ *нека:*

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i)^2}. \tag{1.7}$$

Пресликувањето $d : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *дефинирано со* (1.7) *е метрика во* $\mathbb{R}^k$. *Метричкиот простор* $(\mathbb{R}^k, d)$ *се вика* ***k−димензионален Евклидов простор*** *и кратко се означува со* $\mathbb{E}^{\boldsymbol{k}}$.♦

Доказ. *Се користат б), в) и ѓ) од теоремата 15.2.5.*

■

Пример 1.2.6. *Нека* $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ *е множеството од комплексни броеви. Да се потсетиме, за* $z = x + \mathrm{i}y$, *броевите* x *и* y *се реален и имагинарен дел на* z *(означуваме* $x = \Re(z)$ *и* $y = \Im(z)$.*) Комплексниот број*

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$$

се вика конјугиран (придружен) број на z. *Апсолутна вредност или модул од* z *е ненегативниот реален број*

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ако $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$, *имаме*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \quad \alpha \cdot z = (\alpha x_1) + \mathrm{i}(\alpha y_1)\,.$$

Пресликувањето $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *дефинирано со:*

$$d\,(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

е метрика на $\mathbb{C}$, *а* $(\mathbb{C}, d)$ *е метрички простор. Лесно се покажува дека пресликувањето* d *ги задоволува условите* $M_1) - M_3)$.♦

1.3 $\mathbb{R}_p^k$-простори

Во множеството $\mathbb{R}^k$ може да се дефинираат повеќе различни метрики.

Пример 1.3.1. *Обопштување на Евклидовата метрика (пример 1.2.4) е просторот* $(\mathbb{R}^k, d_p)$ *каде што метриката* $d_p, p \geqslant 1$, *е воведена со:*

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^k, p \geqslant 1. \tag{1.8}$$

Лесно се покажува дека пресликувањето d_p *ги задоволува аксиомите* M_1) *и* M_2). *Доказот за неравенството на триаголник на* d_p *следува од*

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k} |x_n - y_n|^p} &\leqslant \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k} (|x_n - z_n| + |z_n - y_n|)^p} \\ &\leqslant \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k} (|x_n - z_n|)^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k} (|z_n - y_n|)^p}, \end{aligned}$$

што е последица на ***неравенството на Минковски***[4] *(видете 15.2.4):*

$\forall p \geqslant 1$ *и за* $a_n \geqslant 0$ *и* $b_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots, k)$
важи неравенството:

$$\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k} |a_n + b_n|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k} |a_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k} |b_n|^p}.$$

Метриката (1.8) *е позната како* ***метрика на Минковски****.*

Ќе издвоиме неколку интересни случаи од просторите $(\mathbb{R}^k, d_p)$:

[4]Hermann Minkowski, германски математичар, 1864-1909.

а) ако $p = 1$, тогаш

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|. \tag{1.9}$$

Очигледно е дека d_1 ги задоволува аксиомите M_1) и M_2). За M_3) :

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^{k} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{k} |z_i - y_i| \\ &= d_1(x, z) + d_1(z, y). \end{aligned}$$

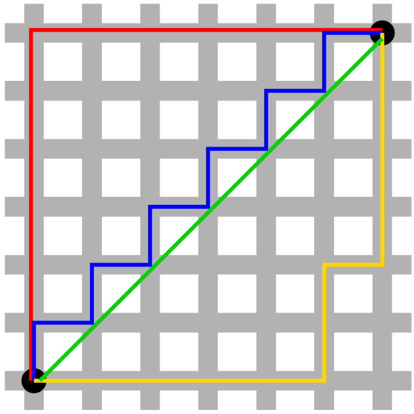
Интересен е случајот кога $k = 2$:

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|.$$

Да претпоставиме дека сакаме да се движиме од точката $x = (x_1, x_2)$ во рамнината до точката $y = (y_1, y_2)$, но ни е дозволено да се движиме само хоризонтално и вертикално. Ако прво се движиме хоризонтално од (x_1, x_2) до (y_1, x_2), а потоа вертикално од (y_1, x_2) до (y_1, y_2), вкупното растојание е $d(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$. Ова ни дава метрика на $\mathbb{R}^2$ што е различна од вообичаената метрика од примерот 1.5. Поголемиот дел од сообраќајната мрежа на Њујорк се состои од две групи паралелни улици, при што две улици од различни групи се сечат под прав агол. Таксист од точка $A(x_1, y_1)$ може да стигне до точка $B(x_2, y_2)$ на различни начини, но сите патишта претставуваат искршени линии чии соседни непаралелни отсечки формираат прави агли. Должината на сите најкратки патишта е растојанието:

$$d_1(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

(а) Мапа на дел од Менхетн



(б) Такси - метрика

Слика 1.1: Менхетн-метрика или такси-метрика.

Сличен модел е $(\mathbb{R}^3, d_1)$. Наместо горниот пример ќе разгледуваме електрична или водоводна инсталација во станбена зграда. По правило оваа инсталација се поставува хоризонтално и вертикално по ѕидовите и таваните на становите и тоа паралелно на ивиците на становите. Најкратката инсталација што ги спојува становите $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ има должина:

$$d_1(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\,.$$

Оваа метрика ја вовел Минковски во XIX век и е позната како **такси**-метрика или **Менхетн**-метрика.

б) ако $p = 2$, тогаш се добива **Евклидската** метрика:

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}. \tag{1.10}$$

Добиваме дека $(\mathbb{R}^k, d_2) = \mathbb{E}^k$.

в) ако $p = \infty$ тогаш,

$$d_\infty(x, y) = \lim_{p\to\infty} d_p(x, y) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} |x_i - y_i|. \tag{1.11}$$

Последното равенство е непосредна последица на следниов резултат од лимеси на низи од реални броеви:

Нека за секое $i \in \{1, \dots, k\}$ важи $a_i \geqslant 0$. Ако $M = \max\{a_1, \dots, a_k\}$, тогаш

$$\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{a_1^p + \dots + a_k^p} = M.$$

(видете ја задачата 3).

Ќе дадеме пример за метриката d_∞. Се враќаме на сликата 1.1. Претпоставуваме дека мрежата од улици во нашиот замислен град е квадратна, односно растојанијата помеѓу секои две соседни раскрсници се еднакви. На раскрсниците $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ има по еден патник и тие треба да се најдат. Патникот од A треба да се движи по една од улиците што поминуваат низ неговата раскрсница и да оди додека не го здогледа својот пријател на раскрсницата B. Во тој момент, за да го види, треба да е што е можно поблиску. Очигледно е дека патникот треба да помине пат со должина:

$$d_\infty(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Ќе покажеме дека функцијата d_∞ е метрика:

$$\begin{aligned} M_1): \quad d_\infty(x, y) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall i = 1, \dots, k) \quad |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall i = 1, \dots, k) \quad x_i = y_i \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2): \quad d_\infty(x,y) &= \max_{1\leqslant i\leqslant k}|x_i-y_i| \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant k}|y_i-x_i| = d_\infty(y,x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3): \quad d_\infty(x,y) &= \max_{1\leqslant i\leqslant k}|x_i-y_i| \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant k}|x_i-z_i+z_i-y_i| \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant k}|x_i-z_i| + \max_{1\leqslant i\leqslant k}|z_i-y_i| \\ &= d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y). \qquad \blacklozenge \end{aligned}$$

Задача 1.3.2. *Нека во претходниот пример1.3.1 земеме* $0 < p < 1$, *односно просторот е* $(\mathbb{R}^k, d_p)$ *каде што* d_p *е дефинирано со:*

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \;\; x,y\in\mathbb{R}^k, \qquad 0<p<1. \tag{1.12}$$

Дали, во овој случај, d_p *дефинира метрика на* $\mathbb{R}^k$?

Решение: Одговорот е негативен.
За $x=(1,1,0,0,\ldots,0)$, $y=(0,1,0,0,\ldots,0)$ и $z=(0,0,0,0,\ldots,0)$, имаме $d_p(x,y)=1$, $d_p(x,z)=2^{\frac{1}{p}}$, $d_p(y,z)=1$. Добиваме

$$d_p(x,z) > 2 = d_p(x,y)+d_p(y,z),$$

со што покажавме дека условот M_3) не е исполнет за сите $x,y,z\in\mathbb{R}^k$.♦

Забелешка 1.3.3. *Видовме дека елементите на множеството* X *во метрички простор* (X,d) *ги нарекуваме точки. Меѓутоа, кога се работи за простор* $\mathbb{R}^n$, *за некое* n, *точките ќе ги означуваме со* $x = (x_1,\ldots,x_n)$, *како што е вообичаено во елементарна геометрија. Во случај кога ни е потребна структурата на векторскиот простор во* $\mathbb{R}^n$, *тогаш точките ги викаме и вектори.*

1.4 Просторите l^{∞}, c и l^p

Пример 1.4.1. *Низата од реални броеви $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ е ограничена ако постои реален број B_x така што*

$$\sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\} = B_x < \infty.$$

За секоја ограничена низа x бројот B_x е фиксиран. Нека $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ и $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ се две ограничени низи. Тогаш, за секој $i \in \mathbb{N}$, имаме

$$|x_i - y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant B_x + B_y < \infty.$$

За низите x и y дефинираме

$$d(x, y) := \sup\{|x_i - y_i| : i \in \mathbb{N}\}. \tag{1.13}$$

Значи, пресликувањето d е добро дефинирано. Лесно се покажува дека d ги задоволува условите M_1, M_2, M_3, односно d е метрика. Метричкиот простор составен од множеството од ограничени бројни низи со метриката 1.13 ќе го означуваме со l^{∞}.♦

Пример 1.4.2. *Со c го означуваме множеството конвергентни низи од реални броеви. Множеството c е подмножество од l^{∞}, а растојанието е исто како во l^{∞}.*♦

Пример 1.4.3. *Со l^p, $(p \geqslant 1)$ го означуваме векторскиот простор од сите $p-$апсолутно сумабилни реални низи, односно од сите низи од реални броеви $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ за кои редот $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ конвергира. Имаме*

$$l^p := \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l^{\infty} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}.$$

Во l^p воведуваме метрика со:

$$d_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}. \tag{1.14}$$

Прво ќе покажеме дека редот во (1.14) секогаш конвергира. Тоа значи дека d е определено за секои $x, y \in l^p$, или d е добро дефинирано. Навистина, од неравенството на Минковски, за секој $n = 1, 2, \ldots,$ важи:

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p}.$$

Ако се земе лимес на двете страни од неравенството кога $n \to \infty$, следува конвергенцијата на редот во (1.14).

Јасно е дека пресликувањето d_p ги задоволува аксиомите M_1 и M_2. За да го докажеме неравенството на триаголник за d_p, во неравенството на Минковски ставаме $a_n = x_n - z_n$ и $b_n = z_n - y_n$, а потоа пуштаме $n \to \infty$.
Добиваме

$$\begin{aligned}\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p} &\leqslant \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n - z_n| + |z_n - y_n|)^p} \\ &\leqslant \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n - z_n|)^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} (|z_n - y_n|)^p}. \blacklozenge\end{aligned}$$

Пример 1.4.4. *Нека на множеството X од сите $p-$апсолутно сумабилни реални низи $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ за $0 < p < 1$:*

$$X := \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathbb{R}; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}, 0 < p < 1.$$

дефинираме d_p со:

$$d_p(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p. \tag{1.15}$$

Јасно е дека пресликувањето d_p ги задоволува аксиомите M_1) и M_2). За $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$. $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ и $z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$, користејќи ги монотоноста на *функцијата* : $x \mapsto x^p$ *за* $x > 0$ *и* $0 < p < 1$ *и задачата 3, имаме:*

$$|x_k - z_k|^p \leqslant (|x_k - y_k| + |y_k - z_k|)^p \leqslant |x_k - y_k|^p + |y_k - z_k|^p .$$

Така,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^p &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p + \sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|^p \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - z_k|^p ,\end{aligned}$$

што е исто со

$$d_p(x,z) \leqslant d_p(x,y) + d_p(y,z) . \blacklozenge$$

1.5 Простор од ограничени функции

Пример 1.5.1. *Нека со* $B_{[a,b]}$ *го означиме множеството од сите ограничени реални функции дефинирани на сегментот* $[a,b]$. *Велиме дека* $f \in B_{[a,b]}$ *ако* $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty$. *За* $f, g \in B_{[a,b]}$, *дефинираме:*

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|. \tag{1.16}$$

Прво ќе покажеме дека пресликувањето d *е добро дефинирано. Навистина, ако функциите* f *и* g *се ограничени, тогаш постојат реални броеви* B_f *и* B_g, *така што*

$$|f(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = B_f$$

и

$$|g(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| = B_g.$$

Да напоменеме, бројот B_f е единствен за произволната функција f и не зависи од x. Тогаш,

$$\begin{aligned} d\,(f,g) &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \\ &\leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \\ &\leqslant B_f + B_g < \infty. \end{aligned}$$

Ќе покажеме дека пресликувањето d ги задоволува аксиомите од дефиницијата за метрика:

$M_1)$ $d\,(f,g) = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in [a,b])\, f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g.$

$M_2)$ $d\,(f,g) = d\,(f,g) \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)-f(x)|\,.$

$M_3)$
$$\begin{aligned} |f(x)-g(x)| &\leqslant |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)| \\ &\leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-h(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |h(x)-g(x)| \\ &= d\,(f,h) + d\,(h,g) \\ &\Rightarrow d\,(f,g) \leqslant d\,(f,h) + d\,(h,g)\,, \forall f,g,h \in B_{[a,b]}. \end{aligned}$$

*Оваа метрика се вика **рамномерна** метрика или **супремум-метрика**.*♦

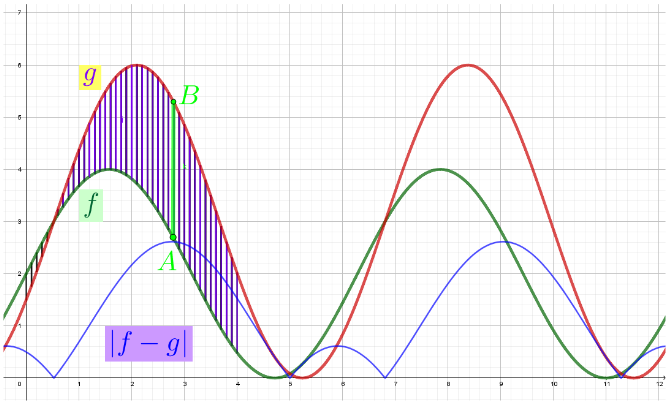
1.6 Простор од непрекинати функции

Пример 1.6.1. *Нека $C_{[a,b]}$ е векторскиот простор од сите непрекинати реални функции на сегментот $[a,b]$, односно*

$$C_{[a,b]} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ е непрекината функција}\}.$$

Во $C_{[a,b]}$ се дефинирани операциите собирање и множење со скалар. Имено:

$$(\forall x \in [a,b]) \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$



Слика 1.2: Растојанието помеѓу две непрекинати функции во однос на sup-метриката

$$(\forall x \in [a,b])(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Нулти вектор *е функцијата о дефинирана со* $o(x) = 0$ *за секој* $x \in [a,b]$*. Во овој простор воведуваме метрика со формулата:*

$$d(f,g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|. \tag{1.17}$$

Од теоремата на Ваерштрас за ограниченост на непрекината функција на затворен интервал, следува дека пресликувањето d *е добро дефинирано. Лесно се проверуваат аксиомите за метрика. Растојанието помеѓу функциите* f *и* g *е најголемото вертикално растојание помеѓу нивните графици (види слика 1.2).*

Овој простор игра важна улога во математичката анализа. Да забележиме дека $C_{[a,b]} \subseteq B_{[a,b]}$*, односно метриката во* $C_{[a,b]}$ *е рестрикција на метриката од претходниот пример на множеството* $C_{[a,b]} \times C_{[a,b]}$ *и ја викаме* ***рамномерна*** *или* ***супремум****-метрика.*◆

Пример 1.6.2. *На множеството $C_{[a,b]}$ може да дефинираме и други метрики. На пример, за $p \geqslant 1$ се добива метриката*

$$d_p(f,g) := \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}. \tag{1.18}$$

Неравенството на триаголник се покажува со помош на ***неравенството на Минковски за интегрални суми****: за секој $p \geqslant 1$ и за сите Риман-интеграбилни функции f, g дефинирани на $[a,b]$ важи неравенството:*

$$\sqrt[p]{\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, \mathrm{d}x} \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(x))|^p \, \mathrm{d}x} + \sqrt[p]{\int_a^b |g(x)|^p \, \mathrm{d}x}.$$

Од особен интерес се специјалните случаи:

1. *за $p = 1$ се добива* ***интегралната*** *метрика.*
2. *за $p = 2$ се добива* ***метриката на средноквадратно отстапување*** *или* ***квадратна метрика****.*
3. *за $p = \infty$ се добива* ***супремум-метриката*** *од примерот 1.6.1.*

Ако $p = 1$, доказот дека d_1 е метрика е даден во примерот 1.10.4.
Ако $p = 2$, аксиомите M_1) и M_2) во дефиницијата за метрички простор се очигледни и неравенството на триаголник (M_3) следува директно од Коши-Шварцовото неравенство за интеграли:

$$\left\{ \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \right\}^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t \int_a^b y^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.19}$$

1.7 Дискретен метрички простор

Пример 1.7.1. ***Дискретна метрика.*** *Нека X е произволно множество. Пресликувањето $d : X \times X \to \mathbb{R}$ дефинирано со:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

е метрика во X, наречена ***дискретна метрика****. Многу често таа се означува со $\boldsymbol{\delta}$. Подредениот пар (X, δ) се вика* ***дискретен метрички простор****.* ♦

1.8 Метрички потпростор

Нека (X, d) е метрички простор и $Y \subseteq X$. Тогаш $Y \times Y \subseteq X \times X$ и има смисла да ја разгледаме рестрикцијата $d|_{Y \times Y} = d_Y$ на метриката $d : X \times X \to \mathbb{R}$ на $Y \times Y$ дефинирана со:

$$d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}, \qquad d_Y(a, b) = d(a, b), \forall a, b \in Y\ . \tag{1.20}$$

Теорема 1.8.1. *d_Y е метрика на Y.*

Доказ. Нека $a, b, c \in Y \subseteq X$. Бидејќи d е метрика, важи $d_Y(a, b) = 0 \Leftrightarrow d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$. Понатаму, $d_Y(a, b) = d(a, b) = d(b, a) = d_Y(b, a)$. На крајот, $d_Y(a, b) = d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b) = d_Y(a, c) + d_Y(c, b)$. Значи, својствата за метрика се исполнети за d_Y.

■

Дефиниција 1.8.2. *Нека (X, d) е метрички простор, $Y \subseteq X$ и d_Y е рестрикцијата на метриката d дефинирана со* (1.20)*. За подредениот*

пар (Y, d_Y) велиме дека е ***метрички потпростор*** *од (X, d) или кратко дека Y е потпростор од X. За (X, d) велиме дека е* ***метрички натпростор*** *на (Y, d_Y) или кратко дека X е натпростор на Y.*
За метриката d_Y во потпросторот Y велиме дека е ***индуцирана*** *или* ***наследена*** *од метриката d во X.*

Поради едноставност, матриката d_Y најчесто се означува со d и велиме дека (Y, d) е потпростор од просторот (X, d).

Пример 1.8.3. *Множествата $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, (a, b) со метриките наследени од стандардната метрика во $\mathbb{R}$, односно*

$$d_{\mathbb{N}}(m, n) = |m - n|, \quad \forall m, n \in \mathbb{N},$$

$$d_{\mathbb{Q}}(r, q) = |r - q|, \quad \forall r, q \in \mathbb{Q},$$

$$d_{(a,b)}(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in (a, b),$$

се метрички потпростори. ♦

Пример 1.8.4. *Просторот $C_{[a,b]}$ е потпростор од метричкиот простор $B_{[a,b]}$, со супремум-метрика (видете ги примерите 1.5.1 и 1.6.1).* ♦

Пример 1.8.5. *Просторот c е потпростор од l_∞. (видете ги примерите 1.4.1 и 1.4.2).*♦

Забелешка 1.8.6. *Ако не постои опасност од забуна, можеме да користиме иста ознака за метриката во метричкиот простор и метриката на неговиот потпростор.*

1.9 Изометрични потпростори

Дефиниција 1.9.1. *Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори. За пресликување $f : X \to Y$ велиме дека го* ***чува растојанието*** *ако* *важи*

$$d_Y\left(f\left(a\right), f\left(b\right)\right) = d_X\left(a, b\right) \quad (\forall a, b \in X).$$

Ако пресликувањето f е сурјективно, велиме дека е ***изометрично пресликување*** *или едноставно* ***изометрија****.*

Забелешка 1.9.2. *Очигледно е дека секоја изометрија е инјективно пресликување, бидејќи од $f(x_1) = f(x_2), x_1, x_2 \in X$ следува дека $d\left(x_1, x_2\right)$ $= d\left(f(x_1), f(x_2)\right) = 0$, што значи дека $x_1 = x_2$.*

Дефиниција 1.9.3. *За метрички простори (X, d_X) и (Y, d_Y) велиме дека се* ***изометрични*** *ако постои изометрија f од X на Y.*

Забелешка 1.9.4. *Метричкиот потпростор $(f(X), d_Y)$ од (Y, d_Y) е изометричен со просторот (X, d_X) и велиме дека е* ***изометрична копија*** *на просторот (X, d_X). Неговата инверзна функција $f^{-1} : f\left(X\right)$ $\rightarrow X$ (дефинирана со $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$) е исто така изометрија. Како метрички простори, X и $f(X)$ не се разликуваат. Често, ако ги разгледуваме само метричките својства на просторите, X и $f(X)$ ќе ги сметаме за една иста работа и сè што важи во едниот простор ќе важи и во другиот. Да напоменеме дека тие може да имаат различна неметричка структура, што може да се види на следниов пример:*

Пример 1.9.5. *Просторите $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ со своите стандардни метрики (видете ги примерите 1.2.2 и 1.2.6) се изометрични. Изометријата е зададена со пресликувањето $f\left(z\right) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$.*◆

Пример 1.9.6. *Нека $0 < k < n$. Просторите $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^n$ се состојат од точките $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(x_1, \ldots, x_n)$ соодветно. Нека $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ е дефинирано со*

$$f((x_1, \ldots, x_k)) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

$f(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathbb{R}^n$ е изометрична копија на $\mathbb{R}^k$. Во таа смисла, можеме да кажеме дека за $k < n$, $\mathbb{R}^k$ е потпростор од $\mathbb{R}^n$ до изометричност.◆

1.10 Псевдометрика

Дефиниција 1.10.1. *Нека X е непразно множество.* ***Псевдометрика*** *на X е пресликување од $X \times X$ во множеството од реални броеви што ги исполнува следниве услови:*

ПМ$_1$) $d(x,y) = 0$ *ако* $x = y$;

ПМ$_2$) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$;

ПМ$_3$) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x, y, z \in X$.

Разликата пмеѓу метрика и псевдометрика е во тоа што може да постојат различни елементи за кои вредноста на псевдометриката е еднаква на нула, додека кај метриката тоа не е можно.

Пример 1.10.2. *За $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, дефинираме $d(x,y) = |x_2 - y_2|$. Ако $x = (0,0)$ и $y = (1,0)$, тогаш $d(x,y) = 0$ иако $x \neq y$. Значи, аксиомата M_1) не важи па d не е метрика во $\mathbb{R}^2$. Но, d е псевдометрика.* ♦

Пример 1.10.3. *Нека X е множеството од сите Риман-интеграбилни реални функции на $[a,b]$. За $(f,g) \in X^2$, $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$. Лесно се проверува дека d е псевдометрика, но не е метрика. Навистина, нека*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ 1, & x \in (a,b] \end{cases} \quad \text{и} \quad g(x) = 1, \forall x \in [a,b].$$

Тогаш $d(f,g) = 0$ и покрај тоа што $f \neq g$. ♦

Пример 1.10.4. *Ако во примерот 1.10.3, земеме X да е множеството од сите непрекинати функции на $[a,b]$ со истото пресликување d, тогаш d е метрика. Ќе покажеме дека во овој случај е исполнета аксиомата M_1) од дефиницијата за метрика: $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$.*

Нека $d(f,g)=0$. *Треба да се докаже дека* $f=g$, *или* $f(x)=g(x)$ *за секој* $x\in[a,b]$. *Да претпоставиме дека* $f\neq g$. *Тоа значи дека за некое* $x_0\in[a,b]$ *важи* $f(x_0)\neq g(x_0)$. *Нека* $|f(x_0)-g(x_0)|=r>0$. *Поради непрекинатоста на функциите* f *и* g, *непрекината е и функцијата* $f-g$, *а оттука е непрекината и функцијата* $|f-g|$. *Затоа, ако* $\varepsilon=r/2$, *постои* $\delta>0$, *така што* $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$ *важи дека* $|f(x)-g(x)|>r/2>0$. *Тогаш,*

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x = & \\
&= \int_a^{x_0-\delta} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x+ \\
&+ \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x+ \\
&+ \int_{x_0+\delta}^{b} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^{x_0-\delta} 0\,\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{r}{2}\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} 0\,\mathrm{d}x = \\
&= 0+\frac{r}{2}\cdot 2\delta + 0 = r\delta > 0,
\end{aligned}
$$

односно $d(f,g)\neq 0$. *Контрадикција.*
Ќе покажеме дека важи и обратното тврдење. Ако $f=g$, *тогаш за секој* $x\in[a,b]$, *важи* $f(x)=g(x)$, *па*

$$d(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^b |0|\,\mathrm{d}x=0.$$

Лесно се покажува дека се исполнети M_2) *и* M_3). ♦

1.11 Нормирани векторски простори

Видовме дека кај произволен метрички простор (X, d) не е неопходно множеството X да поседува алгебарски својства. Но, ако множеството X има некаква алгебарска структура, неа можеме да ја искористиме при дефиницијата на метриката d и двете да ги поврземе.

Би било полезно ако таа метрика има својства аналогни на својствата на растојанието помеѓу точките во $\mathbb{R}^2$ или во $\mathbb{R}^3$. Во овие два простора секоја точка е определена со единствен радиус-вектор, што има почеток во нулата на векторскиот простор (координатниот почеток). Должината на радиус-векторот одговара на растојанието од точката до координатниот почеток. Растојанието помеѓу две точки е должината на векторот што е разлика на радиус-векторите што им одговараат на точките. Уште повеќе, должината на векторите се менува хомогено при хомотетија, т.е. при хомотетија со коефициент λ должината на секој вектор се менува $|\lambda|$ пати (се зголемува ако $|\lambda| > 1$, се намалува ако $|\lambda| < 1$ и не се менува ако $|\lambda| = 1$.)

Нека множеството X е векторски простор над поле F (што се зема да е $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Сакаме да дефинираме метрика d на X за која ќе важат следниве својства:
1) Растојанието помеѓу кои било две точки се запазува при транслација. Тоа значи дека растојанието помеѓу векторите x и y не се менува ако им се додаде ист вектор. Специјално, ако им го додадеме векторот $-y$, имаме

$$(\forall x, y \in X) \quad d(x, y) = d(x - y, o). \tag{1.21}$$

2) Растојанието се менува хомогено при хомотетија. Ќе објасниме поконкретно што значи тоа. Нека е даден вектор x со почеток во координатниот почеток. Должината на векторот λx со почеток во координатниот почеток е еднаква на производот на бројот $|\lambda|$ и должината на векторот x, односно

$$d(\lambda x, o) = |\lambda| d(x, o), \forall x \in X, \forall \lambda \in F. \tag{1.22}$$

Ова ни дава можност да дефинираме реална функција над векторскиот простор X, што ја викаме **норма**.

Дефиниција 1.11.1. *Нека X е векторски простор над полето $\mathbb{R}$. Функција*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

што ги има следниве својства:

$H_1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o,$

$H_2)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall x \in X) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *и*

$H_3)$ $(\forall x, y \in X) \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| .$

се вика ***норма*** *на X, а подредениот пар $(X, \|\cdot\|)$ од просторот X и дадената норма се вика* ***нормиран векторски простор*** *или само* ***нормиран простор****.*

Теорема 1.11.2. *Во секој нормиран простор може да се дефинира метрика со формулата:*

$$(\forall x, y \in X) \quad d(x, y) = \|x - y\| . \tag{1.23}$$

Доказ. Ќе докажеме дека d ги задоволува условите за метрика:

$M_1)$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = o \Leftrightarrow x = y.$

$M_2)$ $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \, \|x - y\| = d(x, y),$

$M_3)$ $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| =$
$= d(x, y) + d(y, z).$

■

Оваа метрика се вика **метрика определена (индуцирана) од нормата** на векторскиот простор.

Теорема 1.11.3. *Нека X е векторски простор, d е метрика на X за која важи:*

$$(\forall x, y \in X) \quad d(x - y, o) = d(x, y), \tag{1.24}$$

$$(\forall \lambda \in F)(\forall x \in X) \quad d(\lambda x, o) = |\lambda| d(x, o). \tag{1.25}$$

Тогаш, постои норма во X што ја индуцира метриката d.

Доказ. Го разгледуваме пресликувањето $f : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ дефинирано со: $f(x) = d(x, o), \forall x \in X$. Ќе покажеме дека за f важат аксиомите за норма. За произволни $x, y \in X, \lambda \in F$ имаме:

1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow d(x, o) = 0 \Leftrightarrow x = o$.
2) $f(\lambda x) = d(\lambda x, o) = |\lambda|\, d(x, o) = |\lambda|\, f(x)$.
3) $f(x + y) = d(x + y, o) \leqslant d(x + y, x) + d(x, o)$
$= d(x + y - x, x - x) + d(x, o)$
$= d(x, o) + d(y, o) = f(x) + f(y)$.

Така, f е норма на X и $\forall (x, y) \in X^2$,

$$d(x, y) = d(x - y, o) = f(x - y),$$

односно метриката d е индуцирана од f.

■

Пример 1.11.4. *Множеството од реални броеви $\mathbb{R}^1$ со нормата*

$$\|x\| = |x|\,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.26}$$

е еднодимензионален нормиран векторски простор. ♦

Пример 1.11.5. *Во реалниот $k-$димензионален простор $\mathbb{R}^k$ за $p \geqslant 1$ воведуваме норма: за $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^k$, нека*

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p}. \tag{1.27}$$

Очигледно е дека важат условите H_1) и H_2), а да покажеме дека важи H_3) го користиме неравенството на Минковски, слично како во примерот 1.3.1. Метриката d_p е индуцирана од оваа норма:

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^p} = \|x - y\|_p\,. \quad ♦$$

Пример 1.11.6. *За* $p \geqslant 1$, *во векторскиот простор* l^p *од сите* $p-$*апсолутно сумабилни низи, воведуваме норма со:*

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}, \quad \text{за секој } x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p\ . \tag{1.28}$$

Слично како во примерот 1.4.3 покажуваме дека просторот $(l^p, \|\cdot\|_p)$ *е нормиран и нормата* $\|\cdot\|_p$ *ја индуцира метриката од примерот 1.4.3.*♦

Пример 1.11.7. *Просторот* $\mathbb{R}^k$ *можеме да го опремиме со нормите:*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i| \tag{1.29}$$

или

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i|\,. \tag{1.30}$$

Соодветните метрики нè водат до просторите $\mathbb{R}_1^k$ *и* $\mathbb{R}_\infty^k$ *соодветно, кои ги разгледувавме во примерот 1.3.1 под а) и в).* ♦

Пример 1.11.8. *Нека* l^∞ *е просторот од сите ограничени низи од реални броеви* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$, *и нека*

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|\,. \tag{1.31}$$

Лесно се проверува дека за пресликувањето (1.31) *важат особините за норма* $H_1) - H_3)$. *Метриката индуцирана од оваа норма е метриката од примерот 1.4.1.* ♦

Пример 1.11.9. *На просторот од ограничени реални функции дефинирани на сегментот* $[a, b]$, $B_{[a,b]}$, *дефинираме норма со*

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|\,.$$

Ќе покажеме дека ова пресликување е норма и дека супремум-метриката од примерот 1.6.1 е индуцирана од оваа норма.

H_1) $\quad \|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in [a,b]) f(x) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

H_2) *Имаме дека за секој* $x \in [a,b]$ *и за секој ненулти скалар* λ,

$$|\lambda|\, |f(x)| = |\lambda f(x)| \leqslant \|\lambda f\|\,,$$

односно

$$|f(x)| \leqslant \frac{\|\lambda f\|}{|\lambda|}.$$

Тогаш,

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant \frac{\|\lambda f\|}{|\lambda|},$$

односно

$$|\lambda|\, \|f\| \leqslant \|\lambda f\|\ . \tag{1.32}$$

Слично,

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |f(x)| \leqslant \|f\|$$

па следува дека

$$|\lambda f(x)| = |\lambda|\, |f(x)| \leqslant |\lambda|\, \|f\|$$

и ако се земе супремум, добиваме

$$\|\lambda f\| \leqslant |\lambda|\, \|f\|\ . \tag{1.33}$$

Од (1.32) *и* (1.33) *следува*

$$\|\lambda f\| = |\lambda|\, \|f\|.$$

H_3) $\|f+g\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |(f+g)(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| = \|f\| + \|g\|\,.$ ♦

Пример 1.11.10. *Нека на множеството X од сите Риман-интеграбилни функции на $[a,b]$, за $f \in X$ дефинираме*

$$\|f\| = \int\limits_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Слично како во примерот 1.10.3 се покажува дека $\|\cdot\|$ не е норма.◆

Пример 1.11.11. *Ќе покажеме дека дискретната метрика над непразен векторски простор што содржи повеќе од еден елемент не е индуцирана од норма.*

Нека $(X, \|\cdot\|)$ е непразен нетривијален нормиран векторски простор, односно $\varnothing \neq X \neq \{o\}$. Да претпоставиме дека од нормата $\|\cdot\|$ се индуцира дискретната метрика δ на просторот X. Нека $x \in X$ и $x \neq o$. Тогаш

$$\delta(x, o) = \|x - o\| = \|x\| \,.$$

Но, истовремено, од $x \neq o$, важи $\delta(x, o) = 1$. Значи,

$$\|x\| = 1 \,.$$

Меѓутоа, сега

$$\delta(2x, o) = \|2x\| = 2\,\|x\| = 2 \cdot 1 = 2$$

што не е можно кај дискретната метрика. ◆

1.12 Задачи за самостојна работа

1. Докажете дека ако $x_1, \ldots, x_n$ се n точки од метрички простор (X, d), тогаш

$$d(x_1, x_n) \leqslant d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n).$$

2. Нека (X,d) е метрички простор. Докажете дека $\forall x,y,w,z \in X$ важи неравенството: $|d(x,y)-d(w,z)| \leqslant d(x,w)+d(y,z)$.

3. Нека $p \in [1,\infty)$ и $a_i \geqslant 0$, за $i \in \{1,\ldots,k\}$. Покажете дека
$$\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{a_1^p+\ldots+a_k^p} = \max\{a_1,\ldots,a_k\}.$$

4. За $0 < a \leqslant b$ и $0 < p < 1$, покажете дека $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$.

5. Нека (X,d) е метрички простор. Проверете дали пресликувањата дадени со

   1) $D_1(x,y) = 2d(x,y)$,

   2) $D_2(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$,

   3) $D_3(x,y) = (d(x,y))^2$.

   се метрики на X?

6. Дали $d_i, i \in \{1,\ldots,6\}$ е метрика на $\mathbb{R}$?

   1) $d_1(x,y) = (x-y)^2$,

   2) $d_2(x,y) = \left|x^2-y^2\right|$,

   3) $d_3(x,y) = |x-2y|$,

   4) $d_4(x,y) = \sqrt{|x-y|}$.

   5) $d_5(x,y) = \dfrac{1}{|x-y|}$.

   6) $d_5(x,y) = \sin|x-y|$.

7. Нека (X,d) е метрички простор и $f : X \to \mathbb{R}$. Покажете дека функцијата $(x,y) \mapsto d(x,y) + |f(x)-f(y)|$ е метрика на X.

8. Нека X е множеството од сите реални низи. За $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X$ и $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in X$, земаме $d(x,y) = \dfrac{1}{k}$, $k = \min\{n : x_n \neq y_n\}$. Покажете дека (X,d) е метрички простор.

9. Нека d е метрика на непразно множество X. Покажете дека функцијата $D : X \times X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ дефинирана со:

$$D(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}, \quad \text{за секои } x, y \in X$$

исто така е метрика на X.

10. За $x, y \in \mathbb{R}$ дефинираме

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| + 1, & \text{ако точно еден од броевите } x \text{ и } y \text{ е позитивен,} \\ |x-y|, & \text{инаку.} \end{cases}$$

Дали $(\mathbb{R}, d)$ е метрички простор? Образложете го одговорот.

11. Нека (X, d) е метрички простор и $f : X \to X$ е инјективно пресликување. Дефинираме $D(x,y) = d(f(x), f(y))$. Покажете дека D е метрика на X.

12. Нека $X = \mathbb{R}^2$ и за $x, y \in \mathbb{R}^2$ дефинираме $d(x,y)$ со:

$$d(x,y) = d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |x_1 - y_1|, & \text{ако } x_2 = y_2, \\ |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1|, & \text{инаку.} \end{cases}$$

Покажете дека (X, d) е метрички простор.

13. Нека $X = \mathbb{R}$ и за $x, y \in \mathbb{R}$ дефинираме $d(x,y)$ со

$$d(x,y) = \begin{cases} |x| + |x-y| + |y|, & \text{ако } x \neq y, \\ 0, & \text{ако } x = y. \end{cases}$$

Покажете дека (X, d) е метрички простор.

14. Нека со X го означиме множеството од сите реални низи. За произволни $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in X$ дефинираме

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \min\{|x_k - y_k|, 1\}.$$

Покажете дека (X, d) е метрички простор.

15. Нека $X = \mathbb{C}$ е множеството од сите комплексни броеви. Дефинираме

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1| + |z_2|, & \text{ако } z_1 \neq z_2, \\ 0, & \text{ако } z_1 = z_2. \end{cases}$$

Покажете дека (X, d) е метрички простор.

16. Нека F е множество од ограничени функции од множество X во метрички простор (Y, d). На множеството $F \times F$ дефинираме пресликување d на следниов начин:

$$\forall f, g \in F,\ d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Покажете дека се задоволени аксиомите $M_1) - M_3)$.

17. Нека (X, d_x) и (Y, d_y) се метрички простори. Покажете дека тогаш и $(X \times Y, D)$ е метрички простор, каде што:

а) $D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(d_x(x_1, x_2))^2 + (d_y(y_1, y_2))^2}$

б) $D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2)$,

в) $D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_x(x_1, x_2), d_y(y_1, y_2)\}$.

(Секоја од овие три метрики се вика производ метрика за $X \times Y$)

18. Дали функцијата $d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, $m, n \in \mathbb{N}$, е метрика на $\mathbb{N}$?

19. Нека за $m, n \in \mathbb{N}$ важи $d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, $d(n, \infty) = d(\infty, n) = \frac{1}{n}$ и $d(\infty, \infty) = 0$. Покажете дека d е метрика на $\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

20. Нека $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ги исполнува следниве услови:

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

M3') $d(x, z) \geqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Покажете дека X има најмногу една точка.

21. Нека со c го означиме множеството од сите конвергентни низи од реални броеви и за $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in c,\ y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in c$ дефинираме

$$d(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i| .$$

Покажете дека (X, d) е метрички простор.

22. Нека X е просторот од сите низи од реални броеви. За произволни $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in X$, дефинираме

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}.$$

Покажете дека (X, d) е метрички простор.

23. Нека $X = C_{[0,1]}$ со рамномерната метрика. Пресметај $d(f, g)$ ако f, g се дефинирани со:

$$i)\ \ f(x) = x,\ g(x) = x^2;$$

$$ii)\ \ f(x) = 1,\ g(x) = x^2;$$

$$iii)\ \ f(x) = 1,\ g(x) = x.$$

24. На просторот $C_{[0,1]}$ од непрекинати реални функции дефинирани на $[0, 1]$, дефинирано е пресликување

$$\|\cdot\| : f \mapsto \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Покажете дека $\|\cdot\|$ е норма.

25. Нека $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ се нормирани простори и $\Phi : X \to Y$ е биекција што ја задржува нормата во смисла дека:

$$\|\Phi(x)\|_Y = \|x\|_X , \forall x \in X.$$

Дали Φ е изометрија? Образложете го одговорот.

26. Нека d е метрика на множество X. За кои реални броеви α и β функцијата дефинирана со

$$d_1(x,y) = \alpha d(x,y) + \beta,\ \forall x,y \in X$$

е метрика на X?

27. Нека $\varphi : X \to [0,+\infty)$ е ненегативна функција и нека пресликувањето $d : X \times X \to \mathbb{R}$ е дефинирано со:

$$d(x,y) = \begin{cases} \max\{\varphi(x),\varphi(y)\}, & x \neq y \\ \qquad 0, & x = y \end{cases}$$

Докажете ги следниве тврдења:
а) d е псевдометрика на X.
б) Ако за φ важи: $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$, тогаш d е метрика во X.

28. Нека (X', d') и (X'', d'') се метрички простори и $X = X' \times X''$. Докажете дека со формулата $d((x', x''), (y', y'')) = d'(x', y')$ е дефинирана псевдометрика на X.

29. Нека за секои $x, y \in \mathbb{R}^3$ дефинираме

$$d(x,y) = \max\left\{|x_1 - y_1|, \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}\right\}.$$

Покажете дека d е метрика на $\mathbb{R}^3$.

30. Нека X е непразно множество и $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ е пресликување што задоволува:
(i) $\rho(x,y) \geq 0$ со еднаквост ако и само ако $x = y$.
(ii)$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y), \forall x,y,z \in X$.
Дефинираме $d : X \times X \to \mathbb{R}$ со $d(x,y) = max\{\rho(x,y), \rho(y,x)\}$.
Покажете дека d е метрика на X.

31. Нека (X, d) е метрички простор и $z \in X$. Дефинираме ненегативна реална функција $\delta_x : x \mapsto d(z,x)$ на X. Покажете дека
(i) функцијата $z \mapsto \delta_z$ е биекција од X на множеството $\delta(X) =$

$\{\delta_z : z \in X\}$.
(ii) $\delta_z(b) - \delta_z(a) \leqslant d(a,b) \leqslant \delta_z(b) + \delta_z(a), \forall a, b \in X$
(iii) $\delta_z(z) = 0$.

32. На множеството X од сите непрекинати функции на интервалот $[a,b]$ дефинираме растојание со:

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Покажете дека (X,d) е метрички простор. (Метричкиот простор ќе го означуваме со $C^2_{[a,b]}$.)

Глава 2

Растојание од точка до множество. Дијаметар на множество

2.1 Растојание од точка до множество

Дефиниција 2.1.1. *Нека* (X, d) *е метрички простор,* $x_0 \in X$ *и* $A \subseteq X$*. Со формулата*

$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, a) : a \in A\} \tag{2.1}$$

се дефинира ***растојание на точката*** x_0 ***до множеството*** A*.*

Забелешка 2.1.2. *Множеството* $\{d(x_0, a) : a \in A\}$ *е ограничено од лево, бидејќи* $d(x_0, a) \geqslant 0$ *за секој* $a \in A$*. Затоа, за секое непразно подмножество* $A \subseteq X$ *постои* $\inf\{d(x_0, a) : a \in A\}$*. Да забележиме дека* $d(x_0, a) \geqslant 0$*. Исто така, ако* $x_0 \in A$*, тогаш* $d(x_0, A) = 0$*. Со следниот пример ќе видиме дека обратното тврдење не важи, односно од* $d(x_0, a) = 0$ *не мора да следува дека* $x_0 \in A$*.*

Пример 2.1.3. *Ако* $X = \mathbb{R}$, *со обичната метрика и*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Тогаш $d(0, A) = 0$, *иако* $0 \notin A$.◆

Пример 2.1.4. *Нека* (X, d) *е метрички простор и* $x \in X$. *Тогаш,* $d(x, \varnothing) = \inf \varnothing = +\infty$*(видете ја дефиницијата 15.1.15)* ◆

Пример 2.1.5. *Нека* $A = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. *Тогаш* $d(0, A) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \dfrac{1}{n} \right\} = 0$. *Навистина, нека* $\varepsilon > 0$ *е произволно и* n_0 *е најмалиот природен број поголем од* $\dfrac{1}{\varepsilon}$, *односно* $0 < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. *Значи,* $\forall \varepsilon > 0, \exists x = \dfrac{1}{n_0} \in A$, *така што* $|x - 0| < \varepsilon$, *што повлекува дека* $d(0, A) = \inf\limits_{x \in A} |0 - x| = 0$.◆

Пример 2.1.6. *Ќе покажеме дека растојанието од произволен реален број* $x \in \mathbb{R}$ *до множеството од рационални броеви* $\mathbb{Q}$ *е нула. Нека* $x \in \mathbb{R}$ *и нека* $\varepsilon > 0$ *е произволно. Постои рационален број* q *така што* $x < q < x + \varepsilon$ *(видете ја последицата 15.1.11). Ова значи дека* $d(x, \mathbb{Q}) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. *Од произволноста на* ε *следува дека* $d(x, \mathbb{Q}) = 0$.◆

Пример 2.1.7. *Нека* $A = \big\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *со стандардната метрика. Растојанието од координатниот почеток до множеството* A *е*

$$d((0,0), A) = \inf \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} : (x, y) \in A \right\} = 1.◆$$

Пример 2.1.8. *Графикот на правата* $A = \{(x, y) : x + y = 1\}$ *е подмножество од* $\mathbb{R}^2$. *Да го пресметаме растојанието од точката* $(1, 1)$ *до множеството* A, *во однос на со Евклидовата метрика. Имаме*

$$\begin{aligned} d((1,1), A) &= \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} : y = 1 - x \right\} \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \}. \end{aligned}$$

Функцијата $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$ *достигнува минимум за* $x = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{2}$. *Тогаш,* $d((1, 1), A) = d((1, 1), (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.◆

Теорема 2.1.9. *За зададено множество* $A \subseteq X$ *и* $x, y \in X$ *важи неравенството*

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y). \tag{2.2}$$

Доказ. За секој $a \in A$ имаме:

$$d(x,A) \leqslant d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,a).$$

Затоа,

$$d(x,A) - d(x,y) \leqslant d(y,a).$$

Од последното, ако земеме инфимум по елементите $a \in A$, добиваме

$$d(x,A) - d(x,y) \leqslant d(y,A),$$

односно

$$d(x,A) - d(y,A) \leqslant d(x,y).$$

Ако во последното неравенство x и y си ги сменат местата, добиваме

$$d(y,A) - d(x,A) \leqslant d(x,y)$$

со што го докажавме бараното неравенство (2.2).

■

Теорема 2.1.10. *Нека* (X,d) *е метрички простор,* $x \in X$ *и* $\wp$ *е непразна фамилија од подмножества од* X*. Тогаш,*

$$d(x, \bigcup_{A\in\wp} A) = \inf\left\{d(x,A) : A \in \wp\right\}.$$

Доказ. Бидејќи $A \subseteq \bigcup_{A\in\wp} A$, имаме дека $d(x, \bigcup_{A\in\wp} A) \leqslant d(x,A), \forall A \in \wp$, па следува дека $d(x, \bigcup_{A\in\wp} A) \leqslant \inf\left\{d(x,A) : A \in \wp\right\}$.

За обратното неравенство, нека $\varepsilon > 0$. Тогаш, постои $z \in \bigcup\limits_{A \in \wp} A$, односно $z \in B$ за некое $B \in \wp$ и $d(x, z) \leqslant d(x, \bigcup\limits_{A\in\wp} A) + \varepsilon$. Тогаш,

$$\inf \{d(x, A) : A \in \wp\} \leqslant d(x, B) \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, \bigcup_{A\in\wp} A) + \varepsilon.$$

Од произволноста на ε следува дека $\inf \{d(x, A) : A \in \wp\} \leqslant d(x, \bigcup\limits_{A\in\wp} A)$.

■

Теорема 2.1.11. *Нека (X, d) е метрички простор, $x \in X$ и $\wp$ е непразна фамилија од подмножества од X. Тогаш,*

$$\sup \{d(x, A) : A \in \wp\} \leqslant d\left(x, \bigcap_{A\in\wp} A\right).$$

Доказ. Ако $\bigcap\limits_{A\in\wp} = \varnothing$, тогаш поради $\inf \varnothing = \infty$ неравенството ќе важи. Ако $\bigcap\limits_{A\in\wp} \neq \varnothing$, тогаш

$$\begin{aligned}(\forall A \in \wp) \qquad \bigcap_{A\in\wp} A \subseteq A \Rightarrow d(x, A) \leqslant d(x, \bigcap_{A\in\wp} A)& \\ \Rightarrow \sup \{d(x, A) : A \in \wp\} \leqslant d(x, \bigcap_{A\in\wp} A).&\end{aligned}$$

■

2.2 Растојание помеѓу две множества

Дефиниција 2.2.1. *Нека (X, d) е метрички простор и $A, B \subseteq X$. Со формулата*

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} \tag{2.3}$$

се дефинира ***растојание од множеството A до множеството B*** *во метричкиот простор X.*

Забелешка 2.2.2. *Да забележиме дека* $d(A,B) \geqslant 0$.

Теорема 2.2.3. *Ако* $A \cap B \neq \varnothing$, *тогаш* $d(A,B) = 0$.

Доказ. Ако $x \in A \cap B$, тогаш $0 \leqslant d(A,B) \leqslant d(x,x) = 0$.

■

Пример 2.2.4. *Од* $d(A,B) = 0$ *не мора да следува дека* $A \cap B \neq \varnothing$. *Ако земеме дека* $A = \{0\}, B = (0,1)$, *добиваме* $d(A,B) = 0$ *и* $A \cap B = \varnothing$.♦

Пример 2.2.5. *Нека* $(X,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ *и нека*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \text{ и } B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

Тогаш $d(A,B) = 0$ *и* $A \cap B = \varnothing$.♦

Пример 2.2.6. *Бидејќи* $\inf \varnothing = +\infty$, *за секое* $A \subseteq X$ *важи*

$$d(A, \varnothing) = \inf \varnothing = +\infty\,.$$

(Видете ја дефиницијата за инфимум 15.1.15) ♦

Теорема 2.2.7. *Нека* (X,d) *е метрички простор,* $x \in X$ *е произволен и* A *и* B *се фиксни подмножества од* X. *Тогаш,*

$$d(A,B) \leqslant d(x,A) + d(x,B). \tag{2.4}$$

Доказ. Ако $A = \varnothing$ или $B = \varnothing$, тогаш од $d(x,\varnothing) = +\infty$ следува дека неравенството (2.4) е точно. Сега, нека $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Од $d(x,A) = \inf\limits_{a \in A} d(x,a)$ следува дека постои $a_\varepsilon \in A$ така што

$$d(x,a_\varepsilon) \leqslant d(x,A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Слично, постои $b_\varepsilon \in B$ така што

$$d(x,b_\varepsilon) \leqslant d(x,B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогаш,

$$\begin{aligned} d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b) &\leqslant d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \leqslant d(a_\varepsilon, x) + d(x, b_\varepsilon) \\ &\leqslant d(x,A) + d(x,B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Од произволноста на ε следува неравенството.

■

2.3 Дијаметар на множество

Дефиниција 2.3.1. *За метричкиот простор (X, d) велиме дека е* ***ограничен*** *ако*

$$(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x, y \in X)(d(x,y) \leqslant D). \tag{2.5}$$

Во тој случај велиме дека ***метриката*** d ***е ограничена****.*

Дефиниција 2.3.2. *Нека (X, d) е метрички простор и A е подмножество од X. Велиме дека множеството A е* ***ограничено*** *ако:*

$$(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x, y \in A)(d(x,y) \leqslant D).$$

Значи, множество A во метричкиот простор (X, d) е ограничено ако A е ограничен простор како потпростор од X.

Пример 2.3.3. *1) Единичната затворена топка во $\mathbb{E}^2$*

$$T[(0,0),1] = \{a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : \ a_1^2 + a_2^2 \leqslant 1\}$$

е ограничено множество.Може да земеме дека $D = 2$.

2) Множеството $\mathbb{R}$ со метриката $d(a,b) = \operatorname{arctg}|a-b|$ е ограничен метрички простор. Може да земеме дека $D = \pi$.

3) Нека (X, d) е метрички простор. Просторот (X, d_1), каде што $d_1(a,b) = \dfrac{d(a,b)}{1 + d(a,b)}$ е ограничен. Може да земеме дека $D = 1$.

4) Секој дискретен метрички простор е ограничен ($D = 1$.)♦

Забележуваме дека во метрички простор (X, d) ограниченоста на множество $A \subseteq X, A \neq \varnothing$, зависи од $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ и само од него. Затоа оваа величина ја дефинираме како посебен поим.

Дефиниција 2.3.4. *Нека (X, d) е метрички простор. За множество $A \subseteq X$* ***дијаметар*** *во однос на метриката d е вредноста*

$$\mathrm{diam}_d A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}\,. \tag{2.6}$$

Забелешка 2.3.5. *Ако нема опасност од забуна, наместо $\mathrm{diam}_d A$ ќе пишуваме $\mathrm{diam} A$.*

Јасно е дека множество A е ограничено ако $\mathrm{diam}_d A < +\infty$. Ако, пак, $\mathrm{diam}_d A = +\infty$, множеството A е неограничено.

Пример 2.3.6. *$\varnothing$ е ограничено затоа што $\mathrm{diam}\varnothing = \sup\varnothing = -\infty < \infty$.*

Дијаметарот на секое едноелементно множество е нула,

$$\mathrm{diam}\,\{x\} = \sup\,\{d(x, x)\} = 0.\blacklozenge$$

Пример 2.3.7. *Интервалот $(0, \infty)$ не е ограничено множество во $\mathbb{R}$ со Евклидската метрика, односно $\mathrm{diam}(0, \infty) = \infty$.*

Меѓутоа, истото множество $(0, \infty)$ е ограничено во дискретниот реален простор, односно во $\mathbb{R}$ со дискретната метрика, затоа што $(\forall x, y \in X)\ d(x, y) \leqslant 1$. Оттука, $\mathrm{diam}(0, \infty) = 1$.

Исто така, во однос на метриката $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$, интервалот $(0, \infty)$ повторно е ограничено множество и $\mathrm{diam}(0, \infty) = 1.\blacklozenge$

Од претходниот пример гледаме дека ограниченоста на некое множество зависи само од метриката во однос на која се разгледува.

Пример 2.3.8. *Нека* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. *Секој од интервалите* (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ *и* $[a, b]$ *е ограничено множество и има дијаметар* $b - a$.
Интервалите (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ *и* $(-\infty, \infty)$ *се неограничени множества.*◆

Теорема 2.3.9. $\mathrm{diam}(A \cup B) \leqslant \mathrm{diam}A + d(A, B) + \mathrm{diam}B$.

Доказ. За секое позитивно ε, постојат $a_\varepsilon \in A$, и $b_\varepsilon \in B$ такви што

$$d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) - \varepsilon \leqslant d(A, B) < d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \ .$$

За произволни $a \in A$ и $b \in B$ имаме:

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leqslant d(a, a_\varepsilon) + d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) + d(b_\varepsilon, b) \\ &\leqslant d(a, a_\varepsilon) + d(A, B) + \varepsilon + d(b_\varepsilon, b) \\ &\leqslant \mathrm{diam}(A) + d(A, B) + \mathrm{diam}(B) + \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Од произволноста на ε следува:

$$d(a, b) \leqslant \mathrm{diam}(A) + d(A, B) + \mathrm{diam}(B) \ .$$

Нека $x, y \in A \cup B$ (т.е. $(x \in A \vee x \in B) \wedge (y \in A \vee y \in B)$). Во секој случај е исполнето

$$d(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(A) + d(A, B) + \mathrm{diam}(B) \ .$$

Оттука следува дека

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in A \cup B\} \leqslant \mathrm{diam}(A) + d(A, B) + \mathrm{diam}(B),$$

односно

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leqslant \mathrm{diam}(A) + d(A, B) + \mathrm{diam}(B) \ .$$

■

Последица 2.3.10. *Унијата од конечно многу ограничени подмножества од метрички простор е ограничено подмножество од просторот.*

Доказ. Нека $\mathrm{diam}A_1 < \infty$ и $\mathrm{diam}A_2 < \infty$. Од теоремата 2.3.9, имаме дека $\mathrm{diam}(A_1 \cup A_2) \leqslant \mathrm{diam}A_1 + d(A_1, A_2) + \mathrm{diam}A_2 < \infty$. Доказот за ограниченоста на унија од n ограничени множества се изведува со математичка индукција и му се остава на читателот како вежба.

∎

Теорема 2.3.11. *Нека X е метрички простор, $x \in X$ и A и B се непразни подмножества од X. Ако $A \subseteq B$, тогаш,*

$$d(x, B) \leqslant d(x, A) \leqslant d(x, B) + \mathrm{diam}B.$$

Доказ. Ако $A \subseteq B$, тогаш $\{d(x, a) : a \in A\} \subseteq \{d(x, b) : b \in B\}$ од каде

$$\inf\{d(x, b) : b \in B\} \leqslant \inf\{d(x, a) : a \in A\} \Leftrightarrow d(x, B) \leqslant d(x, A).$$

За второто неравенство, нека $a \in A$ и $b \in B$. Имаме $d(x, A) \leqslant d(x, a)$. Бидејќи $a, b \in B$, имаме $d(b, a) \leqslant \mathrm{diam}B$, па следува

$$d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, b) + d(b, a) \leqslant d(x, b) + \mathrm{diam}B.$$

Последното неравенство важи за секое $b \in B$, па добиваме:

$$d(x, A) \leqslant d(x, B) + \mathrm{diam}B.$$

∎

Следнава теорема кажува дека во нормиран векторски простор X, дијаметарот на произволно подмножество од X е инваријантен при транслација, односно при транслација дијаметарот на множеството не се менува.

Теорема 2.3.12. *Нека X е нормиран векторски простор. Тогаш, за секое подмножество $A \subseteq X$ и за секоја точка $x \in X$ важи равенството*

$$\mathrm{diam}(x + A) = \mathrm{diam}(A).$$

Доказ. Равенството следува од хомогеноста на нормата:

$$d(a,b) = \|a-b\| = \|(x+a)-(x+b)\| = d(x+a, x+b)\,.$$

■

2.4 Задачи за самостојна работа

1. Докажете ги следниве тврдења:
   а) $\operatorname{diam} A = 0 \Leftrightarrow A$ е едноелементно множество.
   б) $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leqslant \operatorname{diam}(B)$.
   в) $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow \operatorname{diam}(A \cup B) \leqslant \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.

2. Нека (X,d) е метрички простор, $x, y \in X$ и A е непразно подмножество од X. Докажете дека:

   а) $d(x,A) \leqslant d(x,y) + d(y,A)$

   б) $|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,A) + d(y,A) + \operatorname{diam} A$

3. Го разгледуваме метричкиот простор $(\mathbb{R}^+, d)$ каде што $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Покажете дека во овој метрички простор $\mathbb{N}$ е ограничено множество, додека $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ не е ограничено подмножество од $\mathbb{R}^+$.

4. Нека $A \subseteq \mathbb{R}$. Покажете дека $\operatorname{diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

5. Нека (X,d) е метрички простор и $\{A_i : i = 1, \dots, n\}$ е конечна фамилија од подмножества од X, секое со конечен дијаметар. Покажете дека $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ има конечен дијаметар.

6. Пресметајте го растојанието од точката $z = (z_1, z_2)$ до правата $\{x \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 + c = 0\}$ во просторот $\mathbb{E}^2$.

7. Нека $A \subset \mathbb{R}$ и $x \in A$. Покажете дека:

   i) $d(x, A) \leqslant |x - \sup A|$, равенство важи ако $x \geqslant \sup A$.

   ii) $d(x, A) \leqslant |x - \inf A|$, равенство важи ако $x \leqslant \inf A$.

   iii) Ако $\sup A \in \mathbb{R}$, тогаш $d(\sup A, A) = 0$.

   iv) Ако $\inf A \in \mathbb{R}$, тогаш $d(\inf A, A) = 0$.

8. Ако A и B се множества точки на едната, односно другата гранка на хиперболата $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ во $\mathbb{R}^2$, пресметајте $d(A, B)$.

9. Нека (X, d) е метрички простор, $A \subseteq X$ и $\epsilon > 0$. Множеството $T(A, \epsilon) = \bigcup_{a \in A} T(a, \epsilon)$ е обопштена топка со радиус $\epsilon > 0$ опишана околу множеството A. Покажете дека множеството A е ограничено покажува $T(A, \epsilon)$ е ограничено.

10. $n-$коцка со страна $2a > 0$ и со центар во $(0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ е множеството $I_a^n = [-a, a] \times \cdots \times [-a, a] \subseteq \mathbb{R}^n$.
    $n-$коцка со страна $2a > 0$ и со центар во $b \in \mathbb{R}^n$ е множеството $b + I_a^n = \{b + x : x \in I_a^n\}$.
    Пресметајте го дијаметарот на I_a^n.

Глава 3

Отворени, затворени и ограничени множества

Во наредните поглавја (од 3 до 7) ќе ги генерализираме концептите кои ни се познати од Математичка анализа 1 на произволен метрички простор. Првиот концепт е оној за отворено множество. Тој се базира на идејата за отворена топка која пак е обопштување на поимот отворен интервал.

3.1 Отворена и затворена топка. Сфера

Дефиниција 3.1.1. *Нека* (X, d) *е метрички простор,* $a \in X$ *и* $r > 0$ *е позитивен реален број.*
Отворена топка *со центар во* a *и радиус* r *е множеството:*

$$T(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\} .$$

Затворена топка *со центар во a и радиус r е множеството:*

$$T[a,r] = \{x \in X : d(x,a) \leqslant r\} \ .$$

Сфера *со центар во a и радиус r е множеството:*

$$S(a,r) = \{x \in X : d(x,a) = r\} \ .$$

Само во Евклидскиот простор $\mathbb{R}^3$ термините топка и сфера одговараат на нашата геометриска претстава, но тие термини се користат и во останатите метрички простори.

Пример 3.1.2. *Ќе ги определиме отворените топки, затворените топки и сферите во некои метрички простори.*

1. *Во* $\mathbb{R}$ *со стандардната метрика имаме*

$$T(a,r) = (a-r, a+r);$$

$$T[a,r] = [a-r, a+r];$$

$$S(a,r) = \{a-r, a+r\}.$$

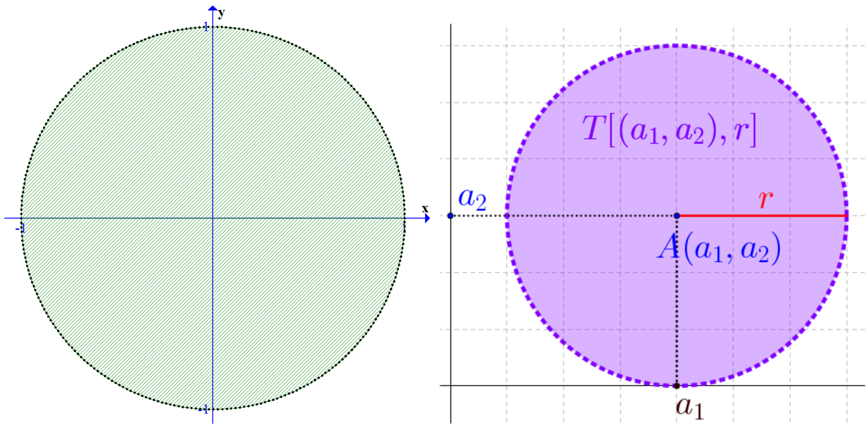
Секој ограничен отворен интервал (a,b) *е отворена топка со центар во* $\dfrac{a+b}{2}$ *и со радиус* $\dfrac{b-a}{2}$.
Отворените интервали неограничени од едната страна, од облик $(-\infty, b)$ *или* $(a, +\infty)$*, за некои* $a, b \in \mathbb{R}$*, не се отворени топки.* ♦

2. *Во* $\mathbb{R}^2$ *со Евклидова метрика важи*

$$T((a_1,a_2),r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} < r\}$$

односно

$$T((a_1,a_2),r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\}.$$



(а) Единична отворена топка во $\mathbb{E}^2$, $T((0,0),1)$.

(б) Отворената топка $T((a_1,a_2),r)$ во $\mathbb{E}^2$.

Слика 3.1: Отворени топки во $\mathbb{E}^2$.

Значи, отворена топка со центар во точката $A(a_1, a_2)$ и радиус r е отворениот круг со центар во $A(a_1, a_2)$ и радиус r (видете ја сликата 3.1).

Слично, за затворена топка во $\mathbb{E}^2$ имаме

$$T[(a_1, a_2), r] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \leqslant r\},$$

односно

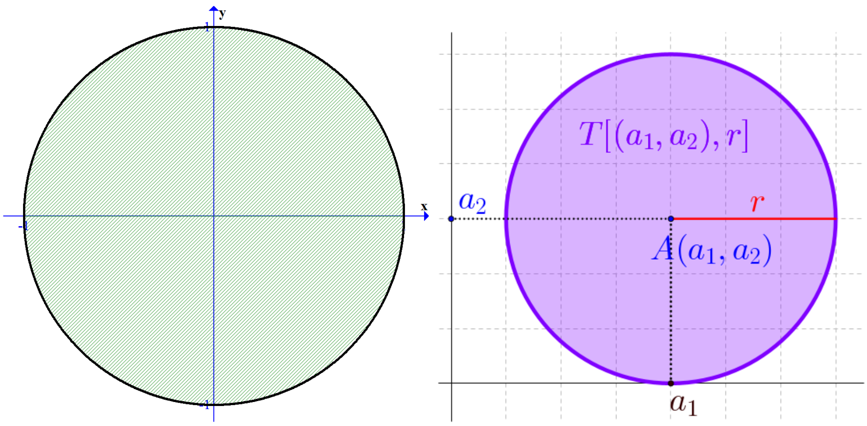
$$T[(a_1, a_2), r] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leqslant r^2\}.$$

Затворена топка со центар во точката $A(a_1, a_2)$ и радиус r е затворениот круг со центар во A и радиус r (видете слика 3.2). На крајот, за сферата со центар во $A(a_1, a_2)$ и радиус r во $\mathbb{E}^2$ имаме:

$$S((a_1, a_2), r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = r\}$$

односно

$$S((a_1, a_2), r) = \{(x_1, x_2) :\in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}.$$



(а) Единична затворена топка во $\mathbb{E}^2$, $T[(0,0),1]$.

(б) Затворена топка $T((a_1, a_2), r)$ во $\mathbb{E}^2$.

Слика 3.2: Затворени топки во $\mathbb{E}^2$.

Сфера со центар во точката (a_1, a_2) и радиус r е кружницата со центар во $A(a_1, a_2)$ и радиус r (види слика 3.3б). ◆

3. *Да го разгледаме множеството $\mathbb{R}^2$ со метриката*

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \,.$$

Во овој метрички простор, отворена топка е

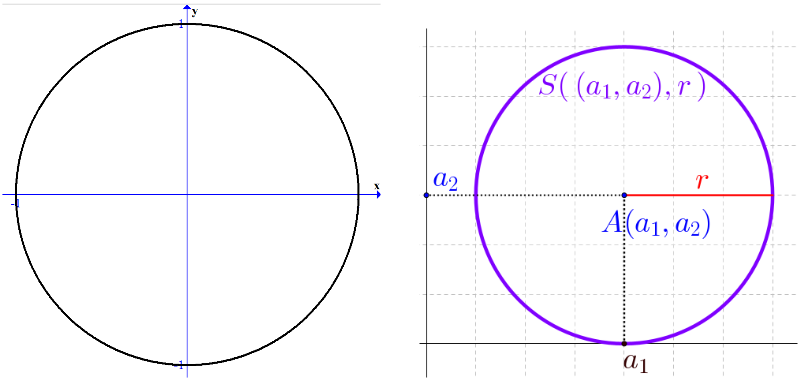
$$T((a_1, a_2), r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r\}.$$

Геометриски, $T((a_1, a_2), r)$ е внатрешноста на квадратот со центар во (a_1, a_2) и со дијагонали со должина $2r$ што се паралелни на координатните оски (видете ја и сликата 3.5 а)).

Затворена топка е множеството

$$T[(a_1, a_2), r] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leqslant r\}.$$

Геометриски, тоа е внатрешноста на претходно спомнатиот квадрат заедно со неговите страни. (видете слика 3.5 б)). Сфера



(а) Единична сфера во $\mathbb{E}^2$, $S((0,0),1)$.

(б) Сферата $S((a_1,a_2),r)$ во $\mathbb{E}^2$.

Слика 3.3: Сфери во $\mathbb{E}^2$.

со центар во точката (a_1, a_2) *и радиус* r *е самиот квадрат без внатрешноста*

$$S((a_1,a_2),r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r\}$$

(видете ја сликата 3.5 (в)).

4. *Во метричкиот простор* $\mathbb{R}^2_\infty$ *со метрика на Чебишев*

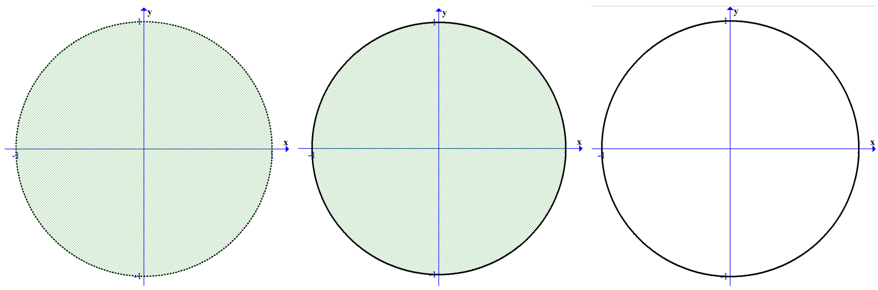
$$d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

отворена топка, затворена топка и сфера со центар во (a_1, a_2) *и радиус* r *се множествата:*

$$T((a_1,a_2),r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r\},$$
$$T[(a_1,a_2),r)] = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\left\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\right\} \leqslant r\right\}$$

и

$$S((a_1,a_2),r) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} = r\}.$$



(а) (б) (в)

Слика 3.4: Отворена топка (а), затворена топка (б) и сфера (в) со центар во $(0,0)$ и радиус $r=1$ во $\mathbb{E}^2$

Геометриски, отворената топка $T((a_1,a_2),r)$ е внатрешноста на квадратот со центар во (a_1,a_2) и со страни со должина $2r$ паралелни на координатните оски (видете слика 3.6 (а)). Затворената топка се состои од отворената топка и страните на квадратот (сл. 3.6 (б)), а сферата е самиот квадрат (сл. 3.6 (в)). ◆

5. *Го разгледуваме метричкиот простор $C_{[0,1]}$ со метрика*

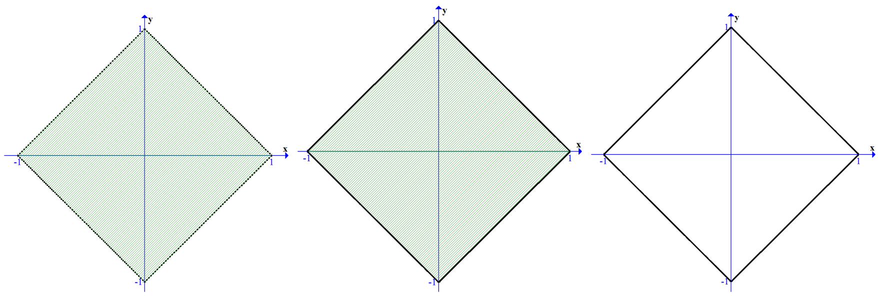
$$d(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-h(x)|\ .$$

За произволна функција $f\in C_{[0,1]}$ и $r>0$, отворената топка $T(f,r)$ со центар во f и радиус r е множеството

$$T(f,r)=\{g\in C_{[0,1]}:\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-h(x)|<r\}\ .$$

Значи, во отворената топка $T(f,r)$ се содржат сите функции h од $C_{[0,1]}$ за кои $|f(x)-h(x)|<r,\forall x\in[0,1]$, односно функциите за кои $g(x)\in(f(x)-r,f(x)+r)$, $\forall x\in[0,1]$. Имаме

$$T(f,r)=\{h\in C_{[0,1]}:f(x)-r<h(x)<f(x)+r,\forall x\in[0,1]\}\ .$$



(а) (б) (в)

Слика 3.5: Отворена топка (а), затворена топка (б) и сфера (в) со центар во $(0,0)$ и радиус $r=1$ во такси-метриката во $(\mathbb{R}^2, d_1)$

Значи, отворената топка $T(f,r)$ се состои од сите непрекинати функции дефинирани на сегментот $[0,1]$ чии графици лежат во засенчениот дел околу графикот на функцијата f, што е прикажан на сликата 3.7.

Затворената топка со центар во f и радиус r е дадена со

$$T[f,r] = \{g \in C_{[0,1]} : f(x) - r \leqslant h(x) \leqslant f(x) + r, \forall x \in [0,1]\}\ ,$$

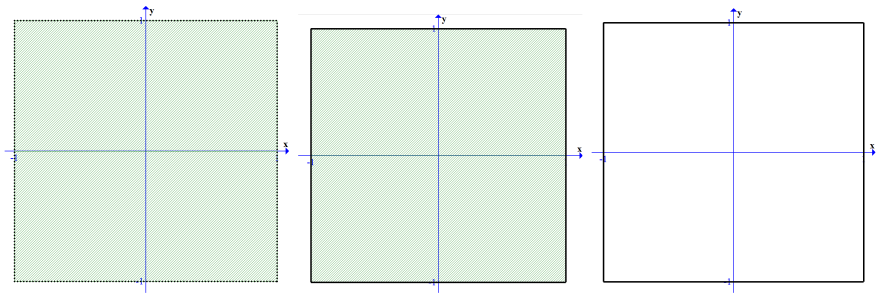
а сферата со центар во f и радиус r е множеството од функции h за кои $(\exists x_0 \in [0,1])(h(x_0) = f(x_0) - r$ или $h(x_0) = f(x_0) + r)$.

$$S(f,r) = \{h \in T[f,r] : \exists x \in [0,1], |h(x) - f(x)| = r\}\,.$$

6. *Нека (X,d) е дискретен метрички простор и $a \in X$. Имаме*

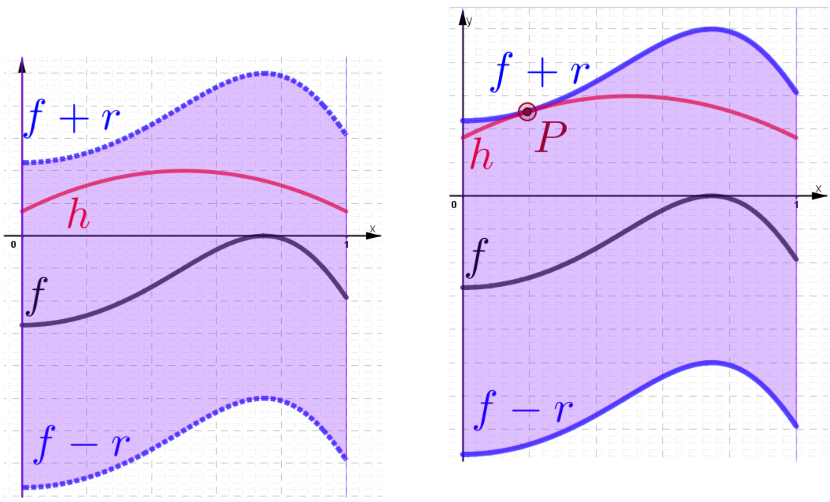
$$T(a,r) = \begin{cases} \{a\}, & r \leqslant 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}; \qquad T[a,r] = \begin{cases} \{a\}, & r < 1 \\ X, & r \geqslant 1 \end{cases};$$

$$S(a,r) = \begin{cases} \varnothing, & r \neq 1 \\ X \setminus \{a\}, & r = 1 \end{cases}. \blacklozenge$$



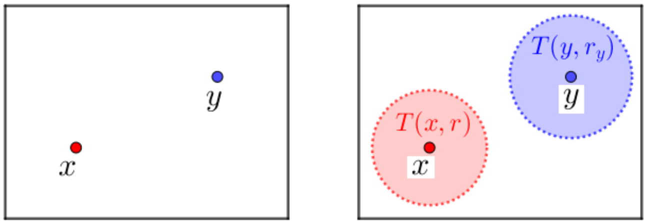
(а) (б) (в)

Слика 3.6: Отворена топка, затворена топка и сфера со центар во $(0,0)$ и радиус $r=1$ во $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$



(а) (б)

Слика 3.7: Елементи на (а) $T(f,r)$ и (б) $T[f,r]$ во $(C_{[0,1]}, d_\infty)$.



Слика 3.8: Хаусдорфовост на метрички простор. Две различни точки x и y може да се раздвојат со две дисјунктни отворени топки.

Теорема 3.1.3. *Во произволен метрички простор X секои две различни точки може да се раздвојат со дисјунктни отворени топки, т.е.*

$$(\forall x, y \in X)(x \neq y) \Rightarrow (\exists r > 0)(T(x, r) \cap T(y, r) = \varnothing).$$

Доказ: Ако $x \neq y$, тогаш $d(x, y) > 0$. Нека $r = \dfrac{d(x, y)}{2}$. Тогаш,

$$T(x, r) \cap T(y, r) = \varnothing,$$

бидејќи во спротивно,

$$z \in T(x, r) \cap T(y, r) \Rightarrow d(x, z) < r \wedge d(y, z) < r$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < 2r = d(x, y),$$

што е контрадикција.

■

Забелешка 3.1.4. *Својството опишано во теоремата 3.1.3 се вика* ***хаусдорфовост***[1] *на метричките простори.*

[1] Felix Hausdorff, германски математичар, 1868–1942

3.2 Отворени множества

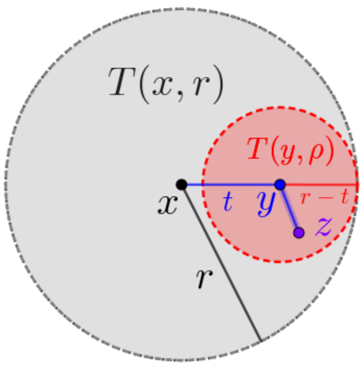
Дефиниција 3.2.1. *За множество G велиме дека е* ***отворено*** *во метричкиот простор (X, d) ако секоја точка во G е центар на некоја отворена топка во X што што се содржи во G, односно*

$$(\forall x \in G)(\exists r_x > 0), \qquad T(x, r_x) \subseteq G\ , \tag{3.1}$$

Пример 3.2.2. *Од дефиницијата директно следува дека празното множество и целиот простор X се отворени множества.*♦

Теорема 3.2.3. *Во секој метрички простор (X, d), секоја отворена топка е отворено множество.*

Доказ: Нека $T(x, r)$ е отворена топка во метричкиот простор (X, d) и нека $y \in T(x, r)$ е произволно. Треба да покажеме дека постои $\rho_y > 0$, така што $T(y, \rho_y) \subseteq T(x, r)$. Нека $t = d(x, y)$ и го избираме $\rho_y = r - t > 0$. Ако $z \in T(y, \rho_y)$, односно ако $d(z, y) < \rho_y = r - t$, тогаш имаме:



Слика 3.9: Секоја отворена топка е отворено множество.

$$d(z, x) \leqslant d(z, y) + d(y, x) < r - t + t = r$$

од каде што $z \in T(x, r)$. Од произволноста на z, добиваме дека

$$T(y, r - d(x, y)) \subseteq T(x, r) \ .$$

Поради произволноста на $y \in T(x, r)$, множеството $T(x, r)$ е отворено.
■

Пример 3.2.4. *Секој отворен интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ е отворено множество. Навистина, ако $x \in (a, b)$ е произволен и $r = \frac{1}{2} \inf \{|a - x|, |b - x|\}$, тогаш*

$$T(x, r) = (x - r, x + r) \subseteq (a, b). \qquad \blacklozenge$$

Дефиниција 3.2.5. *Ако за точка x во метрички простор (X, d) множеството U ја содржи точката x и некоја отворена топка со центар во x, тогаш U се нарекува* ***околина на точката x****.*

Отворената топка $T(x, \varepsilon)$ се нарекува ***$\varepsilon-$ околина на точката x****.*

Пример 3.2.6. *Секое едноелементно подмножество од дискретен метрички простор е отворено. Навистина, нека (X, d) е дискретен метрички простор и нека $x \in X$. За отворената топка $T(x, \frac{1}{2})$ важи*

$$T\left(x, \frac{1}{2}\right) = \left\{y \in X : d(y, x) < \frac{1}{2}\right\} = \{x\},$$

затоа што, ако $y \neq x$, тогаш $d(y, x) = 1 > \frac{1}{2}$. Поради теоремата 3.2.3, $\{x\}$ е отворено множество. Од произволноста на x, следува точноста на тврдењето. ♦

Пример 3.2.7. *Нека $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, и за $i = 1, \dots, n$, $\delta_i > 0$. Множеството*

$$P(x; \delta_1, \dots, \delta_n) = \{y = (y_1, \dots, y_n) : |x_i - y_i| < \delta_i, i = 1, \dots, n\}$$

ќе го нарекуваме ***отворен n-димензионален паралелопипед*** *со центар во x. Ако $\delta_1 = \dots = \delta_n = \delta$, тогаш $P(x; \delta, \dots, \delta)$ се означува со $P(x; \delta)$ и се нарекува* ***n-димензионална коцка со центар во*** *x.*

Јасно, ако $\delta_0 = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ *и* $\delta = \max\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, *тогаш*

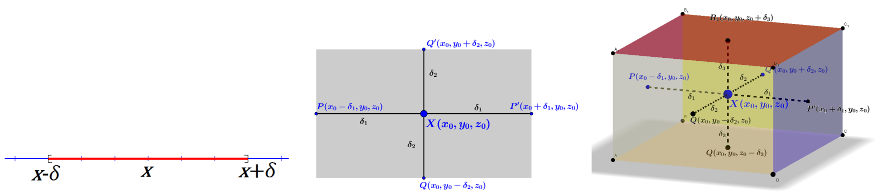
$$P(x; \delta_0) \subseteq P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n) \subseteq P(x; \delta).$$

За $n = 1$, $P(x; \delta)$ *е отворениот интервал* $(x - \delta, x + \delta)$.

За $n = 2$, $P(x; \delta_1, \delta_2)$ *е отворениот правоаголник со центар во* $x = (x_1, x_2)$ *и со страни паралелни со координатните оски и со должини* $2\delta_1$ *и* $2\delta_2$ *соодветно.*

За $n = 3$, $P(x; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ *е отворениот квадар со центар во* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *и со страни паралелни со координатните оски и со должини* $2\delta_1$, $2\delta_2$ *и* $2\delta_3$ *соодветно.*

Трите случаја се прикажани на цртежот 3.10.



(а) (б) (в)

Слика 3.10: Правоаголни околини во $\mathbb{E}^1$, $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{E}^3$.

Секој $n-$*димензионален паралелопипед* $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *ќе го викаме* ***правоаголна околина на точката*** x.

Се покажува дека секоја отворена топка во $\mathbb{E}^n$ *со центар во* x *содржи некоја правоаголна околина на таа точка и, истовремено, се содржи во некоја правоаголна околина на таа точка (видете ја задачата 3).*

За $n = 1$ *поимите за Евклидска и правоаголна околина се совпаѓаат. За* $n = 2$, *ова значи дека во секој круг може да се впише правоаголник* *со страни паралелни на координатните оски, а истовремено, во секој таков правоаголник може да се впише круг.*

Нека со τ_d ја означиме фамилијата од сите отворени множества во метричкиот простор (X, d), односно

$$\tau_d := \{O \subseteq X : O \text{ е отворено во } (X, d)\} .$$

Во следнава теорема се наведени најважните својства на фамилијата τ_d во однос операциите унија и пресек.

Теорема 3.2.8. *Нека (X, d) е метрички простор. За фамилијата τ_d точни се следниве тврдења:*

T_1) $\varnothing, X \in \tau_d$

T_2) $O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau_d$

T_3) $\{O_i : i \in I\} \subseteq \tau_d \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \tau_d$.

Доказ. T_1) следува директно од дефиницијата на отворено множество. За да го докажеме T_2) нека $O_1, O_2 \in \tau_d$ и $x \in O_1 \cap O_2$. Тогаш постојат $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, такви што $T(x, r_i) \subseteq O_i$, за $i = 1, 2$. Нека $r = \min\{r_1, r_2\}$. Тогаш $T(x, r) \subseteq O_1 \cap O_2$. За T_3), нека $\{O_i : i \in I\} \subseteq \tau_d$ и $x \in \bigcup\limits_{i\in I} O_i$. Тогаш постои $i_0 \in I$ за кое $x \in O_{i_0}$. Поради отвореноста на O_{i_0}, постои $r > 0$ такво што $T(x, r) \subseteq O_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.

■

Забелешка 3.2.9. *Фамилијата τ_d од сите отворени множества во метричкиот простор (X, d) се вика **тополошка структура** или **топологија** на просторот (X, d).*

Забелешка 3.2.10. *Ако d е псевдометрика на X, дефинираме топки и отворени множества исто како кај метричките простори. Формулацијата и доказот на теоремата 3.2.8 важат без промени и за псевдометрика d.*

Забелешка 3.2.11. *Теоремата 3.2.8 е повод поимот простор да се обопшти и да се дефинираат тополошки простори:* ***Тополошки простор е двоката*** (X, U) ***од множество*** X ***и множество*** U ***од подмножества од*** X ***за кои важат*** T_1, T_2 ***и*** T_3 ***од теоремата 3.2.8.*** *Множеството* U *се вика тополошка структура или топологија на просторот* (X, U)*, а нејзините членови отворени множества на тополошкиот простор* (X, U)*. Ако топологијата* U *од тополошкиот простор* (X, U) *може да се добие од некоја метрика на претходно опишаниот начин, тогаш велиме дека топологијата* U *е* ***метризабилна****, односно дека тополошкиот простор* (X, U) *е* ***метризабилен****.*

Пример 3.2.12. *Секое подмножество од дискретен метрички простор е отворено. Нека* (X, δ) *е дискретен метрички простор. Во примерот 3.2.6 покажавме дека за произволен* $x \in X$ *множеството* $\{x\}$ *е отворено. Сега, поради* $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ *и од својството* T_3) *во теоремата 3.2.8, следува точноста на тврдењето.* ◆

Забелешка 3.2.13. *Својството* T_2) *од теоремата 3.2.8 може со математичка индукција да се обопшти за конечен број множества:*

T_2' *Ако* $O_1, O_2, \ldots, O_n$ *се отворени множества (припаѓаат во* τ*), тогаш нивниот пресек* $O_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_n$ *е отворено множество, односно*

$$O_1, O_2, \ldots, O_n \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_n \in \tau\,.$$

Забелешка 3.2.14. *Во теоремата 3.2.8, индексното множество* I *во својството* T_3) *може да биде непребројливо.*

Во општ случај, пресек на бесконечно многу отворени множества не мора да биде отворено множество, што се гледа на следниов пример:

Пример 3.2.15. *За секој* $n \in \mathbb{N}$*, множеството* $O_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ *е отво-*

рено во $\mathbb{E}^1$. Но, нивниот пресек

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$$

не е отворено множество во $\mathbb{E}$. Навистина, за произволен $\varepsilon > 0$ имаме

$$T(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon) \nsubseteq \{0\}. \quad \blacklozenge$$

Пример 3.2.16. *Во $\mathbb{R}^n$ со Евклидовата метрика, $T(x, \frac{1}{m})$ е отворено множество за секој $m \in \mathbb{N}$, но $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} T(x, \frac{1}{m}) = \{x\}$ не е отворено во $\mathbb{R}^n$. Покажете!* ♦

Пример 3.2.17. *Просторите $\mathbb{R}^2$ со Евклидовата и Менхетн-метриката имаат исти отворени множества. Покажете!* ♦

Теорема 3.2.18. *Подмножество G од метричкиот простор (X, d) е отворено ако и само ако е унија од отворени топки.*

Доказ: Нека G е отворено множество. За секој $x \in G$ постои $r_x > 0$, за кој $T(x, r_x) \subseteq G$, од каде следува дека

$$G = \bigcup_{x\in G}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in G} T(x, r_x) \subseteq G\ .$$

Така, $G = \bigcup\limits_{x\in G} T(x, r_x)$, односно G е унија од отворени топки.

За обратната насока, нека $G = \bigcup\limits_{i\in I} T(x_i, r_i)$ е унија од отворени топки. Од теоремата 3.2.3, секоја од топките е отворено множество па од својството T_3) од теоремата 3.2.8, следува дека множеството G е отворено.

■

3.3 Затворени множества

Дефиниција 3.3.1. *Множество F е* ***затворено*** *во метричкиот простор (X, d) ако неговиот комплемент $X \setminus F$ е отворено множество во X.*

Пример 3.3.2. *Во еднодимензионалниот Евклидов простор множествата* $[a, b]$, $[a, +\infty)$ *и* $(-\infty, b]$ *се затворени множества. Навистина, соодветните комплементи на множествата се отворени множества:*

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)\,,$$

$$\mathbb{R} \setminus [a, \infty) = (-\infty, a)\,,$$

$$\mathbb{R} \setminus (-\infty, b] = (b, \infty)\ . \blacklozenge$$

Пример 3.3.3. $\mathbb{N}$ *е затворено во* $\mathbb{R}$. *Имено, комплементот на* $\mathbb{N}$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 1) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$$

е отворено множество како унија на отворени интервали. $\blacklozenge$

Пример 3.3.4. $\mathbb{Q}$ *не е затворено во* $\mathbb{R}$ *затоа што* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *не е отворено во* $\mathbb{R}$. *Имено, секоја околина на произволна точка* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *содржи бесконечно многу елементи од* $\mathbb{Q}$. $\blacklozenge$

Пример 3.3.5. *Секој полуотворен интервал од облик* $(a, b]$ *или* $[a, b)$, *каде што* $a < b$ *не е ниту отворено ниту затворено множество во* $\mathbb{R}$. *Навистина, множеството* $(a, b]$ *не е отворено бидејќи која било околина на точката* b *има непразен пресек со* $\mathbb{R} \setminus (a, b]$. *Исто така, множеството* $\mathbb{R} \setminus (a, b] = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$ *не е отворено, бидејќи не постои* $\varepsilon > 0$ *за кое ќе важи* $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus (a, b]$. $\blacklozenge$

Пример 3.3.6. *Секое множество во дискретен метрички простор е затворено. Навистина, нека* $A \subseteq X$ *е произволно. Од примерот 3.2.12, секое множество е отворено па и множеството* $X \setminus A$ *е отворено во* X. *Значи, множеството* $X \setminus (X \setminus A) = A$ *е затворено во* X. $\blacklozenge$

Теорема 3.3.7. *Секоја затворена топка е затворено множество. Навистина, нека* $T[a, r] = \{x \in X : d(a, x) \leqslant r\}$ *е затворена топка во*

(X,d). Ако $x \in X \setminus T[a,r]$, тогаш $d(a,x) = s > r$. Нека $y \in T(x, s-r)$, односно $d(x,y) < s - r$. Од $d(a,x) \leqslant d(a,y) + d(y,x)$, добиваме

$$d(a,y) \geqslant d(a,x) - d(x,y) > s - (s-r) = r,$$

од каде $y \in X \setminus T[a,r]$ и $T(x, s-r) \subseteq X \setminus T[a,r]$. Поради произволноста на x и на y, следува дека множеството $X \setminus T[a,r]$ е отворено во X, односно затворената топка $T[a,r]$ е затворено множество во X. ♦

Затворените множества имаат својства што се, на некој начин, дуални на својствата на отворените множества од теоремата 3.2.8.

Теорема 3.3.8. *Нека (X,d) е метрички простор. Фамилијата $\mathcal{F}$ од сите затворени множества во X ги има следниве својства:*

З$_1$) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$

З$_2$) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

З$_3$) $\{F_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$.

Доказ. Доволно е да се применат Де Моргановите закони на својствата од теоремата 3.2.8. Деталите ги оставаме на читателот.

■

Забелешка 3.3.9. *Бесконечна унија од затворени множества не мора да биде затворено множество. На пример, нека (X,d) е еднодимензионалниот Евклидов простор $\mathbb{E}$ и нека за секој $i \in \mathbb{N}$*

$$F_i = \left[\frac{1}{i}, +\infty\right) = \mathbb{R} \setminus \left(-\infty, \frac{1}{i}\right).$$

Јасно е дека сите F_i се затворени множества во $\mathbb{E}$, но нивната унија

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i = (0, +\infty)$$

не е затворено множество во $\mathbb{E}$.

3.4 Ограничени и тотално ограничени множества

Во дефиницијата 2.3.2 кажавме дека множество A во метрички простор (X,d) е ограничено ако и само ако има конечен дијаметар, односно ако постои $M > 0$ така што $d(x,y) \leqslant M$, $\forall x,y \in A$. Во спротивно, множеството е неограничено.

Теорема 3.4.1. *Множество A во метрички простор (X,d) е ограничено ако и само ако се содржи во топка со конечен радиус.*

Доказ. Нека A е ограничено множество во X, и нека $\mathrm{diam}A = M < \infty$. Фиксираме некој елемент $x_0 \in A$. За секој $x \in A$ важи $d(x_0,x) \leqslant M$, а тоа значи дека $A \subseteq T(x_0, M+1)$.

За обратната насока, нека $A \subseteq T(x_0,R)$, и $x,y \in A$ се произволни. Тогаш, $d(x,y) \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,y) < 2R$, односно $\mathrm{diam}A \leqslant 2R < \infty \Leftrightarrow A$ е ограничено множество во X.

■

Пример 3.4.2. *Да го разгледаме $\mathbb{R}^+$ со метрика $d(a,b) = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right|$. Ќе покажеме дека во просторот $(\mathbb{R}^+, d)$*
$i)$ $\mathbb{N}$ е ограничено множество и
$ii)$ множеството $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ е неограничено.
Навистина, за $i)$ имаме дека за произволен $n \in \mathbb{N}$ важи

$$d(1,n) = 1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq T(1,1) \Rightarrow \mathbb{N} \text{ е ограничено во } (\mathbb{R}^+, d).$$

$ii)$ За произволен $n \in \mathbb{N}$ важи $d(1, \frac{1}{n}) = n - 1$ од каде што добиваме дека $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\mathrm{diam}A \geqslant n - 1 \Rightarrow \mathrm{diam}A = \infty$, односно A е неограничено во $\mathbb{R}^+$.♦

Дефиниција 3.4.3. *Нека (X, d) е метрички простор и нека $\varepsilon > 0$ е некој позитивен број. Множеството $N_\varepsilon = \{x_i : i \in I\} \subseteq X$ за кое важи*

$$(\forall y \in X)(\exists i_y \in I) \quad d(x, x_{i_y}) < \varepsilon$$

се нарекува ***ε-мрежа*** *во (X, d).*

Дефиниција 3.4.4. *За метричкиот простор (X, d) велиме дека е* ***тотално ограничен*** *ако за секој $\varepsilon > 0$, постои конечна ε-мрежа на X. Ова значи дека $\forall \varepsilon > 0$, постои $n \in \mathbb{N}$ и елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ така што $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i, \varepsilon)$.*

Подмножество A од метричкиот простор (X, d) велиме дека е ***тотално ограничено*** *ако за секој $\varepsilon > 0$, постојат конечно многу елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ така што $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i, \varepsilon)$.*

Симболички запишано, $A \subseteq X$ е тотално ограничено ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in X) \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i, \varepsilon)\,.$$

Пример 3.4.5. *n-димензионална коцка $P(0, a), 0 = (0, \cdots, 0)\,, a > 0$ е тотално ограничено множество.*
Навистина, нека $P(0, a)$ е n-димензионална коцка, нека $\epsilon > 0$ и нека k е најмалиот природен број поголем од $\frac{a\sqrt{n}}{\epsilon}$. Го делиме сегментот $[-a, a]$ на $2k$ еднакви сегменти:

$$I(i) = \left[\frac{a}{k}(i-1), \frac{a}{k}i\right], i \in \{-k+1, -k+2, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, k\}\,.$$

Коцките

$$I(i_1) \times \cdots \times I(i_n), i_j \in \{-k+1, -k+2, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, k\}$$

прават конечна покривка на $P(0,a)$ а според задачата 3 добиваме

$$diam(I(i_1)\times\cdots\times I(i_n)) = \frac{a\sqrt{n}}{k} < \epsilon.$$

Така,добиена е конечна покривка за $P(0,a)$ чии членови се сите со дијаметар помал од ϵ. ◆

Теорема 3.4.6. *Нека (X,d) е метрички простор и $A \subseteq X$. Множество A е тотално ограничено во (X,d) ако и само ако A е тотално ограничен простор во однос на метриката наследена од метриката d.*

Доказ. Нека е даден $\varepsilon > 0$ и множеството A е тотално ограничено во (X,d). Значи, постојат $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ така што $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Без губење на општоста, можеме да претпоставиме дека за секој $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ постои $a_i \in A \cap T\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \varnothing$, (ако за некој $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ важи $A \cap T\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varnothing$,тогаш од унијата може да ја отстраниме отворената топка $T\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$). Според тоа, за секој $a \in A$ постои $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ за кој $a \in T\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. За конкретните a и a_k имаме

$$d(a,a_k) \leqslant d(a,x_k) + d(x_k,a_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значи $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ е конечна ε-мрежа на множеството A. Од произволноста на ε добиваме дека A е тотално ограничен простор како потпростор на (X,d). Обратното тврдење е очигледно.

■

Теорема 3.4.7. *Секое тотално ограничено множество во метрички простор (X,d) е ограничено.*

Доказ. Нека $A \subseteq X$ е тотално ограничено множество. Јасно е дека ако $A = \varnothing$, тогаш A е ограничено. Нека $A \neq \varnothing$ и нека $\varepsilon > 0$ е даден фиксен број. Тоа значи дека постојат $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ за кои $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T(a_i, \varepsilon)$.

Нека R е најголемиот од броевите $d(a_1, a_i) + \varepsilon; 1 \leqslant i \leqslant n$. За секој $a \in A$, постои $k \in \{1, \ldots, n\}$, така што $a \in T(a_k, \varepsilon)$. Тогаш,

$$d(a_1, a) \leqslant d(a_1, a_k) + d(a_k, a) < R.$$

Следува дека $a \in T(a_1, R), \forall a \in A$, односно $A \subseteq T(a_1, R)$.

■

Обратното тврдење во теоремата 3.4.7 не мора да важи. Ова ќе го илустрираме со следниов пример:

Пример 3.4.8. *Нека (X, d) е дискретен метрички простор и X е бесконечно множество. Тогаш, X е ограничено ($\sup\limits_{x,y \in X} d(x, y) = 1$), но не е тотално ограничено. Имено, за $\varepsilon < 1, T(x, \varepsilon) = \{x\}$, па за конечно подмножество $F \subseteq X$, имаме $\bigcup\limits_{x \in F} T(x, \varepsilon) = F \neq X$.* ♦

Ако $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е подмножество од Евклидскиот простор, тогаш и обратното тврдење на теоремата 3.4.7 ќе важи:

Теорема 3.4.9. *Секое ограничено подмножество A од Евклидскиот простор $\mathbb{R}^n$ е тотално ограничено.*

Доказ. Нека A е ограничено подмножество од Евклидскиот простор $\mathbb{R}^n$. Јасно е дека и множеството $A \cup \{0\}$ е ограничено, па постои реален број $a = diam\,(A \cup \{0\})\,, 0 = (0, \ldots, 0)$. Нека $P(0, a)$ е n-димензионалната коцка со страна $2a$:

$$P(0, a) = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i - 0| \leqslant a\} =$$

$$= \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leqslant a\}\,.$$

Од примерот 3.4.5 видовме дека $P(0, a)$ е тотално ограничено множество. Множеството A е подмножество од $P(0, a)$. Навистина, нека $x \in A, x =$

$(x_1, \cdots, x_n)$, тогаш

$$|x_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = d\,(x, 0) \leqslant diam\,(A \cup \{0\}) = a, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\,,$$

па следува дека $x = (x_1, \cdots, x_n) \in P\,(0, a)$. а од теоремата 3.4.6 следува дека и множеството $A \subseteq P\,(0, a)$ е тотално ограничено.

■

3.5 Отворени и затворени множества во потпростори

Структурата на отворените (затворените) топки во метрички потпростори може многу едноставно да се опише преку отворените (затворените) топки во соодветните натпростори.

Теорема 3.5.1. *Нека (X, d_X) е метрички простор и нека (Y, d_Y) е негов потпростор. Отворена (затворена) топка во Y е пресек на Y и на отворена (затворена) топка во X. Значи, за $a \in Y \subseteq X$ и $r > 0$*

$$T_Y(a, r) = T_X(a, r) \cap Y \qquad (T_Y[a, r] = T_X[a, r] \cap Y).$$

Доказ. За произволни $a \in Y$ и $r > 0$, имаме

$$\begin{aligned} T_Y(a, r) &= \{x \in Y : d_Y(a, x) < r\} \\ &= \{x \in X : d_X(a, x) < r\} \cap Y \\ &= T_X(a, r) \cap Y. \end{aligned}$$

Тврдењето се докажува аналогно за затворените топки.

■

Отворените (затворените) топки во потпростор на некој познат простор може да бидат различни и со поинаков облик од отворените (затворените) топки со ист центар и радиус во оригиналниот простор.

Пример 3.5.2. *Да го разгледаме* $A = [0,3]\bigcup\{5\}$ *како потпростор од реалната права. Тогаш,*

$$T_{\mathbb{R}}(1,1) = (0,2), \quad T_A(1,1) = (0,2)$$
$$T_{\mathbb{R}}(1,2) = (-1,3), \quad T_A(1,2) = [0,3)$$
$$T_{\mathbb{R}}(1,3) = (-2,4), \quad T_A(1,3) = [0,3]$$
$$T_{\mathbb{R}}(3,1) = (2,4), \quad T_A(1,3) = (2,3]$$
$$T_{\mathbb{R}}(5,1) = (4,6), \quad T_A(5,1) = \{5\}$$
$$T_{\mathbb{R}}(5,3) = (2,8), \quad T_A(5,3) = (2,3] \cup \{5\}. \ \blacklozenge$$

Аналогна е и врската меѓу отворените (затворените) множествата во (X, d_X) и (Y, d_Y) . Таа е дадена во следнава теорема.

Теорема 3.5.3. *Нека* (X, d_X) *е метрички простор и* (Y, d_Y) *е негов потпростор. Множество* $G_1 \subseteq Y$ *е отворено во* Y *ако и само ако постои отворено множество* G *во* X *такво што* $G \cap Y = G_1$. *Аналогно, множество* $F_1 \subseteq Y$ *е затворено во* Y *ако и само ако постои затворено множество* F *во* X *такво што* $F \cap Y = F_1$.

Доказ. Нека $T_Y(a, r_a) = \{y \in Y : d(a, y) < r_a\}$ и $T_X(a, r_a) = \{x \in X : d(a, x) < r_a\}$ се отворени топки со центар во a и радиус r_a во Y и во X соодветно. Од теоремата 3.5.1, имаме $T_Y(a, r_a) = T_X(a, r_a) \cap Y$. Ако G_1 е отворено множество во Y, тогаш

$$G_1 = \bigcup_{a \in G_1} T_Y(a, r_a) = \bigcup_{a \in G_1} (T_X(a, r_a) \cap Y) = (\bigcup_{a \in G_1} T_X(a, r_a)) \cap Y = G \cap Y.$$

при што $G = \bigcup_{a \in G_1} T_X(a, r_a)$ е отворено множество во X.

Сега, нека множеството $F_1 \subseteq Y$ е затворено во Y. Множеството $Y \setminus F_1 = G_1$ е отворено во Y и постои отворено множество G во X за кое $G_1 = G \cap Y$. Множеството $F = X \setminus G$ е затворено во X. Ако ја искористиме дефиницијата за затворено множество и Де Моргановите закони, добиваме:

$$\begin{aligned} F_1 &= Y \setminus G_1 = (X \setminus G_1) \cap Y \\ &= (X \setminus (G \cap Y)) \cap Y \\ &= ((X \setminus G) \cup (X \setminus Y)) \cap Y \\ &= (F \cap Y) \cup ((X \setminus Y) \cap Y) \\ &= (F \cap Y) \cup \varnothing \\ &= F \cap Y. \end{aligned}$$

■

3.6 Отворени и затворени множества во нормиран векторски простор

Нормираните векторски простори се карактеризираат со убава структура што е резултат на својствата на алгебарската операција дефинирана во нив. Тоа многу ги поедноставува разгледувањата во овие метрички простори.

Дефиниција 3.6.1. *Нека X е нормиран векторски простор и $A \subseteq X$. Велиме дека A е* ***конвексно*** *множество ако и само ако*

$$(\forall a, b \in A)(\forall \lambda \in [0,1]) \Rightarrow ((1-\lambda)a + \lambda b \in A). \tag{3.2}$$

Теорема 3.6.2. *Нека X е нормиран векторски простор, $a \in X$ и $r > 0$. Тогаш,*

1) $T(a,r) = rT(o,1) + a = \{x + a : x \in T(o,1)\}$;
2) $T[a,r] = rT[o,1] + a = \{x + a : x \in T[o,1]\}$; *и*
3) $T(a,r)$ *и* $T[a,r]$ *се конвексни множества.*

Доказ. 1) $x \in rT(o,1) + a \Leftrightarrow x - a \in rT(o,1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{r}(x-a) \in T(o,1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\| \frac{1}{r}(x-a) - o \right\| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{r}\|x-a\| < 1 \Leftrightarrow \|x-a\| < r \quad \Leftrightarrow x \in T(a,r).$$

2) Се докажува слично како 1) со смена на знакот „$<$ ” во „$\leqslant$ ”.

3) Нека $x, y \in T(a,r)$. Тогаш, $\|x-a\| < r$, $\|y-a\| < r$ и за секој $\lambda \in [0,1]$ имаме:

$$\begin{aligned}
\|((1-\lambda)x + \lambda y) - a\| &= \|(1-\lambda)x + \lambda y - (1-\lambda)a - \lambda a\| \\
&\leqslant \|(1-\lambda)x + (1-\lambda)a\| + \|\lambda y - \lambda a\| \\
&= (1-\lambda)\|x-a\| + \lambda\|y-a\| \\
&< (1-\lambda)r + \lambda r = r.
\end{aligned}$$

■

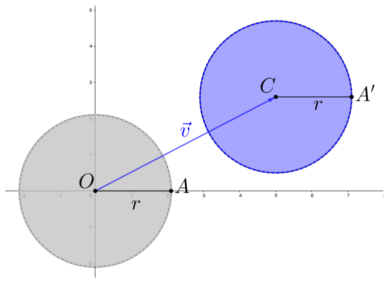
Од теоремата 3.6.2, заклучуваме дека отворените и затворените топки во нормиран векторски простор се конвексни множества што имаат ист облик, т.е. се слични една на друга. Секоја отворена топка со радиус r може да се добие со транслација на која било друга отворена топка со истиот радиус или со хомотетија на топка со различен радиус.

Така, ако $T(a,r)$ и $T(b,r)$ се отворени топки со радиус r во нормиран векторски простор, тогаш $T(b,r)$ се добива со транслација за вектор $(b-a)$ на $T(a,r)$, односно

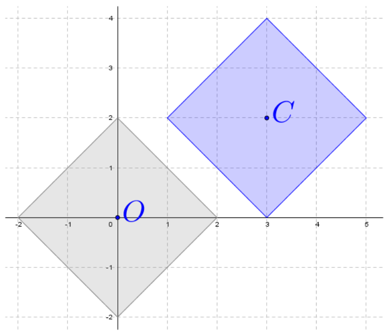
$$T(b,r) = T(a,r) + (b-a)\,.$$

Специјално, топката $T(a,r)$ се добива со транслација за векторот a на топката $T(0,r)$ (видете ги сликите 3.11, 3.12 и 3.13).

Топките со различни радиуси не се складни, но се слични. Така, топката $T(a,r_1)$ се добива со хомотетија на топката $T(a,r_2)$ со центар во a и коефициент $k = \dfrac{r_2}{r_1}$.



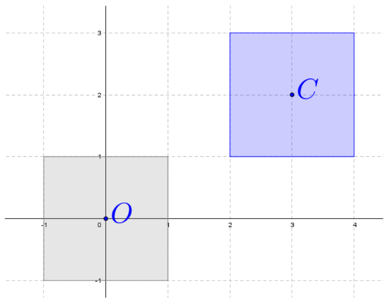
Слика 3.11: Отворени топки со еднакви радиуси во $\mathbb{E}^2$



Слика 3.12: Отворени топки со еднакви радиуси во $(\mathbb{R}^2, d_1)$

Тврдењето 1) од теоремата 3.6.2 можеме да го прочитаме на следниов начин: секоја отворена топка во нормиран простор може да се добие со хомотетија и транслација на единичната отворена топка во тој простор.

Ова значи дека ако добро се проучат отворените топки со центар во нулата, или дури само единичната топка, ќе знаеме сè што е потребно за отворените топки во целиот нормиран простор. Истото важи и за затворените топки.



Слика 3.13: Отворени топки со еднакви радиуси во $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$

3.7 Задачи за самостојна работа

1. Покажете дека ако $r_1 < r_2$, тогаш $T(x, r_1) \subseteq T(x, r_2)$.

2. Нека (X, d) е метрички простор, $a, z \in X$ и $r, s > 0$. Покажете дека

   i) $\operatorname{diam} T(a, r) \leqslant 2r$;

   ii) $\operatorname{diam} T[a, r] \leqslant 2r$;

   iii) Ако $z \in T(a, r)$, тогаш $T(a, s) \subseteq T(z, r + s)$ и

   iv) Ако $z \in T[a, r]$, тогаш $T[a, s] \subseteq T[z, r + s]$.

3. Докажете ги следниве тврдења:

   а) Секоја отворена топка со центар во x во Евклидскиот простор $\mathbb{R}^n$ содржи некоја правоаголна околина со центар во x и се содржи во некоја правоаголна околина на x.

   б) Секоја правоаголна околина со центар во x содржи некоја отворена топка со центар во x и се содржи во некоја отворена топка со центар во x.

   (Помош: Докажете дека за секои $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ важат неравенствата:

$$P(x, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \subseteq T(x, \varepsilon) \subseteq P(x, \varepsilon) \subseteq T(x, \varepsilon\sqrt{n}).)$$

в) Пресметајте го дијаметарот на правоаголна коцка $P(0,a)$ со страна $2a$ и центар во координатниот почеток во Евклидскиот простор $\mathbb{R}^n$.

4. Докажете дека во $\mathbb{E}$ множествата $(a,+\infty)$ и $(-\infty,a)$ се отворени множества.

5. Докажете дека во $\mathbb{E}^2$ интервалот (a,b) на x - оската не е отворено множество.

6. Докажете дека квадратот $\{a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2 : a_1,a_2\in(0,1)\}$ е отворено множество во $\mathbb{R}^2$ со Евклидска метрика.

7. Да го разгледаме $\mathbb{R}^2$ со метриката $d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$. Докажете дека множеството $\{x\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2<1\}$ е отворено во $\mathbb{R}^2$ со оваа метрика.

8. За секои $x,y\in\mathbb{R}^3$ дефинираме

$$d(x,y)=\max\left\{|x_1-y_1|,\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}\right\}.$$

   Покажете дека d е метрика на $\mathbb{R}^3$ и опишете ја единичната отворена топка $T(o,1)$, каде што $o=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$.

9. Најдете пример во $\mathbb{R}^2$ во кој бесконечен пресек на отворени множества не е отворено множество.

10. Покажете дека во секој метрички простор X, за произволен $x\in X$, множеството $X\setminus\{x\}$ е отворено во X.

11. Ако $\{x\}$ е отворено множество во X, $\forall x\in X$, тогаш и сите подмножества од X се отворени во X.

12. Покажете дека секое подмножество од дискретен метрички простор е отворено.

13. Најдете множество во $\mathbb{R}$ кое во однос на Евклидовата метрика:

i) не е ниту отворено ниту затворено,

ii) е и отворено и затворено.

14. Докажете дека секоја затворена топка е затворено множество.

15. Докажете дека секое конечно множество е затворено.

16. Докажете дека секоја сфера е затворено множество.

17. Докажете дека множеството од сите непрекинати функции за кои важи $|f| < K$, за некој реален број K, е отворено множество во просторот $C_{[a,b]}$ со супремум-метриката.

18. Покажете дека секое подмножество од метрички простор е пресек на отворени множества.

19. Нека $A = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in \mathbb{R}, x > 0\right\}$ и $B = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ се две множества во Евклидската рамнина $\mathbb{R}^2$. Покажете дека A и B се затворени дисјунктни множества и $d(A, B) = 0$.

20. Нека (X, d) е метрички простор и $Y \subseteq X$ е негов потпростор. Покажете дека ако Y е отворено во X и ако U е отворено во Y, тогаш U е отворено во X .

21. Нека $X = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1, |x_2| < 1\right\}$ е потпростор од Евклидскиот простор $\mathbb{R}^2$. Определете ја и скицирајте ја отворената топка $T_X\left((x_1, x_2), \dfrac{3}{2}\right)$, за различни $(x_1, x_2) \in X$.

22. Нека $X = \mathbb{R}^2$ со Евклидската метрика и $Y = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 < 1, x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1\}$ е потпростор од X. Скицирајте ја отворената топка $T_Y((1, 0), \sqrt{2})$.

23. Нека (X, d) е метрички простор и Y потпростор од X. Докажете дека:
$i)$ Отворено множество во Y е истовремено отворено и во X ако и само ако Y е отворено во X.

$ii)$ Затворено множество во Y е затворено и во X ако и само ако Y е затворено во X.

24. Нека X е нормиран векторски простор и $A \subseteq X$. Нека $a \in A$ и $r > 0$. Тогаш,
$$T_A(a, r) = (rT_X(o, 1) + a) \cap A.$$
Ако $X = \mathbb{R}^2, \;\; A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant 0\right\} \cup \{(0, -1)\}$, определете ги $T_A((0, -1), 1)$ и $T_A[(0, -1), 1]$.

25. Покажете дека ортогоналната проекција на отворен паралелопипед во $\mathbb{R}^3$ на рамнината xOy е отворено множество во $\mathbb{R}^2$ (отворен правоаголник).

26. Нека (X, d) е метрички простор, $x \in X$ и $r, s \in \mathbb{R}$ така што $0 < r < s$. Покажете дека множеството $\{y : y \in X, \; r < d(x, y) < s\}$ е отворено во X.

27. Нека (X, d) е метрички простор и $Y \subset X$. Покажете дека следниве тврдења се еквивалентни:
1) Y е ограничено множество.
2) Y е содржано во топка.
3) $\{d(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in Y\}$ е ограничено во $\mathbb{R}$.

28. Докажете го следното тврдење: Нека X е метрички простор и $A \subset X$. Тогаш, $a \in \overline{A}$ ако и само ако секоја отворена топка $T(a, \epsilon)$ содржи точка од A.

Глава 4

Адхерентно множество, внатрешност и раб на множество

Во понатамошниот текст на ова поглавје ќе претпоставуваме дека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq X$ е некое произволно множество.

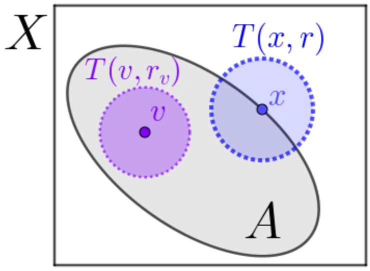
4.1 Адхерентна точка. Затворач на множество

Дефиниција 4.1.1. *Велиме дека точка $x \in X$ е* ***адхерентна (блиска)*** *точка за множеството A ако*

$$(\forall r > 0) \qquad T(x, r) \cap A \neq \varnothing \, .$$

Дефиницијата 4.1.1 може да се формулира и на следниот начин:

$$\overline{A} \stackrel{def}{=} \{x \in X : \forall r > 0, \exists a \in A, d\,(x, a) < r\} \, .$$



Слика 4.1: Адхерентни точки на множеството A.

Множеството од адхерентни точки за множеството A се вика ***адхеренција (затворач)*** *на множеството A и се означува со $\overline{A}$.*

Теорема 4.1.2. *Точка $a \in X$ е адхерентна точка за множеството A ако и само ако $d(a, A) = 0$.*

Доказ. *Нека $a \in X$, тогаш*

$$\begin{aligned} a \in \overline{A} &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \quad T(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists a_\varepsilon \in A) \quad 0 \leqslant d(a, a_\varepsilon) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 0 = \inf_{a_\varepsilon \in A} d(a, a_\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow d(a, A) = 0\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 4.1.3. *Ако $A \subseteq X$, тогаш $A \subseteq \overline{A}$.*

Доказ. Нека $a \in A$ и $r > 0$ се произволни. Тогаш, $a \in T(a, r) \cap A \neq \varnothing$, па следува дека $a \in \overline{A}$. $\blacksquare$

Забелешка 4.1.4. *Обратната инклузија не мора да важи, односно адхерентна точка за A не мора да му припаѓа на множеството A. На пример, ако $A = (a, b]$, тогаш во $\mathbb{E}$ важи дека $a \in \overline{A} \setminus A$.*

Пример 4.1.5. *Во метричкиот простор* $\mathbb{E}$ *нека* $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. *Ќе покажеме дека*

$$\overline{A} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\},$$

односно дека нулата е адхерентна точка за множеството A.
Нека $\varepsilon > 0$ *е произволно и* n_0 *е најмалиот природен број што е поголем од* $\frac{1}{\varepsilon}$. *Тогаш,* $\forall n \geqslant n_0$, *имаме*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

односно $\frac{1}{n} \in T(0, \varepsilon) \cap A, \forall n \geqslant n_0$.♦

Пример 4.1.6. *Од дефиницијата за адхерентна точка следува дека:*

$$\overline{\varnothing} = \varnothing \qquad \text{и} \qquad \overline{X} = X. \tag{4.1}$$

Навистина, нека $x \in X$ *е произволно. Тогаш, за кое било* $r > 0$ *важи:*

$$T(x, r) \cap \varnothing = \varnothing,$$

$$T(x, r) \cap X = T(x, r) \neq \varnothing.$$

Така,

$$\overline{\varnothing} = \{x \in X : \forall r > 0, T(x, r) \cap \varnothing \neq \varnothing\} = \varnothing.$$

и

$$\overline{X} = \{x \in X : \forall r > 0, T(x, r) \cap X \neq \varnothing\} = X.♦$$

Пример 4.1.7. *Во* $\mathbb{E}$, *секој реален број е адхерентна точка на множеството* $\mathbb{Q}$, *односно* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.♦

Името затворач на множество не е случајно избрано. Всушност, затворачот на множество A е најмалото затворено надмножество на A.

Теорема 4.1.8. *$\overline{A}$ е затворено множество. Уште повеќе,*

$$\overline{A} = \cap\{F : A \subseteq F \text{ и } F \text{ е затворено}\} \ . \tag{4.2}$$

Доказ. Ќе покажеме дека множеството $X \setminus \overline{A}$ е отворено. Нека $x \notin \overline{A}$. Значи, постои $r > 0$ такво што $T(x, r) \cap A = \varnothing$. Тврдиме дека $T(x, r) \subseteq X \setminus \overline{A}$. Да го претпоставиме спротивното, дека постои $x_0 \in T(x, r) \cap \overline{A}$. Поради отвореноста на $T(x, r)$, постои $\rho > 0$ такво што $T(x_0, \rho) \subseteq T(x, r)$. Исто така, од $x_0 \in \overline{A} \Rightarrow T(x_0, \rho) \cap A \neq \varnothing$. Но, тогаш би добиле дека

$$\varnothing = T(x, r) \cap A \supseteq T(x_0, \rho) \cap A \neq \varnothing \ .$$

што не е можно. Покажавме дека $T(x, r) \subseteq X \setminus \overline{A}$. Значи, $\overline{A}$ е затворено во X.

Нека F е затворено множество и $A \subseteq F$. Да претпоставиме дека постои $x \in \overline{A} \setminus F$, а бидејќи $\overline{A} \setminus F \subseteq X \setminus F$, би добиле дека $x \in X \setminus F$. Бидејќи $X \setminus F$ е отворено, тоа би значело дека постои $r > 0$ за кое $T(x, r) \subseteq X \setminus F$. Од $A \subseteq F \Leftrightarrow X \setminus F \subseteq X \setminus A$ би добиле дека $T(x, r) \subseteq X \setminus A$, т.е. $T(x, r) \cap A = \varnothing$. Но, последното не е можно затоа што е во противречност со претпоставката дека $x \in \overline{A}$. Значи, $\overline{A} \setminus F = \varnothing \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq F$ за секое затворено множество F за кое $A \subseteq F$.

■

Пример 4.1.9. *Нека $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leqslant 1$. Затворачот на множеството A е $\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.* ♦

Последица 4.1.10. *При подредувањето во однос на инклузијата, $\overline{A}$ е најмалото затворено множество што го содржи A. Тоа значи дека ако F е затворено множество и $A \subseteq F$, тогаш $A \subseteq \overline{A} \subseteq F$.*

■

Последица 4.1.11. *а) Множеството A е затворено ако и само ако $A = \overline{A}$.*

б) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

в) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

г) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Доказ.

а) Од теоремата 4.1.3 добиваме дека $A \subseteq \overline{A}$. За обратното тврдење, нека A е затворено множество. Од $A \subseteq A$ и од теоремата 4.1.8 добиваме дека $\overline{A} \subseteq A$.

б) Множеството $\overline{A}$ е затворено множество. Затоа $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

в) Нека $A \subseteq B$. Ќе покажеме дека $X \setminus \overline{B} \subseteq X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Нека $x \in X \setminus \overline{B} \Leftrightarrow x \notin \overline{B}$. Значи, постои $r > 0$ за кој

$$\varnothing = T(x,r) \cap B \supseteq T(x,r) \cap A$$

што значи $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in X \setminus \overline{A}$. Од произволноста на x, следува дека $X \setminus \overline{B} \subseteq X \setminus \overline{A}$.

г) $\overline{A} \cup \overline{B}$ е затворено надмножество на $A \cup B$. Според Теоремата 4.1.8 имаме дека $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Од друга срана, поради в)

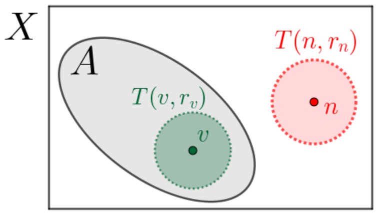
$$\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \quad \text{и} \quad \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}\,,$$

од каде што

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}\,.$$

■

Дефиниција 4.1.12. *Велиме дека подмножество A од метрички простор (X, d) е* ***густо*** *во X ако $\overline{A} = X$.*



Слика 4.2: Точката $v \in A$ е во внатрешноста, а точката $n \notin A$ е во надворешноста на множеството A.

4.2 Внатрешни точки. Внатрешност и надворешност на множество

Дефиниција 4.2.1. *Велиме дека точка $x \in A$ е* ***внатрешна*** *точка за множеството A ако постои $r > 0$ така што $T(x,r) \subseteq A$.*

Множеството од сите внатрешни точки за множеството A се вика ***внатрешност*** *на A и се означува со $\mathrm{int}_X A$ или $\mathrm{int}A$.*

Надворешност *на множеството A е внатрешноста на комплементот $X \setminus A$. Надворешноста се означува со $\mathrm{ext}_X(A)$ или $\mathrm{ext}A$. Значи,*

$$\mathrm{ext}(A) := \mathrm{int}(X \setminus A)\ .$$

Забелешка 4.2.2. *Јасно е дека $\mathrm{int}(A) \subseteq A$.*

Теорема 4.2.3. *Точни се следниве равенства:*

i) $\mathrm{int}(A) = \{x \in X : d(x, X \setminus A) > 0\}$;

ii) $\mathrm{ext}(A) = \{x \in X : d(x, A) > 0\}$.

Доказ. *i)* $x \in \mathrm{int}(A) \Leftrightarrow (\exists r_x > 0) T(x, r_x) \subseteq A \Leftrightarrow d(x, X \setminus A) \geqslant r_x > 0\,.$

ii) Доказот му се остава на читателот за вежба.

■

Внатрешноста може да се разгледува како дуален поим на затворачот. Точна е следнава теорема што е аналогна на теоремата 4.1.8.

Теорема 4.2.4. $\mathrm{int}(A)$ *е отворено множество. Уште повеќе,*

$$\mathrm{int}(A) = \cup\{V \subseteq X : V \subseteq A \wedge V \textit{е отворено}\}. \tag{4.3}$$

Доказ. Ако $x \in \mathrm{int}(A)$, тогаш постои $r_x > 0$ таков што $T(x, r_x) \subseteq A$. Секоја отворена топка е отворено множество, па за секој $z \in T(x, r_x)$, $T(z, r_x - d(x, z)) \subseteq T(x, r_x) \subseteq A$ од каде $z \in \mathrm{int}(A)$. Од произволноста на $z \in T(x, r_x)$ следува дека $T(x, r_x) \subseteq \mathrm{int}(A)$. Значи, $\mathrm{int}(A)$ е отворено.

Нека V е отворено множество и $V \subseteq A$. Сега, $(\forall x \in V)(\exists r_x > 0)$ таков што $T(x, r_x) \subseteq V \subseteq A$, т.е. $x \in \mathrm{int}(A)$. Значи, $V \subseteq \mathrm{int}(A)$. Бидејќи множеството V беше произволно избрано, важи

$$\cup\{V \subseteq X : V \subseteq A \wedge V \text{е отворено}\} \subseteq \mathrm{int}(A).$$

Обратната насока следува од тоа што $\mathrm{int}(A)$ е отворено па

$$\mathrm{int}(A) \subseteq \cup\{V \subseteq X : V \subseteq A \wedge V \text{е отворено}\}\,.$$

Равенката (4.3) ни кажува дека внатрешноста на едно множество е неговото најголемо отворено подмножество во однос на инклузијата.

■

Следнава последица е аналогна на последицата 4.1.11 и ги дава основните својства на поимот внатрешност на множество.

Последица 4.2.5. *i) Множество A е отворено ако и само ако* $A = \mathrm{int}(A)$.

ii) $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$.

iii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$.

iv) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$.

Доказ. *i*) следува директно од теоремата 4.2.4.

ii) $\mathrm{int}(A)$ е отворено множество. Од *i*), $\mathrm{int}(A) = \mathrm{int}(\mathrm{int}(A))$.

iii) Нека $A \subseteq B$ и $x \in \mathrm{int}(A)$. Тогаш постои $r > 0$ за кој $T(x,r) \subseteq A \subseteq B$, што значи дека $x \in \mathrm{int}(B)$.

iv) Бидејќи $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$, од *iii*), имаме

$$\mathrm{int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}(A) \quad \text{и} \quad \mathrm{int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}(B)$$

што повлекува дека $\mathrm{int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$.

За обратната насока, $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$ е отворено множество и

$$\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) \subseteq \mathrm{int}(A) \subseteq A, \quad \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) \subseteq \mathrm{int}(B) \subseteq B$$

од каде што следува дека $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) \subseteq A \cap B$. Од теоремата 4.2.4 имаме дека

$$\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) \subseteq \mathrm{int}(A \cap B) .$$

■

Теорема 4.2.6. *Докажете дека важат равенствата:*

1) $\overline{A} = X \setminus (\mathrm{int}(X \setminus A))$.

2) $\mathrm{int}A = X \setminus \left(\overline{X \setminus A}\right)$.

Доказ. 1) Бидејќи множеството $\mathrm{int}(X \setminus A)$ е отворено, следува дека множеството $X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A)$ е затворено и $A = X \setminus (X \setminus A) \subseteq X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A)$. Од теоремата 4.1.8, добиваме дека

$$\overline{A} \subseteq X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A). \tag{4.4}$$

Обратно, $X \setminus \overline{A}$ е отворено множество. Од $A \subseteq \overline{A}$, добиваме $X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A$. Поради теорема 4.2.4, $X \setminus \overline{A} \subseteq \mathrm{int}(X \setminus A)$ па за комплементите важи

$$X \setminus \mathrm{int}\,(X \setminus A) \subseteq X \setminus \left(X \setminus \overline{A}\right) = \overline{A}. \tag{4.5}$$

Од (4.4) и (4.5) следува равенството што требаше да се докаже.
2) Доказот се остава на читателот како вежба.

■

4.3 Точки на натрупување, изводно множество

Дефиниција 4.3.1. *Велиме дека точката $x \in X$ е* ***точка на натрупување*** *за множеството A ако $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, односно*

$$(\forall r > 0) \qquad T(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing \,. \tag{4.6}$$

Множеството од сите точки на натрупување за множеството A се вика ***изводно множество*** *на множеството A и се означува со A' или со A'_X, ако е потребно да се нагласи просторот.*

Теорема 4.3.2. *Точката $x \in X$ е точка на натрупување за множеството A ако и само ако $d(x, A \setminus \{x\}) = 0$.*

Доказ. Тврдењето следува директно од дефиницијата за точка на натрупување и од теоремата 4.1.2.

$\blacksquare$

Пример 4.3.3. *Единствената точка на натрупување за множеството $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ во $\mathbb{R}$ е 0 што не припаѓа во A.*$\blacklozenge$

Пример 4.3.4. *Секоја точка од $\mathbb{R}$ е точка на натрупување за множеството $\mathbb{Q}$, односно $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.*$\blacklozenge$

Теорема 4.3.5. *Ако $A \subseteq B \subseteq X$, тогаш $A' \subseteq B'$.*

Доказ. *Ако $x \in A'$, тогаш $d(x, A \setminus \{x\}) = 0$. Бидејќи $A \setminus \{x\} \subseteq B \setminus \{x\}$, следува $0 \leqslant d(x, B \setminus \{x\}) \leqslant d(x, A \setminus \{x\}) = 0$, од каде што добиваме $d(x, B \setminus \{x\}) = 0$, односно $x \in B'$.*

$\blacksquare$

Теорема 4.3.6. *а) $\overline{A} = A \cup A'$;*
б) A е затворено ако и само ако $A' \subseteq A$.

Доказ. а) Ако $x \in A'$, тогаш за секој $r > 0$, $\varnothing \neq T(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \subseteq T(x,r) \cap A$ од каде што $x \in \overline{A}$. Значи, $A' \subseteq \overline{A}$ што заедно со $A \subseteq \overline{A}$ (од теоремата 4.1.3) ни дава $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

За обратната инклузија, ако $x \in \overline{A}$, тогаш за секој $r > 0$ важи $T(x,r) \cap A \neq \varnothing$. Оттука, или $x \in A$ или $x \notin A$. Во вториот случај, $(\forall r > 0)\, T(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ од каде што следува $x \in A'$.

б) Следува директно од равенството под *а*) и од последицата 4.1.11 *а*). Имено, A е затворено ако и само ако $A = \overline{A} = A \cup A' \supseteq A'$.

■

Теорема 4.3.7. *Нека* (Y, d_Y) *е потпростор од метричкиот простор* (X, d_X) *и* $A \subseteq Y \subseteq X$. *Тогаш,* $A'_Y = Y \cap A'_X$.

Доказ. За секој $y \in Y$, $d_Y(y, A \setminus \{y\}) = d_X(y, A \setminus \{y\})$. Така,

$$\begin{aligned} y \in A'_Y &\Leftrightarrow d_Y(y, A \setminus \{y\}) = 0 \\ &\Leftrightarrow d_X(y, A \setminus \{y\}) = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in A'_X. \end{aligned}$$

■

4.4 Изолирани точки

Дефиниција 4.4.1. *За точката* $x \in A$ *велиме дека е* ***изолирана точка*** *за множеството* A *ако* x *не е точка на натрупување за* A, *односно* $x \in A \setminus A'$.

Множеството од сите изолирани точки на множеството A *ќе го означуваме со* $\mathrm{iso}_X(A)$ *или со* $i_X(A)$. *Понекогаш се користат пократките ознаки* $\mathrm{iso}(A)$ *или со* $i(A)$. *Значи,*

$$x \in \mathrm{iso}_X(A) \Leftrightarrow (\exists r > 0) T_X(x,r) \cap A = \{x\}. \tag{4.7}$$

Пример 4.4.2. *Секоја точка во дискретен метрички простор X е изолирана. Навистина, за произволен $x \in X$ важи $T\left(x, \frac{1}{2}\right) \cap X = \{x\}$, односно x е изолирана точка. Затоа, дискретниот простор понекогаш се вика и* ***простор од изолирани точки****.* ♦

Теорема 4.4.3. *Точката $a \in A$ е изолирана точка за множеството A ако и само ако $d(a, A) = 0$ и $d(a, A \setminus \{a\}) > 0$.*

Доказ. Ако $a \in \text{iso}(A)$, тогаш постои $r > 0$ таков што

$$T(a, r) \cap (A \setminus \{a\}) = \varnothing.$$

Од последното следува дека за секој $a' \in A \setminus \{a\}, a' \notin T(a, r)$, односно $d(a, a') \geqslant r$. Но, тогаш важи и $\inf\limits_{a' \in A \setminus \{a\}} d(a, a') \geqslant r$, односно

$$d(a, A \setminus \{a\}) \geqslant r > 0.$$

За обратната насока, нека $d(a, A) = 0$ и $d(a, A \setminus \{a\}) = r > 0$. Сега, за секој $x \in A \setminus \{a\}$, важи $d(a, x) \geqslant r$, односно

$$T(a, r) \cap (A \setminus \{a\}) = \varnothing.$$

Од претходното и од $d(a, A) = 0$, добиваме дека $a \in A$ и $a \in \text{iso}(A)$, што и требаше да се докаже.

■

Пример 4.4.4. *Секоја точка од множеството $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ е изолирана, односно $iso(A) = A$. Навистина,*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad d(\frac{1}{n}, A \setminus \{\frac{1}{n}\}) = \frac{1}{n(n+1)} > 0. \blacklozenge$$

Пример 4.4.5. *$\mathbb{Q}$ нема изолирани точки, односно* $\text{iso}(\mathbb{Q}) = \varnothing$*. За $r \in \mathbb{Q}$, нека $\varepsilon > 0$ е произволен и n_0 е најмалиот природен број поголем од $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогаш, за $s = r + \frac{1}{n_0} \in \mathbb{Q}$ имаме $d(r, s) = |s - r| = \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Значи,*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists s \in \mathbb{Q} \setminus \{r\}) d(r, s) < \varepsilon.$$

Според тоа,

$$d(r, \mathbb{Q} \setminus \{r\}) = \inf_{s \in \mathbb{Q} \setminus \{r\}} d(r, s) = 0.\blacklozenge$$

Пример 4.4.6. *Го разгледуваме подмножеството* $\mathbb{N}$ *од* $\mathbb{R}$ *со стандардната метрика. За секој* $n \in \mathbb{N}$, *имаме* $d(n, \mathbb{N} \setminus \{n\}) = 1$, *што значи дека* n *е изолирана точка во* $\mathbb{N}$. *Меѓутоа,* $n \notin \mathrm{iso}(\mathbb{R})$. *Всушност,* $\mathbb{R}$ *нема изолирани точки.*$\blacklozenge$

Теорема 4.4.7. *Точката* $x \in X$ *е точка на натрупување на множеството* A *ако и само ако* x *не е изолирана точка на* A *и* $d(x, A) = 0$.

Доказ. Знаеме дека $x \in A'$ ако и само ако $d(x, A \setminus \{x\}) = 0$.
Ако $x \in A$, тогаш $x \in A' \Leftrightarrow x \notin \mathrm{iso}(A)$ и $d(x, A) = 0$.
Ако $x \notin A$, тогаш $x \in A' \Leftrightarrow 0 = d(x, A) = d(x, A \setminus \{x\})$, значи $x \notin \mathrm{iso}(A)$ и $d(x, A) = 0$.

$\blacksquare$

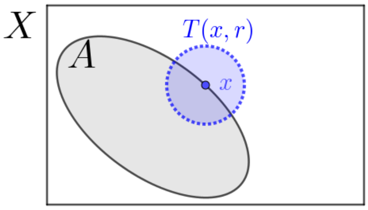
4.5 Гранични точки. Раб на множество

Дефиниција 4.5.1. *Велиме дека точката* $a \in X$ *е* ***гранична*** *или* ***рабна точка за множеството*** A ***во просторот*** (X, d) *ако* a *не припаѓа ниту во внатрешноста ниту во надворешноста на множеството* A.

Множеството од сите рабни точки за A *во* X *го викаме* ***раб (граница)*** *на* A *во* X *и го означуваме со* $\partial_X(A)$ *или* $\partial_X A$. *Ако од контекстот е јасно во кој метрички простор работиме, пишуваме кратко* $\partial(A)$ *или* ∂A, *и зборуваме за раб на* A. *Значи,*

$$\partial(A) := X \setminus (\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)) \,. \tag{4.8}$$

Со следниов пример ќе покажеме дека работ на едно множество зависи од метричкиот простор во кој се работи.



Слика 4.3: Точката x е рабна точка на множеството A.

Пример 4.5.2. *Нека $X = (0,1) \cup (2,3)$ е потпростор од Евклидскиот простор $\mathbb{R}$ и $A = (0,1)$. Тогаш, работ на множеството A во $\mathbb{R}$ е:*

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbb{R}}(A) &= \mathbb{R} \setminus (\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus A)) \\ &= \mathbb{R} \setminus ((0,1) \cup (-\infty, 0) \cup (1, \infty)) \\ &= \{0, 1\}.\end{aligned}$$

Додека, работ на множеството A во потпросторот X е:

$$\begin{aligned}\partial_X(A) &= X \setminus (\operatorname{int}_X(A) \cup \operatorname{int}_X(X \setminus A)) \\ &= X \setminus ((0,1) \cup (2,3)) \\ &= X \setminus X = \varnothing. \qquad \blacklozenge\end{aligned}$$

Пример 4.5.3. *Ако X е дискретен метрички простор и $A \subseteq X$, тогаш*

$$\partial_X(A) = X \setminus (\operatorname{int}_X(A) \cup \operatorname{ext}_X(A)) = X \setminus (A \cup (X \setminus A)) = \varnothing$$

бидејќи секое множество во X е отворено. $\blacklozenge$

Теорема 4.5.4. *Точката $a \in X$ е гранична за A ако и само ако секоја топка со центар во a содржи точки и од A и од $X \setminus A$, т.е.*

$$a \in \partial_X(A) \Leftrightarrow (\forall r > 0) T(a,r) \cap A \neq \varnothing \neq T(a,r) \cap (X \setminus A)$$

Доказ. Да претпоставиме дека постои $r > 0$ за кој $T(a,r) \cap A = \varnothing$. Тогаш, $T(a,r) \subseteq X \setminus A \Rightarrow a \in \operatorname{ext}(A) \Rightarrow a \notin \partial(A)$.

Слично, постоењето на $r > 0$ за кој што $T(a,r) \cap (X \setminus A) = \varnothing$, повлекува $T(a,r) \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A \Rightarrow a \in \operatorname{int}(A) \Rightarrow a \notin \partial(A)$.

Теорема 4.5.5. $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Доказ. Од (4.8), Де Моргановите закони и од теоремата 4.2.6, имаме

$$\begin{aligned}\partial(A) &= X \setminus (\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{ext}(A))\\ &= X \setminus (\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(X \setminus A))\\ &= (X \setminus (\operatorname{int}(A)) \cap (X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A))\\ &= \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.\end{aligned}$$

■

Теорема 4.5.6. $a \in \partial_X(A) \Leftrightarrow d(a,A) = 0 = d(a, X \setminus A)$

Доказ. Од теоремата 4.1.2 и од претходната теорема, имаме

$$\begin{aligned}a \in \partial(A) &\Leftrightarrow a \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}\\ &\Leftrightarrow (a \in \overline{A}) \wedge (a \in \overline{X \setminus A}))\\ &\Leftrightarrow d(a,A) = 0 = d(a, X \setminus A).\end{aligned}$$

■

Последица 4.5.7. *1.* $\overline{\partial(A)} = \partial(A)$.

2. $\partial(X) = \varnothing = \partial(\varnothing)$.

3. $A \subseteq X \Rightarrow \partial(A) \subseteq \overline{A}$.

Доказ. 1. Од теоремата 4.5.5, добиваме дека $\partial(A)$ е затворено множество, како пресек на две затворени множества.

2. Равенствата следуваат ако во теоремата 4.5.5 се стави $A = X$ или $A = \varnothing$. Имено,

$$\partial(X) = \overline{X} \cap \overline{X \setminus X} = X \cap \overline{\varnothing} = \overline{\varnothing} = \varnothing$$

$$\partial(\varnothing) = \overline{\varnothing} \cap \overline{X \setminus \varnothing} = \varnothing \cap \overline{X} = \varnothing.$$

3. Следува директно од теоремата 4.5.5.

■

Теорема 4.5.8. *Нека* (X, d) *е метрички простор,* $a \in X$ *и* $r > 0$. *Тогаш,*

i) $\quad \partial(T(a, r)) \subseteq S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) = r\}$;

ii) $\quad \partial(T[a, r]) \subseteq S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) = r\}$.

Доказ. i) Нека $z \in \partial(T(a, r))$. Тогаш, $d(z, T(a, r)) = 0 = d(z, X \setminus T(a, r))$. Ќе покажеме дека $d(z, a) = r$, односно $z \in S(a, r)$.
Нека $d(z, a) = s$. Тогаш, $\forall y \in T(a, r)$ имаме $d(a, y) < r$ и

$$d(z, y) \geqslant d(z, a) - d(y, a) > s - r.$$

Исто така,

$$0 = d(z, T(a, r)) = \inf_{y \in T(a,r)} d(z, y) \geqslant s - r,$$

од каде што $s \leqslant r$.

Слично, за секој $y \in X \setminus T(a, r)$, важи $d(a, y) \geqslant r$, па имаме

$$d(z, y) \geqslant d(y, a) - d(a, z) \geqslant r - s.$$

Од претпоставката и од последното неравенство, имаме

$$0 = d(z, x \setminus T(a, r)) = \inf_{y \in T(a,r)} d(z, y) \geqslant r - s \Rightarrow s \geqslant t.$$

Следува $r = s$.
Значи, за произволен $z \in \partial(T(a, r))$, имаме $d(z, a) = r$, односно $z \in S(a, r)$.
Инклузијата *ii)* се докажува аналогно.

■

4.5.1 Раб на множество во потпростор и натпростор

Нека Y е потпростор од метричкиот простор X и $A \subseteq Y$. Ќе дадеме една релација помеѓу работ на A во Y и работ на A во X.

Теорема 4.5.9. *Нека Y е потпростор од метричкиот простор X и $A \subseteq Y \subseteq X$. Тогаш, $\partial_Y(A) \subseteq \partial_X(A)$.*

Доказ. Нека $x \in \partial_Y(A)$. Тогаш, $d_Y(x, A) = 0 = d_Y(x, Y \setminus A)$. Од $Y \subseteq X$ следува дека $0 \leqslant d_X(x, A) \leqslant d_Y(x, A) = 0$. Понатаму, од $Y \setminus A \subseteq X \setminus A$, следува дека $0 \leqslant d_X(x, X \setminus A) \leqslant d_Y(x, Y \setminus A) = 0$, односно

$$d_X(x, A) = d_X(x, X \setminus A) = 0 \Leftrightarrow x \in \partial_X(A)\,.$$

■

Инклузијата во теоремата 4.5.9 не може да се замени со равенство.

Пример 4.5.10. *$\mathbb{Q}$ е потпростор на $\mathbb{R}$ со стандардната метрика. Имаме*

$$\partial_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{R}, \quad \partial_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} = \varnothing \neq \mathbb{Q} = \partial_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}. \qquad \blacklozenge$$

4.5.2 Критериуми за отворени и затворени множества преку работ

Теорема 4.5.11. *Следниве тврдења се еквивалентни:*

i) $\partial A \cap A = \varnothing$,

ii) $A = \mathrm{int}A$, *т.е.* A *е отворено.*

Доказ. Ако е исполнето *i)*, тогаш, $A = A \backslash \partial A = \mathrm{int}A$ (видете ја задачата 20). Нека е исполнето *ii)*. Тогаш, $\partial A \cap A = \partial A \cap \mathrm{int}A = \varnothing$.

■

Теорема 4.5.12. *Следниве тврдења се еквивалентни:*

1) $\partial A \subseteq A$,
2) $A = \overline{A}$, *т.е.* A *е затворено.*

Доказ. Тврдењето следува од тоа што $\overline{A} = A \cup \partial A$.

■

Теоремата 4.5.11 кажува дека множество во метрички простор е отворено тоа не содржи ниту една своја гранична точка.

Теоремата 4.5.12 кажува дека множество во метрички простор е затворено тоа ги содржи сите свои гранични точки.

Ако едно множество содржи некои свои рабни точки, но не ги содржи сите, тогаш тоа множество не е ниту отворено ниту затворено.

Пример 4.5.13. *Множеството* $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ *е затворено во* $\mathbb{E}$*, бидејќи*

$$\partial_{\mathbb{E}}[0,1] = \{0,1\} \subseteq [0,1].$$

Множеството $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ *е отворено во* $\mathbb{E}$*, бидејќи*

$$\partial_{\mathbb{E}}(0,1) \cap (0,1) = \{0,1\} \cap (0,1) = \varnothing.$$

Множеството $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}$ *не е ниту отворено ниту затворено множество, бидејќи*

$$\partial[0,1) \cap [0,1) = \{0,1\} \cap [0,1) = \{0\} \neq \varnothing$$

и

$$\partial[0,1) = \{0,1\} \nsubseteq [0,1).$$

Празното множество и X *се истовремено и затворени и отворени во метричкиот простор* (X,d) *(видете ја последицата 4.5.7, 2)).*

4.6 Задачи за самостојна работа

1. Определете ги затворачите на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ во $\mathbb{R}$.

2. Дали секогаш важи $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$? Образложете го одговорот.

3. Покажете дека $\overline{(a, b)} = [a, b]$.

4. Нека (X, d) е метрички простор, $a \in X$ и $r > 0$. Покажете дека
   $i)$ $\overline{T(a, r)} \subseteq T\,[a, r]$; и
   $ii)$ $T(a, r) \subseteq \operatorname{int}(T\,[a, r])$.

5. Покажете дека конечно множество нема точки на натрупување.

6. Нека $A \subseteq X$. Докажете дека $x_0 \in \overline{A}$ ако секоја околина U на x_0 се сече со A, односно $U \cap A \neq \varnothing$.

7. Нека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq B \subseteq X$. Докажете дека
$$A \cap \operatorname{iso}(B) \subseteq \operatorname{iso}(A)\,.$$

8. Нека (X, d) е метрички простор, $A \subseteq X$ и $z \in X \setminus A$. Тогаш,
$$z \in A' \Leftrightarrow d(z, A) = 0.$$

9. Велиме дека множество A е густо во (X, d) ако $\overline{A} = X$. Покажете дека: а) $\mathbb{Q}$ е густо во $\mathbb{E}$; б) $X \setminus \mathbb{Q}$ е густо во $\mathbb{R}$;
   в) $\mathbb{Q}^2$ е густо во $\mathbb{E}^2$; г) $\mathbb{Q}^3$ е густо во $\mathbb{E}^3$.

10. Нека A е ограничено, непразно подмножество од $\mathbb{R}$. Покажете дека
$$\sup A \in \partial(A)\,.$$

11. Нека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq X$. Покажете дека
$$\partial A = \partial(X \setminus A).$$

12. Нека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq X$. Покажете дека
$$\partial(\partial A) \subseteq \partial A.$$

13. Нека $(0,1)$ е потпростор од $\mathbb{R}$ со стандардната метрика. Определете ги $\partial_{(0,1)}(0,1)$ и $\partial_{\mathbb{R}}(0,1)$.

14. Нека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq X$ и $a \in X$. Докажете ги следните тврдења:
$i)$ Ако $a \notin A$, тогаш $a \in \partial A \Leftrightarrow a \in A'$.
$ii)$ Ако $a \in A$, тогаш $a \in \partial A \Leftrightarrow a \in (X \setminus A)'$.

15. Покажете дека во произволен метрички простор X важи:
$i)$ $\partial(\varnothing) = \varnothing$
$ii)$ $\partial(X) = \varnothing$.

16. Нека X е метрички простор, A, B се подмножества од X такви што $\partial B \subseteq A \subseteq B$. Покажете дека $\partial B \subseteq \partial A$.

17. Определете ги $\partial(\mathbb{N}), \partial(\mathbb{Z}), \partial(\mathbb{Q})$ и $\partial(\mathbb{R})$ во $\mathbb{E}$.

18. Нека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq X$. Дали во општ случај $\partial A = \partial \overline{A}$? Образложете го одговорот.

19. Нека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq X$. Покажете дека во општ случај: $\operatorname{diam}(\operatorname{int} A) \neq \operatorname{diam} A$.

20. Нека X е метрички простор и $A \subseteq X$. ,
$i)$ $\quad \overline{A} = A \cup \partial A$;
$ii)$ $\quad \operatorname{int} A = A \setminus \partial A$.

21. Нека X е метрички простор и $A \subseteq X$. Покажете дека $\overline{\partial A} = \partial A$.

22. Нека (X, d) е метрички простор. Покажете дека за подмножествата $A, B \subseteq X$ и $x \in X$ важат следните тврдења:

    i) $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$;

ii) $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$

iii) $d(x, A) \leqslant d(x, \partial A)$

iv) $d(A, B) = d(\overline{A}, B) = d(A, \overline{B}) = d(\overline{A}, \overline{B})$.

23. Нека (X, d) е метрички простор, $A \subseteq X$, покажете дека $\overline{A} = X \setminus int\,(X \setminus A)$.

24. Нека (X, d) е метрички простор и A е ограничено подмножество од X. Покажете дека $\overline{A}$ е ограничено во X.

25. Нека (X, d) е метрички простор и B е конечна фамилија од ограничени подмножества од X. Покажете дека $\bigcup_{A \in B} A$ е ограничено во X.

26. Нека A е множество во метрички простор (X, d). Покажете дека A е затворено ,

$$(\forall x \notin A)(\exists \varepsilon > 0) T(x, \varepsilon) \cap A = \varnothing \ .$$

27. Нека (X, d) е метрички простор, $A \subset X$ и $a \in X \setminus A$. Докажете дека важи

$$a \in \partial A \Leftrightarrow a \in A'.$$

28. Нека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq X$. Покажете дека:

i) $\partial \overline{A} \subseteq \overline{A}$;

ii) $\partial(\mathrm{int} A) \cap \mathrm{int} A = \varnothing$;

29. Нека A е конечно, отворено множество во метричкиот простор (X, d). Докажете дека за секој $x \in A$, x е изолирана точка од X.

30. Дадено е множеството $A = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Кои од следниве искази се вистинити?
a) Точката 1 е точка на натрупување.
b) Точката 1 е адхерентна точка.
в) Секоја точка на A е изолирана.

31. Да се даде пример на множество $A \subset \mathbb{R}$ така што $intA \neq int\overline{A}$.

32. Дадено е множеството $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 2\right\} \subset \mathbb{R}^3$. Определете $intA$.

33. Докажете го следново тврдење: Нека X е метрички простор и $A \subset X$. Тогаш, $a \in \overline{A}$ ако и само ако важи: секоја отворена топка $T(a, \epsilon)$ содржи точка од A.

Глава 5

Низи во метрички простори

Во овој дел ќе го дефинираме поимот низа во метрички простор (X, d) и поимите поврзани со него: лимес на низа во метрички простор, конвергентна и дивергентна низа, подниза на низа и некои својства на низите. Потоа ќе дадеме врска меѓу низите и претходно дефинираните поими за адхерентна, внатрешна точка, отворени и затворени множества.

5.1 Низи од реални броеви

Еден од најважните концепти кај реалните броеви е поимот за (реална) низа и директно поврзаниот со него поим за конвергентност на низа од реални броеви.

Нека $A \subseteq \mathbb{R}$. Низа во A е некоја функција

$$a : \mathbb{N} \to A.$$

Низата ја означуваме со

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

или со

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

или со

$$(a_n)$$

или со

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$$

Сликата на бројот n, т.е. вредноста $a(n)$ на функцијата a во точката n ја означуваме со a_n и ја викаме $n-$ти член или општ член на низата.

Поимот гранична вредност или лимес е еден од најосновните поими во математичката анализа. Се дефинира на следниов начин:

Дефиниција 5.1.1. *Велиме дека бројот $a \in \mathbb{R}$ е* ***гранична вредност*** *(лимес или граница) на низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и пишуваме $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Ако $a = +\infty$, тогаш:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Ако $a = -\infty$, тогаш:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R}^-)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0 \Rightarrow a_n < M).$$

Ако лимесот $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, велиме дека низата е **конвергентна** и дека **конвергира** (се стреми) кон a. Ако, пак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \{-\infty, +\infty\}$ или ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не постои, тогаш велиме дека низата е **дивергентна**, т.е. дека дивергира.

5.2 Низи во метрички простори

Како што кажавме на почетокот, метричките простори се обопштување на Евклидскиот простор $\mathbb{E}^1$, па во секој метрички простор може да се дефинираат многу поими што се аналогни со соодветните поими во $\mathbb{E}^1$. Поимот низа во метрички простор е проширување на поимот низа од реални броеви.

Дефиниција 5.2.1. *Нека (X, d) е метрички простор.* ***Низа во (X, d)*** *се вика пресликување од множеството на природни броеви $\mathbb{N}$ во X,*

$$a : \mathbb{N} \to X.$$

Елементот $a(n) = a_n$ го нарекуваме општ член на низата.

Со други зборови, низа е правило што на секој $n \in \mathbb{N}$ му придружува единствен елемент од X. Низата во метрички простор вообичаено се означува на еден од начините на кои се означуваа и низите од реални броеви.

5.2.1 Конвергенција на низа

Конвергентноста на низа во метрички простор се дефинира со помош на конвергентност на низа од реални броеви што одговара на низата во метричкиот простор.

Дефиниција 5.2.2. *За низа (a_n) во метричкиот простор (X, d) велиме дека* ***конвергира кон точката*** *$a_0 \in X$ ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_\varepsilon) \qquad d(a_n, a_0) < \varepsilon \; . \tag{5.1}$$

За точката a_0 велиме дека е ***гранична вредност*** *или* ***лимес***[1] *на низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и пишуваме:*

$$a_n \to x_0 \quad (n \to \infty) \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \; .$$

[1]limes (латински) = граница

Ако за една низа постои лимес од X, велиме дека таа низа е **конвергентна**. Ако за низата (a_n) не постои лимес $a_0 \in X$, велиме дека низата **дивергира** (или низата е **дивергентна.**)

Теорема 5.2.3. *Низата* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *во метричкиот простор* (X, d) *конвергира кон точката* $x_0 \in X$ *ако и само ако низата од реални броеви* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *со општ член* $a_n = d(x_n, x_0)$ *конвергира кон* 0 *во* $\mathbb{E}^1$.

Доказ. Доказот на оваа теорема следува директно од дефиницијата за конвергентна низа од реални броеви:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall n \geqslant n_\varepsilon)\,(|d(x_n, x_0) - 0| < \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0.\end{aligned}$$

■

Како што напоменавме, воведувањето на поимот околина ни овозможува воведување на поимот лимес на низа во метрички простор, исто како и во случајот на реални броеви. Дефиницијата 5.2.2 може да се даде и во следниов облик:

Теорема 5.2.4. *Низата* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *конвергира кон точката* $x_0 \in X$ *ако и само ако на секоја околина* $U(x_0)$ *на точката* x_0 *ѝ одговара природен број* n_0 *така што е исполнето* $\forall n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in U(x_0)$.

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $U(x_0)$ е произволна околина на точката x_0. Тогаш, бидејќи $U(x_0)$ е отворено множество, постои $\varepsilon > 0$ така што $T(x_0, \varepsilon) \subseteq U(x_0)$ и бидејќи $x_n \to x_0$, за тоа ε, постои природен број n_0 така што $(\forall n \geqslant n_0) x_n \in T(x_0, \varepsilon) \subseteq U(x_0)$. За обратното, за произволно $\varepsilon > 0$, топката $T(x_0, \varepsilon)$ е околина на точката x_0, па постои природен број n_0 така што $n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in T(x_0, \varepsilon)$. Добивме дека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

■

Пример 5.2.5. *Нека (X, d) е метрички простор и $c \in X$. Низата од X за чии членови важи $x_n = c$ за $n \geqslant n_0$ конвергира кон c. Како специјален случај, константната низа $x_n = c \in X$ за $n \geqslant 1$, конвергира кон c.*♦

Пример 5.2.6. *Нека (X, d) е дискретен метрички простор и $x \in X$. Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон x во X ако и само ако почнувајќи од некое $n_0 \in \mathbb{N}$ сите членови на низата со коефициенти $n \geqslant n_0$ се еднакви, т.е. $x_n = x$.*
Навистина, ако во дефиницијата за граница на низа:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \\ \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0) \quad d(x_n, x) < \varepsilon \end{aligned}$$

земеме дека $\varepsilon \leqslant 1$, добиваме $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0) \quad d(x_n, x) < 1$, т.е. дека $d(x_n, x) = 0$. Ова значи дека $x_n = x$, за секој $n \geqslant n_0$. ♦

Пример 5.2.7. *Низата со општ член $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, конвергира кон 0 во $\mathbb{R}$ опремен со Евклидската метрика.*
Навистина, нека $\varepsilon > 0$, тогаш од Архимедовата[2] аксиома (видете ја последицата 15.1.10) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. За $n \geqslant n_0$, имаме $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, односно $\lim\limits_{n\to 0} x_n = 0$.

Но, истата низа $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ не конвергира во метричкиот простор $(\mathbb{R}, \delta)$ каде што δ е дискретната метрика (видете го примерот 5.2.6).♦

5.2.2 Ограниченост на низа

Дефиниција 5.2.8. *Велиме дека низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е* ***ограничена*** *ако е ограничено множеството вредности $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

[2] Архимед од Сиракуза, антички математичар (287 – 212 пр.н.е.)

Следниве тврдења се директни последици на дефиницијата за граница на низа.

Теорема 5.2.9. *Секоја конвергентна низа е ограничена.*

Доказ. Нека низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон точката x_0. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постои некој $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таков што за секој $n \geqslant n_\varepsilon$, $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Нека

$$d_1 = \max\{d(x_i, x_0) : 1 \leqslant i \leqslant n_0\} \ .$$

Тогаш, за произволни $a, b \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ имаме

$$d(a, b) \leqslant d(a, x_0) + d(b, x_0) < 2\max\{\varepsilon, d_1\} \ .$$

Добивме дека

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) &= \sup\{d(a, b) : a, b \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}\} \\ &\leqslant 2\max\{\varepsilon, d_1\} < \infty.\end{aligned}$$

■

Забелешка 5.2.10. *Обратното тврдење не мора да важи, ограничена низа не мора да конвергира. На пример, низата $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ е ограничена во $\mathbb{E}$, но не е конвергентна.*

Теорема 5.2.11 (Единственост на лимесот). *Ако низата има гранична вредност, тогаш таа е еднозначно определена.*

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Користејќи го неравенството на триаголник, добиваме

$$|d(x, x_n) - d(x, y)| \leqslant d(x_n, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

односно $\lim\limits_{n\to\infty}(d(x, y) - d(x, x_n)) = 0$ од каде што следува дека

$$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

■

Теорема 5.2.12. *Ако во метрички простор* (X,d) *за низите* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *и* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *важи* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$*, тогаш*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0)\ .$$

Доказ. За произволно $\varepsilon > 0$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n \geqslant n_0$,

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad d(y_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Од неравенството на триаголник, важи

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y_n)$$

па добиваме дека

$$d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + d(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2} = d(x_0, y_0) + \varepsilon$$

од каде што

$$d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0) < \varepsilon\ . \tag{5.2}$$

Слично, од неравенството

$$d(x_0, y_0) \leqslant d(x_0, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_0)$$

се добива дека

$$d(x_0, y_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + d(x_n, y_n) + \frac{\varepsilon}{2} = d(x_n, y_n) + \varepsilon$$

од каде што

$$-\left(d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)\right) < \varepsilon\ . \tag{5.3}$$

Од равенките (5.2) и (5.3), следува дека за $n \geqslant n_0$

$$|d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| < \varepsilon\ ,$$

од каде што

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0)\ .$$

■

Забелешка 5.2.13. *За доказот на теоремата 5.2.12, можеме да ја искористиме задачата 2 од поглавјето 1.12.*

Ќе дадеме неколку интересни примери од лимеси:

Пример 5.2.14. *Нека* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *е низата од елементи од просторот* $C_{[0,\frac{1}{2}]}$ *со супремум-метрика, со општ член* $f_n(x) = x^n$*. Ќе покажеме дека* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$*, каде што* f *е константната функција* $f(x) = 0$*. Треба да добиеме дека за произволен* $\varepsilon > 0$ *постои* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$*, така што за* $n \geqslant n_\varepsilon$*,* $d(f_n, f) < \varepsilon$*. Бидејќи функциите* f_n *се монотоно растечки, имаме*

$$d(f_n, f) = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |x^n - 0| = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} x^n = \frac{1}{2^n}.$$

Нека $\varepsilon > 0$ *е произволен. Избираме* $n_\varepsilon = \left[\log_2(\dfrac{1}{\varepsilon})\right] + 1$*. Ако* $n \geqslant n_\varepsilon$*, тогаш*

$$d(f_n, f) = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \frac{1}{2^{\log_2(\frac{1}{\varepsilon})}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon\ .$$

Од произволноста на ε*, добивме дека* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *каде што* f *е константната функција* $f(x) = 0, \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$*.* ♦

Забелешка 5.2.15. *Пишуваме* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$*, а не* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *!!! Постои голема разлика меѓу овие два лимеса. Имено, со*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

се означува дека $f(x)$ *е лимес на низата од реалните броеви* $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$*, а записот*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

означува дека функцијата f *е лимес на низата од функции* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$*.*

5.3 Конвергенција на низи во $\mathbb{E}^n$

Низите во Евклидски простори се од посебен интерес поради применливоста на овие простори. Како последица на алгебарската структура на $\mathbb{E}^n$, низите во овие простори имаат некои убави својства што овозможуваат повеќето проблеми да се сведат на разгледување на низи од реални броеви. Најпрвин ќе разгледаме еден пример за низа во $\mathbb{E}^2$.

Пример 5.3.1. *Нека $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}, P_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ е низа од точки во $\mathbb{E}^2$. Забележуваме дека точките лежат на параболата $y = x^2$ и „се стремат“ кон точката $P_0(0,0)$ кога n „се стреми“ кон ∞. Всушност, важи дека $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = (0,0)$. За да го покажеме ова, нека $\varepsilon > 0$ и нека $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ е такво што $n_\varepsilon > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$. Ако $n \geqslant n_\varepsilon$, тогаш*

$$\begin{aligned} d((\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}), (0,0)) &= \sqrt{(\frac{1}{n} - 0)^2 + (\frac{1}{n^2} - 0)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} < \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon \,.\blacklozenge \end{aligned}$$

Резултатот $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = (0,0)$ нè тера да се запрашаме дали тој е последица на фактот дека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ и дали истото може да се обопшти на секоја низа од $\mathbb{E}^n$? Одговорот е позитивен!

Теорема 5.3.2. *Низата $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$, $(x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}))$ во $\mathbb{R}^n$ со Евклидска метрика, конвергира кон $x^{(0)}$, $(x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}))$ ако и само ако во $\mathbb{E}^1$ важи $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)}$ за секој $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Доказ: Нека $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволен фиксен број. За тој ε постои $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таков што за секој $k \geqslant k_\varepsilon$ е исполнето

$$d(x^{(k)}, x^{(0)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(k)} - x_i^{(0)}\right)^2} < \varepsilon \ .$$

Нека $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ е фиксен. За секој $k \geqslant k_\varepsilon$ важи:

$$\left|x_j^{(k)} - x_j^{(0)}\right| = \sqrt{\left(x_j^{(k)} - x_j^{(0)}\right)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_j^{(k)} - x_j^{(0)}\right)^2} < \varepsilon \ .$$

што значи дека $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j^{(0)}$ за секој $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Обратно, нека $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j^{(0)}$ за секој $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и нека е даден $\varepsilon > 0$. Од $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^{(k)} = x_1^{(0)}$ следува дека постои $k_1 \in \mathbb{N}$ таков што за секој $k \geqslant k_1$ е исполнето $|x_1^{(k)} - x_1^{(0)}| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Слично, постојат $k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ такви што за секој $k \geqslant k_i, i \in \{l, 2, \ldots, n\}$, е исполнето $|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Нека $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. За $k \geqslant k_0$ важи:

$$d(x^{(k)}, x^{(0)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i^{(0)})^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})^2} = \varepsilon \ ,$$

што требаше да се покаже.

■

За низата $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ од $\mathbb{R}^n$, низата од реални броеви $(x_i^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ за фиксен $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, се вика ***i*-та координатна низа**.

Забелешка 5.3.3. *Со теоремата покажавме дека конвергенцијата на низа во $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_2)$ (или поинаку кажано конвергенцијата по метрика) е еквивалентна на покоординатна конвергенција.*

Истиот заклучок важи за просторите $(\mathbb{R}^n, d_p)$ *(задачата 13) и* $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ *(задачата 14), но не важи во секој простор од низи (задачата 17).*

5.4 Конвергенција и затвореност

Конвергентните низи ни овозможуваат да дефинираме адхерентна точка на множество, а потоа и затворено множество во метрички простор без притоа да го разгледуваме неговиот комплемент.

Теорема 5.4.1. *Нека* (X, d) *е метрички простор и* $A \subseteq X$*. Ако постои низа* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$*, тогаш* $x_0 \in \overline{A}$*. Обратно, ако* $x_0 \in \overline{A}$*, тогаш постои низа (што може да биде константна низа) со вредности* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ *таква што* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$*.*

Доказ. $\Longrightarrow$: Нека $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогаш

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0) \quad x_n \in T(x_0, \varepsilon) \cap A$$

односно $x_0 \in \overline{A}$.

$\Longleftarrow$: Нека $x_0 \in \overline{A}$. Тогаш за $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ постои $x_n \in A$ такво што $x_n \in T(x_0, \varepsilon)$. Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон x_0. Навистина, нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш постои $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такво што $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. За секое $n \geqslant n_\varepsilon$ имаме

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

■

Последица 5.4.2. *Во метрички простор* (X, d) *множеството* $A \subseteq X$ *е затворено ако и само ако секоја конвергентна низа во* X *чии членови се во* A*, има лимес што припаѓа во* A*. Значи,*

$$\overline{A} = A \quad \Leftrightarrow \quad (\forall a : \mathbb{N} \to A) \lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \Rightarrow a_0 \in A.$$

Доказ: Нека $A \subseteq X$ е затворено, $a : \mathbb{N} \to A$ е низа и постои $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$. Тогаш, според теоремата 5.4.1, $a_0 \in \overline{A} = A$.

Обратно, нека $a_0 \in \overline{A}$. Според теоремата 5.4.1, постои низа $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ во A за која $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$. Од претпоставката следува дека $a_0 \in A$. Добивме дека $\overline{A} \subseteq A$, односно A е затворено.

■

Стандарден тест за проверка дали множеството A во метрички простор е затворено е да се провери дали границата на секоја конвергентна низа во A припаѓа во A. Исто така, многу често се практикува наоѓање на низа од A која не конвергира кон елемент на A и заклучуваме дека множеството A не е затворено.

Пример 5.4.3. *Сегментот* $[0, 1]$ *е затворен во* $\mathbb{E}$ *бидејќи за секоја конвергентна низа* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *во интервалот,* $0 \leqslant a_n \leqslant 1$*, имаме дека* $0 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant 1$*, односно* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in [0, 1]$.◆

Пример 5.4.4. *Интервалот* $(0, 1]$ *не е затворено множество во* $\mathbb{R}$ *бидејќи низата* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ *е конвергентна во* $\mathbb{R}$*, но нејзината граница не припаѓа во* $(0, 1]$. ◆

Пример 5.4.5. *Единичната сфера во* $\mathbb{R}^n$*,*

$$S(0, 1) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\},$$

е затворено множество во $\mathbb{E}^n$*. За да го покажеме ова, земаме низа од точки на сферата* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *која конвергира во* $\mathbb{E}^n$*. Значи, земаме дека* $a_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ *така што* $a_{k,1}^2 + a_{k,2}^2 + \ldots + a_{k,n}^2 = 1$*, за секој* $k \in \mathbb{N}$*, и* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a_0 = (a_{0,1}, a_{0,2}, \ldots, a_{0,n})$*. Треба да покажеме дека* $a_{0,1}^2 + a_{0,2}^2 + \ldots + a_{0,n}^2 = 1$*. Од теоремата 5.3.2 следува дека*

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \quad \lim_{k\to\infty} a_{k,i} = a_{0,i} \ ,$$

од каде што следува дека

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \quad \lim_{k\to\infty} a_{k,i}^2 = a_{0,i}^2 \ .$$

Според тоа,

$$1 = \lim_{k\to\infty}(a_{k,1}^2 + a_{k,2}^2 + \ldots + a_{k,n}^2) = a_{0,1}^2 + a_{0,2}^2 + \ldots + a_{0,n}^2,$$

т.е. $a_0 \in S(0,1)$.♦

5.5 Поднизи и конвергенција

Дефиниција 5.5.1. *Нека* $x : \mathbb{N} \to X$ *е низа во метричкиот простор* (X,d) *и пресликувањето* $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *е монотоно растечко, т.е.* $(\forall i \in \mathbb{N})$ $n(i) < n(i+1)$. *Композицијата* $x \circ n : \mathbb{N} \to X$ *се вика* ***подниза*** *на низата* $x = (x_n)_n$.

Општиот (k-от) член на поднизата $x \circ n$ *е* $x(n(k)) = x_{n(k)}$ *и, како и кај поднизите од реални броеви, ќе го означуваме со* x_{n_k}. *Поднизата се означува со* $(x_{n_k})_k$.

Теорема 5.5.2. *Ако низата* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *конвергира кон* x_0*, тогаш секоја нејзина подниза конвергира кон* x_0.

Доказ. Нека низата $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. За произволно избран $\varepsilon > 0$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што $(\forall k \geqslant n_0)$ $d(x_k, x_0) < \varepsilon$. Бидејќи за секој $k \in \mathbb{N}$ е исполнето $n_k \geqslant k$, добиваме $n_k \geqslant k \geqslant n_0$, од каде што $d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$.

■

Последица 5.5.3. *Низа во метрички простор не е конвергентна ако има дивергентна подниза или ако има барем две поднизи што конвергираат кон различни лимеси.*

Пример 5.5.4. *Низата* $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ *е дивергентна бидејќи нејзините поднизи* $((-1)^{2n})_{n=1}^{\infty}$ *и* $((-1)^{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ *имаат различни лимеси,* 1 *и* -1 *соодветно.* ♦

Се наметнува прашањето за постоење на критериум за определување на точките од метричкиот простор кои можат да бидат лимеси на поднизи од дадена низа? Одговорот на ова прашање ни го дава теоремата 5.5.7.

Дефиниција 5.5.5. *Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во метричкиот простор (X,d). Велиме дека $x_0 \in X$ е точка на натрупување на низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant n_0) \;\; d(x_n, x_0) < \varepsilon \, .$$

Од дефиницијата 5.5.5 е јасно дека секоја адхерентна точка на множеството $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ е точка на натрупување на низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Но, може да се случи некоја точка на натрупување на низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ да не е адхерентна точка на множеството од вредности на низата.

Пример 5.5.6. *За низата со општ член $x_n = (-1)^n$, точките -1 и 1 се точки на натрупување. Но, множеството од вредности на низата $\{-1, 1\}$ е конечно и нема точки на натрупување.* ◆

Теорема 5.5.7. *Нека (X,d) е метрички простор. Точката $x_0 \in X$ е точка на натрупување на низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во X ако и само ако постои подниза $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ од низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ која конвергира кон x_0.*

Доказ. Нека $x_0 \in X$ е точка на натрупување на низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Ќе дефинираме строго растечка низа од природни броеви $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ за кои

$$x_{n_k} \in T(x_0, \frac{1}{k}), \text{ за секој } k \in \mathbb{N}.$$

Така добиената подниза $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ конвергира кон x_0 бидејќи за секој $\varepsilon > 0$ постои $k_0 \in \mathbb{N}, k_0 < \frac{1}{\varepsilon}$ и за $k \geqslant k_0$ важи $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{k} < \frac{1}{k_0} < \varepsilon$.

За обратната насока, нека поднизата $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ од низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон x_0. За произволно избран $\varepsilon > 0$, постои $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ така што за $k \geqslant k_\varepsilon$ важи $d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$. Понатаму, нека $n \in \mathbb{N}$ е произволен. За $k_0 > \max\{k_\varepsilon, n\}$, имаме дека $n_{k_0} > n_{k_\varepsilon} \geqslant k_\varepsilon$ и $n_{k_0} \geqslant n+1 > n$. Значи, за секои $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ постои природен број $n_{k_0} > n$ за кој $d(x_{n_{k_0}}, x_0) < \varepsilon$, односно x_0 е точка на натрупување на низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

■

Последица 5.5.8. *Нека (X, d) е метрички простор и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во X која нема подниза што конвергира во X. Ако $A \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, тогаш секој елемент на A е изолирана точка и множеството A е затворено во X.*

Доказ. Нека $A \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Според теоремата 5.5.7, A нема точки на натрупување во X, односно $A' = \varnothing$. Ако $a \in A$, постои $\varepsilon_a > 0$, така што $T(a, \varepsilon_a) \cap \{a\} = \{a\}$, односно $a \in \operatorname{iso}(A)$. Тогаш, според теоремата 4.3.6, $\overline{A} = A \cup A' = A$, односно A е затворено.

■

Теорема 5.5.9. *Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна низа во нормиран векторски простор X и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогаш, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$.*

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$. Тогаш,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = d(x_0, 0) = \|x_0\|.$$

Притоа, ја искористивме теоремата 5.2.12 со $y_n = y_0 = 0$.

■

5.6 Конвергенција на низа во потпростор

Нека (X, d_X) е метрички простор и (Y, d_Y) е негов потпростор.

Теорема 5.6.1. *Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во Y што во просторот (X, d_X) конвергира кон $x \in X$. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира во просторот (Y, d_Y) ако и само ако $x \in Y$. Во тој случај, лимесот на низата во Y е x.*

Доказ. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во $Y \subseteq X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Тогаш,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)(d_X(x_n, x) < \varepsilon).$$

Ако $x \in Y$, тогаш, $T_Y(x,\varepsilon) = T_X(x,\varepsilon) \cap Y$ е отворена топка во Y што ги содржи сите x_n за $n \geqslant n_0$. Од произволноста на ε, следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ во Y. За обратната насока, ако $x \notin Y$, тогаш, од дефиницијата 5.2.2, следува дека низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не конвергира во Y.

■

Пример 5.6.2. *Низата* $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ *конвергира кон* 0 *во* $\mathbb{R}$, *но не конвергира во потпросторот* $(0,1]$.◆

Теорема 5.6.3. *Нека* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *е низа во* Y *што конвергира кон* $x \in Y$. *Нека* X *е метрички натпростор на* Y. *Тогаш,* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *е низа што конвергира кон* x *во просторот* X.

Доказ. За секој позитивен број ε, важи

$$T_X(x,\varepsilon) \supseteq T_Y(x,\varepsilon) \supseteq \{x_n : n \geqslant n_0\},$$

од каде што следува дека низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон x во X.

■

5.7 Задачи за самостојна работа

1. Нека (X,d) е дискретен метрички простор и (x_n) е низа во X. Покажете дека низа (x_n) конвергира ако и само ако постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $x_n = x_{n_0}$ за секој $n \geqslant n_0$.

2. Покажете дека низата $((x_n),(y_n))_{n=1}^{\infty}$ во $X \times Y$ конвергира кон (x,y) ако и само ако $x_n \to x$ и $y_n \to y$. (Метриката е дефинирана како во задачата 17 од првата глава.)

3. Нека A е подмножество од метрички простор X и $x \in A$. Покажете дека тогаш постои низа во A што конвергира кон x ако и само ако $\forall r > 0, T\,(a, r) \cap A \neq \varnothing$.

4. Во метрички простор (X, d) за секоја топка $T(x_0, r)$ важи

$$\overline{T(x_0, r)} \subseteq T[x_0, r] = \{x : d(x, x_0) \leqslant r\} \ .$$

Најдете пример за метрички простор во кој не важи равенство.

5. Нека $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$

   а) Покажете дека $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 1$ во $C_{[1,2]}$.

   б) Дали низата (f_n) конвергира во $C_{[0,1]}$?

6. Нека (X, d) е метрички простор. Точката $x \in X$ е точка на натрупување за множество $A \subseteq X$, во A постои низа $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $x \notin \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, таква што $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. Докажете!

7. Нека (X, d) е метрички простор и $\varnothing \neq A \subseteq X$. Докажете дека $a \in \mathrm{int}A$ ако и само ако во $X \setminus A$ не постои низа што конвергира кон a.

8. Нека X е метрички простор и $A \subseteq X$. Докажете дека множеството A е густо во X ако и само ако за секој $x \in X$ постои низа $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ во A што конвергира кон x.

9. Докажете дека затворена топка во метрички простор е затворено множество.

10. Докажете дека сфера во метрички простор е затворено множество.

11. Нека (X, d) е метрички простор, $x \in X$ и $r, s \in \mathbb{R}^+$, $r < s$. Докажете дека множеството $\{y \in X : r \leqslant d(x, y) \leqslant s\}$ е затворено.

12. Докажете дека едноелементно множество во метрички простор X е затворено, не користејќи ја дефиницијата 3.3.1.

13. Покажете дека конвергенцијата на низа во $(\mathbb{R}^n, d_p)$ е еквивалентна со покоординатната конвергенција.

14. Покажете дека конвергенцијата на низа во $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ е еквивалентна со покоординатната конвергенција.

15. Нека (X_1, d_1) и (X_2, d_2) се метрички простори. Го разгледуваме Декартовиот производ $X = X_1 \times X_2$ и на него метриките:

    1) $D_1(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$
    2) $D_2(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$
    3) $D_3(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$

    каде што $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ се произволни елементи од X. Покажете дека низата $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, $(x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}))$ конвергира кон точката $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in (X, D_j), j = 1, 2, 3$, ако и само ако $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i^{(0)}$ за $i = 1, 2$.

16. Нека X е множеството од сите реални низи и нека $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in X$. Дефинираме

    $$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \min\{|x_k - y_k|, 1\}.$$

    Нека $(x^n)_{n=1}^{\infty} = ((x_i^n)_{i=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$ е низа во X. Покажете дека

    $$(x^n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x \Leftrightarrow (x_i^n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_i, \forall i.$$

17. Нека $X = l^2 = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_2)$ е метричкиот простор од сите реални квадратно сумабилни низи

    $$(\forall x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in X \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}.)$$

Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty} = ((x_{i,n})_{i=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$ е низа во X. Покажете дека

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = (x_{i,0})_{i=1}^{\infty} \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} x_{i,n}) = x_{i,0}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Наведете пример за низа во X каде што обратната насока на тврдењето не е точна! (Најдете дивергентна низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ во X кај која координатните низи конвергираат во $\mathbb{E}^1$.)

18. Нека $(X, \|\cdot\|)$ е нормиран векторски простор, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во X и $n \in \mathbb{N}, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$. Ако $(\forall n \in \mathbb{N})\, \|x_n - x\| \leqslant \alpha_n$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Докажете!

19. Нека $(X, \|\cdot\|)$ е нормиран простор и $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во X што конвергира кон $x \in X$. Докажете дека $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, односно важи $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\|$. Дали важи обратната насока на тврдењето, односно дали ако $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$?

20. Нека $X = \mathbb{R}^k$ е Евклидскиот простор и нека $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ се низи во X, за кои $x_n \to x$, $y_n \to y$ и $\alpha_n \to \alpha$, $(\alpha_n, \alpha \in \mathbb{R})$. Докажете дека

    (а) $\alpha_n \cdot x_n \to \alpha \cdot x$;

    (б) $x_n + y_n \to x + y$;

    (в) $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ каде што со $\langle\cdot,\cdot\rangle$ го означуваме скаларниот производ во $\mathbb{R}^k$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots x_k y_k$.

21. Нека X е нормиран векторски простор и C е конвексно подмножество во X. Покажете дека

    (а) $\mathrm{int} C$ е конвексно множество;

    (б) $\overline{C}$ е конвексно множество;

    (в) ∂C не мора да биде конвексно множество во X.

22. Нека (X, d) е метрички простор и $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во X. Докажете:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

(б) Ако конвергираат поднизите $(x_{2k})_{k=1}^{\infty}$, $(x_{2k+1})_{k=1}^{\infty}$ и $(x_{3k})_{k=1}^{\infty}$ тогаш конвергира и $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

23. Нека $x_n = n$ ако n е прост број и $x_n = \frac{1}{n}$ ако n е сложен број. Покажете дека за секој $k \geqslant 2$ поднизата $(x_{kn})_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон 0, но низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не конвергира.

Глава 6

Комплетен метрички простор

Од Математичка анализа 1 ни е познат поимот за Кошиева низа. Во ова поглавје ќе се потсетиме на овој поим и ќе го прошириме на метрички простори. Исто така, ќе се потсетиме на врската меѓу Кошиевите и конвергентните низи и ќе видиме дека овие поими во произволен метрички простор не се идентични. Всушност, просторите во кои Кошиевите низи се конвергентни имаат посебно име - комплетни метрички простори.

6.1 Кошиев принцип за конвергенција во $\mathbb{R}$

Да се потсетиме, за низа $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ од $\mathbb{R}$ велиме дека е Кошиева, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n \in \mathbb{N})\,(m, n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)\,.$$

Кошиева низа и конвергентна низа во $\mathbb{R}$ се синоними. Имено, важат:

Теорема 6.1.1. *1) Секоја конвергентна низа во $\mathbb{R}$ е Кошиева.*

2) Секоја Кошиева низа во $\mathbb{R}$ е ограничена.
3) Кошиева низа во $\mathbb{R}$ е конвергентна , има конвергентна подниза.

Теорема 6.1.2. ***(Кошиев принцип за конвергенција).*** *Секоја Кошиева низа во $\mathbb{R}$ е конвергентна.*

Доказ. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во $\mathbb{R}$. Од 2) во теоремата 6.1.1, следува дека низата е ограничена. Според теоремата на **Болцано**[1] - **Ваерштрас**[2] за низи, постои конвергентна подниза $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ од низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Врз основа на 3) од теоремата 6.1.1, добиваме дека низата конвергира.

■

6.2 Комплетност на метрички простор

Поимот Кошиева низа може да се воведе и во произволен метрички простор, но принципот за конвергенција нема секогаш да важи. Ќе ги издвоиме оние метрички простори, во кои што важи Кошиевиот принцип за конвергенција, односно во кои секоја Кошиева низа конвергира. Тоа ни овозможува да докажеме дека низа конвергира без да ја знаеме границата.

6.2.1 Кошиеви низи

Дефиниција 6.2.1. *За низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во метричкиот простор (X, d) велиме дека е* ***Кошиева***[3] ***(фундаментална)*** *ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geqslant n_0) \qquad d(x_n, x_m) < \varepsilon\ . \tag{6.1}$$

[1]Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, чешки математичар, 1781 - 1848.
[2]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, германски математичар, 1815 - 1897.
[3]Baron Augustin-Louis Cauchy,француски математичар, 1789–1857)

Теорема 6.2.2. *Низа* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *во метричкиот простор* (X, d) *е Кошиева во* X *ако и само ако за секој* $r > 0$, *постои топка во* X *со радиус* r *што го содржи множеството* $\{x_n : n \geqslant n_0\}$, *за некој* $n_0 \in \mathbb{N}$ *(*n_0 *зависи од* r*).*

Доказ. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X. Тогаш, $\forall r > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant n_0, d(x_m, x_n) < r$. Специјално, за $a = x_{n_0}$, и за секој $n \geqslant n_0$, $x_n \in T(a, r)$. За обратната насока, нека за секој $r > 0$, постои топка $T(a, \frac{r}{2})$ што го содржи множеството $\{x_n : n \geqslant n_0\}$. Тогаш, $\forall n, m \geqslant n_0$, $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, a) + d(x_m, a) < \dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2} = r$. Значи, низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во X.

■

Тврдењата од теоремата 6.1.1 важат и за произволен метрички простор. (Тоа се теоремите 6.2.3, 6.2.4 и 6.2.5),

Теорема 6.2.3. *Секоја конвергентна низа во метрички простор* (X, d) *е Кошиева низа.*

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, односно

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0) \quad d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогаш, за $n, m \geqslant n_0$ имаме

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

■

Теорема 6.2.4. *Кошиева низа во метрички простор е ограничена.*

Доказ. Нека (X, d) е метрички простор и низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во X. За $\varepsilon = 1$ нека n_0 е така избран за да важи $d\left(x_n, x_m\right) < 1$, за секои

$m, n \geqslant n_0$. За x_{n_0}, сите членови на низата со индекс $n > n_0$ ќе припаѓаат во ε-околината на точката x_{n_0}. За $r = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n_0 - 1} d(x_{n_0}, x_k) + \{1\}$, важи $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq T(x_m, r)$, односно низата е ограничена.

■

Теорема 6.2.5. *Кошиева низа во метрички простор (X, d) конвергира ако и само ако има подниза што конвергира во X.*

Доказ. Ако Кошиевата низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира, тогаш има конвергентна подниза (на пример, самата низа).

За обратната насока, нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X и $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ е една нејзина подниза што конвергира кон x. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен и нека n_0 е избран така што $(\forall m, n \geqslant n_0)\ d(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Го избираме $k_0 \in \mathbb{N}$ така што за $k \geqslant k_0$ важи $d(x_{n_k}, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Сега, земаме дека $n_\varepsilon = \max\{n_0, n_{k_0}\}$. За $n > n_\varepsilon$ имаме

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Во општ случај, не е точна обратната насока на теоремата 6.2.3, односно постојат Кошиеви низи кои не се конвергентни. Ќе го покажеме тоа со класичниот пример:

Пример 6.2.6. *Да го разгледаме метричкиот простор $(\mathbb{Q}, d)$ каде што $d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$. Тој е потпростор од $\mathbb{R}$ со стандардната метрика. Ја формираме низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ на следниов начин:*

$$a_1 = 1,4, \quad a_2 = 1,41, \quad a_3 = 1,414, \ldots$$

$n-$тиот член на низата, a_n, има има n цифри зад децималната запирка и $|a_n - \sqrt{2}| < 10^{-n}$. Забележуваме дека (a_n) е низа од рационални

броеви. Како низа од реални броеви, низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *конвергира кон* $\sqrt{2}$, *па таа е Кошиева низа во* $\mathbb{R}$, *односно*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant n_0) \qquad |a_m - a_n| < \varepsilon\ .$$

Последното значи дека низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *е Кошиева и во* $(\mathbb{Q}, d)$. *Меѓутоа,* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *па* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *не конвергира во* $(\mathbb{Q}, d)$. ◆

Дефиниција 6.2.7. *За даден метрички простор* (X, d) *велиме дека е* ***комплетен (или потполн)*** *ако секоја Кошиева низа во* X *е конвергентна.*

Пример 6.2.8. *Поради Кошиевиот принцип на конвергенција на низа реални броеви се добива дека* $\mathbb{R}$ *е комплетен метрички простор.* ◆

Пример 6.2.9. *Евклидскиот простор* $\mathbb{R}^k$ *е комплетен. Навистина, нека* $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} = ((x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ *е Кошиева низа во* $\mathbb{R}^k$. *Тогаш,*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geqslant n_0)(\sum_{i=1}^{k} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2),$$

од каде што следува дека

$$(\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geqslant n_0)(|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon),$$

односно секоја низа $(x_i^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *е Кошиева во* $\mathbb{R}$. *Поради комплетноста на* $\mathbb{R}$, *секоја координатна низа* $(x_i^{(n)})_n$, *за секој* $i = 1, \ldots, k$, *е конвергентна. Нека* $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$, $\ i = 1, \ldots, k$, *и нека* $x = (x_1, \ldots, x_k)$. *Од теоремата 5.3.2 следува дека* $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$. ◆

Пример 6.2.10. *Секој дискретен метрички простор е комплетен. Навистина, нека* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *е Кошиева низа во дискретниот простор* (X, d). *Тогаш,* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall m, n \geqslant N) d(x_m, x_n) < \varepsilon$. *Специјално, за* $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ *постои* $N \in \mathbb{N}$, *така што* $(\forall m, n \geqslant N) d(x_n, x_m) = 0$. *Последното значи дека* $x_n = x_m$, *за сите* $n, m \geqslant N$. *Така, низата* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *е конвергентна. Од произволноста на низата* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, *следува дека* X *е комплетен.* ◆

Пример 6.2.11. *Просторот од непрекинати функции* $(\mathcal{C}_{[a,b]}, d)$*, каде што* $d(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|$*, е комплетен. Навистина, нека* (f_n) *е Кошиева низа во* $C_{[a,b]}$*; тоа значи дека*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant n_0) \quad \max_{x\in[a,b]}|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ .$$

За секој $x \in [a, b]$ *важи* $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \max\limits_{x\in[a,b]}|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ *, па затоа, за фиксен* $x_0 \in [a, b]$ *имаме*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geqslant n_0) \quad |f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon \ .$$

Добивме дека за секој $x_0 \in [a, b]$*, бројната низа* $(f_n(x_0))_n$ *е Кошиева, а поради комплетноста на* $\mathbb{E}$*, низата* $(f_n(x_0))_n$ *е конвергентна. Дефинираме функција* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *со*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \forall x \in [a, b]. \tag{6.2}$$

Ќе покажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *во* $C_{[a,b]}$*. Нека* $\varepsilon > 0$*. Бидејќи* (f_n) *е Кошиева низа,*

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m \geqslant n \geqslant n_0) \max_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а тоа значи дека за секој $x \in [a, b]$*,* $|f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$*, односно за секој* $x \in [a, b]$ *важи:*

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m \geqslant n \geqslant n_0) \qquad (f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_m(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}),$$

За фиксни n *и* x*, од последното неравенство се гледа дека секој член на низата* $(f_m(x))_{m=1}^{\infty}$ *е помеѓу броевите* $f_n(x) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ *и* $f_n(x) + \dfrac{\varepsilon}{2}$*. Земајќи лимес кога* $m \to \infty$*, добиваме:*

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < \lim_{m\to\infty} f_m(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

или

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Така, за секој $x \in [a,b]$ *и за секој* $n > n_0$ *важи*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ . \tag{6.3}$$

Во продолжение ќе покажеме дека $f \in C_{[a,b]}$*, односно дека* f *е непрекината во секоја точка* $x_0 \in [a,b]$*:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a,b]) \qquad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ .$$

Нека $\varepsilon > 0$*. Според (6.3), постои* $n_0 \in \mathbb{N}$*, така што за секој* $x \in [a,b]$ *важи* $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$*. Функцијата* $f_{n_0} \in C([a,b])$ *е непрекината во* x_0*, па затоа постои* $\delta > 0$*, таков што ако* $|x - x_0| < \delta$*, тогаш*

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Конечно, ако $|x - x_0| < \delta$*, тогаш*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Со ова покажавме дека f *е непрекината во* x_0*.*

Покажавме дека Кошиевата низа $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *конвергира кон функцијата* $f \in C_{[a,b]}$*. Од произволноста на низата* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$*, добиваме дека* $C_{[a,b]}$ *со рамномерната метрика е комплетен простор.* ◆

Пример 6.2.12. *Множеството полиноми дефинирани над затворен и ограничен интервал* $[a,b]$ *со метриката од примерот 6.2.11 не е комплетен метрички простор. Граница на низа од полиноми, во општ случај, е непрекината функција, што не мора да биде полином. На* *пример, низата од полиноми* $(P_n(x))_{n=1}^{\infty}$, *со општ член* $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, *конвергира кон функцијата* $f(x) = e^x$ *на кој било затворен и ограничен интервал.* ◆

Пример 6.2.13. *Просторот* $(C_{[0,1]}, d_1)$ *не е комплетен, при што*

$$d_1(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \,. \tag{6.4}$$

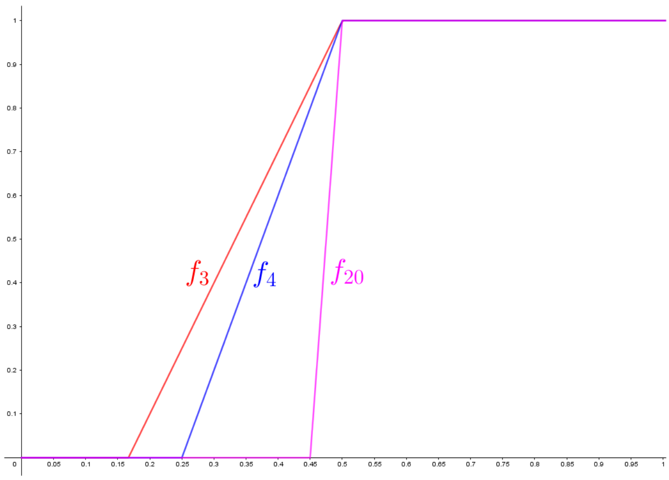
Ќе дадеме пример на низа во $(C_{[0,1]}, d_1)$ *што е Кошиева, но не е конвергентна. Нека* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *е низата во* $(C_{[0,1]}, d_1)$ *со општ член*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ако } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 & \text{ако } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{ако } \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *е Кошиева бидејќи:*

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}} f_m(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} f_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \to 0 \qquad \text{кога } m, n \to \infty \end{aligned}$$

На сликата 6.1 се претставени f_3, f_4 *и* f_{20}. *Величината* $d_1(f_n, f_m)$ *е бројната вредност на плоштината на ликот (триаголникот) помеѓу графиците на функциите* f_m *и* f_n. *Ќе покажеме дека не постои непрекината функција* $f \in C_{[0,1]}$ *за што важи* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. *Ако го претпоставиме спротивното, дека постои* $f \in C_{[0,1]}$ *за која што* $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, f) =$



Слика 6.1: Некомплетност на $(C_{[0,1]}, d_1)$

0, *ќе добиеме*

$$d(f_n, f) = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - f(x)|\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Од последното следува дека

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0,$$

и поради непрекинатоста на функцијата f, *добиваме:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

што не е можно. Покажавме дека просторот $(C_{[0,1]}, d)$, *со метриката* $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$ *не е комплетен.* ◆

6.2.2 Кошиеви низи во потпростори

Нека (X, d) е метрички простор и (Y, d_Y) е негов потпростор.

Теорема 6.2.14. *Ако низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во Y, тогаш таа низа е Кошиева и во X.*

Доказ. Ако $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во Y, тогаш $\forall \varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ и топка со радиус ε што ги содржи сите $x_n, n \geqslant n_0$, т.е.

$$\{x_n : n \geqslant n_0\} \subseteq T_Y(x, \varepsilon) = T_X(x, \varepsilon) \cap Y \subseteq T_X(x, \varepsilon).$$

Следува дека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X.

■

Теорема 6.2.15. *Ако $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X и $(\forall n \in \mathbb{N}), x_n \in Y$, тогаш $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во Y.*

Доказ. Нека Y е потпростор од X и $x_n \in Y, \forall n \in \mathbb{N}$. Нека $r > 0$. Бидејќи низата е Кошиева во X, постои $a \in X$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $T_X(a, \frac{r}{2})$ е надмножество на $\{x_n : n \geqslant n_0\}$ (теорема 6.2.2). Нека $k \in \mathbb{N}$ е таков што $x_k \in T_X(a, \frac{r}{2})$. Тогаш, $Y \cap T_X\left(a, \frac{r}{2}\right) \subseteq Y \cap T_X\left(x_k, r\right) = T_Y\left(x_k, r\right)$. Значи, $T_Y\left(x_k, r\right)$ е топка во Y што го содржи множеството $\{x_n : n \geqslant n_0\}$. Од произволноста на r и теоремата 6.2.2, добивме дека низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во Y.

■

Теорема 6.2.16. *Ако (X, d_X) е комплетен метрички простор во кој Y е затворено множество, тогаш (Y, d_Y) е комплетен метрички простор во однос на метриката наследена од X.*

Доказ. Нека (X, d_X) е комплетен метрички простор, Y е затворено подмножество од X и $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во Y. Тогаш $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X (теорема 6.2.14), па постои $x_0 \in X$ такво што

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Од последицата 5.4.2 имаме дека $x_0 \in Y$, односно низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна. Од произволноста на низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, просторот Y е комплетен.

■

Пример 6.2.17. *Просторите c и c_0 се затворени потпростори од комплетниот метрички простор l^{∞}, (видете ја задачата 14) па и тие се комплетни.* ♦

Теорема 6.2.18. *Нека (Y, d_Y) е потпростор од метричкиот простор (X, d_X). Ако Y е комплетен, тогаш Y е затворено множество во X.*

Доказ. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во Y што конвергира кон $x_0 \in X$. Тогаш, според теоремата 6.2.3, низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во Y. Бидејќи Y е комплетен, низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира во Y, така $x_0 \in Y$. Од последицата 5.4.2, следува дека Y е затворено множество во X.

■

6.3 Задачи за самостојна работа

1. Покажете дека $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ со рестрикција на евклидската метрика не се комплетни метрички простори.

2. Докажете дека низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, каде што $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ не е Кошиева во $\mathbb{R}$ со обичната метрика.

3. Покажете дека секој дискретен метрички простор (X, d) е комплетен.

4. Множеството $c(\mathbb{R})$ од сите конвергентни низи со метрика дефинирана со $d(x, y) = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i|$, каде што $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ и $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$, е комплетен метрички простор.

5. Во просторот $C_{[0,1]}$ со рамномерната метрика, нека (f_n) е низа дефинирана со општиот член $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}, x \in [0,1]$. Покажете дека (f_n) е Кошиева низа.

6. Нека X е просторот од сите ограничени низи во $\mathbb{R}$, со
$$d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|,$$
каде што $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ и $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ се во X. Покажете дека подмножеството Y од конвергентни низи е затворено во X.

7. Користејќи ја теоремата 6.2.16, докажете дека множеството $\mathbb{Q}$ не е затворено во $\mathbb{E}$.

8. Докажете дека производ на два комплетни метрички простора X и Y е комплетен метрички простор. Метриката е дефинирана како во задачата 17 од првата глава на еден од следниве три начина:
а) $D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(d_x(x_1,x_2))^2 + (d_y(y_1,y_2))^2}$
б) $D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_x(x_1,x_2) + d_y(y_1,y_2)$,
в) $D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_x(x_1,x_2), d_y(y_1,y_2)\}$

9. Покажете дека просторот $(\mathbb{R}^n, d_p)$ е комплетен.

10. Покажете дека просторот $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ е комплетен.

11. Дали $(\mathbb{Z}, d)$ со $d(m,n) = |m-n|$ е комплетен?

12. Нека $\mathbb{N}$ има метрика $d(m,n) = \dfrac{|m-n|}{mn}$. Докажете дека во овој простор низата $(n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева. Дали оваа низа е конвергентна?

13. Покажете дека метричкиот простор $(\mathbb{R}, d)$, каде што
$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}},$$
не е комлетен.

14. Покажете дека за секое $1 \leqslant p \leqslant \infty$, метричкиот простор l^p е комплетен.

15. Ако секоја затворена топка во (X, d) е комплетна, докажете дека и X е комплетен метрички простор.

16. Нека A и B се множества од метрички простор (X, d). Ако A и B се комплетни, докажете дека тогаш и $A \cup B$ и $A \cap B$ се комплетни.

17. Најдете низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ од реални броеви што не е Кошиева, но го има следното својство: $\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon$.

18. Нека (X, d_x) и (Y, d_y) се метрички простори и $f : X \to Y$ е изометрија. Покажете дека низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во просторот (X, d_x) низата $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во просторот (Y, d_y).

19. Нека $B(T)$ е просторот од сите ограничени реални функции на множество T, снабден со норма $\|x\| = sup\{|x(t)| : t \in T\}$. Покажете дека низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во $B(T)$ е Кошиева $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall t \in T, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_{n+k}(t) - x_n(t)| < \varepsilon$.

20. Нека $X = \mathbb{Q}$ е простор од рационални броеви и нека $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Докажете дека x_n е Кошиева низа што не конвергира во X.

21. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од реални броеви дефинирана со: $x_1 = a$, $x_2 = b$ и $x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Покажете дека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа.

22. Покажете дека просторот $C^2_{[-1,1]}$ (видете задача 32 од Глава 1) не е комплетен.

23. Покажете дека Кошиева низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во метрички простор (X, d) конвергира ако и само ако има барем една точка на натрупување.

Глава 7

Граница на функција

7.1 Поим за гранична вредност

Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори, $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ е функција и $p \in A'$.

Дефиниција 7.1.1. *Велиме дека точката $q \in Y$ е **гранична вредност** или **лимес** на функцијата f кога x тежи кон p ако за секоја околина V_q на точката q постои околина U_p на точката p така што*

$$(\forall x \in A)(x \in U_p \setminus \{p\} \Rightarrow f(x) \in V_q). \tag{7.1}$$

Ќе ја користиме ознаката:

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \, .$$

Се користат и ознаките

$$f(x) \to q \text{ кога } x \to p \qquad \text{или} \qquad f(x) \xrightarrow{x \to p} q.$$

Забелешка 7.1.2. *Да забележиме дека* $p \in X$*, но* p *не мора да припаѓа во* A*. Уште повеќе, ако* $p \in A$*, може да се случи* $\lim\limits_{x \to p} f(x) \neq f(p)$.

Пример 7.1.3. *Нека функцијата* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *е дефинирана со:* $f(x) = \dfrac{x}{x}$*. Дефиниционата област на функцијата* f*, т.е.* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*, не ја содржи точката* $p = 0$*, меѓутоа постои* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1$. ♦

Пример 7.1.4. *Нека функцијата* f *е дефинирана на* $[-1, 1]$ *со:*

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ако } x \neq 0 \\ 1, & \text{ако } x = 0 \end{cases}$$

Тогаш, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$. ♦

Теорема 7.1.5. *Точката* $q \in Y$ *е граница на функцијата* f *кога* x *тежи кон* p*, ако и само ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall x \in A)(0 < d_X(x, p) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), q) < \varepsilon). \quad (7.2)$$

Доказ. Нека $V_q = T(q, \varepsilon)$ е околина на точката q. Постои околина U_p на точката p така што $(\forall x \in A)(x \in U_p \setminus \{p\} \Rightarrow f(x) \in V_q)$. Од дефиницијата за околина на точка, постои $\delta > 0$, така што $T(p, \delta) \subseteq U_p$.

■

Забелешка 7.1.6. *Теоремата 7.1.5 е еквивалентна на дефиницијата 7.1.1 и понекогаш таа се зема како дефиниција за лимес на функција. Се вика "*$\varepsilon - \delta$*"-дефиниција за лимес на функција.*

Последица 7.1.7. $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$ *ако и само ако* $\lim\limits_{x \to p} d_Y(f(x), q) = 0$.

Доказ. Доказот на ова тврдење се остава на читателот како вежба.

■

Теорема 7.1.8. *Точката $q \in Y$ е гранична вредност на функцијата f во точката p ако и само ако за секоја низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во $A \setminus \{p\}$ што конвергира кон p важи дека низата $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон q.*

Доказ. Нека $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ и нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во $A \setminus \{p\}$ за која $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Тогаш постои $\delta_\varepsilon > 0$ така што $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$ за сите $x \in A$ за кои $0 < d_X(x, p) < \delta_\varepsilon$. Исто така, постои $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, така што за секој $n \geqslant n_\varepsilon$ важи $0 < d_X(x_n, p) < \delta_\varepsilon$. Така, за секој $n \geqslant n_\varepsilon$ имаме $d_Y(f(x_n), q) < \varepsilon$, што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = q$.

За обратната насока, нека не е точно дека $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$. Тогаш постои $\varepsilon_0 > 0$ таков што за секое $\delta > 0$, постои $x_\delta \in A$ за кој важи $0 < d_X(x_\delta, p) < \delta$ и $d_Y(f(x_\delta), q) \geqslant \varepsilon_0$. За $n \in \mathbb{N}$ избираме $\delta_n = \dfrac{1}{n}$. Добиваме низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во A за која $0 < d_X(x_n, p) < \delta_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и притоа важи $d_Y(f(x_n), q) \geqslant \varepsilon_0$. Така, добивме низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ за која $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, но не важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = q$.

■

Теоремите кои следуваат се докажуваат слично како аналогните теореми од Математичка анализа 1, т.е. теоремите за реални функции од една реална променлива.

Теорема 7.1.9. *Ако функција f има гранична вредност во точка p, тогаш таа е единствена.*

Теорема 7.1.10. *Ако функција f има гранична вредност во точка p, тогаш за некоја околина U на точката p, множеството од вредности $f(U) = \{f(x) : x \in U\}$ е ограничено.*

Теорема 7.1.11. *Нека X, Y, Z се метрички простори и нека:*

i) $B \subseteq Y$, $b \in B'$, $g : B \to Z$ *и* $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$,

ii) $A \subseteq X$, $a \in A'$, $f : A \to B$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Тогаш, $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = c.$

7.2 Задачи за самостојна работа

1. Докажете ги теоремите: 7.1.5, 7.1.7, 7.1.9, 7.1.11

Глава 8

Гранична вредност на функции со домен на $\mathbb{R}^n$

Во претходниот дел ги разгледувавме границите на функции помеѓу два произволни метрички простора. Во овој дел ќе се задржиме на функции кои се дефинирани на множество од $n-$димензионалниот Евклидски простор $\mathbb{R}^n$ и за кои кодоменот е множество од $\mathbb{R}^m$.

Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ако на секој $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, по некое правило му се придружи единствен вектор $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, тогаш велиме дека на A е определена **векторска функција**.

Нека е дефинирана векторската функција $f : A \to \mathbb{R}^m$ со

$$f\left((x_1, \ldots, x_n)\right) = \left(y_1, \ldots, y_m\right). \tag{8.1}$$

Тогаш, за секој $i \in \{1, \ldots, m\}$ реалната функција

$$f_i : A \to \mathbb{R}, \qquad f_i((x_1, \ldots, x_n)) = y_i, \tag{8.2}$$

се вика ***i*-та координатна функција** на функцијата $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Множеството $A(\subseteq \mathbb{R}^n)$ го викаме **домен**, **област на дефинираност** или **дефинициона област** на функцијата f, а $Y = f(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ е **множество од вредности** на функцијата f.
Ако $m = 1$, f се вика **реална (скаларна) функција од n независни променливи.** Овој партикуларен случај секогаш ќе го нагласуваме, бидејќи е од посебна важност. Исто така, од интерес ќе бидат и векторските функции од една реална променлива (ако $n = 1$).

Забелешка 8.0.1. *Понатаму, наместо $f(x) = f\left((x_1, \ldots, x_n)\right)$ ќе означуваме*

$$f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right) .$$

8.1 Симултани гранични вредности

Поимот гранична вредност на векторска функција во точка од векторски простор е посложен концепт отколку граничната вредност на реална функција од една реална променлива. Сепак, сличностите се многубројни. Во продолжение ќе дадеме повеќе дефиниции на поимот гранична вредност на векторска функција.

Дефиниција 8.1.1. *Нека $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ и нека $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A'$. Велиме дека векторот $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ е **гранична вредност** или **лимес** на функцијата f во точката a **(кога x тежи кон a низ (долж) множеството A)** ако за секоја околина $U(b) \subseteq \mathbb{R}^m$ на точката b постои околина $U(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ на точката a така што за секој $x \in (U(a) \setminus \{a\}) \cap A$ важи $f(x) \in U(b)$.*

Означуваме

$$\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$$

или

$$\lim_{\substack{\|x-a\|_{\mathbb{R}^n} \to 0 \\ x \in A}} f(x) = b$$

или

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots \\ x_n \to a_n \\ x \in A}} f(x_1, \ldots, x_n) = b \tag{8.3}$$

Дефиницијата 8.1.1 може да се формулира на повеќе начини:

Теорема 8.1.2. *Следниве искази се еквивалентни:*
1. $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = b$;
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall x \in A,\ \ 0 < \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ \|f(x) - b\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon)$ *(критериум на Коши);*
3. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall x \in A)(\forall i \in \{1, \ldots, n\})$

$$(0 < |x_i - a_i| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon);$$

4. *За секоја низа* $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ *во* $A \setminus \{a\}$, $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = b$ *(критериум на Хајне-Борел).*

Доказ. Доказот се остава на читателот како вежба. Консултирајте ги теоремата 7.1.5, последицата7.1.7 и теоремата 7.1.8,

■

Забелешка 8.1.3. *Ако постои околина* $U(a) \subseteq \mathbb{R}^n$, $U(a) \setminus \{a\} \subseteq A$, *тогаш не е потребно во дефиницијата 8.1.1 експлицитно да го спомнуваме множеството* A. *Во тој случај велиме дека* ***точката*** $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ ***е гранична вредност на функцијата*** $\boldsymbol{f}$ ***во точката*** $\boldsymbol{a}$ *и пишуваме:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

или

$$\lim_{\|x - a\|_{\mathbb{R}^n} \to 0} f(x) = b$$

или

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f((x_1, \ldots, x_n)) = b.$$

Во изразот $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ при што $x, a \in \mathbb{R}^n$, записот $x \to a$, кој е еквивалентен со $d(x,a) \to 0$ или $\|x-a\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$, значи дека x може да се приближува кон точката a на произволен начин, односно променливите $x_1, \ldots, x_n$ тежат независно, но истовремено (симултано), кон вредностите $a_1, \ldots, a_n$ соодветно. Затоа, лимесот од (8.3) го викаме **симултан** лимес. Во случајот кога $n = 2$, граничната вредност ја викаме **двојна гранична вредност**.

За практично пресметување на $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ обично се користат неравенства, смени, сведување на лимес со една променлива, воведување на поларни координати (или на сферни или цилиндрични координати за случаи во $\mathbb{R}^3$) и други постапки кои се аналогни на познати постапки кај граничните вредности на функции од една независна променлива.

Забелешка 8.1.4. *Случајот на реална функција со повеќе променливи*

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R},$$

се добива за $m = 1$ и во кодоменот на функцијата f, просторот $\mathbb{R}^m$, земаме апсолутна вредност $|\cdot|$ наместо норма $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ Притоа, граничната вредност b е реален број и неговата околина $U(b)$ е отворен интервал на реалната права. Во овој случај b може да биде $+\infty$ или $-\infty$ и тогаш велиме дека функцијата f дивергира и лимесот не постои.

Забелешка 8.1.5. *Лимесите низ (долж) дадено множество, обично се бараат низ (долж) некои карактеристични множества. На пример, ако A е крива или права во рамнината што минува низ точката (a_1, a_2), тогаш $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x)$ е гранична вредност долж кривата A (правата A).*

Ако $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$ се параметарски равенки на оваа крива, тогаш лимесот се означува со $\lim\limits_{t\to t_0} (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ каде t_0 е вредноста на параметарот t за која што $\varphi_1(t_0) = a_1$ и $\varphi_2(t_0) = a_2$. Пресметувањето на овие гранични вредности може да ни послужи да ја претпоставиме граничната вредност, а потоа да ја потврдиме преку дефиницијата 8.1.1.

Забелешка 8.1.6. *Променливата x може да се стреми кон a на различни начини. Така, за да постои $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ треба за произволна низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ од A, $x_n \neq a$, што конвергира кон a, соодветната низа од вредности на функцијата $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ треба да конвергира кон истиот b. Во спротивно, ако постојат барем две низи кои конвергираат кон a, а соодветните низи од функционални вредности на овие две низи немаат иста граница, тогаш функцијата f нема гранична вредност во точката a.*

Дефиницијата на гранична вредност преку низи згодно е да се користи кога треба да покажеме дека не постои гранична вредност во некоја точка. За ова, доволно е да се најдат две низи што конвергираат кон иста точка, додека низите од нивните слики не конвергираат кон иста вредност, или барем едната од низите од слики воопшто не конвергира.

Пример 8.1.7. *Ќе покажеме дека не постои гранична вредност на функцијата $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ во точката $(0,0)$. Ги разгледуваме низите $\left(\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ и $\left(\left(\dfrac{1}{n}, 0\right)\right)_{n=1}^{\infty}$. Овие две низи конвергираат кон $(0,0)$, меѓутоа*

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2} - 0}{\dfrac{1}{n^2}} = 1$$

и

$$\lim_{n\to\infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{0 - \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = -1.$$

Бидејќи лимесите на низите од функционалните вредности се различни, граничната вредност на функцијата во $(0,0)$ не постои. ♦

Теорема 8.1.8. *Нека е дадена векторската функција*

$$f = (f_1, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$$

и $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. *Тогаш,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f_j(x) = b_j, \quad j = 1, \dots m. \tag{8.4}$$

Доказ. Доказот следува од теоремата 5.3.2.

■

Последица 8.1.9. *Ако за* $f = (f_1, \dots, f_m)$ *барем една од координатните функции нема гранична вредност во точката* a, *тогаш и функцијата* f *нема гранична вредност во* a.

За да го воведеме поимот граница на функција во бесконечно оддалечена точка, прво ќе дефинираме ε-околина на бесконечно оддалечената точка ∞.

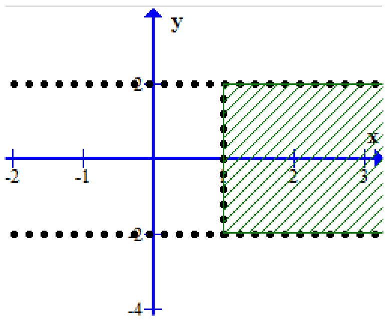
Дефиниција 8.1.10. ε*-околина на бесконечно оддалечената точка во* $\mathbb{R}^n$, *означуваме со* $T(\infty, \varepsilon)$, *е надворешноста на отворената топка со центар во координатниот почеток* $O = (0, \dots, 0)$ *и радиус* $\dfrac{1}{\varepsilon}$, *односно*

$$T(\infty, \varepsilon) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, O) > \frac{1}{\varepsilon} \right\}. \tag{8.5}$$

Да забележиме дека ако A е неограничено подмножество од $\mathbb{R}^n$, тогаш пресекот на A со која било околина $T(\infty, \varepsilon)$ на бесконечно оддалечена точка е непразен. Тоа значи дека постои низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во A таква што $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

Пример 8.1.11. *Една околина на бесконечно оддалечената точка* $a = (+\infty, a_2 \dots, a_n)$ *е* $n-$*димензионалниот паралелопипед*

$$U(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > M, |x_2 - a_2| < \delta_2, \dots, |x_n - a_n| < \delta_n\},$$



Слика 8.1: Околина на бесконечна точка во $\mathbb{R}^2$

каде што M е произволно голем број. На сл. 8.1 е прикажана околина на бесконечна точка во $\mathbb{R}^2$ при што $x > 1, |y| < 2$.

Лимесот на функција во бесконечно оддалечена точка може да се дефинира преку низи кои конвергираат кон таа точка.

Теорема 8.1.12. *Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A$ е бесконечно оддалечена точка, $f : A \to \mathbb{R}$ е зададена функција и $b \in \mathbb{R}$. Следниве искази се еквивалентни:*

1) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$
2) *За секоја низа* $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ *во* A, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

За разлика од бесконечно оддалечените точки, точките од $\mathbb{R}^n$ ги викаме **конечни точки.**
Нека функцијата f е дефинирана на множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и a е конечна или бесконечно оддалечена точка од A.

Дефиниција 8.1.13. *Точката b е* ***граница на функцијата f низ множеството A во точката*** *a ако за секоја околина $U(b)$ на точката b, постои околина $U(a)$ на точката a, така што*

$$f(A \cap U(a)) \subseteq U(b). \tag{8.6}$$

Забелешка 8.1.14. *Границата на функцијата $f(x_1, \ldots, x_n)$ при услов $x_k \to \infty$ ($x_k \to +\infty$ или $x_k \to -\infty$) и $x_i \to a_i$, за $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$, ќе ја разгледуваме како граница на функцијата $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, \frac{1}{t}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ кога $t \to 0$ ($t \to 0^+$ или $t \to 0^-$) и $x_i \to a_i$, $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$. Ако повеќе координати од точката x се стремат кон бесконечност, тогаш тие координати ги заменуваме со $\dfrac{1}{t_1}, \dfrac{1}{t_2}$, итн.*

Пример 8.1.15. *Ќе ја пресметаме следнава граница:*

$$\lim_{\substack{y\to 3\\ x\to\infty}} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

поради непрекинатоста на експоненцијалната функција, имаме

$$\lim_{\substack{y\to 3\\ x\to\infty}} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{\substack{y\to 3\\ x\to\infty}} \exp\left(\ln((1 + \frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}})\right) = \exp\left(\lim_{\substack{y\to 3\\ x\to\infty}} \frac{x^2}{x+y} \ln(1 + \frac{1}{x})\right)$$

Со смената $x = \dfrac{1}{t}$, $(x, y) \to (\infty, 3)$ станува $(t, y) \to (0, 3)$ па имаме:

$$\lim_{\substack{y\to 3\\ x\to\infty}} \frac{x^2}{x+y} \ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{\substack{y\to 3\\ t\to 0}} \frac{1}{t^2(\frac{1}{t} + y)} \ln(1+t) = \lim_{\substack{y\to 3\\ t\to 0}} \frac{1}{1+ty} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

Оттука, за почетниот лимес добиваме:

$$\lim_{\substack{y\to 3\\ x\to\infty}} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}} = e^1 = e. \quad \blacklozenge$$

8.2 Последователни гранични вредности

Нека $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ е векторска функција од n променливи и нека $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A'$ каде $a_i \in \overline{A_i} \cap \mathbb{R}$. Нека $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, е бијекција (пермутација) и $\pi(k) = i_k, k = 1, \dots, n$. Ќе ги разгледаме векторските функции - гранични вредности кои се добиваат од функцијата $f(x_1, \dots, x_n)$ кога, освен x_i, останатите променливи се земаат како фиксирани: Најпрвин ја бараме граничната вредност

$$\lim_{x_{i_1} \to a_{i_1}} f(x) = \varphi_{i_1}(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_n). \tag{8.7}$$

Функциите $\varphi_{i_1}(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_n)$ од $(n-1)$ променливи ги викаме **парцијални гранични функции**.

Наредно, бараме лимес на функцијата φ_{i_1} кога $x_{i_2} \to a_{i_2}$, а останатите променливи се фиксни, добиваме нова парцијална гранична функција од $(n-2)$ независни променливи:

$$\lim_{x_{i_2} \to a_{i_2}} \varphi_i(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_n) = \lim_{x_{i_2} \to a_{i_2}} \lim_{x_{i_1} \to a_{i_1}} f(x_1, \dots, x_n)\ . \tag{8.8}$$

Продолжувајќи ја постапката, на крајот доаѓаме до изразот:

$$\lim_{x_{i_n} \to a_{i_n}} \dots \lim_{x_{i_2} \to a_{i_2}} \lim_{x_{i_1} \to a_{i_1}} f(x_1, \dots, x_n).$$

Оваа гранична вредност се вика **последователна (итерирана)** гранична вредност на функцијата f во точката $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Забелешка 8.2.1. *Последователна (итерирана) гранична вредност е пример за лимес низ дадено множество. Поточно, тоа е лимес долж искршена линија што се добива со движење на точка x кон точката a долж прави паралелни на координатните оски, по редослед определен со пермутацијата.*

Се наметнува следново прашање: дали лимесот може да се одреди покоординатно, односно дали наместо лимесот $\lim_{x \to a} f(x) = b$ може да се побараат последователните лимеси:

$$\lim_{x_{i_1} \to a_{i_1}} \lim_{x_{i_2} \to a_{i_2}} \dots \lim_{x_{i_n} \to a_{i_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,$$

каде што $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ е некоја пермутација на броевите $1, 2, \ldots, n$? Одговорот е негативен. За илустрација ќе наведеме неколку примери:

Пример 8.2.2. *Нека* $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ *и* $(a,b) = (0,0)$. *Ќе ги пресметаме последователните граници:* $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}$ *и* $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}$. *Ги добиваме парцијалните гранични функции*

$$\varphi_x(y) = \lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \frac{0-y}{0+y} = \frac{-y}{+y} \quad \textit{и} \quad \varphi_y(x) = \lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \frac{x-0}{x+0} = \frac{x}{x}$$

За последователните лимеси на функцијата имаме:

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}) = \lim_{y\to 0}\varphi_x(y) = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{+y} = -1$$

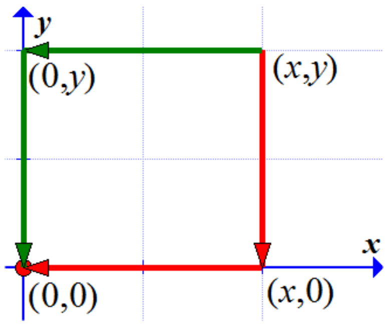
$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}) = \lim_{x\to 0}\varphi_x(y) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

Во првиот случај, бараме граница долж искршената линија со темиња во точките: $(x,y), (0,y)$ *и* $(0,0)$, *т.е. зелената патека, а во вториот долж искршената линија со врвови во точките* (x,y), $(x,0)$, $(0,0)$, *т.е. црвената патека (видете црт. 8.2). Бидејќи последователните гранични вредности се различни, заклучуваме дека двојната гранична вредност не постои.* ◆

Пример 8.2.3. *Нека* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *е пресликувањето дефинирано со* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. *Ако* $x \neq 0 \neq y$, *тогаш добиваме дека* $f(0,y) = f(x,0) = 0$, *од каде*

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0\ .$$

Ќе покажеме дека не постои $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$. *Да ги разгледаме двете низи* $a_n = (\dfrac{1}{n}, 0)$ *и* $b_n = (\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n})$ *во* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Јасно е дека и двете низи*



Слика 8.2: Патеки по кои се пресметуваат последователните граници: зелената за $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ и црвената за $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$

конвергираат кон $(0,0)$, *т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = (0,0)$. *Меѓутоа,*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{(\frac{1}{n})^2 + 0^2} = 0\ ,$$

а

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2}\ .\blacklozenge$$

Пример 8.2.4. *За функцијата од примерот 8.1.7,* $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1; \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1\ ,$$

т.е. последователните лимеси постојат и се различни. Значи, во овој случај не постои $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

Пример 8.2.5. *Ако* $f(x,y) = x + y\sin\dfrac{1}{x}$, *тогаш* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f((x,y)) = 0$.

Навистина, за $\varepsilon > 0$, *избираме* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. *Ако* $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, *тогаш*

$$|f(x,y) - 0| = |x + y \sin \frac{1}{x}| \leqslant |x| + |y||\sin \frac{1}{x}| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon \ .$$

Меѓутоа, не постои $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x,y)$. *(Да се докаже!)*

Во врска со тоа ја даваме следната:

Теорема 8.2.6. *Нека* $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in A'$ *и нека*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = c \ .$$

Ако постои околина V *на точката* b, *таква што за секое* $y \in V$ *постои*

$$\lim_{x \to a} f(x,y) = \phi(y) \ ,$$

тогаш постои лимесот $\lim\limits_{y \to b} \phi(y) = \lim\limits_{y \to b} \lim\limits_{x \to a} f(x,y)$ *и е еднаков на* c.

Доказ. Нека $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = c$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш постои $\delta > 0$ такво што

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \qquad \Longrightarrow |f(x,y) - c| < \varepsilon \ .$$

Нека $V_1 = T((a,b),\delta) \cap \{(x,y) : y \in V\}$. Тогаш V_1 е отворено подмножество од $T((a,b),\delta)$ што ја содржи точката (a,b). Затоа постои $\delta' > 0$ такво што $T((a,b),\delta') \subseteq V_1$. За $(x,y) \in V_1$ постои $\lim\limits_{x \to a} f(x,y) = \phi(y)$ па постои $\delta_1 > 0$ такво што за $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta_1$ имаме $|f(x,y) - \phi(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Нека земеме $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1\}$. Тогаш за $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta_0$ имаме

$$|\phi(y) - c| < |\phi(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

$\blacksquare$

Последица 8.2.7. *Ако се исполнети претпоставките на претходната теорема и ако постои околина U на точката a, таква што за секое $x \in U$ постои $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, тогаш постои и $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ и важи*

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)\ .$$

8.3 Задачи за самостојна работа

1. Нека b е граничната вредност на функцијата f во точката a долж множество A и нека $B \subseteq A$ и $a \in B'$. Покажете дека постои граничната вредност на функцијата f во точката a долж множеството B и важи $\lim\limits_{\substack{x\in B\\ x\to a}} f(x) = b$.

2. Докажете ја теоремата 8.1.2.

3. Покажете дека ако постои гранична вредност во точка, тогаш е еднозначно определена.

4. Докажете дека ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, тогаш $\lim\limits_{x\to a} \|f(x)\| = \|b\|$. Дали важи обратното тврдење?

5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \|f(x) - b\| = 0$. Докажете!

6. Докажете дека ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, тогаш постои околина $U(a)$ така што $f(x) \neq 0$ за $x \in (U(a) \setminus \{a\}) \cap A$.

7. Пресметајте ги следниве граници:
   а) $\lim\limits_{\substack{y\to\infty\\ x\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$,
   б) $\lim\limits_{\substack{y\to\infty\\ x\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

8. Проверете дали постојат границите:

   а) $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \dfrac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$,

   б) $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

9. Пресметајте ја границата долж дадените криви:

   а) $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$ долж правата $y = mx$.

   б) $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \dfrac{xy-y^2}{x+y^2}$ долж правите $y = mx$ и $x = 0$.

10. Определете дали постојат и ако постојат пресметај ги последователните граници на функцијата:

    а) $f(x,y) = \dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$ во точката $(a,b) = (0,0)$;

    б)$f(x,y) = \dfrac{x^y}{1+x^y}$ во точката $(+\infty, 0)$;

    в) $f(x,y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$ во точката $(+\infty,+\infty)$;

    г) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$ во точката $(0,+\infty)$.

Глава 9

Непрекинатост во метрички простор

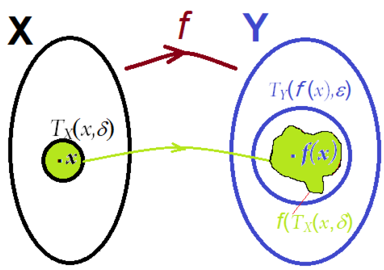
Непрекинатоста е едно од најважните и најиспитуваните својства кај реалните функции од една реална променлива, т.е. функции со домен и кодомен во $\mathbb{R}$. Имено, непрекината функција е функција која што „блиски“ точки од доменот ги пресликува во „блиски“ точки од кодоменот. Со други зборови, мали промени на аргументот на функцијата ќе предизвикаат мали промени кај вредностите на функцијата.

Во ова поглавје ќе ја прошириме идејата за непрекинатост на пресликување помеѓу произволни метрички простори. Најпрвин ќе дадеме дефиниција за непрекинатост на пресликување од еден метрички простор во друг метрички простор што е генерализација на дефиницијата за непрекинатост на реални функции од една реална променлива. Во продолжение ќе наведеме некои дополнителни својства на непрекинатите пресликувања во метрички простори што се еквивалентни на дефиницијата за непрекинатост на пресликувања. Овие тврдења може да се земат како алтернативни дефиниции за непрекинатост на пресликување.

Едната дефиниција е преку конвергенција на низи во метрички простор, а другата преку отворени множества или отворени топки. Ќе докажеме дека композицијата од непрекинати пресликувања е непрекинато пресликување. На крајот, ќе го воведеме поимот за рамномерна непрекинатост.

9.1 Поим за непрекинатост на функција во метрички простор

Дефиниција 9.1.1. *Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори и $f : X \to Y$ е пресликување. Велиме дека пресликувањето f е* ***непрекинато во точката*** *$x_0 \in X$ ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta_\varepsilon > 0$ таков што $f\left(T_X(x_0, \delta_\varepsilon)\right) \subseteq T_Y\left(f(x_0), \varepsilon\right)$, односно за секој $x \in X$ чие растојание до x_0 е помало од δ_ε, $d_X(x_0, x) < \delta_\varepsilon$, е исполнето $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.*



Слика 9.1: $\varepsilon - \delta$-дефиниција за непрекинато пресликување $f : X \to Y$ во точката $x \in X$.

Гледаме дека непрекинатоста на пресликување во метрички простор е локално својство бидејќи се дефинира во една точка од метричкиот простор, исто како и кај реалните функции од една реална променлива. Природно е овој поим да се прошири до непрекинатост на целиот метрички простор.

Дефиниција 9.1.2. *Ако $f : A \to Y$ е непрекинато пресликување во секоја точка од множество $A \subseteq X$, тогаш велиме дека f* ***е непрекинато пресликување на множеството*** *A.*

Велиме дека $f : X \to Y$ е ***непрекинато пресликување*** *ако f е непрекинато во секоја точка од X.*

Пример 9.1.3. *Произволна функција f е непрекината во секоја изолирана точка од својот домен D_f. Навистина, нека p е изолирана точка од доменот на f и $\varepsilon > 0$ е произволно. Од дефиницијата на изолирана точка, постои $\delta_p > 0$, таков што ако $d_X(x,p) < \delta_p$, тогаш $x = p$. Значи, важи $d_Y(f(x), f(p)) = d_Y(f(p), f(p)) = 0 < \varepsilon$ од каде следува непрекинатоста на функцијата во точката p.*$\blacklozenge$

Пример 9.1.4. *Кое било пресликување $f : X \to Y$ од дискретен метрички простор X во произволен метрички простор Y е непрекинато. Навистина, секоја точка во дискретен простор е изолирана. За произволни $a \in X$ и $\varepsilon > 0$ избираме $\delta_a = 1/2$. Тогаш, $T(a, \delta_a) = \{a\}$ и $f(T(a, \delta_a)) = \{f(x) : x \in T(a, \delta_a)\} = \{f(a)\} \subseteq T(f(a), \varepsilon)$.* $\blacklozenge$

9.2 Критериум за непрекинатост со низи

Следнава теорема е карактеризација за непрекинатост на пресликување преку конвергентни низи:

Теорема 9.2.1. *Нека $f : X \to Y$ е пресликување и $a \in X$. Тогаш, следниве тврдења се еквивалентни:*

i) *f е непрекинато во точката $a \in X$;*

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

iii) *За секоја низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во X, за која што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, важи*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Доказ. Доказот му се остава на читателот како вежба.

$\blacksquare$

Пример 9.2.2. *Нека $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ е произволно избран. Функцијата $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинирана со*

$$p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i, \tag{9.1}$$

*се вика **проекција по i-тата координата**. Ќе покажеме дека p_i е непрекината на $\mathbb{R}^n$. Нека $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ е произволен и нека $a_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n})$ е општиот член на низа во $\mathbb{R}^n$ што конвергира кон a. Според теоремата 5.3.2, важи $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k,i} = a_i$. На крај, имаме*

$$\lim_{k\to\infty} p_i(a_k) = \lim_{k\to\infty} a_{k,i} = a_i = p_i(a)\ . \quad \blacklozenge$$

Пример 9.2.3. *Функцијата*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

е непрекината во $(0,0)$. Доказот ќе го дадеме на два начина: I) со помош на „$\varepsilon - \delta$“ дефиницијата, и II) преку теоремата 9.2.1 iii).

Прв начин:
Нека $\varepsilon > 0$ е произволно дадено. Земаме дека $\delta = \varepsilon$. Забележуваме дека ако $(x,y) \in T((0,0),\delta)$, тогаш: $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 1, \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 1$ и $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$. Од ова следува дека

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &< \varepsilon \cdot 1^2 \cdot 1 = \varepsilon \end{aligned}$$

што значи дека функцијата f е непрекината во $(0,0)$.

Втор начин:
Нека $((a_n,b_n))_{n=1}^{\infty}$ е низа во $\mathbb{R}^2$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n,b_n)=(0,0)$. поради теорема 5.3.2 јасно е дека важи:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2} = 0 \ .$$

Треба да покажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n,b_n) = f(0,0) = 0$.
Бидејќи $|a_n| = \sqrt{a_n^2} \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ и $|b_n| = \sqrt{b_n^2} \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$, имаме:

$$|f(a_n,b_n)| = \frac{a_n^2|b_n|}{a_n^2+b_n^2} = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{|a_n|}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\right)^2 \frac{|b_n|}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}},$$

односно

$$-\sqrt{a_n^2+b_n^2} \leqslant f(a_n,b_n) \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2} \ .$$

Ако побараме лимес кога $n\to\infty$, добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n,b_n) = 0$, што требаше да се докаже. ◆

Пример 9.2.4. *Функцијата*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

не е непрекината (има прекин) во $(0,0)$. Ова ќе го докажеме на два начина.

Прв начин:
Треба да покажеме дека

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2)d((x,y),(0,0))<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)| \geqslant \varepsilon \ .$$

Нека $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $\delta>0$ е произволен и $(x,y) = \left(\dfrac{\delta}{2},\dfrac{\delta}{2}\right)$. Тогаш

$$d((x,y),(0,0)) = \sqrt{\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^2}{4}} = \sqrt{\frac{\delta^2}{2}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$$

и $|f(x,y) - f(0,0)| = \dfrac{1}{2} \geqslant \varepsilon$.

Втор начин:
За низата со општ член $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, *важи* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (0,0)$, *но*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)\,. \blacklozenge$$

Пример 9.2.5. *Функцијата* $T : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ *дефинирана со*

$$T(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

е непрекината на $C([a,b])$.

Нека $f \in C([a,b])$ *и* $\varepsilon > 0$. *Избираме* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ *и нека* $g \in T(f,\delta)$. *Тогаш* $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| < \delta$, *односно*

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall x \in [a,b]\,,$$

па имаме

$$|T(f) - T(g)| = |\int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x| \leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon\,. \blacklozenge$$

Убава примена на карактеризацијата на непрекинатост преку конвергентни низи е и доказот дека композицијата од непрекинати пресликувања е непрекинато пресликување.

Теорема 9.2.6. *Нека* X, Y, Z *се метрички простори,* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *и нека* $x \in X$. *Ако* f *е непрекинато пресликување во точката* a *и* g *е непрекинато пресликување во точката* $f(a)$, *тогаш композицијата* $h = g \circ f : X \to Z$ *е непрекинато пресликување во точката* a.

Доказ. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во X што конвергира кон a. Бидејќи пресликувањето f е непрекинато во a, низата $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон $f(a)$. Бидејќи g е непрекинато во $f(a)$, низата $(g(f(a_n)))_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$. Ова е точно за секоја низа во X што конвергира кон a, па следува дека композицијата $g \circ f$ е непрекинато пресликување во точката a.

■

9.3 Критериум за непрекинатост со отворени и затворени множества

Непрекинатост на пресликување може да се дефинира со користење на инверзни слики на отворени или затворени множества.

Теорема 9.3.1. *Пресликување $f : X \to Y$ е непрекинато ако и само ако за секое отворено множество V во Y, инверзната слика*[1] *$f^{-1}(V)$ е отворено множество во X.*

Доказ. Нека f е непрекинато пресликување, V е отворено множество во Y и нека $x \in f^{-1}(V)$ е произволно. Тогаш $f(x) \in V$ па постои позитивно ε такво што $T(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Бидејќи пресликувањето f е непрекинато, постои $\delta > 0$ такво што $\forall y \in T(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in T(f(x), \varepsilon)$. Значи,

$$y \in f^{-1}(T(f(x), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$$

за секое $y \in T(x, \delta)$, што значи $T(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$ односно $f^{-1}(V)$ е отворено во X.

Обратно, нека за секое отворено множество V во Y, множеството $f^{-1}(V)$ е отворено во X. Тогаш, за произволно $\varepsilon > 0$ множеството

$$A = f^{-1}(T(f(x), \varepsilon))$$

[1] Инверзна слика на $A \subseteq Y$ е множеството $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$.

е отворено во X. Бидејќи $x \in A$, постои $\delta > 0$ такво што $T(x, \delta) \subseteq A$. Значи, $f(T(x,\delta)) \subseteq T(f(x), \varepsilon)$, односно пресликувањето f е непрекинато во точката x.

$\blacksquare$

Забелешка 9.3.2. *Тврдењето во примерот 9.1.4 може да се докаже и користејќи ја теоремата 9.3.1.*

Со оглед на релацијата $f^{-1}(V^C) = (f^{-1}(V))^C$, теоремата 9.3.1 има и дуален облик:

Теорема 9.3.3. *Пресликување $f : X \to Y$ е непрекинато , за секое затворено множество F во Y, инверзната слика $f^{-1}(F)$ е затворено множество во X.*

Пример 9.3.4. *Ако функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекината, тогаш множеството U:*

$$U = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in (0, +\infty)\} = f^{-1}(0, +\infty)$$

е отворено во $\mathbb{R}$ како инверзна слика на отвореното множество $(0, +\infty)$ при непрекинато пресликување f.$\blacklozenge$

Пример 9.3.5. *Нека $T : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ е дефинирано со $T(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, (пример 9.2.5.) Множеството*

$$U = \{f \in C([a,b]) : 1 < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 2\}$$

е отворено во $C([a,b])$ како инверзна слика на отвореното множество $(1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ при непрекинатото пресликување T.$\blacklozenge$

И оваа карактеризација на непрекинатоста преку отворени множества ни дава лесен доказ за тврдењето дека композиција на две непрекинати пресликувања е непрекинато пресликување (теорема 9.2.6).

Друг доказ на теоремата 9.2.6 : Нека V е отворено множество во Z, и $g^{-1}(V) = U \subseteq Y$. поради непрекинатоста на g, множеството U е отворено во Y. Понатаму, поради непрекинатоста на f, добиваме дека инверзната слика $f^{-1}(U)$ е отворено подмножество од X. Затоа,

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) = f^{-1}(U)$$

е отворено множество во X.

■

9.4 Отворени и затворени пресликувања

При непрекинато пресликување, сликата на отворено (затворено) множество не мора да биде отворено (затворено) множество.

Пример 9.4.1. *Константното пресликување $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зададено со $f_c(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, е непрекинато, но сликата на произволно отворено множество во $\mathbb{R}$ е множеството $\{c\}$ што не е отворено во $\mathbb{R}$.* ◆

Дефиниција 9.4.2. *Нека (X, d_x) и (Y, d_y) се метрички простори и $f : X \to Y$.*
*Велиме дека f е **отворено пресликување** ако и само ако за секое отворено множество U во X, сликата $f(U)$ е отворено множество во Y..*
*Велиме дека f е **затворено пресликување** ако и само ако за секое затворено множество F во X, сликата $f(F)$ е затворено множество во Y.*

Забелешка 9.4.3. *Едно пресликување може да биде отворено и да не е затворено, да е затворено и да не е отворено, да биде и отворено и затворено или да не е ниту отворено ниту затворено.*

Пример 9.4.4. *Нека (X, d_x) е произволен и (Y, d_y) е дискретен метрички простор. Секое пресликување $f : X \to Y$ е истовремено и отворено и затворено.* ◆

9.5 Хомеоморфизам. Еквивалентни метрики

Дефиниција 9.5.1. *Нека (X, d_x) и (Y, d_y) се метрички простори и $f : X \to Y$ е биективно пресликување.*
Велиме дека f е ***хомеоморфизам*** *меѓу метричките простори X и Y ако f и f^{-1} се непрекинати.*

Теорема 9.5.2. *Нека (X, d_x) и (Y, d_y) се метрички простори и $f : X \to Y$ е хомеоморфизам. Тогаш, f и f^{-1} се истовремено отворени и затворени пресликувања.*

Доказ. Нека V е отворено множество во Y, тогаш бидејќи f е непрекинато пресликување, следува дека $f^{-1}(V)$ е отворено множество во X. (видете теорема 9.3.1). Ако U е отворено множество во X, тогаш бидејќи f^{-1} е непрекинато пресликување, имаме дека множеството $f(U)$ е отворено во Y.
Слично, користејќи ја теоремата 9.3.3 добиваме дека f и f^{-1} се затворени пресликувања.

■

Поимот хомеоморфизам во извесна смисла го обопштува поимот за изометрија.

Теорема 9.5.3. *Два изометрични простори се хомеоморфни.*

Доказ. Нека (X, d_x) и (Y, d_y) се изометрични метрички простори и $f : X \to Y$ е изометрија и биекција. Ќе покажеме дека f и f^{-1} се непрекинати пресликувања. Нека $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ се произволни. Избираме $\delta = \varepsilon > 0$. Тогаш, $\forall x_1 \in X$ така што $d_x(x_1, x) < \delta$, имаме $d_y(f(x_1), f(x)) = d_x(x_1, x) < \delta = \varepsilon$. На ист начин се покажува дека и $f^{-1} : Y \to X$ е непрекинато пресликување.

■

Забелешка 9.5.4. *Обратното тврдење на теоремата 9.5.3 не мора да важи.*

Забелешка 9.5.5. *Во општ случај не мора да важи дека ако f е биективно и непрекинато пресликување од метричкиот простор (X, d_x) на метричкиот простор (Y, d_y), тогаш и f^{-1} е непрекинато.*

Пример 9.5.6. *Нека $X = [0,1) \cup \{2\}$ и $Y = [0,1]$ се потпростори на $\mathbb{R}$ со стандардната метрика. Нека $f : X \to Y$ е дефинирано со*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 2. \end{cases} \qquad .$$

Пресликувањето f е непрекинато, но пресликувањето $g = f^{-1}$ не е непрекинато во 1. Навистина, $g(1) = 2$; за $r \in (0,1)$,

$$T_X(2,r) = X \cap (2-r, 2+r) = \{2\}\,.$$

За секое $\delta \in (0,1]$, $T_Y(1,\delta) = (1-\delta, 1+\delta) \cap Y = (1-\delta, 1]$. Според тоа, множеството $g((1-\delta,1]) = \{x : f(x) \in (1-\delta,1]\} = (1-\delta,1) \cup 2$ не е отворено, бидејќи не постои $r > 0$ така што $T_X(2,r) \subseteq g(1-\delta,1]$. ♦

Пример 9.5.7. *Нека (X, d_x) е просторот $\mathbb{R}$ со дискретната метрика, (Y, d_y) е просторот $\mathbb{R}$ со стандардната метрика и $f(x) = x$ за секој $x \in X$. Очигледно, f е биективно пресликување. Инверзната слика од кое било отворено множество во Y е отворено во X. Но, ако во X земеме произволно едноелементно множество, тоа е отворено во X а неговата слика во Y е истото едноелементно подмножество, што не е отворено множество во однос на метриката во Y.* ♦

Дефиниција 9.5.8. *Нека d_1 и d_2 се две метрики на исто множество X. Велиме дека метриките d_1 и d_2 се* ***еквивалентни*** *на X (и дека метричките простори (X, d_1) и (X, d_2) се* ***еквивалентни метрички простори****) ако постојат позитивни реални броеви α и β така што*

$$0 < \alpha \leqslant \frac{d_1(x,y)}{d_2(x,y)} \leqslant \beta, \forall x, y \in X \tag{9.2}$$

Пример 9.5.9. *Нека* (X, d) *е ограничен метрички простор. Ќе покажеме дека метриките* d *и* $d' = \dfrac{d}{1+d}$ *се еквивалентни. Од ограниченоста на* (X, d)*, постои* $M \in [0, \infty)$ *така што* $0 \leqslant d(x, y) \leqslant M, \forall x, y \in X$*. Тогаш,*

$$\frac{1}{1+M} \leqslant \frac{d'(x,y)}{d(x,y)} = \frac{\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}}{d\,(x,y)} = \frac{1}{1+d\,(x,y)} \leqslant 1, \forall (x,y) \in X \times X.$$

Во дефиницијата 9.5.8 земаме $\alpha = \frac{1}{1+M}$ *и* $\beta = 1$. ◆

Теорема 9.5.10. *Сите метрики* d_p *на просторот* $\mathbb{R}^n$ *за различни* p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *се меѓусебно еквивалентни.*

Доказ: За секоја двојка точки x и y од $\mathbb{R}^n$ важи:

$$\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{max} \{|x_i - y_i|\} \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{p} \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{max} \{|x_i - y_i|^p\} \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{ n \left[\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{max} \{|x_i - y_i|\} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} max \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\{|x_1 - y_i|\}}$$

односно

$$d_\infty\,(x,y) \leqslant d_p\,(x,y) \leqslant n^{\frac{1}{p}} d_\infty\,(x,y) \;\; (1 \leqslant p < +\infty)\,,$$

па имаме:

$$1 \leqslant \frac{d_p\,(x,y)}{d_\infty\,(x,y)} \leqslant n^{\frac{1}{p}} \;\; (1 \leqslant p < +\infty)\,. \tag{9.3}$$

Од (9.3) следува дека за секое p $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ метриката d_p е еквивалентна со метриката d_∞.
За $i \neq j$ врз основа на (9.3) можеме да запишеме:

$$1 \leqslant \frac{d_{p_i}\,(x,y)}{d_\infty\,(x,y)} \leqslant n^{\frac{1}{p_i}} \quad \wedge \quad \frac{1}{n^{\frac{1}{p_j}}} \leqslant \frac{d^\infty\,(x,y)}{d_{p_j}\,(x,y)} \leqslant 1. \tag{9.4}$$

Со множење на двете страни од неравенствата во 9.4, добиваме:

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{p_j}}} \leqslant \frac{d_{p_i}(x,y)}{d_{p_j}(x,y)} \leqslant n^{\frac{1}{p_1}}, \tag{9.5}$$

што значи дека d_{p_i} и d_{p_j} се меѓусебно еквивалентни метрики (во дефиницијата 9.5.8 земаме $\alpha = \frac{1}{n^{\frac{1}{p_j}}}$ и $\beta = n^{\frac{1}{p_1}}$.)

■

Теорема 9.5.11. *Нека d_1 и d_2 се еквивалентни метрики на множество X. Тогаш, секоја околина на произволна точка $a \in X$ во однос на метриката d_1 содржи околина на точката a во однос на метриката d_2, и обратно.*

Доказ: Да забележиме дека е доволно во доказот наместо произволни околини да разгледуваме отворени топки во однос на двете метрики. Нека $T_1(a,r)$ е произволна топка со центар во a, во однос на метриката d_1. Ќе покажеме дека таа ја содржи топката $T_2\left(a, \frac{r}{\beta}\right)$ од просторот (X, d_2). Навистина, за $x \in T_2\left(a, \frac{r}{\beta}\right)$ имаме дека $d_2(x,a) < \frac{r}{\beta}$, па од неравенството (9.2) добиваме дека

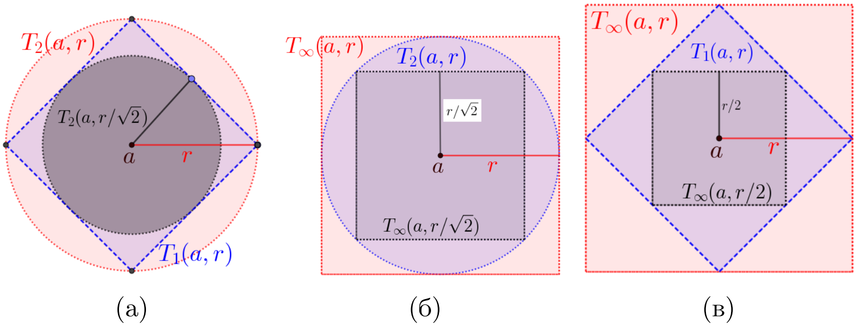
$$d_1(x,a) \leqslant \beta \cdot d_2(x,a) < \beta \cdot \frac{r}{\beta} = r,$$

односно $x \in T_1(a,r)$.
За обратната насока, нека $x \in T_1(a, \alpha \cdot r)$. Тогаш,

$$d_2(x,a) \leqslant d_1(x,a) \cdot \frac{1}{\alpha} < \frac{r\alpha}{\alpha} = r,$$

што значи дека $x \in T_2(a,r)$. Добивме дека $T_1(a, \alpha \cdot r) \subseteq T_2(a,r)$.

■



Слика 9.2: Еквиваленција на метриките d_2, d_1, d_∞ во $\mathbb{R}^2$.

Забелешка 9.5.12. *На сликата 9.2 е дадена врската меѓу отворените топки во просторите* $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *и* $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. *На сл. 9.2 (а) е прикажано* $T_2\left(a, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \subseteq T_1(a,r) \subseteq T_2(a,r)$; *на сл. 9.2 (б)* $T_\infty\left(a, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \subseteq T_2(a,r) \subseteq T_\infty(a,r)$ *на сл. 9.2 (в)* $T_\infty\left(a, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \subseteq T_1(a,r) \subseteq T_\infty(a,r)$.
Со овие метрики во $\mathbb{R}^n$ *важат истите инклузии, при што на горните слики наместо* $\frac{r}{\sqrt{2}}$ *треба да стои* $\frac{r}{\sqrt{n}}$.

Теорема 9.5.13. *Нека* d_1 *и* d_2 *се еквивалентни метрики на множество* X. *Тогаш, секоја низа што конвергира во* (X, d_1) *конвергира во* (X, d_2) *кон истата граница и обратно.*

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ во однос на метриката d_2 и нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано. Од теоремата 9.5.11 следува дека постои $\varepsilon_1 > 0$ така што

$$T_2(x_0, \varepsilon_1) \subseteq T_1(x_0, \varepsilon) \tag{9.6}$$

и постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $d_2(x_n, x_0) < \varepsilon_1, \forall n \geqslant n_0$ а тоа значи дека $x_n \in T_1(x_0, \varepsilon), \forall n \geqslant n_0$, односно низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон x_0 во однос на метриката d_1. На ист начин се покажува и обратната насока.

■

Пример 9.5.14. *На множеството $C_{[0,1]}$ од сите непрекинати функции на $[0,1]$ ги разгледуваме метриките:*

$$d_1(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

и

$$d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ќе покажеме, користејќи ја теоремата 9.5.13, дека овие метрики не се еквивалентни.
Нека $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во $C_{[0,1]}$ дефинирана со:

$$f_n(x) = x^n, 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Функциите f_n се непрекинати на $[0,1]$, па припаѓаат во двата простора $\left(C_{[0,1]}, d_1\right)$ и $\left(C_{[0,1]}, d_2\right)$. Ќе покажеме дека низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон f_0, дефинирана со $f_0(x) = 0, \forall x \in [0,1]$ во однос на метриката d_2, но не конвергира во однос на метриката d_1 кон истата граница.

$$d_2(f_n, f_0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f_0(x)|\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$d_1(f_n, f_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |x^n| \right) = 1 \neq 0. \blacklozenge$$

Теорема 9.5.15. *Нека d_1 и d_2 се две еквивалентни метрики. Тогаш, метричкиот простор (X, d_1) е хомеоморфен со метричкиот простор (X, d_2).*

Доказ. Од (9.2), за секој $\varepsilon > 0$, топката $T(x,\varepsilon)$ од просторот (X, d_1) ја содржи топката $T(x,\varepsilon)$ од просторот (X, d_2). Навистина, нека $x_1 \in T(x, \frac{\varepsilon}{\beta})$ од просторот (X, d_2), односно важи $d_2(x_1, x) < \frac{\varepsilon}{\beta}$, па имаме $d_1(x_1, x) < d_2(x_1, x) \cdot \beta < \frac{\varepsilon}{\beta} \cdot \beta = \varepsilon$. Значи, $x_1 \in T(x,\varepsilon)$ од просторот

(X, d_1). И обратно, топката $T(x, \varepsilon)$ од просторот (X, d_2) ја содржи топката $T(x, \alpha \cdot \varepsilon)$ од просторот (X, d_1) : нека $x_2 \in T(x, \alpha \cdot \varepsilon)$ од просторот (X, d_1), односно важи $d_1(x_2, x) < \alpha \cdot \varepsilon$, па имаме $d_2(x_2, x) < \frac{d_1(x_2,x)}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \alpha = \varepsilon$.

■

Забелешка 9.5.16. *Од теоремата 9.5.15, можеме да заклучиме дека:*
(i) Секое отворено множество во просторот (X, d_1) е отворено и во (X, d_2) и обратно.
(ii) Идентичното пресликување од просторот (X, d_1) на просторот (X, d_2) е хомеоморфизам.

Пример 9.5.17. *Метричките простори $\mathbb{R}^n_p$, за $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ се хомеоморфни еден на друг. Навистина, од*

$$d_\infty(x, y) \leqslant d_p(x, y) \leqslant n^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y), \;\; (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

секој од просторите $\mathbb{R}^n_p$ $(1 \leqslant p \leqslant d_\infty(x, y))$ е хомеоморфен со просторот $\mathbb{R}^n_\infty$, и затоа просторите $\mathbb{R}^n_p$ се хомеоморфни меѓусебно. ♦

9.6 Непрекинатост на потпростор

Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори, $f : X \to Y$ е пресликување и A е потпростор од X. Ќе покажеме дека неприкинатоста на пресликувањето f треба да ја разликуваме од непрекинатоста на неговата рестрикција $f|_A$ на A.

Теорема 9.6.1. *Ако $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување и $A \subseteq X$ е произволен потпростор, тогаш рестрикцијата $f|_A$ е непрекината.*

Доказ. Доказот на ова тврдење следува непосредно од дефиницијата.

■

Во општ случај обратното тврдење не важи. Тоа ќе го илустрираме со следниов пример:

Пример 9.6.2. *Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функцијата на Дирихле*[2]*:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Рестрикцијата $f|_{\mathbb{Q}}$ е константната функција $f|_{\mathbb{Q}}(x) = 1$, што е непрекината на $\mathbb{Q}$, додека функцијата f не е непрекината во ниту една точка од $\mathbb{R}$. ♦

9.7 Рамномерна непрекинатост

Дефиниција 9.7.1. *Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори и нека $A \subseteq X$. Велиме дека пресликување $f : X \to Y$ е* ***рамномерно непрекинато на*** *A ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in A : d_X(x, x') < \delta) \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon\,.$$

Забелешка 9.7.2. *Ако пресликување е рамномерно непрекинато на A, тогаш тоа е непрекинато на A, што значи дека е непрекинато во секоја точка $a \in A$. За да го докажеме тоа, доволно е во дефиницијата 9.7.1 да земеме $a = x'$.*

Забелешка 9.7.3. *Ако f е непрекинато пресликување во секоја точка x од A, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ што зависи од ε и од x, така што за секој $x' \in A$ кој е на растојание до x помало од δ важи неравенството $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Значи, изборот на δ зависи не само од ε туку и од x!*

Да забележиме, кога функцијата f е рамномерно непрекината на множеството A, изборот на δ зависи само од ε, но не и од изборот на некоја конкретна точка од A.

[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet - германски математичар (1805–1859)

Изразено со помош на логичките симболи:
Функција f е непрекината на X ако

$$(\forall\varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists\delta > 0)(\forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta) \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Функција f е рамномерно непрекината на X ако

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta) \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Пример 9.7.4. *Функцијата $f(x) = x$ е рамномерно непрекината на $\mathbb{R}$. Навистина, нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано. Избираме $\delta = \varepsilon$. Тогаш, ако $|x - x'| < \delta$, добиваме $|f(x) - f(x')| = |x - x'| < \delta = \varepsilon$.* ◆

Пример 9.7.5. *Функцијата $f(x) = x^2$ не е рамномерно непрекината на $\mathbb{R}$. (видете ја задачата 9 во задачите за самостојна работа).* ◆

Пример 9.7.6. *Функцијата $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не е рамномерно непрекината. Ќе покажеме дека*

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x, y > 0) \qquad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon\,.$$

Специјално, земаме $\varepsilon = 1$ и некое $\delta > 0$. Нека $n \in \mathbb{N}$, таков што $\dfrac{1}{n} < \delta$; нека $x = \dfrac{1}{n}$ и $y = \dfrac{1}{n+1}$. Тогаш, имаме $|x - y| = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \delta$ и

$$|f(x) - f(y)| = |n - (n+1)| = 1 \geqslant \varepsilon\,. \qquad \blacklozenge$$

Теорема 9.7.7. *Нека (X, d_X), (Y, d_Y) и (Z, d_Z) се метрички простори, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Ако f е рамномерно непрекината на X и g е рамномерно непрекината на $f(X)$, тогаш и композицијата $g \circ f$ е рамномерно непрекината на X.*

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Постои $\delta_1 > 0$ таков што

$$(\forall x, y \in f(X)) \quad d_Y(x, y) < \delta_1 \Rightarrow d_Z(g(x), g(y)) < \varepsilon\,. \tag{9.7}$$

За $\delta_1 > 0$, постои $\delta > 0$ така што

$$(\forall a, b \in X) \quad d_X(a,b) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(b)) < \delta_1. \tag{9.8}$$

Од (9.7) и (9.8) имаме:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad \forall a, b \in X, d_X(a,b) < \delta \Rightarrow d_Z(g(f(a)), g(f(b))) < \varepsilon,$$

односно, композицијата $g \circ f$ е рамномерно непрекината на X.

■

9.8 Рамномерно конвергентни низи и непрекинатост

Дефиниција 9.8.1. *Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори, $A \subseteq X$ и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од функции $f_n : A \to Y$ така што низата $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ конвергира за секое $x \in A$, тогаш дефинираме функција f на A со*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), (x \in A). \tag{9.9}$$

Во тој случај велиме дека низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ***конвергира*** *на A и дека f е лимес (или граница) на низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.*
Понекогаш користиме пооописна терминологија и велиме дека ***низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира по точки кон f на*** *A ако и само ако важи (9.9).*

Се наметнува следново прашање:
Ако функциите f_n се непрекинати, дали тогаш и граничната функција f е непрекината?
На следниот пример ќе видиме дека при конвергенција по точки, не секогаш одговорот е позитивен.

Пример 9.8.2. *Нека* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, *при што* $f_n(x) = x^n$. *Низата* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *од непрекинати функции конвергира по точки кон функцијата* $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$ *што не е непрекината.* ◆

Ќе го воведеме поимот рамномерна конвергенција.

Дефиниција 9.8.3. *Нека* f_n, f *се функции од метричкиот простор* X *во метричкиот простор* Y. *Велиме дека низата* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ***рамномерно конвергира*** *кон* f *ако важи:*

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0 \in \mathbb{N}), (d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon), (\forall n \geqslant n_0), (\forall x \in X). \tag{9.10}$$

Забелешка 9.8.4. *Да напоменеме дека во дефиницијата 9.8.3,* n_0 *зависи од* ε *но не зависи од* x, *додека во дефиницијата 9.8.1* n_0 *зависи и од* ε *и од* x, *односно важи:*

$$(\forall \varepsilon > 0), (\forall x \in X), (\exists n_0 \in \mathbb{N}), (d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon), (\forall n \geqslant n_0). \tag{9.11}$$

Теорема 9.8.5. *Границата на рамномерно конвергентна низа од непрекинати функции е непрекината.*

Доказ: Нека f_n, f се функции од X во Y, функциите f_n се непрекинати и низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон f. Ќе покажеме дека f е непрекината функција во произволна точка x_0. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно, тогаш постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за $n \geqslant n_0$ ќе важи:

$$d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x. \tag{9.12}$$

Од друга страна, бидејќи f_n е непрекинато пресликување во x_0, постои $\delta > 0$ така што за $d(x, x_0) < \delta$ имаме:

$$d(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9.13}$$

Комбинирајќи ги (9.12) и (9.13), за $d(x, x_0) < \delta$ добиваме:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leqslant d(f(x), f_n(x)) \\ &+ d(f_n(x), f_n(x_0)) \\ &+ d(f_n(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Забелешка 9.8.6. *Од теоремата 9.8.5 можеме да заклучиме дека низата функции од примерот 9.8.2 не конвергира рамномерно.*

9.9 Задачи за самостојна работа

1. Покажете дека функцијата $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}$ зададена со $f(x, y) = x + y$ е непрекината.
2. Покажете дека функцијата $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}$ зададена со $f(x, y) = xy$ е непрекината.
3. Покажете дека функцијата $T : (C([a, b]), d_\infty) \to \mathbb{R}$ зададена со правилото $T(f) = f(a)$ е непрекината.
4. Покажете дека функцијата $T : (C([a, b]), d_\infty) \to (C([a, b]), d_\infty)$ зададена со $T(f) = 2f$ е непрекината.
5. Најдете ги сите вредности на α за кои функцијата $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}$ зададена со

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

е непрекината во $(0, 0)$.

6. За секое множество A од метричкиот простор (X, d), функцијата $f : A \to \mathbb{R}$ дефинирана со $f(x) = d(x, A)$ е непрекината. Докажете!

7. Нека (X, d) е метрички простор и нека $a \in X$ е произволна точка. Функцијата $f_a : X \to \mathbb{R}$ е дефинирана со $f_a(x) = d(x, a)$. Докажете дека функцијата f_a е непрекината.

8. Нека (X, d_x) и (Y, d_y) се метрички простори и $f : X \to Y$ е пресликување. Покажете дека тогаш следните тврдења се меѓусебно еквивалентни:
(i) f е непрекинато пресликување.
(ii) За секое отворено множество $V \subseteq Y$ во Y множеството $f^{-1}(V)$ е отворено во X.
(iii) За секое затворено множество $F \subseteq Y$ во Y множеството $f^{-1}(F)$ е затворено во X.
(iv) За секое множество $A \subseteq X$ важи дека $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

9. Покажете дека функцијата $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зададена со $f(x) = x^2$ не е рамномерно непрекината. Дали рестрикцијата $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ е рамномерно непрекината?

10. Нека (X, d) е метрички простор и $f_1 : X \to \mathbb{R}$ и $f_2 : X \to \mathbb{R}$ се непрекинати пресликувања. Докажете дека тогаш и функцијата $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) : X \to \mathbb{R}^2$ е непрекината.

11. Нека (X, d) е метрички простор и $f_i : X \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k$, се непрекинати пресликувања. Докажете дека тогаш и пресликувањето $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) : X \to \mathbb{R}^k$ е непрекинато. Исто така, ако f е непрекинато, тогаш и f_i е непрекинато, $\forall i = 1, \ldots, k$.

12. Нека $\varphi : (C_{[0,1]}, d_\infty) \to (C_{[0,1]}, d_\infty)$ е дефинирано со:

$$(\varphi(f))(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad f \in C_{[0,1]}\ .$$

Покажете дека φ е непрекинато пресликување.

13. Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори, $f : X \to Y$ и $A \subseteq X$. Покажете дека ако f е рамномерно непрекината на X, тогаш f е рамномерно непрекината на A.

14. Нека (X, d) е метрички простор и C е непразно затворено множество во X. Покажете дека пресликувањето $x \mapsto d(x, C)$ е рамномерно непрекинато на X.

15. Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори и $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување. Нека Z е произволен метрички натпростор на $(f(X), d_Y)$. Тогаш, $f : X \to Z$ е непрекинато.

16. Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори и $f : X \to Y$ е константно пресликување. Покажете дека f е непрекинато.

17. Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори и $f_i : X \to Y, i = 1, 2$ се непрекинати пресликувања. Покажете дека множеството $A = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$ е затворено подмножество од X.

18. Нека (X, d) е метрички простор и f_1 и f_2 се непрекинати пресликувања од $X \to \mathbb{R}$. Тогаш, множествата $A = \{x \in X : f_1(x) \leqslant f_2(x)\}$ и $B = \{x \in X : f_1(x) \geqslant f_2(x)\}$ се затворени во X.

19. Пресликувањата

$$f : X \to Y, f(x, y, z) = (zx, zy, 0)$$

и

$$f^{-1} : Y \to X, \qquad f^{-1}(x, y, 0) = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2})$$

се непрекинати. (Покажете!)

20. Покажете дека:
а) Композиција од хомеоморфизми е хомеоморфизам.
б) Ако f е хомеоморфизам, тогаш и f^{-1} е хомеоморфизам.
в) Единичното пресликување $f(x) = x$ е хомеоморфизам.

21. Покажете дека површината од цилиндар без краевите

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 1 < z < 2\}$$

и прстенот на $xy-$рамнината, без работ

$$Y = \{(x, y, 0) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

се хомеоморфни.

22. Покажете дека биекција од метрички простор X во метрички простор Y е хомеоморфизам f е непрекинато и отворено пресликување.

23. Нека X и Y се метрички простори и $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување. Докажете дека графикот на функцијата $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ е затворено множество во $X \times Y$.

24. Нека $E \subseteq X$ е подмножество од метричкиот простор (X, d) и нека $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$ е карактеристична функција на множеството E. Докажете дека χ_E е непрекината функција множеството E е истовремено отворено и затворено во X.

25. Нека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq X$ е непразно множество. Тогаш, $x \mapsto d(x, A)$ е рамномерно непрекината реална функција на X. Покажете!

26. Покажете дека во нормиран векторски простор $(X, \|\|)$ нормата е рамномерно непрекината реална функција од X во $\mathbf{R}$.

27. За секое $\lambda \in \mathbf{R}$ множењето со λ е рамномерно непрекинато пресликување од нормиран векторски простор во самиот себе. Покажете!

28. Нека d_1 и d_2 се еквивалентни метрики на множество X. Тогаш, за секоја низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во X и $x \in X$ важи:

$$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_2(x_n, x) = 0,$$

односно, низа конвергира кон x во (X, d_1) ако и само ако таа конвергира кон x во (X, d_2).

29. Покажете дека метриките d_2, d_∞ и d_1 на $\mathbb{R}^n$ се еквивалентни.

30. Нека d_1 и d_2 се еквивалентни метрики на множество X. Докажете дека низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во (X, d_x) е Кошиева во (Y, d_y).

31. Нека f е пресликување од метрички простор X во метрички простор Y. Покажете дека f е непрекинато пресликување пресликува конвергентна низа во конвергентна.

32. Нека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq X$. Покажете дека функцијата $f : X \to \mathbb{R}$ дефинирана со $f(x) = d(A, x)$ е рамномерно непрекината.

33. Покажете дека на просторот $C_{[0,1]}$ од сите непрекинати реални функции на $[0, 1]$, со метрика $d(f, g) = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$, секоја конвергентна (по точки) низа е рамномерно конвергентна.

Глава 10

Непрекинатост во $\mathbb{R}^n$

Дефиницијата за непрекинатост на реална функција со една променлива природно се генерализира на векторски функции.

Дефиниција 10.0.1. $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}^m, \quad a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$. *Велиме дека функцијата f е **непрекината во точката** a ако*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{10.1}$$

Забелешка 10.0.2. *За да функција f биде непрекината во точка a, потребно е:*

1) функцијата да е дефинирана во точката a,
2) да постои $\lim\limits_{x \to a} f(x)$,
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност, дефиницијата 10.0.1 може да се формулира на повеќе начини:

Теорема 10.0.3. *Следниве искази се еквивалентни:*
1. *Функција е непрекината во точка $a \in A$*

2. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A,\ \ 0 < \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon)$ *(Коши);*
3. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A)(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ (0 < |x_i - a_i| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon)$;
4. *За секоја низа* $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ *во* $A \setminus \{a\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$ *(Хајне-Борел).*

Забелешка 10.0.4. *Сите варијанти од теоремата 10.0.3 можат да се искажат на следниот начин:*
f е непрекината во a на секоја околина $U(f(a)) \subseteq \mathbb{R}^m$ одговара околина $U(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ таква што $f(U(a)) \subseteq U(f(a))$,
или преку инверзна слика,
f е непрекината во a за секоја околина $U(f(a)) \subseteq \mathbb{R}^m$, инверзната слика $f^{-1}(U(f(a))$ е некоја околина $U(a)$ на a.

Велиме дека функција f е непрекината на множество A ако е непрекината во секоа точка од A.

Забелешка 10.0.5. *Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}^m$, $E \subseteq A$ и $a \in E$. Велиме дека функцијата f е* ***непрекината во точката a по (долж) множеството E*** *ако е исполнет условот*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = f(a). \tag{10.2}$$

Ќе разгледуваме два случаја:

I) реални функции со повеќе променливи, и

II) вектор-вредносни функции.

I) Нека $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ и $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е област на дефинираност на реалната функција со повеќе променливи f.

Дефиниција 10.0.6. *Нека функцијата* $u = f(x)$ *е определена на множеството* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *и нека* $a \in A$. *Функцијата* $f(x)$ *е непрекината во точката* a *ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)$$

$$(\|x - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} < \delta \Rightarrow |f((x_1, \ldots, x_n)) - f((a_1, \ldots, a_n)) < \varepsilon) \, .$$

каде што $(a_1, \ldots, a_n)$ *се координати на точката* a.

За функција со повеќе променливи може да се постави и прашање за непрекинатост по поединечни променливи. Велиме дека f е непрекината по променливата x_i во точката $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ ако е непрекината во точката a_i, како функција од x_i при што се фиксирани променливите $x_j = a_j (j \neq i)$.

Пример 10.0.7. *Функцијата*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

е непрекината и по променливата x *и по променливата* y *во точката* $(0, 0)$, *но не е непрекината во* $(0, 0)$.

Дефиниција 10.0.8. *1) Нека* f *и* g *се реални функции определени на множеството* $A \subseteq \mathbb{R}^n$. *Тогаш,*

$f \pm g$ *е дефинирана со* $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \forall x \in A,$

fg *е дефинирана со* $(fg)(x) = f(x)g(x), \forall x \in A$

$\dfrac{f}{g}$ *е дефинирана со* $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in A$ *за кое што* $g(x) \neq 0$.

2) Ако $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$ *се пресликувања од* A *во* $\mathbb{R}^m$, *дефинираме* $\mathbf{f} \pm \mathbf{g}$ *и* $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ *со:*

$$(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) \pm \mathbf{g}(x), \qquad (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x), \quad \forall x \in A \, .$$

Многу својства на непрекинати функции со една променлива важат и за векторските функции. Ќе наведеме неколку поважни од тие својства. Доказите на теоремите 10.0.9 до 10.0.14 се оставаат на читателот за вежба.

Теорема 10.0.9. *Нека f и g се реални функции, непрекинати во точката $a = (a_1, \dots, a_n)$. Тогаш во таа точка се непрекинати и функциите $f \pm g$, fg и $\dfrac{f}{g}$ под претпоставка дека $g(a) \neq 0$.*

$\blacksquare$

Теорема 10.0.10. *Нека векторските функции*

$$\mathbf{f} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{k}}$$

и

$$\mathbf{g} : \mathbf{f}(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{k}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$$

се непрекинати соодветно во точката a односно $\mathbf{f}(a)$. Тогаш, композицијата $\mathbf{f}\circ\mathbf{g} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ е непрекината во точката a.

$\blacksquare$

Теорема 10.0.11. *Нека f е дефинирана во околина на точката a и е непрекината во a. Тогаш постои околина $T(a, \delta)$ во која f е ограничена.*

$\blacksquare$

Теорема 10.0.12. *Ако f е непрекината во точката a и $f(a) \neq 0$, тогаш постои околина на a во која $f(x) \neq 0$.*

$\blacksquare$

Теорема 10.0.13. *Функција f е непрекината во точката a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ($\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \|f(x) - f(a)\| = 0$.)*

$\blacksquare$

Теорема 10.0.14. *Ако постои $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, тогаш може да се дефинира функција f^*, таква што $f^*(x) = f(x)$ за $x \neq a$ и $f^*(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.* $\blacksquare$

Во овој случај велиме дека функцијата f **е додефинирана во точката a до непрекинатост** и дека **во точката a функцијата f има отстранлив прекин**.

II) Нека $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ и $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е област на дефинираност на вектор-вредносната функција $\mathbf{f}$.

Теорема 10.0.15. *а) Вектор-вредносната функција $\mathbf{f}(x)$ е непрекината во точката $a \in A$ ако и само ако сите нејзини компоненти се непрекинати во a.*

б) Ако $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ се непрекинати пресликувања од $A \subseteq \mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^m$, тогаш и $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ и $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ се непрекинати на A.

Забелешка 10.0.16. *Да забележиме дека $(\mathbf{f} + \mathbf{g}) : A \to \mathbb{R}^m$, а $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} : A \to \mathbb{R}$.*

Доказ. а) Доказот следува директно од неравенството

$$|f_j(x) - f_j(a)| \leqslant \|f(x) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(a)|^2}, j = 1, \ldots, m\ .$$

б) Доказот следува од а) и теоремата 10.0.9.

■

10.1 Рамномерна непрекинатост

Нека $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Дефиниција 10.1.1. *Велиме дека функцијата f е* ***рамномерно непрекината*** *на множеството A ако за секој $\varepsilon > 0$ постои број $\delta > 0$, таков што за секои точки x' и $x'' \in A$ за кои важи $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ важи $\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$.*

Рамномерната непрекинатост се однесува на целото множество A, имено за кои било две точки кои се на растојание помало од δ, вредностите на функцијата f се разликуваат за помалку од дадениот ε.

Забелешка 10.1.2. *Нека $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е реална функција со една променлива со график $C : y = f(x)$. Функцијата f е рамномерно непрекината ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$, така што ако правоаголникот со страни: вертикална ε и хоризонтална δ, транслаторно го поместуваме долж кривата C, неговите хоризонтални страни во ниту еден момент не се сечат со кривата C.*

Теорема 10.1.3 (Кантор). *Нека $f : A \subseteq \mathbb{R}^n$. Функција $f : A \to \mathbb{R}^m$ што е непрекината на затворено и ограничено множество A е рамномерно непрекината.*

Теорема 10.1.4. *Нека $f : A \subseteq \mathbb{R}^n$. Векторската функција*

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$$

е рамномерно непрекината сите координатни функции $f_1, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$ се рамномерно непрекинати.

Доказ. Доказот следува врз основа на неравенствата:

$$|f_i(x') - f_i(x'')| \leqslant \|f(x') - f(x'')\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |f_i(x') - f_i(x'')|.$$

■

Теорема 10.1.5. *Ако реална функција со повеќе променливи $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}$ е рамномерно непрекината, тогаш таа е рамномерно непрекината по секоја координата (при што сите останати координати се фиксирани).*

Обратното тврдење не важи. Тоа може да се илустрира со следниов

Пример 10.1.6. *Нека* $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$, *е дадена со*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

За секој $y \in [-1,1]$ *парцијалната функција* $x \mapsto f(x,y)$ *што е дефинирана на компактниот сегмент* $[-1,1]$ *е непрекината, па е рамномерно непрекината. Истиот заклучок важи и за функцијата* $y \mapsto f(x,y)$ *за секое фиксирано* $x \in [-1,1]$. *Од друга страна, функцијата* f *не е непрекината во точката* $(0,0) \in [-1,1] \times [-1,1]$, *па не е рамномерно непрекината на множеството* $[-1,1] \times [-1,1]$.◆

10.2 Задачи за самостојна работа

1. По дефиниција докажете дека функцијата

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$$

   е непрекината во точката $(0,0)$.

2. Покажете дека функцијата

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   е непрекината на $\mathbb{R}^2$.

3. Најдете ги точките на прекин на функцијата:

   1° $f(x,y) = \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   2° $f(x,y,z) = \dfrac{e^x+e^y+e^z}{x^2+y^2+z^2+1}$.

3° $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

4° $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

5° $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y+xy^2-2}{x^2+y^2-z^2}$

4. Покажете дека линеарната функција $f(x,y) = ax+by+c$ е рамномерно непрекината на $\mathbb{R}^2$.

5. Покажете дека функцијата $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$ е непрекината на дефинициoната област $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant |y|, y \neq 0\}$, но не е рамномерно непрекината на A.

Покажете дека функциите во задачите 6 и 7 не се рамномерно непрекинати на назначените множества:

6. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ на прстенот $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

7. $f(x,y) = \operatorname{tg}\left(x^2+y^2\right)$ на кругот $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < \dfrac{\pi}{2}\}$.

Глава 11

Теоремата на Банах за неподвижна точка

Теоријата за неподвижна точка е релативно млада математичка дисциплина и е меѓу најатрактивните математички области, пред сѐ поради широката примена во други математички гранки (нумеричка анализа, класична анализа, функционална анализа, топологија, економска математика, линеарна алгебра - при решавање на равенки и системи од равенки, динамички системи - за решавање на широки класи од диференцијални равенки), но и при решавање на многу теориски и практични проблеми во техничките науки (третирање на нелинеарни системи), економските науки (теорија на еквилибриум), проблеми на оптимизација, во физиката, посебно во областа на квантна механика итн.

Методот на последователни апроксимации бил воведен од Лиувил[1] во 1837 година, а потоа го развил Пикар[2] во 1890 година и, на крај, во 1922

[1] Joseph Liouville, француски математичар (1809-1882)

[2] Charles Émile Picard, француски математичар (1856-1941)

година полскиот математичар Стефан Банах[3] го заокружил докажувајќи дека секоја контракција од комплетен метрички простор во самиот себе има единствена неподвижна точка. Неговата теорема се смета за еден од фундаменталните принципи на функционалната анализа. Банаховиот принцип на контракција гарантира постоење и единственост на неподвижна точка при контракција од комплетен метрички простор во самиот себе и дава конструктивен метод за нејзиното наоѓање.

Дефиниција 11.0.1. *Нека X е непразно множество и $f : X \to X$. Велиме дека точката $a \in X$ е* ***неподвижна*** *или* ***фиксна точка*** *за пресликувањето f ако*

$$f(a) = a. \tag{11.1}$$

Пример 11.0.2. *1) Пресликувањето $x \mapsto x^2$ од $\mathbb{R}$ во себе има две неподвижни точки: 0 и 1.*
2) Ротација во рамнината за агол помал од 2π има една единствена неподвижна точка - центарот на ротацијата.
3) Транслација за ненулти вектор нема неподвижни точки. ♦

Дефиниција 11.0.3. *За пресликување $f : (X, d) \to (X, d)$ велиме дека е* ***контракција*** *(стегање) ако постои реален број $q \in (0, 1)$ таков што за секои $x, y \in X$ е исполнето*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant q \cdot d(x, y). \tag{11.2}$$

Бројот q се вика ***коефициент на контракцијата****.*

Забелешка 11.0.4. *Контракција е непрекинато пресликување.*

Пример 11.0.5. *Функцијата $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирана со $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ е контракција. Навистина,*

$$d(f(x), f(y)) = |(\frac{x}{2} + 1) - (\frac{y}{2} + 1)| = \frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}d(x, y).♦$$

[3] Stefan Banach, полски математичар (1892–1945)

Теорема 11.0.6. ***(Банахов принцип за контракција)*** *Нека* (X, d) *е комплетен метрички простор и пресликувањето* $f : X \to X$ *е контракција со коефициент* q. *Тогаш, за* f *постои една и само една неподвижна точка* $x \in X$.

Доказ. Земаме произволна точка $x_0 \in X$ и ја формираме итеративната низа со релацијата $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geqslant 1$. Ќе искористиме математичка индукција да покажеме дека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа. Имаме

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) \\ &\leqslant q\, d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Да претпоставиме дека

$$d(x_m, x_{m-1}) \leqslant q^{m-1}\, d(x_1, x_0).$$

Во наредниот чекор, имаме

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(f(x_m), f(x_{m-1})) \\ &\leqslant q\, d(x_m, x_{m-1}) \\ &\leqslant q \cdot q^{m-1}\, d(x_1, x_0) \\ &\leqslant q^m\, d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција, следува дека

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \qquad d(x_{m+1}, x_m) \leqslant q^m d(x_1, x_0).$$

Користејќи го неравенството на триаголник, за $n > m$ имаме:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m+1}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant q^m d(x_1, x_0) + \ldots + q^{n-1} d(x_1, x_0) \\ &= q^m (1 + \ldots + q^{n-m-1}) d(x_1, x_0) \\ &= q^m \frac{1 - q^{n-m}}{1 - q} d(x_1, x_0)\,. \end{aligned}$$

Бидејќи $0 < q < 1$, имаме $1 - q^{n-m} < 1$, од каде што

$$d(x_m, x_n) \leqslant q^m \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0). \tag{11.3}$$

Сега, бидејќи производот $\frac{1}{1-q} d(x_1, x_0)$ е фиксен и $0 < q < 1$, десната страна од (11.3) можеме да ја направиме доволно мала земајќи m да е доволно голем број. Ова покажува дека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа. па поради комплетноста на X, постои $a \in X$ така што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Бидејќи f е непрекинато пресликување, имаме дека

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a)\,,$$

односно a е неподвижна точка за пресликувањето f.

Ќе покажеме дека неподвижната точка на f е единствена. Да претпоставиме дека постои друга неподвижна точка за f, $a_1 \neq a$. Имаме,

$$0 < d(a_1, a) = d(f(a_1), f(a)) \leqslant q\, d(a_1, a),$$

што е можно само ако $q \geqslant 1$. Ова е контрадикција, па претпоставката за постоење на a_1 не е точна, односно f има точно една неподвижна точка.

■

Забелешка 11.0.7. *Можеме да забележиме дека Банаховиот принцип за конвергенција важи и ако f е контракција само на некое затворено подмножество F од комплетен метрички простор X, доколку f го пресликува F во самиот себе. Имено, F е самиот комплетен метрички простор, бидејќи е затворено множество, па Банаховиот принцип можеме да го примениме директно на F.*

Забелешка 11.0.8. *Ако (X, d) е комплетен метрички простор, а за пресликувањето $f : X \to X$ важи*

$$(\forall x, y \in X)(x \neq y \Leftrightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

тогаш во општ случај не можеме да заклучиме дека за f постои неподвижна точка. Еден таков пример е даден во задачата 3.

Пример 11.0.9. *За функција* $f \in C_{[0,\frac{1}{2}]}$ *и* $x \in [0, \frac{1}{2}]$ *дефинираме*

$$[T(f)](x) = 1 + \int_0^x f(t)dt\ .$$

Функцијата $T(f)$ *како функција од* x *е (рамномерно) непрекината. Навистина, нека* $M > 0$ *е таков што*

$$\max\left\{|f(t)| : t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} \leqslant M\ .$$

Такво M *постои, бидејќи* f *е непрекината на затворен сегмент. Нека* $\varepsilon > 0$*. Избираме* $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$*. Нека* $x, a \in [0, \frac{1}{2}]$ *се такви што* $|x - a| < \delta$*. Ќе претпоставиме дека* $a \leqslant x$*. Имаме*

$$\begin{aligned} |[T(f)](x) - [T(f)](a)| &= \left|1 + \int_0^x f(t)dt - (1 + \int_0^a f(t)dt)\right| \\ &= \left|\int_0^x f(t)dt - \int_0^a f(t)dt\right| \\ &= \left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant \int_a^x |f(t)|dt \leqslant \int_a^x M dt \\ &\leqslant M(x-a) < M\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Истиот заклучок се добива и ако $x \leqslant a$*. Значи, сликата* $T(f)$ *на функција* $f \in C_{[0,\frac{1}{2}]}$ *е во* $C_{[0,\frac{1}{2}]}$*, т.е. со* T *просторот се пресликува во* *самиот себе. Понатаму, пресликувањето T е контракција бидејќи*

$$\begin{aligned} d(T(f),T(g)) &= \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \left|\int_0^x f(t)dt - \int_0^x g(t)dt\right| \\ &= \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \left|\int_0^x (f(t)-g(t))dt\right| \\ &\leqslant \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \int_0^x |f(t)-g(t)|dt \\ &\leqslant \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \left|\int_0^x d(f,g)dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2} d(f,g)\ . \end{aligned}$$

Последното важи бидејќи за секој $t \in [0,\frac{1}{2}]$, $|f(t)-g(t)| \leqslant d(f,g)$. Значи, пресликувањето T е контракција на комплетниот метрички простор $C_{[0,\frac{1}{2}]}$, па има единствена неподвижна точка. Со други зборови,

$$\exists! f \in C_{[0,\frac{1}{2}]} \text{ така што } f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt\ .$$

Да го илустрираме доказот на теоремата на Банах за неподвижна точка на овој пример. Ќе формираме низа итерации за пресликувањето T, како во доказот. Да земеме $f_0 = 1$. Тогаш, имаме:

$$\begin{gathered} f_1(x) = 1 + \int_0^x f_0(t)dt = 1 + \int_0^x dt = 1 + x\ ; \\ f_2(x) = 1 + \int_0^x f_1(t)dt = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!}\ ; \\ f_3(x) = 1 + \int_0^x f_2(t)dt = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{t^2}{2!})dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\ ; \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \end{gathered}$$

Со принципот на математичка индукција, покажуваме дека

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x f_{n-1}(t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \ .$$

Границата на низата (f_n) *е функцијата*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \ .$$

Препознаваме дека, всушност, $f(x) = \mathrm{e}^x$.♦

11.1 Задачи за самостојна работа

1. Нека $X = \mathbb{R}$, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ и $f : [a,b] \to [a,b]$ е диференцијабилна функција таква што $|f'(x)| \leqslant K < 1$. Определете го решението на равенката $f(x) = x$.

2. Нека $X = [-2,-1] \cup [1,2]$ е потпростор од $\mathbb{E}$. Покажете дека пресликувањето $f : X \to X$ дадено со $f(x) = -x$ нема неподвижна точка.

3. Покажете дека пресликувањето $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ дадено со $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ нема неподвижна точка, иако за $x \neq y$ важи

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| \,.$$

4. Нека $X = [1, \infty]$ е потпростор од $\mathbb{R}$ со стандардната метрика и $f : X \to X$ е пресликување дефинирано со $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Покажете дека f нема неподвижна точка, иако

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \ .$$

5. Нека (X, d) е комплетен метрички простор. Претпоставуваме дека за $f(x) : X \to X$ важи дека за некој $n \in \mathbb{N}, f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-функции}}$ е контракција, Покажете дека тогаш f има единствена неподвижна точка.

6. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е диференцијабилна функција и постои $k \in [0, 1)$ така што $|f'(x)| \leqslant k, \forall x \in \mathbb{R}$. Покажете дека f има единствена неподвижна точка.

7. Покажете дека Банаховиот принцип не важи ако пресликувањето f го исполнува условот

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),\ x \neq y.$$

Глава 12

Компактен метрички простор

12.1 Својство на Болцано-Ваерштрас и компактност

Од Математичка анализа 1, позната ни е теоремата на Болцано-Ваерштрас, фундаментален резултат за конвергенција на реална низа.

Теорема 12.1.1. ***(Болцано-Ваерштрас)*** *Секоја ограничена низа од реални броеви има конвергентна подниза.* ■

Оваа теорема не мора да важи во произволен метрички простор.

Пример 12.1.2. *Нека* $(e_m)_{m=1}^{\infty}$ *е низа во* $l^p, p \geqslant 1$, *каде што* e_m *е низата во која што сите членови се еднакви на 0, освен* $m-$*тиот член кој е еднаков на 1:*

$$e_m = (\delta_n^m)_{n=1}^{\infty}, \qquad \delta_n^m = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

$(e_m)_{m=1}^{\infty}$ е ограничена низа од вектори во $\overline{T(0,1)}$, која што нема конвергентна подниза, бидејќи $d(e_m, e_n) = \sqrt[p]{2}$ за $m \neq n$.◆

Дефиниција 12.1.3. *Нека (X, d) е метрички простор. Велиме дека X го задоволува* ***својството на Болцано-Вaерштрас*** *ако секоја низа во X има подниза што конвергира кон точка од X.*

Со помош на својството на Болцано-Вaерштрас дефинираме компактност на метрички простор преку низи.

Дефиниција 12.1.4. ***(Болцано-Вaерштрас)*** *Велиме дека метрички простор (X, d) е* ***компактен*** *ако секоја низа во X има подниза што конвергира кон точка од X.*

Дефиниција 12.1.5. *Множество $K \subseteq X$ од метрички простор X е* ***компактно*** *ако секоја низа во K има подниза што конвергира кон точка од K.*

Експлицитно, ова значи дека ако $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од точки $x_n \in K$, тогаш постои нејзина подниза $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ таква што $x_{n_k} \to x$ кога $k \to \infty$ при што $x \in K$.

Забелешка 12.1.6. *Компактноста е својство што се наследува на потпростор: $K \subseteq X$ е компактно ако метричкиот потпростор (K, d_K) е компактен.*

Забелешка 12.1.7. *Метрички простор (X, d) е компактен ако секое бесконечно подмножество од X има барем една точка на натрупување. (видете ја задачата 15)*

Забелешка 12.1.8. *Според теоремата на Болцано-Вaерштрас12.1.1, можеме да заклучиме дека подмножество од множеството од реални броеви $\mathbb{R}$ е компактно ако е ограничено и затворено. Ќе видиме подоцна дека ова својство не важи во произволен метрички простор. Секое компактно подмножество од произволен метрички простор е затворено и ограничено (теорема 12.4.1), меѓутоа не е секогаш точно дека затворено и ограничено множество е компактно (забелешка 12.4.2).*

Теорема 12.1.9. *Метрички простор* (X,d) *го задоволува својството на Болцано-Ваерштрас ако и само ако секоја низа од непразни, затворени, вложени подмножества од* X *има непразен пресек, односно ако за секоја низа* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *во која што за секој* $n \in \mathbb{N}$ *важи* $\overline{F_n} = F_n \neq \varnothing$, *и* $F_{n+1} \subseteq F_n$, *важи* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Доказ. Нека во (X,d) секоја низа има конвергентна подниза и нека $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ е множество од непразни, затворени подмножества од X такви што $F_{n+1} \subseteq F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Избираме $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$. Тогаш, низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ има конвергентна подниза $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ со $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$. Бидејќи $\forall n_k \geq n, x_{n_k} \in F_n$ и од F_n е затворено, следува дека $x \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$, односно $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Значи, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

За обратната насока, нека во X секоја низа од вложени, затворени и непразни подмножества од X има непразен пресек и нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ произволна низа во X. Дефинираме $T_n = \{x_k : k > n\}$ и $F_n = \overline{T_n}$. Тогаш, $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ е низа од непразни, затворени множества и важи $F_{n+1} \subseteq F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Од претпоставката, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$, односно постои $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$. Избираме подниза $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ од $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ на следниов начин: за $k = 1$, бидејќи $x \in F_1$ и T_1 е густо во F_1 $\left(\overline{T_1} = F_1\right)$, постои $x_{n_1} \in T_1$ такво што $d(x_{n_1}, x) < 1$. Слично, бидејќи $x \in F_{n_1}$ и T_{n_1} е густо во F_{n_1}, постои $x_{n_2} \in T_{n_1}$ со $n_2 > n_1$ такво што $d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}$. Со математичка индукција, за дадено x_{n_k} избираме $x_{n_k} \in T_{n_k}$, каде што $n_{k+1} > n_k$ и $d(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$. Тогаш, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Значи низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ има подниза $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ што конвергира кон точка $x \in X$.

■

Теорема 12.1.10. *Ако* X *е метрички простор што го задоволува својството на Болцано-Ваерштрас, тогаш* X *е тотално ограничен (видете ја дефиницијата 3.4.4.)*

Доказ. Избираме произволно $\varepsilon > 0$. Ќе покажеме дека X може да се покрие со конечно многу отворени топки со радиус $\varepsilon > 0$. Нека $x_1 \in X$. Ако $X \subseteq T(x_1, \varepsilon)$, доказот е завршен. Во спротивно, нека $x_2 \in X \setminus T(x_1, \varepsilon)$. Ако $T(x_1, \varepsilon) \cup T(x_2, \varepsilon) \supseteq X$, сме покажале дека X е тотално ограничено множество. Во спротивно, ја повторуваме постапката: бираме $x_3 \in X \setminus (T(x_1, \varepsilon) \cup T(x_2, \varepsilon))$, итн. Ако после конечен број чекори добиеме дека $X \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} T(x_i, \varepsilon)$, сме го докажале тврдењето.

Да претпоставиме дека процесот никогаш не запира, т.е. дека постои низа од точки $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ таква што $x_n \in X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} T(x_i, \varepsilon)$. За членовите на оваа низа важи: ако $m \neq n$, тогаш $d(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon$, од каде што следува дека низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ нема Кошиева подниза. Бидејќи секоја конвергентна низа е Кошиева, заклучуваме дека низата нема конвергентна подниза. Ова е контрадикција со условот на задачата, па претпоставката не е точна. Значи, постапката опишана погоре мора да заврши после конечно многу чекори.

■

12.2 Отворени покривки и компактност

Во овој дел ќе дефинираме компактност преку отворени покривки на метричкиот простор.

Дефиниција 12.2.1. *Нека (X, d) е метрички простор.* ***Отворена покривка*** *на множеството $A \subseteq X$ е фамилија $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ од отворени множества во X, за кои*

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \,.$$

Ако е јасно кое е индексното множество I, и не може да дојде до недоразбирање, тогаш фамилијата $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ ја означуваме кратко само со $\{G_\alpha\}$.

Дефиниција 12.2.2. *Ако $\pi = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ е отворена покривка за множеството A, тогаш која било потфамилија $\{G_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \pi$, што го покрива A, се вика* ***отворена потпокривка*** *од π на A во X.*

Дефиниција 12.2.3. *Ако (пот)покривката е конечно множество, тогаш се вели дека (пот)покривката е* ***конечна****.*

Дефиниција 12.2.4. ***(Борел[1]-Лебег[2])*** *Велиме дека метрички простор (X, d) е* ***компактен*** *ако од секоја отворена покривка на X можеме да извлечеме конечна потпокривка.*

Тоа значи дека ако $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ е произволна отворена покривка на X, тогаш таа мора да има конечна потпокривка, односно постојат конечно многу индекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I$ такви што

$$X \subseteq G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n} = \bigcup_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} G_{\alpha_i} \,.$$

Дефиниција 12.2.5. *Велиме дека подмножество K од метричкиот простор (X, d) е* ***компактно*** *ако потпросторот K со наследената метрика од (X, d) е компактен.*

Пример 12.2.6. *Интервалот $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ во метричкиот простор $\mathbb{R}$ со стандардната метрика, не е компактно множество. За да го покажеме ова, доволно е да најдеме отворена покривка на $(0, 1)$ од која што не можеме да извлечеме конечна потпокривка. Ќе покажеме дека отворената покривка $\big\{\big(\frac{1}{n}, 1\big) : n \geqslant 2\big\}$ на $(0, 1)$ го има тоа својство. Навистина, $(0, 1) \subseteq \displaystyle\bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$.*

[1] Félix Édouard Justin Émile Borel -француски математичар (1871-1956)
[2] Henri Léon Lebesgue-француски математичар, (1875-1941)

Ако претпоставиме дека постојат $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ *такви што* $(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{n_i}, 1\right)$, *тогаш за* $n_0 = \max\{n_1, \ldots n_k\}$ *и* $x \in (0, \frac{1}{n_0})$ *ќе имаме* $x < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{n_i}, \forall i = 1, \ldots, k$ *односно* $x \notin \cup_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{n_i}, 1\right)$. *Контрадикција.* ♦

Пример 12.2.7. *Просторот* $(C_{[0,1]}, \sup)$ *(види (1.17)) не е компактен. Нека* $T(f,r)$ *е отворената топка со центар во* $f \in C_{[0,1]}$ *и радиус* r *и нека* $U = \left\{T(f, \frac{1}{4}), f \in C_{[0,1]}\right\}$. *Јасно е дека* U *е отворена покривка на* $C_{[0,1]}$. *Дефинираме низа* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *во* $C_{[0,1]}$ *со*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1} \\ 2n(n+1)(x - \frac{1}{n+1}), & \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{2n+1}{2n(n+1)} \\ -2n(n+1)(x - \frac{1}{n}), & \frac{2n+1}{2n(n+1)} < x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}. \qquad (12.1)$$

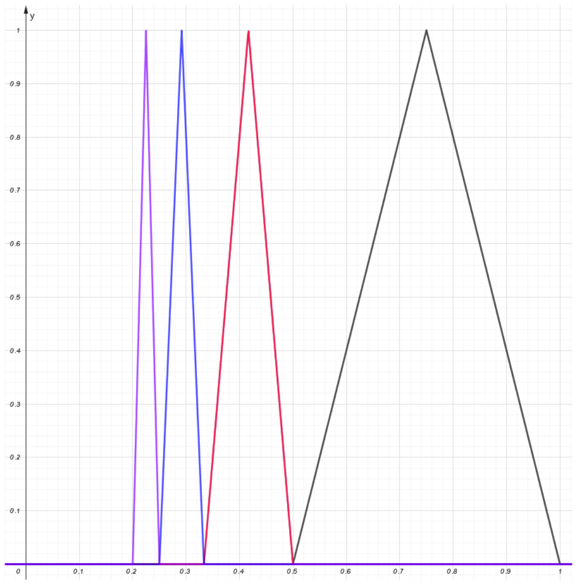
Графиците на f_1, f_2, f_3 *и* f_4 *се дадени на сл. 12.1.*
Забележуваме дека $d(f_m, f_n) = 1$ *ако* $m \neq n$. *Така, секој елемент од* U *содржи најмногу една функција од низата* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, *па затоа не постои конечно подмножество од* U *што го покрива* $C_{[0,1]}$. ♦

Пример 12.2.8. *Секое конечно множество е компактно. Но, од друга страна, постојат бесконечни компактни множества. На пример,* $[0,1]$ *е компактно множество во* $\mathbb{R}$ *(види задачата 10.6, 2)).* ♦

Нека (X, d) е метрички простор и $K \subseteq Y \subseteq X$. За разлика од затворени и отворени множества, множество е компактно во однос на Y е компактно во однос на целиот простор X.

Теорема 12.2.9. *Нека* $K \subseteq Y \subseteq X$. *Множеството* K *е компактно во однос на* X *ако и само ако* K *е компактно во однос на* Y.

Доказ. Нека K е компактно во однос на X и $\{V_\alpha\}$ е отворена покривка на K во однос на Y. За секој α, $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$ за некое отворено множество



Слика 12.1: Графици на првите четири члена од низата со општ член даден со равенката (12.1).

G_α во X (од теорема 3.5.3). Така $\{G_\alpha\}$ е отворена покривка на K. Бидејќи K е компактно во однос на X, постојат конечно многу индекси $K \subseteq \bigcup_{i\in\{1,2,\dots,n\}} G_{\alpha_i}$. Тогаш

$$K \subseteq \Big(\bigcup_{i\in\{1,2,\dots,n\}} G_{\alpha_i}\Big) \cap Y = \bigcup_{i\in\{1,2,\dots,n\}} (G_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup_{i\in\{1,2,\dots,n\}} V_{\alpha_i}.$$

Добивме дека K е компактно во однос на Y.

Обратно, нека K е компактно во однос на Y и $\{G_\alpha\}$ е отворена покривка на K во однос на X. Според теоремата 3.5.3, за секој $\alpha \in I$ постои отворено множество V_α во Y такво што $G_\alpha \cap Y = V_\alpha$. Бидејќи $K \subseteq Y$, $\{V_\alpha\}$ е отворена покривка на K. Тогаш

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n} (G_{\alpha_i} \cap Y) = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}\Big) \cap Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}\ .$$

односно K е компактно во однос на X.

■

Забелешка 12.2.10. *Теоремата 12.2.9 ни дава оправдување зошто можеме да разгледуваме компактни множества како компактни метрички простори.*

12.3 Еквивалентност на дефинициите за компактност

Ќе покажеме дека метрички простор е компактен во однос на дефиницијата 12.1.4 ако и само ако е компактен според дефиницијата 12.2.4.

Теорема 12.3.1. *Во метрички простор дефинициите 12.1.4 и 12.2.4 се еквивалентни.*

Доказ. Нека метричкиот простор X е компактен според дефиницијата 12.2.4 и нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во X што нема конвергентна подниза.

Бидејќи ниту еден член од низата не се повторува бесконечно многу пати (инаку би имала конвергентна подниза), можеме, без да се ограничиме од општоста, да претпоставиме дека $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$. Да забележиме дека секој член од низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е изолирана точка за $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, бидејќи во спротивно, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ќе има конвергентна подниза. Така, за секој i постои отворена топка $U_i = T(x_i, r_i)$ така што $x_j \notin T(x_i, r_i)$ за $i \neq j$. Нека $U_0 = X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. U_0 е отворено множество бидејќи $X \backslash U_0$ се состои само од изолирани точки, па е затворено. Тогаш, $\{U_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ е отворена покривка на X, но нема конечна потпокривка, бидејќи која било конечна потфамилија на $\{U_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ не содржи бесконечно многу членови на низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во својата унија. Контрадикција! Значи, секоја низа во X има конвергентна подниза, односно X е компактен според дефиницијата 12.1.4.

За обратната насока, Нека X е компактен во однос на дефиницијата 12.1.4 и нека $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ е отворена покривка на X. Тогаш, постои $r > 0$, таков што $(\forall x \in X)(\exists \alpha \in I)$ така што $T(x, r) \subseteq G_\alpha$ (видете ја ја задачата 14.) Од друга страна, според теоремата 12.1.10, X е тотално ограничен, па за $r > 0$, постојат $y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$ така што $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} T(y_i, r)$. Така, $T(y_i, r) \subseteq G_{\alpha_i}$, за некои $\alpha_i \in I$. Следува дека $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} T(y_i, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} G_{\alpha_i}$, односно $\{G_{\alpha_i} : i = 1, \ldots, m\}$ е конечна потпокривка за X. Со тоа покажавме дека X е компактно во однос на дефиницијата 12.2.4.

■

Забелешка 12.3.2. *Тврдењето од теоремата 12.3.1 не мора да важи во неметрички простори. Затоа, поимот компактност од дефиницијата 12.2.4 се разликува од поимот компактност од дефиницијата 12.1.4, кој во литературата се среќава под името* ***компактност преку низи*** *или* ***секвенцијална компактност****. Во секој метрички простор, двата поима се поклопуваат. Значи, кога мислиме на дефиниција* *за компактно множество во метрички простор, мислиме на која било од дефинициите 12.1.4 и 12.2.4.*

12.4 Особини на компактните множества

Теорема 12.4.1. *Компактно подмножество во метрички простор е:*

i) затворено и ii) ограничено.

Доказ. i) Нека K е компактно множество и $x \in X \setminus K$. Ако $y \in K$, нека $r_y = \frac{1}{2}d(x, y)$. Тогаш $K \subseteq \underset{y \in K}{\cup} T(y, r_y)$, па бидејќи K е компактно, постојат $y_1, y_2, \ldots, y_n \in K$ за кои е исполнето $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T(y_i, r_{y_i})$. Нека $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Тогаш

$$T(x, r) \cap K \subseteq T(x, r) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} T(y_i, r_{y_i})) = \bigcup_{i=1}^{n} (T(x, r) \cap T(y_i, r_{y_i})) = \varnothing,$$

односно $T(x, r) \subseteq X \setminus K$, што требаше да се докаже.

ii) Нека K е компактно множество и $x \in K$. Фамилијата

$$\{T(x, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

е отворена покривка на K. Бидејќи K е компактно, постои $N \in \mathbb{N}$ така што $K \subseteq T(x, N)$, односно K е ограничено множество.

■

Забелешка 12.4.2. *Обратното тврдење на претходната теорема не важи во произволен метрички простор.*

Пример 12.4.3. *Нека X е дискретен метрички простор и Y е бесконечно подмножество од X. Тогаш, Y е затворено и ограничено, но не е компактно множество. (Покажете!!!)* ♦

Пример 12.4.4. *Го разгледуваме метричкиот простор* (l^p, d), $p \geqslant 1$ *од примерот 1.4.3. Нека* $Y = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$, *каде што* e_n *е низата со сите членови* 0, *освен* $n-$*тиот член, што е* 1. *Исто така, нека* $e_0 = (0, 0, \dots)$. *Тогаш,* $e_n \in \overline{T(e_0, 2)}, \forall n \in \mathbb{N}$, *односно* Y *е ограничено множество. Од друга страна,* $d(e_n, e_m) = \sqrt[p]{2}$ *за* $m \neq n$, *па заклучуваме дека* Y *нема точки на натрупување, што значи дека е затворено множество. Значи,* Y *е затворено и ограничено подмножество од* $(l^p, d), p \geqslant 1$, *но не е компактно. Од отворената покривка* $\{T(e_n, 1) : n \in \mathbb{N}\}$ *на* Y *не можеме да извлечеме конечна потпокривка.*♦

Дефиниција 12.4.5. *Велиме дека метричкиот простор* X *го задоволува својството на* ***Хајне***[3]***-Борел***[4] *ако секое затворено и ограничено подмножество од* X *е компактно.*

Пример 12.4.6. *Неограничените интервали* $[a, \infty)$ *и* $(-\infty, b]$ *не се компактни бидејќи не се ограничени.*
Отворениот интервал (a, b) *не е компактно множество бидејќи не е затворено.* ♦

Теорема 12.4.7. *Затворените подмножества на компактно множество се компактни.*

Доказ. Нека $F \subseteq K \subseteq X$ каде што K е компактно и F е затворено во однос на X. Нека $\{V_\alpha\}$ е отворена покривка за F. Тогаш $\{V_\alpha\}$ заедно со $X \setminus F$ е отворена покривка за K. Бидејќи K е компактно, постојат индекси $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такви што

$$K \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}) \cup (X \setminus F) \,.$$

Тогаш $F \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i})$.

■

[3]Heinrich Eduard Heine, германски математичар,1821-1881)

[4]Félix Édouard Justin Émile Borel, француски математичар,1871–1956)

Последица 12.4.8. *Ако F е затворено, K е компактно, тогаш $F \cap K$ е компактно.*

Теорема 12.4.9. *Нека $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ е фамилија од компактни множества во метричкиот простор (X, d) така што пресекот на секоја конечна потфамилија од $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ е непразен. Тогаш, $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \varnothing$.*

Доказ. Фиксираме K_1 елемент од $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и нека означиме $G_\alpha = X \setminus K_\alpha$. Ќе претпоставиме дека ниту една точка од K_1 не припаѓа на секое K_α. Тогаш, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ е отворена покривка на K_1. Од K_1 е компактно, следува дека постојат $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ такви што $K_1 \subseteq G\alpha_1 \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}$. Така, добиваме

$$\begin{aligned} \varnothing &= K_1 \cap (X \setminus G\alpha_1 \cap \ldots \cap X \setminus G_{\alpha_n}) \\ &= K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Контрадикција.

■

Последица 12.4.10. *Ако $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од непразни компактни множества такви што $K_n \supseteq K_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, тогаш, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$.*

■

Теорема 12.4.11. *Нека A е бесконечно подмножество од компактното множество K. Тогаш, A има точка на натрупување во K.*

Доказ. Нека ниту една точка од K не е точка на натрупување за множеството A. Тогаш, $\forall x \in K, \exists r_x > 0$ така што $T(x, r_x) \cap A \subseteq \{x\}$. Фамилијата $\{T(x, r_x) : x \in K\}$ е отворена покривка за множеството K, па бидејќи K е компактно множество, следува дека постојат $x_1, \ldots,$ $\ldots, x_n \in K$ така што $A \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i, r_{x_i})$. Контрадикција со фактот дека A е бесконечно множество.

■

12.5 Компактност и комплетност

Теорема 12.5.1. *Секој компактен метрички простор е комплетен.*

Доказ. Нека X е компактен и $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X. Од дефиницијата 12.1.4, низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ има конвергентна подниза, па според теоремата 6.2.5, следува дека низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира.

■

Во општ случај обратното тврдење не важи, т.е. комплетен метрички простор не мора да е компактен. Имено, во примерот 6.2.10 покажавме дека секој дискретен метрички простор е комплетен, а во задачата 18 дека секој бесконечен дискретен метрички простор не е компактен.

Ако метричкиот простор X е комплетен и тотално ограничен, ќе покажеме дека тој е компактен. Меѓутоа, прво ќе го покажеме следново тврдење:

Теорема 12.5.2. *Ако метрички простор (X, d) е тотално ограничен, тогаш секоја низа во X има Кошиева подниза.*

Доказ. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е произволна низа во X. Ќе конструираме Кошиева подниза $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ од $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ на следниот начин: Бидејќи X е тотално ограничено множество, може да се покрие со конечен број топки со радиус 1. За доказот, ќе користиме математичка индукција. Нека со T_1 означиме една од топките што содржи бесконечно многу членови од низата. Означуваме со $I_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in T_1\}$. I_1 е бесконечно подмножество од $\mathbb{N}$. Нека со T_k означиме една од топките со радиус $\frac{1}{k}$ кои го покриваат X, и што содржи бесконечно многу членови од низата. Означуваме со $I_k = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in T_k\}$. Бидејќи X е тотално ограничено множество, може да се покрие со конечен број топки со радиус $\frac{1}{k+1}$. Избираме топка T_{k+1} со радиус $\frac{1}{k+1}$ што содржи бесконечно многу членови од низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, односно $I_{k+1} = \{n \in I_k : x_n \in T_{k+1}\}$ е бесконечно. Избираме $n_1 \in I_1$. Од дадено n_k, избираме $n_{k+1} \in I_{k+1}$ така што $n_{k+1} > n_k$. Од конструкцијата следува дека $I_{k+1} \subseteq I_k, \forall k$. Така, ако $i, j \geqslant k$, имаме $x_{n_i},\ x_{n_j} \in T_k$, со радиус $\frac{1}{k}$, односно $d(x_{n_i}, x_{n_j}) < \frac{2}{k}$. Добивме дека поднизата $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ е Кошиева низа.

■

Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во просторот X. Бидејќи X е тотално ограничен, од теоремата 12.5.2 следува дека низата има Кошиева подниза. Од друга страна, просторот е комплетен, значи низата има конвергентна подниза. Добивме дека во X секоја низа има конвергентна подниза, па според дефиницијата 12.1.4, X е компактен.
Со претходната дискусија и теоремата 12.1.10, ја докажавме следната теорема:

Теорема 12.5.3. *Просторот X е компактен ако и само ако е комплетен и тотално ограничен.*

12.6 Непрекинатост и компактност

Теорема 12.6.1. *Нека f е непрекинато пресликување од компактен метрички простор X во метрички простор Y. Тогаш $f(X)$ е компактно множество.*

Доказ. Нека $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ е отворена покривка на $f(X)$. Тогаш

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(V_\alpha)$$

и $f^{-1}(V_\alpha)$ е отворено во X (теоремата 9.3.1). поради компактноста на X, $X \subseteq \bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} f^{-1}(V_{\alpha_i})$ за некои $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$, односно

$$f(X) \subseteq f(\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} f^{-1}(V_{\alpha_i})) = \bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} V_{\alpha_i}\ .$$

■

Теорема 12.6.2. *Ако $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување и X е компактен метрички простор, тогаш f е рамномерно непрекинанато пресликување.*

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ се дадени. Бидејќи f е непрекинато во x, постои $\delta_x > 0$ такво што

$$d(x, y) < \delta_x \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фамилијата

$$\left\{ T_X \left(x, \frac{\delta_x}{2} \right) : x \in X \right\}$$

е отворена покривка за множеството X. Тогаш, постојат $x_1, \ldots, x_n \in X$ такви што $X \subseteq \bigcup\limits_{i=1,2,\ldots,n} T(x_i, \delta_{x_i})$. Избираме

$$\delta = \min\{ \frac{\delta_{x_i}}{2} : i = 1, \ldots, n\} > 0 \ .$$

Нека $d(y, z) < \delta$. Тогаш постои $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такво што $y \in T(x_j, \dfrac{\delta_{x_j}}{2})$ па е исполнето $d(f(y), f(x_j)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогаш и

$$d(z, x_i) < d(z, y) + d(y, x_i) < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leqslant \frac{\delta_{x_i}}{2} \Rightarrow d(f(z), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

На крајот добиваме

$$d(f(y), f(z)) \leqslant d(f(y), f(x_j)) + d(f(x_j), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Последица 12.6.3 (Кантор). *Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е непрекината реална функција на затворено и ограничено множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогаш f е рамномерно непрекината.*

12.7 Задачи за самостојна работа

1. Нека (X, d) е метрички простор и $K \subset X$. Тогаш, K е компактно множество ако од која било покривка на K од отворени топки можеме да извлечеме конечна потпокривка.

2. Користејќи ја дефиницијата, докажете дека отворената топка $T(0,1)$ во $(\mathbb{R}^k, d_p)$ (видете го примерот 1.3.1) не е компактно множество.

3. Дали постојат бесконечни метрички простори кои што немаат бесконечни компактни подмножества.

4. Докажете го следново тврдење: Ако A е бесконечно подмножество од компактно множество K, тогаш
$$K \cap A' \neq \varnothing \, .$$

5. Покажете дека бесконечно подмножество Y од дискретен метрички простор X е затворено и ограничено, но не е компактно множество.

6. Нека X е метрички простор. Покажете дека:
i) Произволен пресек од компактни множества с компактно множество;
ii) Конечна унија од компактни множества е компактно множество.

7. Нека X е компактен метрички простор и $K \subseteq X$. Тогаш, K е компактно множество K е затворено во X.

8. Ако K_1 и K_2 се компактни множества, тогаш и директниот производ $K_1 \times K_2$ е компактно множество.

9. Нека X е метрички простор и A и B се дисјунктни подмножества од X, така што A е затворено и B е компактно. Покажете дека
$$d(A, B) > 0.$$

10. Нека X е метрички простор, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна низа во X и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Покажете дека подмножеството $\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ од X е компактно множество.

11. Кои од овие множества се компактни?
i) $\left\{(x, y) : 2x^2 + 3y^2 = 1\right\}$;
ii) $\{(x, y) : xy < 1\}$;
iii) $\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

12. Докажете го следното тврдење: Метричкиот простор (X, d) е компактен ако и само ако секоја дисјунктна фамилија од затворени множества во X има конечна дисјунктна потфамилија.

13. Метричкиот простор (X, d) е компактен ако и само ако секоја низа $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ од непразни затворени подмножества од X така што $F_{n+1} \subseteq F_n, \forall n \in \mathbb{N}$, има непразен пресек.

14. Нека (X, d) е метрички простор со својството на Болцано-Ваерштрас и $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ е отворена покривка за X. Покажете дека тогаш постои $r > 0$ таков што $(\forall x \in X)(\exists \alpha \in I)$ така што $T(x, r) \subseteq G_\alpha$.

15. Нека (X, d) е метрички простор. Докажете дека следните тврдења се еквивалентни:
1) Секое бесконечно подмножество од X има барем една точка на натрупување.
2) Секоја низа во X има барем една конвергентна подниза.

16. Покажете дека $\mathbb{N}$ со дискретната метрика е комплетен и ограничен, но не е компактен.

17. Докажете го тврдењето од забелешката 12.4.3.

18. Покажете го тврдењето од примерот 12.4.3.

19. Нека (X,d) е компактен метрички простор и $f : X \to X$ е контракција. Тогаш, f има единствена неподвижна точка a, и за секој $x \in X$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = a$.

20. Покажете дека секој компактен метрички простор е тотално ограничен.

21. Покажете дека секој тотално ограничен и комплетен метрички простор е компактен.

22. Покажете дека метрички простор е компактен ако и само ако е комплетен и тотално ограничен.

Глава 13

Компактни множества во $\mathbb{R}^n$

Во овој дел ќе покажеме дека во просторот $\mathbb{R}^n$ важи својството на Хајне-Борел, односно е точно тврдењето дека подмножество од $\mathbb{R}^n$ е компактно ако и само ако е затворено и ограничено.

13.1 n-димензионален сегмент

Ќе покажеме дека n-димензионален сегмент е компактно множество.

Теорема 13.1.1. *Нека* $\{\overline{I}_m\}_m \in \mathbb{N}$ *е низа од сегменти во* $\mathbb{R}^1$ *такви што* $\overline{I}_m \supset \overline{I}_{m+1}, (m = 1, 2, \ldots)$. *Тогаш множеството* $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{I}_m$ *е непразно.*

Доказ. Нека $\overline{I}_m = [a_m, b_m]$ и $E = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$. Тогаш E е непразно и ограничено од горе (со b_1). Нека $x = \sup E$. Ако $m, n \in \mathbb{N}$, тогаш $a_n \leqslant a_{m+n} \leqslant b_{m+n} \leqslant b_m$, па добиваме дека $x \leqslant b_m, \forall m$. Така, $x \in \overline{I}_m, \forall m$. ■

Дефиниција 13.1.2. *Подмножеството од $\mathbb{R}^n$ од облик*

$$\overline{I}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

ќе го викаме ***n-димензионален сегмент****.*

Теорема 13.1.3. *Нека $\{\overline{I}^n_m\}_m$ е низа од $n-$димензионални сегменти такви што $\overline{I}^n_m \supset \overline{I}^n_{m+1}$,$(m = 1, 2, \ldots)$. Тогаш, множеството $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{I}^n_m$ е непразно.*

Доказ. Нека

$$\overline{I}^n_m = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_{m,i} \leqslant x_i < b_{m,i}, i = 1, 2, \ldots, n\} .$$

Да означиме $\overline{I}_{m,j} = [a_{m,j}, b_{m,j}]$. За секое j низата $(\overline{I}_{m,j})_m$ ги задоволува условите од теоремата 13.1.1. Така постојат реални броеви $x^*_j, (1 \leqslant j \leqslant n)$ за кои е исполнето $a_{m,j} \leqslant x^*_j \leqslant b_{m,j}, (1 \leqslant j \leqslant n; m = 1, 2, 3, \ldots)$. Нека ставиме $x^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$. Тогаш $x^* \in \overline{I}^n_m, \forall m \in \mathbb{N}$ со што теоремата е докажана.

■

Теорема 13.1.4. *Секој n-димензионален сегмент е компактно множество.*

Доказ. Нека $\overline{I} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ е n-димензионален сегмент и нека $\delta = \left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2\right)^{1/2}$. Ако $x, y \in \overline{I}$, тогаш јасно е дека $d(x, y) \leqslant \delta$. Претпоставуваме дека $\overline{I}$ не е компактно множество. Нека $\{G_\alpha\}$ е отворена покривка на $\overline{I}$ од која што не може да се извлече конечна потпокривка. Да ставиме $c_j = \dfrac{a_j + b_j}{2}$ за секое $j \in \{1, \ldots, n\}$. Сегментите $[a_j, c_j], [c_j, b_j]$ дефинираат 2^n на број n-димензионални сегменти. Со I_1 го означуваме сегментот што не може да се покрие со конечно многу од множествата $\{G_\alpha\}$. Потоа го делиме сегментот I_1 на 2^n делови и ја продолжуваме постапката. Доаѓаме до систем од вложени n-димензионални сегменти:

а) $\overline{I} \supset \overline{I}_1 \supset \overline{I}_2 \supset \dots$

б) $\overline{I}_n$ не може да се покрие со конечна потфамилија од фамилијата $\{G_\alpha\}$.

в) $d(x,y) \leqslant \dfrac{\delta}{2^n}, x, y \in \overline{I}_n$.

Од принципот на вложени сегменти на Кантор (теоремата 13.1.1) - за $n-$ димензионален случај аналогно како за бројната права - од а) и в) следува дека постои единствено $x^* \in \overline{I}$ кое припаѓа на сите сегменти $\overline{I}_n$. Тогаш $x^* \in G_\mu \in \{G_\alpha\}$ за некое μ. Бидејќи G_μ е отворено, постои $r > 0$ такво што ако $d(x, x^*) < r$, тогаш $x \in G_\mu$. Да го избереме $n \in \mathbb{N}$ таков што $2^{-n}\delta < r$. Нека $x \in \overline{I}_n$ е произволно. Тогаш, бидејќи $x^* \in \overline{I}_n$ имаме $d(x, x^*) < \dfrac{\delta}{2^n}$, па добиваме дека $x \in G_\mu$ т.е. $\overline{I}_n \subseteq G_\mu$ што е во контрадикција со б).

■

13.2 Теорема на Хајне-Борел

Ќе покажеме дека во $\mathbb{R}^n$ важи и обратното тврдење на теоремата 12.4.1, односно

Теорема 13.2.1. ***(Хајне-Борел)*** *Подмножество A од $\mathbb{R}^n$ е компактно ако и само ако е затворено и ограничено.*

Доказ. $\Rightarrow$: Теорема 12.4.1.

$\Leftarrow$: Бидејќи A е ограничено, постои $n-$димензионален сегмент I така што $A \subseteq I$. Според последицата 12.4.8, множеството A е компактно.

■

Пример 13.2.2. *Ќе наведеме неколку едноставни примери на компактни множества во $\mathbb{R}^n$:*
i) Сегментот $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.
ii) Затворената топка со центар во $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и радиус r:

$$T[a,r] = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} \leqslant r \right\}.$$

iii) Сферата

$$S(o = (0, \ldots, 0), 1) = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 1 \right\}.$$

iv) Канторовото множество $C \subseteq [0,1] \subseteq \mathbb{R}$:
Нека $E_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ е средната третина од $I = [0,1]$. $E_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \bigcup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ е унија од средните третини од компонентите на множеството $I \setminus E_1$. $E_3 = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \bigcup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \bigcup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \bigcup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ е унија од средните третини од компонентите на множеството $I \setminus (E_1 \bigcup E_2)$ итн. Множеството $C = I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ го викаме ***Канторово*[1] *множество****. Канторовото множество C е ограничено $(\subseteq [0,1])$ и затворено (како комплемент од отвореното множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$), па според теоремата на Хајне-Борел е компактно.* ◆

Теорема 13.2.3 (Ваерштрас)**.** *Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е непрекината реална функција на затворено и ограничено множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогаш f е ограничена функција и ги достигнува својот минимум и максимум.*

Доказ. Множеството $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ е затворено и ограничено (теоремата 12.6.1 и теоремата 13.2.1). Тогаш $\sup\{f(x) : x \in A\} \in \overline{f(A)} = f(A)$ и $\inf\{f(x) : x \in A\} \in \overline{f(A)} = f(A)$ односно постојат $a, b \in A$ такви што $f(a) = \inf\{f(x) : x \in A\}$ и $f(b) = \sup\{f(x) : x \in A\}$, што требаше да се докаже.

■

[1] Georg Cantor-германски математичар (1845-1918)

13.3 Непрекинати функции на компактните множества

Некои својства на непрекинатите реални функции со една променлива на компактно множество, можат да се генерализираат на непрекинатите функции со повеќе променливи. Така, ги имаме следните тврдења. Доказите на овие теореми ги оставаме на читателот за вежба.

Теорема 13.3.1. *Непрекинатата векторска функција на компактно множество $A \subseteq \mathbb{R}^2$ е ограничена на A.*

Теорема 13.3.2. *Непрекинатата векторска функција пресликува компактно множество во компактно множество.*

Теорема 13.3.3. *Непрекинатата векторска функција на компактно множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е рамномерно непрекината на A.*

Теорема 13.3.4. *Непрекинатата скаларна функција со повеќе променливи на компактно множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ги достигнува своите екстремни вредности на A.*

Забелешка 13.3.5. *Теоремата 13.3.4 не множеме да ја примениме за векторски функции бидејќи немаме подредување во $\mathbb{R}^m$. Во тој случај, ја имаме следната теорема:*

Теорема 13.3.6. *Нека $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ е непрекината функција на компактно множество A. Тогаш, постои точка $a \in A$ таква што $\|f(a)\|_{\mathbb{R}^m} = \sup\limits_{x\in A}\|f(x)\|_{\mathbb{R}^m}$.*

Нека $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^m$ и $A = [\alpha, \beta]$. Ја разгледуваме вектор-вредносната функција $\gamma(t), t \in [\alpha, \beta]$.

Дефиниција 13.3.7. *Ако $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ и ако $\gamma(t), t \in [\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$, е непрекинато пресликување такво што*

*$\gamma(\alpha) = a$ и $\gamma(\beta) = b$, тогаш велиме дека γ е **пат** со почеток во a и крај во b.*

***Отсечка (сегмент)** со почеток во a и крај во b, означуваме $L_{[a,b]}$, е пресликувањето:*

$$\gamma(t) = (a_1 + (b_1 - a_1)t, \ldots, a_m + (b_m - a_m)t), 0 \leqslant t \leqslant 1 \ .$$

Тогаш $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$.

Дефиниција 13.3.8. *Множеството $E \subseteq \mathbb{R}^m$ е **пат-сврзано** ако за секои $a, b \in E$ постои пат $\gamma : [0,1] \to E$ што лежи во E со почеток во точката a и крај во точката b.*

Дефиниција 13.3.9. ***Област** во $\mathbb{R}^m$ е отворено и пат-сврзано множество.*

Пример 13.3.10. *Топката $T(a,r) \subseteq \mathbb{R}^m$ е област.*
Навистина, нека $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{m,0})$ и $x_1 = (x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{m,1})$ се две точки во топката $T(a,r)$ и нека пресликувањето

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$$

е зададено со функциите:

$$x_i(t) = x_{i,0} + (x_{i,1} - x_{i,0})t, 0 \leqslant t \leqslant 1, \forall i = 1, 2, \ldots, m.$$

Очигледно е дека $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. *Исто така,*

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t) - a\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_{i,0} + (x_{i,1} - x_{i,0})t - a_i)^2} = \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(t \cdot x_{i,1} + (1-t)x_{i,0} - (a_i t + (1-t)a_i))^2} = \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(t \cdot (x_{i,1} - a_i) + (1-t)(x_{i,0} - a_i))^2} = \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} t^2 \cdot (x_{i,1} - a_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(1-t)^2(x_{i,0} - a_i)^2} = \\
&= t\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_{i,1} - a_i)^2} + (1-t)\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_{i,0} - a_i)^2} = \\
&= t \cdot \|x_1 - a\| + (1-t) \cdot \|x_0 - a\| < \\
&< t \cdot r + (1-t) \cdot r = r,
\end{aligned}$$

што значи $\gamma(t) \in T(a,r), \forall t \in [0,1]$, *односно* $\gamma([0,1]) \subseteq T(a,r)$. ♦

13.4 Задачи за самостојна работа

1. Да се даде пример на отворена покривка на $(0,1)$ од која што не може да се извлече конечна потпокривка.

2. Покажете без теоремата на Хајне- Борел дека множеството $K = [0,1]$ е компактно во $\mathbb{R}$.

3. Покажете, не користејќи ја теоремата на Хајне-Борел, дека множествата од примерот 13.2.2 под *i*), *ii*) и *iii*) се компактни.

4. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$ е компактно множество, тогаш и проекциите $A_1 = pr_{x_1}A$, $A_2 = pr_{x_2}A, \ldots, A_n = pr_{x_n}A$ на множеството A на координатните оски се компактни множества во $\mathbb{R}$. Обратното тврдење не важи во општ случај.

Глава 14

Сврзани метрички простори

Нека (X, d) е метрички простор.

Дефиниција 14.0.1. *Велиме дека (X, d) е **сврзан метрички простор** ако и само ако X не може да се претстави како дисјунктна унија од непразни отворени подмножества од X.*
(Тоа значи не постојат непразни отворени подмножества A и B од X такви што $X = A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$.)
*Во спротивно, односно ако постојат две непразни подмножества A и B од X такви што $X = A \cup B$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$ и $\overline{A} \cap B = \varnothing$, тогаш велиме дека X е **несврзан метрички простор**.*

Дефиниција 14.0.2. *За непразното множество Y од метричкиот простор (X, d) велиме дека е **сврзано** ако потпросторот (Y, d_Y) со метриката индуцирана од метриката во X е сврзан.*

Интуитивно, просторот X е сврзан ако целиот простор е во едно парче, односно не се состои од повеќе парчиња што се „разделени” едно од друго.

Пример 14.0.3. *Едноелементното множество* $\{x\}$ *во кој било метрички простор е секогаш сврзано.* ♦

Пример 14.0.4. *Множеството рационални броеви* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *со метриката индуцирана од стандардната метрика во* $\mathbb{R}$ *е несврзано. Всушност, ако*

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q}: \ x < \sqrt{2}\right\} \text{ и } B = \left\{x \in \mathbb{Q}: \ x > \sqrt{2}\right\},$$

тогаш A *и* B *се дисјунктни подмножества од* $\mathbb{R}$ *и* $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$ *и* $\overline{A} \cap B = \varnothing$.♦

Пример 14.0.5. *Дискретен метрички простор* X *со повеќе од еден елемент е несврзан. Навистина, нека* $x \in X$, *тогаш множествата* $A = \{x\}$ *и* $B = X \setminus \{x\}$ *се непразни, отворени подмножества од* X *и важи* $A \cup B = X$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$ *и* $\overline{A} \cap B = \varnothing$. ♦

Теорема 14.0.6. *Нека* (X, d) *е метрички простор. Тогаш следните својства се еквивалентни:*

i) (X, d) *е несврзан,*

ii) постојат две непразни, дисјунктни, отворени подмножества A *и* B *такви што* $X = A \cup B$,

iii) постојат две непразни, дисјунктни, затворени подмножества A *и* B *такви што* $X = A \cup B$,

iv) постои вистинско непразно подмножество од X *што е истовремено отворено и затворено во* X.

Доказ. $(i) \Rightarrow (ii)$: $X = A \cup B$, каде што A и B се непразни и $A \cap \overline{B} = \varnothing$, $B \cap \overline{A} = \varnothing$. Тогаш, $A \subseteq X \setminus \overline{B} \subseteq X \setminus B = A$. Така, $A = X \setminus B$, што значи A е отворено во X. На ист начин се покажува дека B е отворено во X. Исто така, $A \cap B \subseteq A \cap \overline{B} = \varnothing$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Нека A и B се непразни, дисјунктни, отворени подмножества од X такви што $X = A \cup B$. Тогаш, $A = X \setminus B$ и $B = X \setminus A$ се непразни, дисјунктни, затворени подмножества од X такви што $X = A \cup B$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Нека A и B се две непразни, дисјунктни, затворени подмножества од X такви што $X = A \cup B$. Тогаш, $A = X \setminus B$ е отворено во X. Така, A е вистинско непразно подмножество од X што е истовремено отворено и затворено во X.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Нека A е вистинско непразно подмножество од X што е истовремено отворено и затворено во X и нека $B = X \setminus A$. Тогаш, $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$. Бидејќи $A = \overline{A}$ имаме дека $\overline{A} \cap B = \varnothing$. Слично, $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

■

Забелешка 14.0.7. *Познато ни е дека во кој било метрички простор (X, d), X и $\varnothing$ се истовремено отворени и затворени множества. Од теоремата 14.0.6 заклучуваме дека просторите во кои X и $\varnothing$ се единствените истовремено отворени и затворени подмножества од X се сврзаните простори.*

Пример 14.0.8. *Множеството природни броеви е несврзано во $\mathbb{R}$. Нека $A \subseteq \mathbb{N}$ и $m \in A$. Ако $r < 1$, тогаш*

$$T(m, r) = \{n \in \mathbb{N} : d(m, n) = |m - n| < r\} = \{m\} \subseteq A.$$

Значи, A е отворено во $\mathbb{N}$. На ист начин се покажува дека $\mathbb{N} \setminus A$ е отворено во $\mathbb{N}$, односно A е истовремено отворено и затворено во $\mathbb{N}$. Следува $\mathbb{N}$ е несврзан во $\mathbb{R}$.♦

Пример 14.0.9. *Сегментот $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ е сврзан.*
Ќе претпоставиме дека $[a, b]$ не е сврзан, односно постојат непразни, отворени, дисјунктни подмножества U_1, U_2 од $\mathbb{R}$ така што $[a, b] = U_1 \cup U_2$. Нека $a \in U_1$ и нека $c = \inf U_2$. Од претпоставката дека U_1 е отворено множество и $a \in U_1$, следува дека постои $r > 0$ така што $[a, a + r) \subseteq U_1 = [a, b] \setminus U_2$. Одовде следува дека $c = \inf U_2 \neq a$. Од друга страна, $c \neq b$, бидејќи во спротивно, ако $c = b$, тогаш $U_2 = \{b\}$, што не е отворено множество. Значи, $c \in (a, b) \subseteq U_1 \cup U_2$. Ако $c \in U_1$, тогаш постои $r > 0$ така што $(c - r, c + r) \subseteq U_1$, па c не е $\inf U_2$, што не точно. Значи, $c \notin U_1$. Тогаш, c мора да биде во U_2. Но, тогаш од отвореноста на U_2, постои $r > 0$ така што $(c - r, c + r) \subseteq U_2$, а тоа би значело дека $c < c - r$, што не е можно. Добивме контрадикција со претпоставката дека $[a, b]$ не е сврзано множество. Значи, $[a, b]$ е сврзано множество. ♦

Теорема 14.0.10. *Нека $\{A_\alpha,\ \alpha \in I\}$ е фамилија непразни сврзани подмножества A_α од просторот X, за која што важи $X = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ и $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Тогаш, X е сврзан простор.*

14.1 Пат сврзани метрички простори

Дефиниција 14.1.1. *Нека (X,d) е метрички простор и $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$.*
Пат *во просторот X е непрекинато пресликување $\gamma : I \to X$.*
Точката $x_1 = \gamma(0)$ е почеток на патот, а точката $x_2 = \gamma(1)$ е крај на патот γ, и велиме дека патот γ ја поврзува точката x_1 со точката x_2.
Нека $\gamma_1 : I \to X$ и $\gamma_2 : I \to X$ се два пата во X такви што $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, односно крајот на патот γ_1 е почетокот на патот γ_2. Тогаш, дефинираме нов пат $\gamma : [0,2] \to X$ со:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [0,1] \\ \gamma_2(t-1), & t \in [1,2] \end{cases} \tag{14.1}$$

Дефиниција 14.1.2. *Велиме дека метричкиот простор X е* ***пат сврзан*** *ако за секои две точки x_1 и x_2 од X постои пат γ со почеток во x_1 и крај во x_2.*

Теорема 14.1.3. *Секој пат сврзан метрички простор е сврзан.*

Доказ. *Нека x_0 е произволна точка во X. Од претпоставката имаме дека за секој $x \in X$, постои пат $\gamma_x : [0,a_x] \to X$ со почеток во x_0 и крај во x. Бидејќи сегментот $[0,a_x]$ е сврзано множество (видете го примерот 14.0.9), тогаш и множеството $\gamma_x([0,a_x])$ е сврзано (видете ја задачата 8), а бидејќи $x_0 \in \gamma_x([0,a_x]), \forall x \in X$, тогаш и просторот $X = \bigcup_{x\in X} \gamma_x([0,a_x])$ е сврзан.*

■

Дефиниција 14.1.4. ***Полигон (искршена линија)*** *е унија од конечен број сегменти*

$$L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n ,$$

такви што $L_i \cap L_{i+1}$ е една точка и почетокот на L_{i+1} се поклопува со крајот на L_i.

Почетокот на првиот сегмент е почеток на полигонот. Крај на полигонот е крајот на последниот сегмент.

Дефиниција 14.1.5. *Множеството $E \subseteq \mathbb{R}^m$ е* ***полигонално сврзано*** *ако за кои било две точки a и b од E постои полигон со почеток во a и крај во b што лежи во E.*

Дефиниција 14.1.6. *Множеството $E \subseteq \mathbb{R}^m$ е* ***конвексно*** *ако за секои две точки a и b од E сегментот $L_{[a,b]} \subseteq E$.*

Пример 14.1.7. *Топката $T(a, r)$ е конвексно множество, сферата $S(a, b)$ не е конвексно множество.* ♦

Теорема 14.1.8 (Коши). *Нека $f(x_1, \ldots, x_m)$ е непрекината функција дефинирана на пат-сврзано множество $E \subseteq \mathbb{R}^m$ и нека $a, b \in E$ се такви што $f(a) \neq f(b)$. Тогаш за секое C што се наоѓа помеѓу $f(a)$ и $f(b)$ постои $c \in E$ такво што $f(c) = C$.*

Доказ. Нека $\phi : [0, 1] \to E$ е пат што лежи во E со почеток во a и крај во b. Тогаш композицијата $g = f \circ \phi$ е непрекината на $[0, 1]$ (теоремата 9.2.6). Исто така

$$g(\alpha) = f(\phi(\alpha)) = f(a) \neq f(b) = f(\phi(\beta)) = g(\beta) .$$

Затоа, постои $t_0 \in [0, 1]$ такво што $g(t_0) = C$. Тогаш, ако земеме $c = \phi(t_0) \in E$, имаме $f(c) = f(\phi(t_0)) = g(t_0) = C$.

■

Теорема 14.1.9. *Нека $E \subseteq \mathbb{R}^m$ е област, тогаш E е полигонално сврзано множество.*

Доказ. Нека $a, b \in E$ и $\gamma[0,1] \to E$ е пат што лежи во E со почеток во a и крај во b. Нека $t \in [0,1]$ е произволно. Тогаш $\gamma(t) \in E$, па бидејќи E е отворено, постои $r_t > 0$ такво што $T(\gamma(t), r_t) \subseteq E$. Од друга страна, поради непрекинатоста на γ во точката t, за $r_t > 0$ постои $\delta_t > 0$ такво што за секое $x \in (t-\delta_t, t+\delta_t)$, $\gamma(x)$ припаѓа во топката $T(\gamma(t), r_t)$. Нека

$$\{(t_1-\delta_{t_1}, t_1+\delta_{t_1}), (t_2-\delta_{t_2}, t_2+\delta_{t_2}), \dots, (t_n-\delta_{t_n}, t_n+\delta_{t_n})\}$$

е конечната потпокривка што сме ја извлекле од отворената покривка $\{(t-\delta_t, t+\delta_t) : t \in [0,1]\}$ на $[0,1]$. Можеме да земеме дека

$$0 \in (t_1-\delta_{t_1}, t_1+\delta_{t_1}), \qquad 1 \in (t_n-\delta_{t_n}, t_n+\delta_{t_n}) \, .$$

Интервалот $(t_1-\delta_{t_1}, t_1+\delta_{t_1})$ има непразен пресек со барем еден од останатите интервали, нека е тоа $(t_2-\delta_{t_2}, t_2+\delta_{t_2})$. Нека

$$t' \in (t_1-\delta_{t_1}, t_1+\delta_{t_1}) \cap (t_2-\delta_{t_2}, t_2+\delta_{t_2}) \, .$$

Тогаш $\gamma(t') \in T(\gamma(t_1), r_{t_1}) \cap T(\gamma(t_2), r_{t_2})$. Полигонот

$$L_{[a,\gamma(t')]} \cup L_{[\gamma(t'),\gamma(t_2)]}$$

лежи во E. Ја повторуваме постапката, поаѓајќи сега од $\gamma(t_2)$ и добиваме полигон со почеток во a и крај во b.

■

Теорема 14.1.10. *Ако E е пат-сврзано множество во $\mathbb{R}$ и $x, y \in E$, тогаш сегментот $[x,y] \subseteq E$.*

Доказ. Нека $z \in [x,y]$ и $\phi : [0,1] \to E$ е пат во E со почеток во a и крај во b. Бидејќи ϕ е непрекината, постои $c \in [0,1]$ такво што $\phi(c) = z$. Така $z \in E$.

■

Последица 14.1.11. *Едно множество $E \subseteq \mathbb{R}$ е пат-сврзано ако и само ако E е едно од следните множества:*

$$(-\infty, b), (-\infty, b], (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, \infty), (a,b), [a,b), (a,b], [a,b] \, ,$$

каде што a и b се реални броеви и $a \leqslant b$.

Доказ. Нека $x \in E$ каде што E е непразно сврзано множество и нека

$$A = \{y \in E : y \geqslant x\}, \qquad B = \{y \in E : y \leqslant x\} .$$

A и B можат да бидат ограничени или неограничени од десно односно лево. Нека A е ограничено и нека $M = \sup A$. Тврдиме дека $[x, M) \subseteq E$. Навистина, од дефиницијата за супремум имаме дека за секое $y \in (x, M)$, постои $z \in (y, M) \cap E$. Тогаш $[x, z] \subseteq E$ (теоремата 14.1.9), од каде што следува дека $y \in E$.

На ист начин покажуваме дека ако B е ограничено и $m = \inf B$, тогаш $(m, x] \subseteq E$. Ако $A(B)$ е неограничено од десно (лево), тогаш $[x, +\infty) \subseteq E$ ($(-\infty, x] \subseteq E$). Ако A и B се ограничени, тогаш имаме

$$(m, M) = (m, x] \cup [x, M) \subseteq E .$$

Можни се следниве случаи:

1. $m, M \in E$, тогаш $E = [m, M]$;
2. $m \in E$, $M \notin E$, тогаш $E = [m, M)$;
3. $m \notin E$, $M \in E$, тогаш $E = (m, M]$ или
4. $m, M \notin E$, тогаш $E = (m, M)$.

Во случај едно од множествата A и B да е неограничено, E е од облик $[m, +\infty), (m, +\infty), (-\infty, M]$ или $(-\infty, M)$. Ако и двете множества се неограничени, се добива $E = (-\infty, +\infty)$.

■

14.2 Задачи за самостојна работа

1. Кое од следниве подмножества од $\mathbb{R}^2$ е сврзано, односно пат-сврзано?
   i) $T((-1, 0), 1) \cup T((1, 0), 1)$

$ii)$ $\overline{T((-1,0),1)} \cup \overline{T((1,0),1)}$
$iii)$ $T((-1,0),1) \cup \overline{T((1,0),1)}$
$iv)$ $(([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$ (- рационален чешел).

2. Покажете дека множеството
   $i)$ $(a,b) \cup (c,d) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b \ \vee c < x < d\}$, $b < c$.
   $ii)$ $X = \left\{x \in \mathbb{E}^2 : \|x\| \leqslant 1\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{E}^2 : \|x - 3\| \leqslant 1\right\}$
   $iii)$ $X = \left\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\right\}$
   $iv)$ $X = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant x < 0 \vee 0 < x \leqslant 1\}$
   со стандардната метрика е несврзано.

3. Покажете дека метричкиот простор (X, d) е несврзан ако и само ако постои вистинско подмножество од X што е и отворено и затворено во X.

4. Покажете дека метричкиот простор (X, d) е сврзан ако и само ако единствените подмножества од X што се истовремено отворени и затворени се X и $\varnothing$.

5. Покажете дека просторот $\mathbb{R}$ од реални броеви е сврзан.

6. Нека $A \subseteq X$ е сврзано множество во просторот (X, d). Докажете дека е сврзано и секое подмножество $B \subseteq X$ за кое што важи: $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$.

7. Нека $I = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Докажете дека за секое непрекинато пресликување $f : I \to I$ постои барем една неподвижна точка x_0.

8. Нека (X, d_x) е сврзан метрички простор и $f : (X, d_x) \to (Y, d_y)$ е непрекинато пресликување. Тогаш потпросторот $f(X)$ од (Y, d_y) е сврзан.

Глава 15

Додаток

15.1 Структура на множеството реални броеви

Дефиниција 15.1.1. *Множество* $\mathbb{R}$ *во кое што се дефинирани две бинарни операции: собирање „+” и множење „·” и бинарна релација „$\leqslant$” за кои важат следните својства:*

1) Аксиоми за собирање.

1. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (x+y)+z = x+(y+z)$,

2. $(\exists\, 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 + x = x$,

3. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R}) \quad x + (-x) = 0$;

4. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x, y \in \mathbb{R}) \quad x + y = y + x$,

Значи, со операцијата собирање, множеството $\mathbb{R}$ *има структура на* *адитивна Абелова*[1] *група.*

2) Аксиоми за множење.

5. $x \cdot y = y \cdot x,$

6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$

7. $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *, така што* $x \cdot 1 = x,$

8. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ *така што* $x \cdot x^{-1} = 0,$

9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$

Значи, со операциите собирање и множење, множеството $\mathbb{R}$ *е поле.*

3) Аксиоми за подредување.

10. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant x,$

11. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ *и* $y \leqslant x \Rightarrow x = y,$

12. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ *и* $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z,$

13. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *важи* $x \leqslant y$ *или* $y \leqslant x,$

14. Ако $y \leqslant x$ *и* $z \in$ *е произволен, тогаш важи* $x + z \leqslant y + z,$

15. Ако $0 \leqslant x$ *и* $0 \leqslant y$*, тогаш важи* $0 \leqslant x \cdot y.$

Значи, " $\leqslant$ *" е тотално подредување. Врз основа на аксиомите 14. и 15., полето* $\mathbb{R}$ *го викаме* ***тотално подредено поле****.*

Аксиомите 1.-15. ги викаме ***алгебарски аксиоми*** *на множеството* $\mathbb{R}$.

4) Аксиома за комплетност (непрекинатост).

> *Нека* A *и* B *се непразни подмножества од множеството* $\mathbb{R}$*, такви што* $x \leqslant y, \forall x \in A, y \in B$*. Тогаш, постои* $z \in \mathbb{R}$*, таков што* $x \leqslant z \leqslant y, \forall x \in A, y \in B$*.*

Аксиомата 4) е најважна за воведување на основните поими од анализа. Оваа аксиома ќе ја викаме ***аксиома за комплетност*** *или* ***аксиома за непрекинатост****. Да напоменеме дека таа не може да се изведе од алгебарските аксиоми.*

Забелешка 15.1.2. *Во врска со системот аксиоми за реалните броеви се наметнуваат следните прашања: 1) Дали системот аксиоми е непротивречен, односно дали постои множество* $\mathbb{R}$ *со опишаните своj-*

[1] Niels Henrik Abel (1802–1829)-норвешки математичар

ства? и 2) Дали со овие аксиоми множествовото $\mathbb{R}$ е еднозначно опишано?

15.1.1 Последици од аксимата за комплетност

Аксиомата 4) за комплетност (непрекинатост) може да се замени со некој исказ еквивалентен на неа. Во продолжение ќе дадеме некои важни последици на аксиомата за комплетност, што се користат особено во теоријата на гранични вредности и непрекинатост. Ќе почнеме со важна теорема за супремум, една од еквивалентите на аксиомата за комплетост.

Дефиниција 15.1.3. *Нека A е непразно подмножество од $\mathbb{R}$.*
Велиме дека бројот $x \in \mathbb{R}$ е

-горна граница (мајорант) *за множеството A ако и само ако $x \geqslant a, \forall a \in A$.*

-долна граница (минорант) *за множеството A ако и само ако $x \leqslant a, \forall a \in A$.*

Дефиниција 15.1.4. *Нека A е подмножество од подреденото множество $(\mathbb{R}, \leqslant)$. Велиме дека точката x е* ***супремум*** *на множеството A, означуваме $x = \sup A$ ако x е најмалиот мајорант (ако постои) за множеството A, односно*

$$x = \sup(A) \Leftrightarrow ((\forall a \in A, a \leqslant x) \wedge (\forall a \in A, a \leqslant y)) \Rightarrow x \leqslant y. \qquad (15.1)$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогаш, постои $a \in A$ таков што $x < a + \varepsilon$. Во спротивно, ако $\forall a \in A, a + \varepsilon < x$, тогаш $x - \varepsilon$ е мајорант на A. Контрадикција. Значи, еквивалентна дефиниција за супремум е:

$$x = \sup(A) \Leftrightarrow (\forall a \in A, a \leqslant x) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > x - \varepsilon). \qquad (15.2)$$

Дефиниција 15.1.5. *Нека A е подмножество од подреденото множество $(\mathbb{R}, \leqslant)$. Велиме дека точката x е* ***инфимум*** *на множеството*

A, означуваме $x = \inf A$ ако x е најголемиот минорант (ако постои) за множеството A, односно

$$x = \inf A \Leftrightarrow ((\forall a \in A, x \leqslant a) \wedge (\forall a \in A, y \leqslant a)) \Rightarrow y \leqslant x. \qquad (15.3)$$

Еквивалентна дефиниција за инфимум е:

$$x = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A, x \leqslant a) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, x \leqslant a < x + \varepsilon). \qquad (15.4)$$

Теорема 15.1.6. *1) Секое непразно, од горе ограничено подмножество од $\mathbb{R}$ има супремум.*
2) Секое непразно, од долу ограничено подмножество од $\mathbb{R}$ има инфимум.

Доказ. 1) Нека A е непразно, ограничено од горе подмножество од $\mathbb{R}$ и $B = \{y \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leqslant y\}$ е множеството од сите мајоранти на A. Значи, A и B се непразни подмножества од множеството $\mathbb{R}$, такви што $x \leqslant y, \forall x \in A, y \in B$. Тогаш, според аксиомата 4) за комплетност, постои $z \in \mathbb{R}$, таков што $x \leqslant z \leqslant y, \forall x \in A, y \in B$. Јасно е дека z е мајоранта за множеството A и истовремено е најмалата мајоранта, односно $z = \sup(A)$.
2) Тврдењето за инфимум се докажува на ист начин.

■

Теорема 15.1.7. ***Архимедово својство.*** *За произволни позитивни реални броеви a и b, постои единствен природен број n таков што важи*

$$(n-1)a \leqslant b < na. \qquad (15.5)$$

Доказ. Ако не постои природен број n таков да важи $b < na$, тогаш ќе важи $\forall n \in \mathbb{N}, na \leqslant b$, што значи дека множеството $A = \{na : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено од горе, па постои $\sup(A) = c$. Бидејќи $a > 0$, имаме дека $c - a < c$, а тоа значи дека $c - a$ не е мајорант за множеството A, па постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што $n_0 a > c - a$, односно $(n_0 + 1)a > c$, што не е можно бидејќи $\sup(A) = c$. Значи, неравенството $b < n'a$ важи за некој

$n' \in \mathbb{N}$. Го избираме најмалиот од сите n за кои важи $b < na$. Тогаш, за тоа n ќе имаме $(n-1)a \leqslant b < na$. Единственоста на тој број е јасна.

■

Забелешка 15.1.8. *Архимедовото својство важи и ако дозволиме $b \in \mathbb{R}$ да биде со произволен знак. Во тој случај ќе бираме $n \in \mathbb{Z}$.*

Забелешка 15.1.9. *Ако во теоремата 15.1.7 избереме $a = 1$, тогаш, го добиваме тврдењето:*

$$(\forall b \in \mathbb{R})(\exists! n \in \mathbb{Z}) n - 1 \leqslant b < n. \tag{15.6}$$

Во тој случај, велиме дека бројот $n-1$ е цел дел од b и го означуваме со $[b]$.

Последица 15.1.10. *Како последица на Архимедовото својство, ги имаме следните тврдења: 1) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ таков што $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. 2) Ако за ненегативниот реален број x важи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, $x < \frac{1}{n}$, тогаш $x = 0$.*

Последица 15.1.11. *Множеството $\mathbb{Q}$ е густо во $\mathbb{R}$.*

Доказ. Ќе покажеме дека за кои било реални броеви a и b, $a < b$ постои рационален број x таков што $a < x < b$. Нека $h = b - a$, тогаш од Архимедовото својство, постои $q \in \mathbb{N}$ таков што $qh > 1$. Од друга страна, пак од (15.1.7), постои $p \in \mathbb{Z}$ таков што $p - 1 \leqslant qa < p$, односно $\frac{p-1}{q} \leqslant a < \frac{p}{q}$. Притоа, $\frac{p}{q} - a \leqslant \frac{1}{q} < b - a$, од каде што имаме дека $\frac{p}{q} < b$. На тој начин, за $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ важи $a < x < b$.

■

Забелешка 15.1.12. *Да забележиме дека, користејќи ги алгебарските аксиоми, два реални броја x и y можеме да ги*

-собереме: $x + y$,
-одземеме: $x - y = x + (-y)$,
-помножиме: $x \cdot y$,
-поделиме: $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$,

-степенуваме: $x^n = x \cdots x$ *(има* n *множители* x*).*
Аксиомата за комплетност ќе ни помогне да воведеме и операција коренување, односно степенување со рационален број.

Теорема 15.1.13. *За даден произволен позитивен број* x *и секој природен број* n *постои еднозначно определен позитивен број* y *таков што* $y^n = x$*.*

15.1.2 Проширено множество реални броеви

Дефиниција 15.1.14. *Дефинираме проширено множество реални броеви со:*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\,. \tag{15.7}$$

На ова множество воведуваме операции собирање и множење со скалар на следниот начин: На аксиомите 1.-4. ги додаваме следните аксиоми:

$$x + \infty = \infty = \infty + x, \forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

и

$$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty, \forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

На аксиомите 5.-9. ги додаваме следните аксиоми: $\forall x \in \widetilde{\mathbb{R}}, x > 0,$

$$x\infty = \infty x = \infty,$$

и $\forall x \in \widetilde{\mathbb{R}}, x < 0$

$$x(-\infty) = -\infty = -\infty x$$

и

$$x\infty = -\infty = \infty x.$$

На аксиомите 10.-15. ги додаваме аксиомите: $-\infty < x < \infty, \forall x \in \mathbb{R}$ и $-\infty < \infty$.
Исто така дефинираме: $|-\infty| = |\infty| = \infty$, но не дефинираме: $\infty + (-\infty)$,

или $0 \cdot \infty$, или $0 \cdot (-\infty)$.
Под околини на точките $-\infty$ и ∞ ги подразбираме множествата:

$$(a, +\infty), [a, +\infty)$$

и

$$(-\infty, b), (-\infty, b].$$

Дефиниција 15.1.15. *По договор, дефинираме:*

$$\inf \varnothing = +\infty \tag{15.8}$$

и

$$\sup \varnothing = -\infty. \tag{15.9}$$

Теорема 15.1.16. *Секое подмножество од $\widetilde{\mathbb{R}}$ има и супремум и инфимум во $\widetilde{\mathbb{R}}$.*

Теорема 15.1.17. *Нека A и B се непразни подмножества од $\widetilde{\mathbb{R}}$ и $A \subseteq B$. Тогаш, важи неравенството*

$$\inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

Забелешка 15.1.18. *Да нагласиме дека за непразно подмножество $A \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ важи*

$$\inf A \leqslant \sup(A).$$

Ако A е празното множество, тогаш од дефиницијата 15.1.15 имаме

$$\sup \varnothing < \inf \varnothing.$$

15.2 Структура на векторскиот простор $\mathbb{R}^n$

15.2.1 Алгебарска структура

Нека $\mathbb{R}^n$ е множеството од сите подредени $n-$торки од реални броеви. Со други зборови нека

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R},$$

односно $\mathbb{R}^n$ е Декартов производ од n (еднакви) множества $\mathbb{R}$ од реалните броеви. Елементите на множеството $\mathbb{R}^n$ ќе ги означуваме со

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Во случај за $n = 1$, множеството $\mathbb{R}^1$ е множеството реални броеви $\mathbb{R}$. За $n = 2$, имаме $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ е множеството подредени двојки од реални броеви, и го викаме множество точки во рамнината. $\mathbb{R}^3$ е синоним за тридимензионалниот простор. Од него почнуваат сите наши интуиции и генерализации.
По аналогија, со геометриските илустрации во $\mathbb{R}^n$ за $n = 1, 2, 3$ елементите $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ќе ги викаме точки во $\mathbb{R}^n$, додека $x_i, i = 1, \ldots, n$ ќе ги викаме координати или проекции на x на соодветните оски.
На $\mathbb{R}^n$ може, во извесна смисла, да се генерализира алгебарската структура од реалната права.
Во $\mathbb{R}^n$ воведуваме две операции:
1. **Собирање:** збирот на точките $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ се дефинира со

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{15.10}$$

значи, собирање по координатите.
Точката $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ е нулта точка или неутрален елемент за операцијата собирање и се вика координатен почеток на $\mathbb{R}^n$.
Точката $-x = (-x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$ е инверзен елемент за $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
Лесно се проверува дека за операцијата собирање важат следните својства:

За секои $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ важи:

1. $x + y \in \mathbb{R}^n$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
3. $x + 0 = x$,
4. $x + (-x)) = 0$
5. $x + y = y + x$.

Значи, со операцијата собирање, множеството $\mathbb{R}^n$ е адитивна Абелова група.

2.**Множење со скалар:** За секои $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ се дефинира производот λx со:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \tag{15.11}$$

Лесно се проверува дека за операцијата множење со скалар важат следните својства:

За секои $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$ важи:

6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu y$,
8. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
9. $1 \cdot x = x$.

Дефиниција 15.2.1. *Елементите $x, y, z, \ldots \in \mathbb{R}^n$ ги нарекуваме вектори или точки, додека $\alpha, \beta, \gamma \ldots \in \mathbb{R}$ ги викаме скалари. Двојката $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ е реален векторски простор ако множеството $\mathbb{R}^n$ е снабдено со следната алгебарска структура:*

i) На секоја подредена двојка (x, y) вектори од $\mathbb{R}^n$ придружуваме трет вектор (ќе го означуваме со $x + y$) во $\mathbb{R}^n$, што го нарекуваме збир на векторите x и y, а оваа операција ја нарекуваме собирање (собирање на вектори).

ii) На секој вектор x од $\mathbb{R}^n$ и секој скалар λ од $\mathbb{R}$ придружуваме производ на скаларот λ и векторот x, а оваа операција ја нарекуваме множење на вектор со скалар.

iii) Множеството $\mathbb{R}^n$ со операцијата собирање на вектори формира адитивна Абелова група, односно за векторите од $\mathbb{R}^n$ важат *својствата 1.-5..*

iv) За множењето со скалар важи дистрибутивниот закон во однос на собирање вектори (својството 6.), и во однос на собирање скалари (својството 7.) за векторите од $\mathbb{R}^n$ *и скаларите од* $\mathbb{R}$.

v) Множењето со скалар е асоцијативно, важи својството 8. за векторите од $\mathbb{R}^n$ *и скаларите од* $\mathbb{R}$.

vi) Важи равенството $1 \cdot x = x$ *за секој* $x \in \mathbb{R}^n$, *каде што* 1 *е единицата во* $\mathbb{R}$.

Забелешка 15.2.2. *За собирањето вектори и множење со скалар се користат и термините внатрешна, односно надворешна операција во векторскиот простор. Разликата на овие две операции е во тоа што собирањето има групоиден карактер бидејќи се применува на елементи од* $\mathbb{R}^n$, *додека множењето со скалар се применува на елементите од* $\mathbb{R}^n$ *и надворешни елементи (надвор од множеството* $\mathbb{R}^n$.*) Така, множеството* $\mathbb{R}^n$, *со операциите собирање на вектори, дефинирана со* (15.10), *и множење со скалар, дефинирана со* (15.11), *станува векторски простор.*

Множеството точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ од $\mathbb{R}^n$ такви што

$$\{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

ќе го викаме $i-$та координатна оска. Во случај $n = 2$ и $n = 3$ координатните оски се:
x и y координатнатна оска:

$$\mathbb{R}^2_x = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}, \;\; \mathbb{R}^2_y = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

и x, y и z координатна оска:

$$\mathbb{R}^3_x = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}, \;\; \mathbb{R}^3_y = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}, \;\; \mathbb{R}^3_z = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

соодветно.

Алгебарската структура на векторскиот простор $\mathbb{R}^n$ ќе ја илустрираме на $\mathbb{R}^3$. Нека $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ се две точки во $\mathbb{R}^3$. Точката

$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ е четвртото теме од паралелограмот со останатите три темиња $0, x$ и y. Производот на скаларот λ со векторот x се сведува на множење на должината на векторот x со $|\lambda|$, при што ја има насоката на векторот x ако $\lambda > 0$, и е со спротивна насока ако $\lambda < 0$.

Забелешка 15.2.3. *Ваква алгебарска структура може да се воведе не само на множеството* $\mathbb{R}^n$ *туку и пошироко. Нека* $\mathbb{E}$ *е непразно множество, неговите елементи ќе ги нарекуваме вектори или точки. Нека* $\mathbb{K}$ *е полето од реални или комплексни броеви, кои ќе ги викаме скалари. Двојката* $(\mathbb{E}, \mathbb{K})$ *е векторски простор, реален или комплексен во зависност од множеството* $\mathbb{K}$, *ако множеството* $\mathbb{E}$ *ја има следнава алгебарска структура:*

I) На секоја подредена двојка (x, y) *вектори од* $\mathbb{E}$ *ѝ придружуваме трет вектор (ќе го означуваме со* $x+y$*) во* $\mathbb{E}$, *што го нарекуваме збир на векторите* x *и* y, *а оваа операција ја нарекуваме собирање во* $\mathbb{E}$ *(собирање на вектори).*

II) За произволен скалар λ *од* $\mathbb{K}$ *и за произволен вектор* $x \in \mathbb{E}$, *на подредениот пар* (λ, x) *му го придружуваме производот на скаларот* λ *и векторот* x, $\boldsymbol{\lambda \cdot x}$. *Оваа операција ја нарекуваме множење на вектор со скалар.*

III) Множеството $\mathbb{E}$ *со операцијата собирање на вектори формира адитивна Абелова група.*

IV) За множењето со скалар важи дистрибутивниот закон во однос на собирање вектори (својството 6), и во однос на собирање скалари (својството 7) за векторите од $\mathbb{E}$ *и скаларите од* $\mathbb{K}$.

V) Множењето со скалар е асоцијативно.

VI) За секое $x \in \mathbb{E}$ *важи равенството* $1 \cdot x = x$, *каде што* 1 *е единицата во* $\mathbb{K}$.

Забелешка 15.2.4. *Нека на точката* $x \in \mathbb{R}^3$ *ѝ ја придружиме насочената отсечка* $\overrightarrow{x}$ *со почетната точка во* 0 *и крајна точка во* x. *Така, го добиваме векторскиот простор од насочени отсечки*

$$\overrightarrow{\mathbb{R}^3} = \{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \cdots\}$$

Векторот $\overrightarrow{x}$ претставува класа на еквиваленција претставена со насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ со почеток во A и крај во B. Должината (модулот) на векторот $\overrightarrow{x}$ е еднаква со растојанието од точката A до точката B. Векторот $\overrightarrow{x}$ може транслаторно да се помести така што почетокот A на векторот да биде која било точка од $\mathbb{R}^3$. Специјално, почетната точка на векторот $\overrightarrow{x}$ може да се земе координатниот почеток $O = (0,0,0)$. Ако $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA}$, тогаш велиме дека $\overrightarrow{x}$ е вектор-положба на точката A.

15.2.2 Линеарни комбинации, база и димензија

Во векторскиот простор V над поле L, за $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in L$ изразот

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

се вика **линеарна комбинација** на векторите $v_1, v_2, \ldots, v_n$ со коефициенти $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Векторите $v_1, v_2, \ldots, v_n$ се **линеарно независни вектори** ако

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0)\,.$$

Ако векторите $v_1, v_2, \ldots, v_n$ се линеарно независни, тогаш множеството $N = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ е **линеарно независно множество**. Едно множество $N \subseteq V$ е **генерирачко** за V ако секој вектор од V може да се прикаже како линеарна комбинација на векторите од N.

Едно линеарно независно и генерирачко множество во векторски простор се вика **база** на просторот.

Во векторскиот простор $\mathbb{R}^n$ векторите:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1) \qquad (15.12)$$

1) се линеарно независни, бидејќи од

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0),$$

следува дека $\lambda_i = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$;

2) го генерираат просторот $\mathbb{R}^n$, бидејќи за секој $x \in \mathbb{R}^n$, имаме

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n. \tag{15.13}$$

Значи, множеството од вектори (15.12) е база во векторскиот простор $\mathbb{R}^n$. Компонентите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ во (15.13) ги викаме **координати на векторот x во однос на базата** (15.12).

15.2.3 Скаларен производ и норма на просторот $\mathbb{R}^n$

Нека $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ се два вектора од $\mathbb{R}^n$. **Скаларен производ на x и y** се дефинира со:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{15.14}$$

Скаларниот производ е надворешна операција, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и ги има следниве својства:

1. $\langle x, y \rangle \geqslant 0 \;\; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
4. $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$.

Ако на секој вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ му го придружиме реалниот број $\sqrt{\langle x, x \rangle}$, добиваме реална ненегативна функција

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty).$$

Оваа функција ја викаме **Евклидска норма на $\mathbb{R}^n$,** а бројот

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{15.15}$$

го викаме **норма на векторот $\boldsymbol{x}$.** Нормата (15.15) ја означуваме со $\|\cdot\|_2$.
Нормата ги има следниве својства:

Теорема 15.2.5. *Нека x, y, z се од $\mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогаш*

а) $\|x\| \geqslant 0$

б) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

в) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$

г) $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\ \|y\|$

д) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

ѓ) $\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$

Доказ. а), б) и в) се очигледни.

г) Треба да го покажеме неравенството:

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} \ \cdot\ (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{1/2}$$

Да означиме со:

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad B = \sum_{i=1}^{n} y_i^2, \qquad C = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Тогаш,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \sum_{i=1}^{n}(Bx_i - Cy_i)^2 \\ &= B^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2BC\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + C^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \\ &= B^2A - 2BCC + C^2B = B^2A - BC^2 \\ &= B(BA - C^2). \end{aligned}$$

Ако $B = 0$, заклучокот е тривијален. Нека $B > 0$, тогаш $C \leqslant AB$ што требаше да се покаже.

Неравенството

$$|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i| \leqslant (\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2} \cdot (\sum_{i=1}^{n}y_i^2)^{1/2} \tag{15.16}$$

е познато како **Шварцово неравенство** или **неравенство на Коши**[2]**-Буњаковски**[3]**-Шварц**[4]. Ова неравенство важи за едно од најважните неравенства во математиката. Корисно е во многу математички дисциплини: линеарна алгебра, анализа, теорија на веројатност, векторска алгебра и др.

д) Од дефиницијата на нормата на $\mathbb{R}^n$, имаме

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = \\ &= x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

[2]Augustin-Louis Cauchy-француски математичар, 1789-1857
[3]Виктор Яковлевич Буняковский - руски математичар, 1804-1889
[4]Karl Hermann Amandus Schwarz-германски математичар, 1843-1921

од каде што, со коренување на почетниот и крајниот израз, се добива тврдењето.

ѓ) Ако во д) на местото на x се стави изразот $x-y$, а на местото на y се стави изразот $y-z$, а потоа се искористи в), имаме

$$\begin{aligned} \|x-y\| &= \|(x-z)+(z-y)\| \\ &\leqslant \|x-z\| + \|z-y\| \\ &= \|x-z\| + \|y-z\| \ . \end{aligned}$$

■

Забелешка 15.2.6. *Секоја норма е ненегативна функција која што е дефинирана за секој $x \in \mathbb{R}^n$ и ги има својствата: б),в) и д) од теоремата 15.2.5.*

Забелешка 15.2.7. *На множеството $\mathbb{R}^n$ можеме да дефинираме и други норми. На пример, за секој $p \geqslant 1$ се дефинира таканаречената* ***p—норма****:*

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \tag{15.17}$$

Гранични случаи на оваа норма се: ***1-нормата*** *и* ***супремум-нормата****, кои се соодветно дадени со:*

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{15.18}$$

и

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|. \tag{15.19}$$

Овие норми поопширно се разгледани во поглавјето 1.11. Просторите $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ се најчесто користените нормирани векторски простори.

15.2.4 Неравенствата на Холдер и Минковски

Шварцовото неравенство, што ги поврзува скаларниот производ и нормата, се појавува и во некои други простори во кои може да се дефинира скаларен производ, а преку него и норма и растојание. Неравенството на триаголник, како една од аксиомите во дефиницијата на метрички простор,во други простори ќе има поинаков облик. Во врска со тоа, карактеристични се следниве две неравенства:

Неравенството на Холдер. Нека x_k и y_k се реални броеви и нека за $p > 1$ бројот q се дефинира со $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ важи неравенството:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{15.20}$$

Ако наместо x_k и y_k ставиме $x_k^{'} = \frac{x_k}{\left\{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}}$ и $y_k^{'} = \frac{y_k}{\left\{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}}$, равенството 15.20 станува:

$$\sum_{k=1}^{n} \left| x_k^{'} y_k^{'} \right| \leqslant 1 \tag{15.21}$$

при што

$$\sum_{k=1}^{n} \left| x_k^{'} \right|^p = 1, \;\; \sum_{k=1}^{n} \left| y_k^{'} \right|^p = 1. \tag{15.22}$$

Ќе го докажеме неравенството 15.21.

Притоа ќе го искористиме неравенството на Јанг[5] за производ на два броја: Нека $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ и $p > 1, q > 1$ се реални броеви така што $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тогаш $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Равенството важи ако и само ако $a^p = b^q$.

[5] William Henry Young -англиски математичар, 1843-1942

Ако ставаме $a = \left|x_k^{'}\right|, b = \left|y_k^{'}\right|, k = 1, \cdots, n$; добиените неравенства ги собереме и ги искористиме равенствата од (15.22), добиваме:

$$\sum_{k=1}^{n} \left|x_k^{'} y_k^{'}\right| \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \left|x_k^{'}\right|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} \left|y_k^{'}\right|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Забелешка 15.2.8. *Ако $p = 2$, тогаш и $q = 2$, што значи дека од (15.20) се добива (15.16), односно Холдеровото неравенство го генерализира неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц (15.16).*

Неравенството на Минковски. Нека x_k и $y_k, (k = 1, \cdots, n)$ се реални броеви и нека $p \geqslant 1$. Тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ важи неравенството:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{15.23}$$

Равенство важи ако и само ако $\frac{x_k}{y_k} = c$ за некој $c > 0$.

Доказ: За $p = 1$, јасно е дека неравенството важи. Нека $p > 1$. Дефинираме $q = \frac{p}{1-p}$, тогаш $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1-p}{q} = 1$, па имаме:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \left(x_k + y_k\right)^{(p-1)} + \sum_{k=1}^{n} y_k \left(x_k + y_k\right)^{(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

(го користиме неравенството на Холдер)

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\left(x_k + y_k\right)^{(p-1)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\left(x_k + y_k\right)^{(p-1)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

(бидејќи $(p-1)\,q = (p-1)\,\frac{p}{p-1} = p$, имаме:)

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(ги делиме двете страни со $\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$, и добиваме:)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\left(1-\frac{1}{q}\right)} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(бидејќи $1 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p}$, конечно имаме:)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

Глава 16

Решенија на задачите за самостојна работа

Глава 1

3. Нека $a_i = \max\{a_1, \ldots, a_k\}$. Тогаш,

$$a_i = \sqrt[p]{a_i^p} \leqslant \sqrt[p]{a_1^p + \ldots + a_k^p} \leqslant \sqrt[p]{a_i^p + \ldots + a_i^p} = a_i \sqrt[p]{k} \underset{p\to\infty}{\to} a_i.$$

Значи, $a_i = \lim\limits_{p\to\infty} \sqrt[p]{a_1^p + \ldots + a_k^p}$, односно

$$\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{a_1^p + \ldots + a_k^p} = \max\{a_1, \ldots, a_k\}.$$

4. Упатство: Изводот на функцијата $g(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$, $x \geqslant 1$, $g'(x) = \frac{p(1+x)^{p-1}\left(1-x^{p-1}\right)}{(1+x^p)^2}$, е позитивен за $x > 1$. Значи, g монотоно расте за $x \geqslant 1$. Исто така, $g(x) \to 1$ кога $x \to \infty$. Така, $g(x) \leqslant 1$ за $x \geqslant 1$. Заменуваме $x = \frac{b}{a} \geqslant 1$.

5. 1) Да. 2) Да. Ќе покажеме само M3): за $x, y, z \in X$, $d(x, y) \geqslant 0$, $d(z, y) \geqslant 0$, $d(x, z) \geqslant 0$ и $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$. Сега,

$$\begin{aligned} D_2(x,z) + D_2(z,y) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \\ &\geqslant \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &= \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{d(x,z)+d(z,y)}} \\ &\geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{d(x,y)}} \\ &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = D_2(x,y). \end{aligned}$$

3) Не.

6. 1) Не. Аксиомата M3) не е исполнета за сите $x, y, z \in \mathbb{R}$, на пример за: $x = -2$, $y = 1$, $z = 0$. 2)Не. Аксиомата M1) не е исполнета за сите $x, y \in \mathbb{R}$, на пример за: $x = -1$, $y = 1$. 3)Не. Аксиомата M1) не е исполнета за сите $x, y \in \mathbb{R}$, $d(-1, 1) = \left|(-1)^2 - (1)^2\right| = 0$, иако $-1 \neq 1$. 4) Да. 5) Не. Функцијата d_5 не е дефинирана во точката $(x, x), \forall x \in \mathbb{R}$. 6) Не.

10. Упатство: M3) Ако $x > 0$ и $z \leqslant 0$, тогаш, $d(x, z) = |x - z|+1$. Ако $y > 0$ тогаш, $d(x, y) = |x - y|$ и $d(y, z) = |y - z|+1$. Ако $y \leqslant 0$ тогаш, $d(x, y) = |x - y| + 1$ и $d(y, z) = |y - z|$. Во секој случај, имаме: $d(x, y) + d(y, z) = |x - y| + |y - z| + 1$. Конечно, добиваме $d(x, z) = |x - z| + 1 \leqslant |x - y| + |y - z| + 1 = d(x, y) + d(y, z)$.

12. M1) Нека $d(x, y) = 0$. Ако $x_2 = y_2$ тогаш, $|x_1 - y_1| = 0$, па имаме $x = y$. Ако $x_2 \neq y_2$ тогаш $0 = d(x, y) = |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1|$, што не е можно. Значи, $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. Нека $x = y$, тогаш $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$. Во тој случај, $d(x, y) = |x_1 - y_1| = 0$.

M2) јасно.

M3) Нека $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in X$. Забележуваме дека важи: $|x_1 - y_1| \leqslant d(x,y)$. Навистина, ако $x_2 = y_2$, тогаш $d(x,y) = |x_1 - y_1|$. Ако $x_2 \neq y_2$, тогаш $|x_1 - y_1| \leqslant |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| = d(x,y)$. Ако $x_2 = y_2$, тогаш, $d(x,y) = |x_1 - y_1| \leqslant |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| \leqslant d(x,z) + d(z,y)$. Ако $x_2 \neq y_2$, тогаш

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1| \\ &\leqslant |x_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| + |y_1| \\ &\leqslant \begin{cases} (|x_1| + |x_2 - z_2| + |z_1|) + |z_1 - y_1|, & \text{ако } y_2 = z_2, \\ (|x_1| + |x_2 - z_2| + |z_1|) + (|z_1| + |z_2 - y_2| + |y_1|), & \text{ако } y_2 \neq z_2. \end{cases} \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

14. Пресликувањето d е добро дефинирано:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \min\{|x_k - y_k|, 1\} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1)\, (\forall k \in \mathbb{N},)(\frac{1}{k^2} \min\{|x_k - y_k|, 1\} = 0) \\ \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N},)\,(|x_k - y_k| = 0) \\ \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

M3) Нека $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$.
Јасно е дека $\min\{\,|x_k - y_k\,|, 1\} \leqslant 1$. Ако $\min\{|x_k - z_k|, 1\} = 1$ или $\min\{|z_k - y_k|, 1\} = 1$, тогаш

$$\min\{\|x_k - y_k\|, 1\} \leqslant \min\{|x_k - z_k|, 1\} + \min\{\|z_k - y_k|, 1\}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \min\left\{\left|x_k - y_k\right|, 1\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \min\left\{\left|x_k - z_k\right|, 1\right\} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \min\left\{\left|z_k - y_k\right|, 1\right\}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \min\left\{\left|x_k - y_k\right|, 1\right\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \min\left\{\left|x_k - z_k\right|, 1\right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \min\left\{\left|z_k - y_k\right|, 1\right\}$$

$$\Leftrightarrow d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y).$$

Ако $\min\left\{\left|x_k - z_k\right|, 1\right\} < 1$ и $\min\{|z_k - y_k\ |, 1\} < 1$, тогаш

$$\min\{|x_k - z_k|, 1\} + \min\{|z_k - y_k|, 1\} = |x_k - z_k| + |z_k - y_k| \geqslant |x_k - y_k| \geqslant \geqslant \min\{|x_k - y_k|, 1\} \Rightarrow d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y).$$

17. *а*) Ќе го покажеме следново неравенство:

$$\sqrt{d_x\left(x_1, x_3\right)^2 + d_y\left(y_1, y_3\right)^2} + \sqrt{d_x\left(x_3, x_2\right)^2 + d_y\left(y_3, y_2\right)^2} \geqslant \sqrt{d_x\left(x_1, x_2\right)^2 + d_y\left(y_1, y_2\right)^2}$$

Ставаме: $a_1 = d_x\left(x_2, x_3\right)$, $a_2 = d_x\left(x_1, x_3\right)$, $a_3 = d_x\left(x_1, x_2\right)$ и $b_1 = d_y\left(y_2, y_3\right)$, $b_2 = d_y\left(y_1, y_3\right)$, $b_3 = d_y\left(y_1, y_2\right)$.
Сакаме да покажеме:

$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \geqslant \sqrt{a_3^2 + b_3^2}.$$

Неравенството на триаголник дава:

$$a_1 + a_2 \geqslant a_3,\ b_1 + b_2 \geqslant b_3.$$

Ако квадрираме и собереме добиваме:

$$a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2\left(a_1 a_2 + b_1 b_2\right) \geqslant a_3^2 + b_3^2$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц15.16:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \leqslant \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

добиваме:

$$(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2})^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2(\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2})$$

$$\geqslant a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \geqslant a_3^2 + b_3^2 = \left(\sqrt{a_3^2 + b_3^2}\right)^2$$

односно

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geqslant \sqrt{a_3^2 + b_3^2}.$$

19. $d(m, \infty) = \frac{1}{m} \leqslant \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| + \frac{1}{n} = d(m, n) + d(n, \infty)$, и $d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = d(m, \infty) + d(\infty, n)$.

20. За $x, y \in X$ имаме $0 = d(x, x) \geqslant d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \Rightarrow d(x, y) = 0$, односно $x = y$.

25. Не.Од $\|\Phi(x - y)\|_Y = \|x - y\|_X, \forall x, y \in X$ имаме $d_x(x, y) = \|x - y\|_X = \|\Phi(x - y)\|_Y$. Ако $\Phi(x - y) = \Phi(x) - \Phi(y), \forall x, y \in X$, тогаш Φ е изометрија. Навистина,

$$\begin{aligned} d_x(x, y) &= d_x(x - y, 0) = \|x - y\|_X \\ &= \|\Phi(x - y)\|_Y = \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_Y \\ &= d_y(\Phi(x) - \Phi(y), 0) = d_y(\Phi(x), \Phi(y)), \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

31. (i) Функцијата е сурјекција по дефиниција. Ќе покажеме дека е инјекција. Нека $z, \omega \in X$ и $\delta_z = \delta_\omega$. Тогаш, имаме $d(z, \omega) = \delta_z(\omega) = \delta_\omega(\omega) = d(\omega, \omega) = 0$, па следува дека $z = \omega$.
(ii) Неравенството може да се запише како $|d(a, b) - \delta_z(b)| \leqslant \delta_z(a)$, што е точно поради теоремата1.1.6.

32. Првите две аксиоми од дефиницијата за метрика се очигледни, За (M_3) го користиме неравенството на Шварц.

Глава 2

1. a) Ако $A \subseteq B$, тогаш $\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\} \subseteq \{d(b_1, b_2) : b_1, b_2 \in B\} \Rightarrow \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\} \leqslant \sup\{d(b_1, b_2) : b_1, b_2 \in B\} \Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leqslant \operatorname{diam}(B)$.

2. a) Нека $a \in A$. Тогаш, нераавенството

$$d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a) \tag{16.1}$$

е точно за секој $a \in A$, па имаме:

$$d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A). \tag{16.2}$$

б) Ако во (16.2) x и y ги заменат местата, имаме дека $d(y, A) \leqslant d(x, y) + d(x, A)$, па од двете неравенства добиваме:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y).$$

Сега, за секои $p, q \in A$, е точно: $d(x, y) \leqslant d(x, p) + d(p, q) + d(q, y) \leqslant d(x, p) + \operatorname{diam}(A) + d(q, y)$. Од произволноста на p, q точно е неравенството:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leqslant \inf_{p \in A} d(x, p) + \operatorname{diam}(A) + \inf_{q \in A} d(q, y) \\ &= d(x, A) + \operatorname{diam}(A) + d(y, A). \end{aligned}$$

4. Прво, ако $A = \varnothing$, тогаш $inf A = \infty$ и $\sup(A) = -\infty$, па тврдењето е точно. Ако $\sup(A) = \infty$, избираме $b \in A$. Тогаш, за секој $K \in \mathbb{R}^+$, постои $a \in A$ таков што $a > b + K$. Така, $\operatorname{diam}(A) = \infty = \sup(A) - \inf(A)$. Слично се покажува дека тврдењето е точно и ако $\inf(A) = -\infty$. Нека $\inf(A), \sup(A) \in \mathbb{R}$. Нека $\varepsilon > 0$. Тогаш, постојат $a, b \in A$ такви што $a - \frac{\varepsilon}{2} \inf(A) \leqslant a \leqslant b \leqslant \sup(A) \leqslant b + \frac{\varepsilon}{2}$. Така $\sup(A) - \inf(A) \leqslant b - a + \varepsilon \leqslant \operatorname{diam}(A) + \varepsilon$. Од произволноста на ε, следува $\sup(A) - \inf(A) \leqslant \operatorname{diam}(A) \quad (*)$. Од друга страна, за секои $x, y \in A$, важи $\inf A \leqslant x \leqslant \sup(A)$ и $\inf(A) \leqslant y \leqslant \sup(A)$, па имаме $|y - x| \leqslant \sup(A) - \inf(A)$. Од произволноста на x и y во A, добиваме $\operatorname{diam}(A) \leqslant \sup(A) - \inf(A)$ $(**)$. Од $(*)$ и $(**)$ го добиваме заклучокот.

6. Растојанието е дадено со формулата: $\frac{|az_1+bz_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

8. $d(A,B) = 2a$.

10. Да го пресметаме прво диаметарот $diam\left(I_a^n\right)$. Нека $x = (x_1, \cdots, x_n)$ и $y = (y_1, \cdots, y_n)$ се точки од $\mathbb{R}^n$, тогаш $x_i, y_i \in [-a, a], \forall i \in \{1, \cdots, n\}$, па имаме $|x_i - y_i| \leqslant 2a$. Затоа,

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{n\,(2a)^2} = 2a\sqrt{n}, \forall x, y \in I_a^n.$$

Тогаш,

$$diam(I_a^n) = sup\,\{d(x,y) : x, y \in I_a^n\} \leqslant 2a\sqrt{n}.$$

Од друга страна, за точките $x_0 = (-a, \cdots, -a)$ и $y_0 = (a, \cdots, a)$ имаме $d(x_0, y_0) = 2a\sqrt{n}$, па добивме дека $diam(I_a^n) = 2a\sqrt{n}$.
Да забележиме дека $diam(b + I_a^n) = diam(I_a^n)$.

Глава 3

2. Нека $x, y \in X, d(a,x) \leqslant r$ и $d(a,y) \leqslant r$. Тогаш, од неравенството на триаголник јасно е дека

$$d(x,y) \leqslant d(x,a) + d(a,y) \leqslant 2r$$

$$\Rightarrow \operatorname{diam} T(a,r) = \sup_{x,y \in T(a,r)} d(x,y) \leqslant 2r.$$

Со тоа ги докажавме i) и ii). За да го докажеме iii), нека $z \in T(a,r)$, т.е. $d(z,a) < r$. Ако $x \in T(a,s)$, имаме $d(z,x) \leqslant d(z,a) + d(x,a) < r + s$, па важи $x \in T(z, r+s)$. Од произволноста на $x \in T(a,s)$, следува iii). Слично се покажува iv).

3. Пред сè, $\forall a_1, \ldots, a_n$ важат неравенствата:

$$|a_i| \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \leqslant |a_1| + \ldots + |a_n|, i = 1, \ldots, n \tag{16.3}$$

За произволни $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, важат неравенствата:

$$|y_i - x_i| \leqslant d(x, y) \leqslant |y_1 - x_1| + \ldots + |y_n - x_n|, i = 1, \ldots, n. \quad (16.4)$$

Од неравенството (16.4), следува дека за $\forall \varepsilon > 0$, важат инклузиите:

$$P(x, \frac{\varepsilon}{n}) \subseteq T(x, \varepsilon) \subseteq P(x, \varepsilon) \subseteq T(x, n\varepsilon). \quad (16.5)$$

Навистина, ако $y \in P(x, \frac{\varepsilon}{n})$, тогаш $|y_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{n}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Имаме

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

односно $y \in T(x, \varepsilon)$.
Ако $y \in T(x, \varepsilon)$, тогаш од (16.4), имаме $|y_i - x_i| \leqslant d(y, x) < \varepsilon$ за $i = 1, \ldots, n$, а тоа значи дека $y \in P(x, \varepsilon)$.

в) Нека $x = (x_1, \cdots x_n), y = (y_1, \cdots y_n) \in P(0, a)$. Тогаш, $-a \leqslant x_i \leqslant a, -a \leqslant y_i \leqslant a, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$ па имаме $|x_i - y_i| \leqslant |x_i - 0| + |y_i - 0| \leqslant a + a = 2a$. Затоа,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad \leqslant \sqrt{n4a^2} = 2a\sqrt{n}, \forall x, y \in P(0, a).$$

па имаме

$$diam P(0, a) = sup\{d(x, y) : x, y \in P(0, a)\} \leqslant 2a\sqrt{n}.$$

Точките $x_0 = (-a, \cdots, -a), y_0 = (a, \cdots, a) \in P(0, a)$, па следува $diam P(0, r) = 2a\sqrt{n}$.
21) Нека $x = (x_1, x_2) \in X$.
Тогаш, $T_X\left((x_1, x_2), \frac{3}{2}\right) = T\left((x_1, x_2), \frac{3}{2}\right) \cap X \subseteq X$.

Од друга страна, за $y = (y_1, y_2) \in X$, имаме

$$d(x, y) \leqslant \operatorname{diam} X = \sqrt{2} < \frac{3}{2}, \qquad \forall y \in X,$$

односно имаме $X \subseteq T_X\left((x_1, x_2), \frac{3}{2}\right) = T\left((x_1, x_2), \frac{3}{2}\right) \bigcap X \subseteq X$.
Така добивме: $T_X\left((x_1, x_2), \frac{3}{2}\right) = X$.

24) $T_A((0,-1),1) = \{(0,-1)\}$ и $T_A[(0,-1),1] = \{(0,-1),(0,0)\}$.

Глава 4

2. Не. На пример, $A = (0,1)$, $B = (1,2)$.
3. Нека $x \in \mathbb{R}$. Тогаш,

$$d\,(x,(a,b)) = \inf\left\{d\,(x,y) : y \in (a,b)\right\} = \begin{cases} 0, & x \in [a,b] \\ r > 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Според теоремата 4.1.2, заклучуваме дека $\overline{(a,b)} = [a,b]$.

5. Ако $F = \{a\}$, тогаш $d(a, F \setminus \{a\}) = d(a, \varnothing) = \inf \varnothing = \infty$. Ако F има барем два елемента, тогаш множеството $\{d(a,b) : a, b \in F, a \neq b\}$ е конечно подмножество од $\mathbb{R}^+$, па има минимум m. Исто така, за секој $x \in F$, важи $d(x, F \setminus \{x\}) \geqslant \min\{d(a,b) : a, b \in F, a \neq b\} > 0$. Ако, пак, за $x \in X \setminus F$, важи $d(x, F) \geqslant \min\{d(x,a) : a \in F\} > 0$.

6. Нека $x_0 \in \overline{A}$ и U е отворена околина на x_0 таква што $U \cap A = \varnothing$. Тогаш, $A \subseteq X \setminus U$. Бидејќи $X \setminus U$ е затворено множество, следува дека $\overline{A} \subseteq X \setminus U = \overline{X \setminus U}$, односно $\overline{A} \cap U = \varnothing$ што е контрадикција бидејќи $x_0 \in \overline{A} \cap U$.
Обратно, нека за секоја околина U на x_0, $U \cap A \neq \varnothing$. Ќе покажеме дека $x_0 \in \overline{A}$. Во спротивно, $x_0 \in X \setminus \overline{A}$. Но, $U = X \setminus \overline{A}$ е отворено множество, па е околина на x_0 така што

$$U \cap A \subseteq U \cap \overline{A} = X \setminus \overline{A} \cap \overline{A} = \varnothing$$

што противречи на претпоставката. Според тоа, $x_0 \in \overline{A}$.

7. Нека $z \in A \cap \mathrm{iso}(B)$, тогаш $d(z, B \setminus \{z\}) \neq 0$. Од $A \setminus \{z\} \subseteq B \setminus \{z\}$ следува дека $0 < d(z, B \setminus \{z\}) \leqslant d(z, A \setminus \{z\})$, од каде што следува $z \in \mathrm{iso}(A)$.

11. Користиме $X \setminus (X \setminus A) = A$, и имаме:

$$\begin{aligned} a \in \partial A &\Leftrightarrow d(a, A) = 0 = d(a, X \setminus A) \\ &\Leftrightarrow d(a, X \setminus (X \setminus A)) = 0 = d(a, X \setminus A) \\ &\Leftrightarrow a \in \partial(X \setminus A). \end{aligned}$$

12. Нека $x \in \partial(\partial A)$, тогаш $d(x, \partial A) = 0$. Од дефиницијата за растојание од точка до множество, имаме дека $\forall r > 0, \exists y \in \partial A$ така што $d(x, y) < \frac{r}{2}$. Од $y \in \partial A$ имаме дека постојат $a \in A$ и $b \in X \setminus A$ такви што $d(y, a) < \frac{r}{2}$ и $d(y, b) < \frac{r}{2}$. Тогаш, користејќи го неравенството на триаголник, добиваме $d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a) < r$ и $d(x, y) + d(y, b) < r$. Од произволноста на r, заклучуваме дека $d(x, A) = 0 = d(x, X \setminus A)$ односно $x \in \partial A$.

13. $\partial_{(0,1)}(0, 1) = \varnothing$; $\partial_{\mathbb{R}}((0, 1)) = \{0, 1\}$.

14. *i*) Користиме $a \notin A \Leftrightarrow A = A \setminus \{a\}$ и $a \in A' \Leftrightarrow d(a, A \setminus \{a\}) = 0$ па имаме:

$$\begin{aligned} a \in \partial A &\Leftrightarrow d(a, A) = 0 = d(a, X \setminus A) \\ &\Leftrightarrow d(a, A \setminus \{a\}) = 0 \\ &\Leftrightarrow a \in A'. \end{aligned}$$

16. Нека $x \in \partial B \Leftrightarrow d(x, B) = 0 = d(x, X \setminus B)$. Од

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow X \setminus B \subseteq X \setminus A \\ &\Rightarrow d(x, X \setminus A) \leqslant d(x, X \setminus B) \end{aligned}$$

Следува

$$d(x, X \setminus A) = 0. \tag{16.6}$$

Од $\partial B \subseteq A$ следува дека $x \in \partial B \subseteq A$, од што добиваме дека

$$d(x, A) = 0. \tag{16.7}$$

Од (16.6) и (16.7) следува дека $x \in \partial A$.

21. Не! На пример: $\partial_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ а $\partial_{\mathbb{R}}\overline{\mathbb{Q}} = \varnothing$.

23 Бидејќи $\operatorname{int}(X \setminus A)$ е отворено множество, подмножество од $X \setminus A$, имаме $X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A) \supseteq A$ е затворено множество што го содржи A. Така, $\overline{A} \subseteq X \setminus int\,(X \setminus A)$. За обратното, $A \subseteq \overline{A} \Rightarrow X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A \Rightarrow X \setminus \overline{A} \subseteq \operatorname{int}(X \setminus A) \Rightarrow X \setminus (\operatorname{int}(X \setminus A)) \subseteq \overline{A}$

22. (i) Од

$$A \subseteq \overline{A} \Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leqslant \operatorname{diam}\overline{A}. \tag{16.8}$$

Нека $r > 0, a, b \in \overline{A}$. Тогаш, $\exists x, y \in A$ такви што $d(a, x) < \frac{r}{2}$ и $d(b, y) < \frac{r}{2}$. $d(a, b) \leqslant d(a, x) + d(x, y) + d(y, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} + \operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(A) + r \Rightarrow \operatorname{diam}(\overline{A}) \leqslant \operatorname{diam}(A) + r$. Од произволноста на $r, \Rightarrow$

$$\operatorname{diam}(\overline{A}) \leqslant \operatorname{diam}(A). \tag{16.9}$$

Од (16.8) и (16.9) следува равенството.

Глава 5

4. Дискретен метрички простор.

5.

а)

$$\underset{n\to\infty}{lim} f(x) = 1 \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{lim}\left(\underset{x\in[1,2]}{max}\left|\frac{nx}{nx+1}-1\right|\right) = \\ = \underset{n\to\infty}{lim}\left(\underset{x\in[1,2]}{max}\left\{\frac{1}{nx+1}\right\}\right) = \\ = \underset{n\to\infty}{lim}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0.$$

б) Не!

$$\underset{n\to\infty}{lim}\left(\underset{x\in[0,1]}{max}\left\{\frac{1}{nx+1}\right\}\right) = 1.$$

8. Нека A е густо во X, односно важи $\overline{A} = X$ и нека $x \in X$ е произволно. Тогаш, постои низа во A што конвергира кон x. Значи, $x \in \overline{A}$, па добивме дека ако за секој $x \in X$ постои низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во A што конвергира кон x, според истата теорема, добиваме дека $x \in \overline{A}$. Следува $X = \overline{A}$.

9. Ќе ја користиме последицата 5.4.2. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во $T[x, r]$, односно важи $d(x_n, x) \leqslant r$, и нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ќе покажеме дека $x_0 \in T[x, r]$. Од $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и теоремата 5.2.12, имаме дека $0 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = d(x_0, x) \leqslant r$.

12. Константната низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, каде што $x_n = x, \forall n \in \mathbb{N}$, е единствената низа во едноелементното множество $\{x\}$ и важи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \{x\}$. Од последицата 5.4.2 следува заклучокот.

13. Нека $X = \mathbb{R}^n$ со $d(x, y) = d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ каде што $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \geqslant 1$. Нека $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ е низа во $\mathbb{R}^n$ што конвергира кон $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Тогаш, за секој $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k_0(\varepsilon))(\left|x_i^{(k)} - x_i\right| < \varepsilon) \,.$$

Ова пак значи дека за секој $i \in \{1, \ldots, n\}$ низата $(x_i^k) \to x_i$, односно значи дека низата $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ конвергира покоординатно. Од друга страна, нека $x_j^{(k)} \to x_j, k \to \infty, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш, за секое $i \in \{1, \ldots, n\}$, постои $k_i \in \mathbb{N}$ така што

$$\left| x_i^{(k)} - x_i \right| < \varepsilon / n^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall k \geqslant k_i \,.$$

Така, $d_p(x^{(k)}, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left| x_i^{(k)} - x_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \forall k \geq k' = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$.

16. Нека $(x_i^n) \underset{n\to\infty}{\to} x_i, \forall i$. За фиксно $\varepsilon > 0$ избираме $k \in \mathbb{N}$ така што $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\forall n \geqslant n_0$ важи

$$|x_i^n - x_i| < \frac{3\varepsilon}{\pi^2}, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогаш, за $n \geqslant n_0$ имаме:

$$\begin{aligned} d(x^n, x) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} \min\{|x_i^n - x_i|, 1\} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \min\{|x_i^n - x_i|, 1\} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} \frac{3\varepsilon}{\pi^2} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \\ &< \frac{3\varepsilon}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Нека сега, $d(x^n, x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \min\{|x_i^n - x_i|, 1\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Тогаш, за секој i,

$$\min\{|x_i^n - x_i|, 1\} \leqslant i^2 d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \,.$$

Следува дека $\forall i$, $|x_i^n - x_i| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

19. Не! Единствено, ако $\|x_n\| \to 0$, тогаш $x_n \to 0$.

20. Ќе ја искористиме дефиницијата за лимес во $\mathbb{R}^k$

$$
\text{а)}\ \|\alpha_n \cdot x_n - \alpha \cdot x\| = \|\alpha_n(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\| \\
\leqslant |\alpha_n| \cdot \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x\| \\
\to 0
$$

$$
\text{б)}\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \\
\leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \\
\to 0
$$

$$
\begin{aligned}
\text{в)} \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle &= \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} \lim_{n\to\infty} y_i^{(n)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \\
&= \langle x, y \rangle .
\end{aligned}
$$

21. а) Нека C е конвексно множество со непразна внатрешност. Нека $y, z \in C$ и $\lambda \in [0, 1]$. Тогаш, постои $\delta > 0$ таков што $T(y, \delta) \subseteq C$ и $T(z, \delta) \subseteq C$. Ќе покажеме дека

$$
T(\lambda y + (1 - \lambda)z, \delta) \subseteq C,
$$

што значи дека $\lambda y + (1 - \lambda)z \in \mathrm{int}C$. Ако $x \in T(\lambda y + (1 - \lambda)z, \delta)$, тогаш $x - \lambda y - (1 - \lambda)z = \eta e$ каде што $e \in X$, $\|e\| = 1$ и $\eta \in [0, \delta)$. Бидејќи $y + \eta e \in T(y, \delta) \subseteq C$, $z + \eta e \in T(z, \delta) \subseteq C$ и C е конвексно множество, следува дека $x = \lambda(y + \eta e) + (1 - \lambda)(z + \eta e) \in C$, со што покажавме дека $\lambda y + (1 - \lambda)z \in \mathrm{int}C$, односно $\mathrm{int}C$ е конвексно множество.
б) Нека $x, y \in \overline{C}$ и $\lambda \in [0, 1]$. Тогаш, постојат низи $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ во C што конвергираат кон x и y соодветно. Тогаш, и низата $(\lambda x_n + (1 - \lambda)y_n)_{n=1}^{\infty}$ е во C и нејзината граница припаѓа во $\overline{C}$, односно

$\lambda x + (1-\lambda)y = \lim\limits_{n\to\infty}(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n) \in \overline{C}$.
б) Множеството $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ е конвексно, но $\partial(0,1) = \{0,1\}$ не е конвексно.

22. б) Нека $\mathop{lim}\limits_{k\to\infty} x_{3k} = 0$. Низата (x_{3k}) содржи подниза што е воедно подниза од (x_{2k}). Затоа и $\mathop{lim}\limits_{k\to\infty} x_{2k} = x_0$. Слично се покажува дека $\mathop{lim}\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = x_0$.

Глава 6

2. $|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Значи, не важи $|x_n - x_m| \to 0$ за доволно големи m и n. (на пример, за $\varepsilon < \dfrac{1}{2}, \forall n_0 \in \mathbb{N}, |x_{n_0} - x_{2n_0}| \geq \dfrac{1}{2} = \varepsilon$).

3. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X. Тогаш,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Специјално за $\varepsilon = \frac{1}{2}$, за сите m и n поголеми од n_0, што зависи од ε, имаме дека $x_n = x_m$. Секоја таква низа е очигледно конвергентна кон елемент од X, што значи дека X е комплетен метрички простор.

4. Нека $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во $c(\mathbb{R})$, општиот член е низата $x_n = (x_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$. За $\varepsilon > 0$, постои $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ така што

$$d(x_m, x_n) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left| x_i^{(m)} - x_i^{(n)} \right| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Тогаш,

$$(\forall i \in \mathbb{N}) \qquad \left| x_i^{(m)} - x_i^{(n)} \right| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \tag{16.10}$$

Тоа значи дека за секое i, низата $(x_i^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во $\mathbb{R}$, па значи таа низа е конвергентна. Нека

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i^{(0)}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Нагласуваме дека n_ε во изразот (16.10) не зависи од i, т.е. зависи само од ε. Сега, ако во неравенката (16.10) пуштиме $n \to \infty$, поради непрекинатоста на апсолутна вредност, добиваме:

$$\left|x_i^{(m)} - x_i^{(0)}\right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall m \geqslant n_\varepsilon, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Остана уште да покажеме дека низата $x = (x_n^{(0)})_{n=1}^{\infty}$ конвергира, односно дека припаѓа во c. Бидејќи низата е во $\mathbb{R}$, доволно е да покажеме дека е Кошиева. Ова го оставаме како вежба на читателот.

5. За $m \geqslant n$ функцијата $\dfrac{mx}{m+x} - \dfrac{nx}{n+x}$ е непрекината на $[0,1]$, па го достигнува својот максимум во некоја точка $x_0 \in [0,1]$. Тогаш,

$$d(f_m, f_n) = \sup_{x\in[0,1]} |f_m(x) - f_n(x)| = \frac{(m-n)x_0^2}{(m+x_0)(n+x_0)} \leqslant \frac{x_0^2}{n+x_0} \leqslant \frac{1}{n} \to 0,$$

за доволно големи m и n.

6. Нека $z = (z_i)_{i=1}^{\infty} \in X$ е лимес на некоја низа од низи $(y^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ во Y. Ќе покажеме дека $z \in Y$, па од последицата 5.4.2 ќе следува дека Y е затворено во X. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Постои $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таков што, за секој $n \geq n_\varepsilon$, важи

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left|y_k^{(n)} - z_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Низата $(y_i^{(n_0)})_{i=1}^{\infty}$ е конвергентна, значи е Кошиева, па постои $i_0 \in \mathbb{N}$, така што за секои $i, j \geq i_0$, ќе важи

$$\left|y_i^{(n_0)} - y_j^{(n_0)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогаш,

$$|z_i - z_j| \leqslant \left|z_i - y_i^{(n_0)}\right| + \left|y_i^{(n_0)} - y_j^{(n_0)}\right| + \left|y_j^{(n_0)} - z_j\right| < \varepsilon, \qquad \forall i, j \geqslant i_0.$$

Добивме дека ограничената низа z е Кошиева, па од Кошиевиот принцип за конвергенција, следува дека низата $z \in Y$.

12. Нека $\varepsilon > 0$ и n_0 е најмалиот природен број поголем од $\dfrac{1}{\varepsilon}$. За $m, n \geqslant n_0$ имаме

$$d\,(m, n) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leqslant \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Низата не конвергира. Ако претпоставиме дека низата конвергира кон $p \in \mathbb{N}$, тогаш постои природен број за $n > 2p + 1$, ќе имаме:

$$d(p, n) = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2p} = \frac{1}{2p} \neq 0 \Rightarrow d(p, n) \nrightarrow 0 \text{ кога } n \to \infty.$$

13. Низата $(n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, но не конвергира во $\mathbb{R}$. Навистина, нека $\varepsilon > 0$ и n_0 е најмалиот природен број поголем од $\dfrac{2}{\varepsilon}$. Тогаш, за произволни $m, n \geqslant n_0$ имаме

$$\begin{aligned} d(m, n) &= \frac{|m - n|}{\sqrt{1 + m^2}\sqrt{1 + n^2}} = \frac{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}} \\ &\leqslant \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon, \end{aligned}$$

односно низата $(n)_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во $(\mathbb{R}, d)$.
Ако $\lim\limits_{n \to \infty} n = p \in \mathbb{R}$, тогаш $d(n, p) \to 0$, кога $n \to \infty$. Меѓутоа,

$$d(n, p) = \frac{|n - p|}{\sqrt{1 + n^2}\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\left|1 - \frac{p}{n}\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\sqrt{1 + p^2}},$$

па имаме $\lim\limits_{n \to \infty} d(n, p) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \neq 0$.

Значи, низата не конвергира кон ниту едно $p \in \mathbb{R}$.

17. На пример, нека $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Тогаш, $|x_{n+k} - x_n| \leqslant$

$\frac{k}{n+1}$. Сепак, низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не е Кошиева, бидејќи $\mathbb{R}$ е комплетен метрички простор и хармонискиот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.
така што **22.** Нека

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n} \\ nx, & -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Од $\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_n(x)|^2 \, dx \leqslant \frac{2}{min\{m,n\}}$, гледаме дека низата $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, но ќе покажеме дека таа не конвергира кон функција од $C^2_{[-1,1]}$.

Глава 7

1. Нека q_1 и $q_2 \in X$ се граници на функцијата f, кога $x \to p$, според дефиницијата 7.1.1. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ така што, за секој $x \in (A \setminus \{p\}) \cap T_X(p, \delta)$ (што е непразно множество, бидејќи $p \in A'$), имаме

$$d_Y(f(x), q_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad d_Y(f(x), q_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогаш, $d_Y(q_1, q_2) < \varepsilon$. Од произволноста на ε, добиваме $d_Y(q_1, q_2) = 0$, односно $q_1 = q_2$.

Глава 8

4. Обратното не мора да важи. Само ако $\lim\limits_{x \to a} \|f(x)\| = 0$, тогаш $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

7. 1) Од неравенството $x^2 - xy + y^2 \geqslant xy$, за $x \neq 0, y \neq 0$ и од смената $x = \frac{1}{t_1}$, $y = \frac{1}{t_2}$, при што условот $(x, y) \to (\infty, \infty)$ станува

$(t_1, t_2) \to (0,0)$, добиваме

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x+y}{xy}\right| \leqslant \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} = |t_1| + |t_2| \to 0$$

кога $(x,y) \to (\infty,\infty)((t_1,t_2) \to (0,0)$, од каде што следува

$$\lim_{\substack{y\to\infty \\ x\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$$

2) Со воведување поларна смена $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho sin\varphi$ добиваме:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{y\to\infty \\ x\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} &= \lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho^2}{\rho^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} \\
&= \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho^2(1-\frac{1}{2}\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} \\
&= \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho^2(1-\frac{1}{2}sin^2 2\varphi)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

бидејќи изразот во заградата во именителот е секогаш позитивен (поголем или еднаков на $\frac{1}{2}$.)

8. 1) Функцијата $f(x,y) = \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$ е дефинирана на множеството $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ Ако се приближуваме кон точката $(0,0)$ низ (долж) $y-$оската, односно го фиксираме $x = 0$ а y се стреми кон 0, тогаш добиваме:

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y\to 0}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3.$$

Ако пак се приближуваме кон точката $(0,0)$ долж $x-$оската, тогаш добиваме

$$\lim_{\substack{y=0 \\ x\to 0}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Значи, граничната вредност на функцијата во дадената точка зависи од начинот на кој ѝ се приближуваме, па заклучуваме дека не постои граничната вредност $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$.

2) За функцијата $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ не постои граничната вредност во $(0,0)$. Навистина, ако ставиме $x=t,\ y=t$, ќе имаме:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}.$$

Меѓутоа, ако ставиме $x=t,\ y=-t$, ќе имаме:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{2t^2} = -\frac{1}{2}.$$

Ова е доволно да заклучиме дека не постои гранична вредност, бидејќи видовме дека таа зависи од начинот на приближување кон точката $(0,0)$, што е во спротивност од дефиницијата за гранична вредност.

9.1) Граничната вредност на функцијата по правата $y=mx$ ја пресметуваме со:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{xy-y^2}{x+y^2}$$

Горниот лимес зависи од изборот на m, секоја гранична вредност е различна, што значи дека не постои двојната граница.

2) Граничната вредност на функцијата по правата $y=mx$ е:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{xy-y^2}{x+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{xy-y^2}{x+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2-m^2x^2}{x+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{m(1-m)x}{1+m^2x} = 0.$$

Граничната вредност на функцијата по правата $x=0$ е:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{xy-y^2}{x+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Бидејќи горните граници не се еднакви, не постои двојната граница.

10. 1) Нека $f(x,y)=\dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$ и $(a,b)=(0,0)$. Имаме дека

$\varphi(y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} = 1$ и $\psi(x) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} = \sin\dfrac{1}{x}$. Едната последователна граница е $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} = 1$, додека последователната граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не постои.

2) $\frac{1}{2}, 1$.
3) $0, 1$.
4) $0, 1$.

Глава 9

6. За $x, y \in X$ и за секој $a \in A$ важи $d(x,A) \leqslant d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,a)$, па добиваме $d(x,A) - d(x,y) \leqslant d(y,a)$ за сите $a \in A$. Тогаш, $d(x,A) - d(x,y) \leqslant \inf\limits_{a\in A} d(y,a) = d(y,A)$, односно $d(x,A) - d(y,A) \leqslant d(x,y)$. Аналогно, $d(y,A) - d(x,A) \leqslant d(x,y)$. Добиваме $|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y)$, од каде што следува непрекинатоста на функцијата $f(x) = d(x,A)$.

8. $i) \Rightarrow ii)$ тоа е теоремата 9.3.1

$ii) \Rightarrow iii)$ Нека $F \subseteq Y$ е затворено множество. Тогаш, $V = Y \setminus F$ е отворено множество, па од ii) имаме дека множеството $f^{-1}(Y \setminus F)$ е отворено во X. Од $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$, заклучуваме дека $f^{-1}(F)$ е затворено во X.

$iii) \Rightarrow iv)$ Нека A е произволно подмножество од X. Според iii) множеството $f^{-1}\left(\overline{A}\right)$ е затворено во X и важи

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Бидејќи $\overline{A}$ е најмалото затворено надмножество од A, заклучуваме дека $\overline{A} \subseteq \left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right)$, односно $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

$iv) \Rightarrow i)$ Нека V е околина на точката $f(x)$ во Y. Го разгледуваме множеството $A = f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Да забележиме дека точката

$x \notin \overline{A}$, бидејќи во тој случај од iv) би било $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f\left(f^{-1}\left(Y \setminus V\right)\right)} \subseteq \overline{Y \setminus V}$, што не е можно, бидејќи V е околина на точката $f(x)$, па $f(x) \in \mathrm{int}V = Y \setminus \overline{Y \setminus V}$. Според тоа, $x \in X \setminus \overline{A} = X \setminus \left(\overline{X \setminus f^{-1}(V)}\right) = \mathrm{int}\left(f^{-1}(V)\right)$. Тоа значи дека $U = \mathrm{int}(f^{-1}(V))$ е околина на точката x за која што $f\left(U\right) \subseteq V$.

10. За $\varepsilon > 0$, постојат $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такви што за $i = 1, 2$

$$d(x, a) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Нека $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $d(x, a) < \delta$, тогаш

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(a)\|_2 &= \sqrt{(f_1(x) - f_1(a))^2 + (f_2(x) - f_2(a))^2} \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

12. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Имаме

$$\begin{aligned}|(\varphi(x))(t) - (\varphi(y))(t)| &= \left|\int_0^t x(s)ds - \int_0^t y(s)ds\right| \\ &\leqslant \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds \\ &\leqslant \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \\ &= d(x, y).\end{aligned}$$

Нека $\delta = \varepsilon$. Ако $x, y \in C_{[0,1]}$, $\ d(x, y) < \delta \Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon$, односно φ е непрекинато пресликување.

15. Нека U е отворено подмножество од Z. Тогаш, $U \cap f(X)$ е отворено во $(f(X), d_y)$ и $U \cap f(X) = W \cap f(X))$ за некое отворено подмножество W од (Y, d_y), бидејќи $(f(X), d_y)$ е метрички потпростор од (Y, d_y). Тогаш, $f^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap f(X)) = f^{-1}(W \cap f(X)) = f^{-1}(W)$, што е отворено во X, бидејќи пресликувањето $f : X \to Y$ е непрекинато. Значи, за секое U отворено множество во Z, $f^{-1}(U)$ е отворено во X. Следува дека $f : X \to Z$ е непрекинато пресликување.

16. Нека $f(x) = \omega \in Y, \forall x \in X$ и нека Ω е отворено подмножество од Y. Ако $\omega \in \Omega$, тогаш, $f^{-1}(\Omega) = X$. Ако $\omega \notin \Omega$, тогаш, $f^{-1}(\Omega) = \varnothing$. Во секој случај, $f^{-1}(\Omega)$ е отворено множество во X.

17. Нека $G = X \setminus A$. Ќе покажеме дека G е отворено множество во X. Нека $x_0 \in G$, односно $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$ и нека $r = d_Y\left(f_1\left(x_0\right), f_2\left(x_0\right)\right) > 0$. Тогаш, $T_Y\left(f_1(x_0), \frac{r}{2}\right) \cap T_Y\left(f_2(x_0), \frac{r}{2}\right) = \varnothing$. (Ако $y \in T_Y\left(f_1(x_0), \frac{r}{2}\right) \cap T_Y\left(f_2(x_0), \frac{r}{2}\right)$, тогаш $d_Y\left(f_1(x_0), y\right) < \frac{r}{2}$ и $d_Y\left(f_2(x_0), y\right) < \frac{r}{2}$. Но, тогаш $r = d_Y\left(f_1(x_0), f_2(x_0)\right) \leqslant d_Y\left(f_1(x_0), y)\right) + d_Y\left(f_2(x_0), y)\right) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, што не е можно.) поради непрекинатоста на f_1 и f_2, постојат $\rho_1, \rho_2 > 0$ така што $f_1\left(T_X\left(x_0, \rho_1\right)\right) \subseteq T_Y\left(f_1\left(x_0\right), \frac{r}{2}\right)$ и $f_2\left(T_X\left(x_0, \rho_2\right)\right) \subseteq T_Y\left(f_2\left(x_0\right), \frac{r}{2}\right)$. За $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, имаме $f_1\left(T_X\left(x_0, \rho\right)\right) \cap f_2\left(T_X\left(x_0, \rho\right)\right) \subseteq T\left(f_1(x_0), \frac{r}{2}\right) \cap T\left(f_2(x_0), \frac{r}{2}\right) = \varnothing$. Значи, $f_1(x) \neq f_2(x), \forall x \in T_X\left(x_0, \rho\right) \Rightarrow f_1\left(T_X\left(x_0, \rho\right)\right) \cap f_2\left(T_X\left(x_0, \rho\right)\right) = \varnothing \Rightarrow T_X\left(x_0, \rho\right) \subseteq G \Rightarrow x_0 \in \mathrm{int} G$. Добивме дека G е отворено множество, односно A е затворено подмножество од X.

25. Тврдењето непосредно следува од неравенството:
$\left|d\left(x, A\right) - d\left(x', A\right)\right| \leqslant d\left(x, x'\right)$.

26. Ако во задачата 25 ставиме $A = \{0\}$, тогаш, $d\left(x, 0\right) = \|x\|$. Во $\mathbb{R}$ функцијата $x \mapsto |x|$ е рамномерно непрекината.

27. Јасно е дека тврдењето важи ако $\lambda = 0$. Нека $\lambda \neq 0$, тогаш $\|\lambda x - \lambda x'\| = |\lambda| \left\|x - x'\right\|, \forall x, x' \in X$, па од $\|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|\lambda x - \lambda x'\| < \varepsilon$ за $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$.

28. Да се искористи неравенството 9.2

29. Метриките d_2 и d_∞ на $\mathbb{R}^n$ се еквивалентни:
Од $d_2\left(x, y\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|x_i - y_i\right|^2 \leqslant n \cdot \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|x_i - y_i\right|^2$, односно $d_2\left(x, y\right) \leqslant \sqrt{n} \cdot d_\infty\left(x, y\right)$ и од $d_\infty\left(x, y\right) = \left|x_j - y_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_j - y_j\right)^2} = d_2\left(x, y\right)$, односно $d_\infty\left(x, y\right) \leqslant d_2\left(x, y\right)$, добиваме: $1 \leqslant \frac{d_2(x,y)}{d_\infty(x,y)} \leqslant \sqrt{n}$. Во дефиницијата 9.5.8 земаме $\alpha = 1$ и $\beta = \sqrt{n}$.
Слично се покажува дека $1 \leqslant \frac{d_1(x,y)}{d_\infty(x,y)} \leqslant n$ и $1 \leqslant \frac{d_1(x,y)}{d_2(x,y)} \leqslant \sqrt{n}$, односно метриките d_1 и d_∞ како и d_1 и d_2 на $\mathbb{R}^n$ се еквивалентни.

Глава 10

1. Нека $\varepsilon > 0$. Избираме $\delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$. Тогаш, за $|x| < \delta$ и $|y| < \delta$ ќе имаме:

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \left| \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{x^4 - x^2 + y^4 - y^2}{x^2 + y^2 + 1} \right| \\ &\leqslant \frac{|x^4 - x^2| + |y^4 - y^2|}{1} \\ &< 4\delta^2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Функцијата f е рационална функција со именител што не се анулира во произволна ненулта точка, затоа е непрекината во точките $(x, y) \neq (0, 0)$. Ќе покажеме дека функцијата е непрекината и во точката $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \lim_{\rho\to 0} \rho\sin^2\varphi\cos\varphi = 0 = f(0,0).$$

4. Нека $|x_1 - x_2| < \delta$ и $|y_1 - y_2| < \delta$, тогаш за произволните точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имаме

$$|(ax_1 + by_1 + c) - (ax_1 + by_1 + c)| \leqslant |a|\,|x_1 - x_2| + |b||y_1 - y_2| < (|a| + |b|)\delta,$$

па можеме да ставиме $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|+|b|}$.

Глава 11

1. Нека $x, y \in [a, b]$ и $y < z < x$. Тогаш, од теоремата на Лагранж за средна вредност имаме:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = \left|f'(z)\right| |x - y|$$

така што

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|\,.$$

Така, f е контракција од $[a, b] \to [a, b]$. Бидејќи $[a, b]$ е затворено во $\mathbb{R}$, значи комплетен, според теоремата на Банах за неподвижна точка,

$$\exists!\; x* \in [a, b],\;\; f(x^*) = x^*.$$

Така, x^* е решение на равенката $f(x) = x$.

2. Јасно е дека за ниту една точка од $[-2, -1] \bigcup [1, 2]$ не важи $x = -x$.

4. Од теоремата на Банах за неподвижна точка, f^N има единствена точка x таква што $f^N(x) = x$. Тогаш, важи $f^{N+1}(x) = f(f^N(x)) = f^N(f(x)) = f(x)$. Од овде следува дека $f(x)$ е неподвижна точка за f^N. Од единственоста на неподвижната точка, следува дека $f(x) = x$. Исто така, ако $f(y) = y$, тогаш $f^N(y) = f^{N-1}(y) = y$, па од единственоста на точката, следува дека $y = x$.

5. За секои $x, y \in \mathbb{R}$ такви што $x < y$, од теоремата за средна вредност, постои $c \in (x, y)$ така што $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$, па добиваме $|f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y - x|$, што значи дека f е контракција. Ја применуваме теоремата на Банах за неподвижна точка.

Глава 12

2. Упатство: Разгледај ја отворената покривка

$$\left\{T\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right) : n \geqslant 2\right\}.$$

4. Ако ниту една точка од K не е точка на натрупување на множеството A, тогаш, за секој $x \in K$, постои околина G_x на точката x, што содржи најмногу една точка од A, тоа е x ако $x \in A$. поради компактноста на K, од $\{G_x : x \in K\}$ можеме да извлечеме конечна потпокривка $\{G_{x_i} : i = 1, \ldots, n\}$ на K. Тогаш, $A \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}$, што не е можно, бидејќи A е бесконечно множество.

6. i) Нека K_α, $\alpha \in I$ се компактни множества. Од теорема 12.4.1, тие се затворени, па и $K = \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ е затворено подмножество од секое K_α, и конечно, од теоремата 12.4.7 следува дека K е компактно множество.

7. Ако е компактно множество, тогаш од теоремата 12.4.1 следува дека K е затворено во X. За обратното, нека K е затворено во X, тогаш, од теоремата 12.4.7 следува дека е компактно.

12.Нека X е компактен метрички простор и $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ е произволна дисјунктна фамилија од затворени множества во X, $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \varnothing$. Тогаш, ако означиме $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$, $\alpha \in I$ имаме $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha = X$. Бидејќи X е компактен простор, постојат $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in I$ такви што $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$, односно $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \varnothing$. За обратната насока, нека $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ е произволна отворена покривна на X. Тогаш, $\{F_\alpha : \alpha \in I\} = \{X \setminus G_\alpha : \alpha \in I\}$ е дисјунктна фамилија затворени множества во X. Тогаш, од условот, постојат $\alpha_1, \ldots \alpha_n$
$\in I$, такви што $\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} = X \setminus (\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}) = X \setminus \varnothing = X$.

13. Претпоставуваме дека за произволно $r > 0$, постои $x \in X$, таков што $\forall \alpha \in I$, $T(x, r) \nsubseteq G_\alpha$. Избираме низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ во X така што

$$T(x_n, \frac{1}{n}) \nsubseteq G_\alpha, \forall \alpha \in I.$$

Од условот на теоремата, низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ има конвергентна подниза $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ и притоа $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x \in X$. Тогаш, $\exists \alpha_0 \in I$ така што $x \in G_{\alpha_0}$ и, бидејќи G_{α_0} е отворено, постои $r_0 > 0$ така што $T(x, r_0) \nsubseteq G_{\alpha_0}$. Избираме $N \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{N} < \frac{r_0}{2}$ и $d(x, x_N) < \frac{r_0}{2}$. Сега, ако $y \in T\left(x_N, \frac{1}{N}\right)$, тогаш

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_N) + d(x_N, y) \\ &< \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2} \\ &= r_0, \end{aligned}$$

односно $y \in T(x, r_0) \subseteq G_{\alpha_0}, \forall y \in T(x_N, \frac{1}{N})$. Контрадикција.

16. Упатство: $x_n = n$ е низа што нема конвергентна подниза.

20. $\forall \epsilon > 0$, фамилијата топки $\{T(x, \epsilon) : x \in X\}$ е отворена покривка за X. X е компактно, па постојат конечно многу $\{T(x, \epsilon) : x \in X\}$ така што $\bigcup_{i=1}^{n} T(x_i, \epsilon) \supseteq X$, односно центрите $x_i, i = 1, ..., n$ на топките формираат конечна $\epsilon-$ мрежа за X.

Глава 13

4. Од ограниченоста на сите проекции $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ следува ограниченост на множеството A, но ако сите проекции се затворени во $\mathbb{R}$, не следува дека и A е затворено во $\mathbb{R}^n$.

Глава 14

3. Нека A е вистинско подмножество од X што е и отворено и затворено во X и нека $B = X \setminus A$. Тогаш, $x = A \cup B$, и $A \cap B = \varnothing$. Од $A = \overline{A}$, бидејќи A е затворено, следува дека $\overline{A} \cap B = \varnothing$. Слично, $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

4. Нека (X, d) е сврзан метрички простор. Ќе покажеме дека единствените подмножества од X што се истовремено отворени и затворени се X и $\varnothing$. Нека $A \subseteq X$ што е истовремено отворено и затворено.Тогаш, и множеството $B = X \setminus A$ е истовремено затворено и отворено множество. Исто така, X е дисјунктна унија од A и B. Тогаш, од дефиницијата за сврзаност A и B не можат да бидат и двете непразни множества. Значи, едното множество е празното множество а другото е целиот простор X. Ова значи дека $A = \varnothing$ или $A = X$.

За обратната насока, нека единствените подмножества од X што се истовремено отворени и затворени се X и $\varnothing$. Ќе покажеме дека тогаш X е сврзан метрички простор. Ако X не беше сврзан, тогаш ќе можеше да се претстави како дисјунктна унија од две непразни отворени множества A и B. Но, тогаш A е непразно, вистинско подмножество од X што е истовремено отворено и затворено. Контрадикција. Така, X мора да биде сврзан метрички простор.

5. Нека $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}$ се затворени подмножества такви што $\mathbb{R} = F_1 \cup F_2$. Ќе покажеме дека $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$. Нека $x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2$ и нека $x_1 \leqslant x_2$. Тогаш, $F_1 \cap (-\infty, x_2]$ е непразно, затворено подмножество од $\mathbb{R}$, што е ограничено од горе со точката x_2, па постои реален број $x = \max F_1 \cap (-\infty, x_2]$. Јасно е дека $x \in F_1$. Ќе покажеме дека $x \in F_2$, односно $x \in F_1 \cap F_2$. Од дефиницијата на бројот x заклучуваме дека $x \leqslant x_2,\ x \in F_1$ и $(x, x_2] \cap F_1 = \varnothing$, односно $(x, x_2] \subseteq F_2$. Ако $x = x_2$, тогаш $x \in F_2$. Ако $x < x_2$, тогаш $x \in \overline{(x, x_2]} \subseteq \overline{F_2} = F_2$, па повторно $x \in F_2$.

6. Упатство: Ако $B = B_1 \cup B_2$, каде што B_1 и B_2 се дисјунктни, затворени во B, тогаш $A \subseteq B \Rightarrow (A \subseteq B_1) \vee (A \subseteq B_2)$. Ако $A \subseteq B_1$, тогаш $B \subseteq \overline{A} \cap B \subseteq \overline{B_1} \cap B = B_1$, па важи $B_2 = \varnothing$.

7. Упатство: Нека $F_- = \{x \in I : f(x) \geqslant x\}$ и $F_+ = \{x \in I : f(x) \leqslant x\}$. Множествата F_- и F_+ се затворени, $-1 \in F_-$ и $1 \in F_+$, $I = F_- \cup F_+$. Бидејќи I е сврзано множество, мора да биде $F_- \cap F_+ \neq \varnothing$, односно постои точка $x_0 \in I$ за која што важи $f(x_0) = x_0$.

8. Нека A, B се две непразни, отворени множества во Z така што $A \cup B = Z$ и $A \cap B = \varnothing$. Бидејќи Y е густо во Z, следува дека $A \cap Y \neq \varnothing$, $B \cap Y \neq \varnothing$ и $A \cap Y$ и $B \cap Y$ се отворени множества во Y, па имаме $Y = (A \cap Y) \cup (B \cap Y)$ и $(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = Y \cap (A \cap B) = \varnothing$, што е контрадикција.

Глава 17

Библиографија

[1] Adnađević D. ; Kadelburg Z., *Matematička analiza I.* Beograd, Nauka 1990, 301 стр.

[2] Asuman G. Aksoy, Mohamed A. Khamsi, *A Problem Book in Real Analysis (Problem Books in Mathematics).* Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2000, 254 стр.

[3] Aljančić S., *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Beograd, Graģevinska knjiga 1968, 326 стр.

[4] Buskes G., Van Rooij A., *Topological Spaces: From Distance to Neighborhood.* Springer-Verlag New York, Inc., 1991, 313 стр.

[5] Gelbaum B. Olmsted J., *Counterexamples in analysis.* Holden-day, San-Francisco, London, Amsterdam 1964, 251 стр.

[6] Ивановски Н., *Функционална анализа.* Универзитет „Св.Кирил и Методиј“, Природно-математички факултет, Скопје, 2003, 294 стр.

[7] Kaplansky I., *Set Theory and Metric Spaces.* (ISBN 1846283698), Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1972, 140 стр.

[8] A.N.Kolmogorov &.S.V.Fomin, *Introductory Real Analysis.* (ISBN 0-486-61226-0), Dover Rublications, INC, New York, 1970, 403 стр.

[9] A.N.Kolmogorov &.S.V.Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functionl Analysis. Volume1: Metric and Normed Spaces* (ISBN 0-486-40683-0), Dover Rublications, INC, Mineola, New York, 1999, 403 стр.

[10] Кудрявцев Л.Д., *Курс математического анализа I*, Москва "ВЫСШАЯ ШКОЛА 1988, 712 стр.

[11] Кудрявцев Л.Д., *Курс математического анализа II*, Москва "ВЫСШАЯ ШКОЛА 1988, 576 стр.

[12] Кудрявцев Л.Д., *Курс математического анализа III*, Москва "ВЫСШАЯ ШКОЛА 1989, 352 стр.

[13] Lazarević I., *Višedimenzionalna matematička analiza* ORION, Beograd 2003, 598 стр.

[14] Mardesić S., *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru I* Školska kniga Zagreb, 1988, 272 стр.

[15] Milosav Marjanović, *Metrički prostori, Stiltjesov i Lebegov integral.* Naučna knjiga, Beograd, 1968, 95 стр.

[16] Mícheál O'Searcoid, *Metric Spaces,* Springer-Verlag London Limited, 2007, 304 стр. ,

[17] Manya Raman-Sundström, *A pedagogical history of compactness.* The American mathematical monthly, Vol 122 (7), August–September 2015, 619-635 arXiv:1006.4131

[18] Rakočević V. *Funkcionalna analiza.* Naučna knjiga, Beograd, 1994, 240 стр.

[19] Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis* McGraw-Hill, Kogakusha, LTD., 342 стр.

[20] Shirali S., Vasudeva H., *Metric spaces.* (ISBN 1852339225) Springer-Verlag London Limited, 2006, 229 стр.

[21] Stanković B. *Osnovi funkcionalne analize.* Naučna knjiga, Beograd, 1975, 156 стр.

Индекс

Е-издание:
https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/PMF/Metrichki prostori.pdf