УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички факултет

проф. д-р Весна Манова-Ераковиќ
д-р Абдула Букла

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО КОМПЛЕКСНА АНАЛИЗА (ПРВ ДЕЛ)

Скопје, 2024

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Биљана Ангелова, ректор

Уредник на публикацијата:
проф. д-р Весна Манова-Ераковиќ,
д-р Абдула Букла

Рецензенти:
1. проф. д-р Љупчо Настовски, редовен професор на Природно-математички факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
2. проф. д-р Петар Соколоски, вонреден професор на Природно-математички факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје

Техничка обработка:
проф. д-р Весна Манова-Ераковиќ,
д-р Абдула Букла

Лектура на македонски јазик:
Виолета Јовановска-Никовска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517.52/.55(075.8)(076)

МАНОВА-Ераковиќ, Весна
Збирка решени задачи по комплексна анализа [Електронски извор]. Д. 1 / Весна Манова-Ераковиќ, Абдула Букла. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2024

Начин на пристапување (URL):
https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/PMF/Zbirka_resheni_zadachi_po_kompleksna_analiza_(prv_del).pdf.
- Текст во PDF формат, содржи 88 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 31.01.2024. - Библиографија: стр. 88

ISBN 978-9989-43-506-5

1. Букла, Абдула [автор]
а) Комплексни броеви -- Операции -- Функции -- Математичка анализа -- Вискошколски учебници -- Вежби

COBISS.MK-ID 62880261

ПРЕДГОВОР

Оваа збирка, пред сè е наменета за студентите на предметот Вовед во комплексна анализа на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје.

Меѓутоа, збирката може да ја користитат и студентите од техничките факултети, како и сите оние студенти во чии наставни програми се опфатени содржините што се обработуваат во оваа збирка.

Збирката е резултат на повеќегодишни предавања и вежби кои ги одржувале авторите на студиите по математика.

Збирката е работена според наставната програма за овој предмет.

Опфатени се темите: Поим за комплексен број, Други облици на комплексен број, Корен од комплексен број, Важни неравенства, Низи, Редови, Елементарни комплексни функции, Диференцијабилност на комплексни функции, Комплексна интеграција, Кошиева интегрална теорема и последици, Конформни пресликувања.

Во сите глави се дадени и основните поими потребни за решавање на задачите, а по потреба, се користени и цртежи за подобра илустрација.

Збирката е напишана на високо стручен, но истовремено едноставен и разбирлив начин. Се потрудивме стилот на пишување да биде соодветен како за студентите, така и за останатите читатели кои ќе ја користат во својата професионална работа.

Особено им се заблагодаруваме на рецензентите на оваа збирка, кои со своите коментари и забелешки многу придонесоа за нејзино подобрување.

Ќе бидеме благодарни на сите читатели кои со своите сугестии ќе придонесат за идни подобрувања на оваа збирка.

На сите читатели им посакуваме успешно навлегување во техниките на математиката преку оваа збирка и успешно совладување на нејзините содржини.

Скопје, 2024 Од Авторите

1. Вовед. Поим за комплексен број

Задача 1. Да се претстави во алгебарски облик комплексниот број $z=\frac{1}{(x+iy)^2}+\frac{1}{(x-iy)^2}$.

Решение. Од

$$z=\frac{1}{(x+iy)^2}+\frac{1}{(x-iy)^2}=\frac{1}{(x+iy)^2}\cdot\frac{(x-iy)^2}{(x-iy)^2}+\frac{1}{(x-iy)^2}\cdot\frac{(x+iy)^2}{(x+iy)^2}$$

и операциите во множеството на комплексни броеви, добиваме дека

$$z=\frac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x+iy)^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[x^2-2xyi-y^2+x^2+2xyi-y^2\right]=$$

$$=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}+i\cdot 0.$$

Задача 2. Да се докажат равенствата: $\operatorname{Re} z=\frac{z+\overline{z}}{2}$ и $\operatorname{Im} z=\frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Решение: За комплексниот број $z=x+iy$, неговиот конјугиран е бројот $\overline{z}=x-iy$. па имаме

$$\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{1}{2}\left[x+iy+x-iy\right]=\frac{1}{2}\left[2x+0\right]=x=\operatorname{Re} z$$

и

$$\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[x+iy-x+iy\right]=\frac{1}{2i}\left[2iy\right]=y=\operatorname{Im} z.$$

Задача 3. Да се докаже дека:

а) $|z|=|\overline{z}|$; б) $|z|^2=z\cdot\overline{z}$; в) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; г) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ при $z_2\neq 0$.

Решение.

а) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(-y)^2}=|x-iy|=|\overline{z}|$;

б) $z\cdot\overline{z}=(x+iy)\cdot(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$;

в) Користејќи го б) и $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, добиваме дека $|z_1\cdot z_2|^2=(z_1\cdot z_2)\cdot\overline{(z_1\cdot z_2)}=z_1\cdot z_2\cdot\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\left(z_1\cdot\overline{z_1}\right)\cdot\left(z_2\cdot\overline{z_2}\right)=|z_1|^2\cdot|z_2|^2=\left(|z_1|\cdot|z_2|\right)^2$, па важи $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$;

г) За $z_2\neq 0$, од б) и $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, добиваме

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\cdot\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}=\left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)^2,$$ па важи $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Задача 4. Нека $z_2 \neq 0$. Да се докажат равенствата: $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}}{2|z_2|^2}$ и $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}}{2|z_2|^2}i$.

Решение. Користејќи ги задачите 2 и 3, имаме

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{\frac{z_1}{z_2}+\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{z_1}{z_2}+\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2}{z_2\overline{z_2}}\right]=\frac{1}{2}\frac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2}{|z_2|^2}$$

и

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{\frac{z_1}{z_2}-\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[\frac{z_1}{z_2}-\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right]=\frac{1}{2i}\cdot\frac{i}{i}\cdot\left[\frac{z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2}{z_2\overline{z_2}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right]i.$$

Задача 5. Да се докаже дека бројот $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$, каде што $|z_1|=|z_2|=1$, е реален.

Решение. Треба да докажеме дека имагинарниот дел на бројот $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ е нула. Користејќи ја задача 4, $\overline{(z_1+z_2)}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ и $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ добиваме

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)=\frac{\overline{(z_1+z_2)}(1+z_1z_2)-(z_1+z_2)\overline{(1+z_1z_2)}}{2|1+z_1z_2|^2}i=$$

$$=\frac{\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)(1+z_1z_2)-(z_1+z_2)\left(1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}\right)}{2|1+z_1z_2|^2}i=$$

$$=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_1}z_1z_2+\overline{z_2}z_1z_2-z_1-z_2-z_1\overline{z_1}\,\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2}}{2|1+z_1z_2|^2}i=$$

$$=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+|z_1|^2z_2+|z_2|^2z_1-z_1-z_2-|z_1|^2\overline{z_2}-\overline{z_1}|z_2|^2}{2|1+z_1z_2|^2}i=$$

$$=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+z_2+z_1-z_1-z_2-\overline{z_2}-\overline{z_1}}{2|1+z_1z_2|^2}i=0\cdot i=0$$

Со тоа докажавме дека, при условот $|z_1|=|z_2|=1$, бројот $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ е реален.

Задача 6. Ако $|a|=1$ или $|b|=1$, да се докаже дека $\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|=1$.

Решение. Нека претпоставиме дека $|a|=1$ и $b\in\mathbb{C}$. Имаме

$$\begin{aligned}|a-b|^2&=(a-b)\overline{(a-b)}=(a-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right)=a\overline{a}-a\overline{b}-b\overline{a}+b\overline{b}=\\&=|a|^2-a\overline{b}-b\overline{a}+|b|^2=1+|b|^2-a\overline{b}-\overline{a}b\end{aligned}\qquad(1)$$

Од друга страна имаме,

$$\begin{aligned}\left|1-\overline{a}b\right|^2 &= \left(1-\overline{a}b\right)\overline{\left(1-\overline{a}b\right)} = \left(1-\overline{a}b\right)\left(\overline{1}-\overline{\overline{a}}\,\overline{b}\right) = \left(1-\overline{a}b\right)\left(1-a\overline{b}\right) = \\ &= 1-a\overline{b}-\overline{a}b+|a|^2|b|^2 = 1-a\overline{b}-\overline{a}b+1\cdot|b|^2 = 1-a\overline{b}-\overline{a}b+|b|^2\end{aligned} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 = \frac{|a-b|^2}{\left|1-\overline{a}b\right|^2} = 1$. Слично, се докажува дека истото важи и при $|b| = 1$.

Задача 7. Да се докаже дека комплексниот број е унимодуларен (неговиот модул е 1) ако и само ако може да се запише како количник на два конјугирано-комплексни броја.

Решение: Нека $z = \frac{a}{\overline{a}}$ т.е. z е количник на два конјугирано-комплексни броја. Тогаш $|z| = \left|\frac{a}{\overline{a}}\right| = \frac{|a|}{|\overline{a}|} = \frac{|a|}{|a|} = 1$ т.е. $|z| = 1$, што и требаше да се докаже.

Нека $|z| = 1$. Тогаш $1 = 1^2 = |z|^2 = z\cdot\overline{z}$, т.е. $1 = z\cdot\overline{z}$. Оттука следува дека $1+z = z\cdot\overline{z}+z = z\left(1+\overline{z}\right)$.

Ако $1+\overline{z} \neq 0$ добиваме дека $z = \frac{1+z}{1+\overline{z}} = \frac{1+z}{\overline{\left(1+z\right)}} = \frac{a}{\overline{a}}$, каде $a = 1+z$. Ако пак $1+\overline{z} = 0$, добиваме дека $\overline{z} = -1 = \frac{i}{-i} = \frac{i}{\overline{i}}$. Заклучуваме дека во двата случаи, бројот z е количник на два конјугирано-комплексни броја.

Задача 8. Да се докажат равенствата:

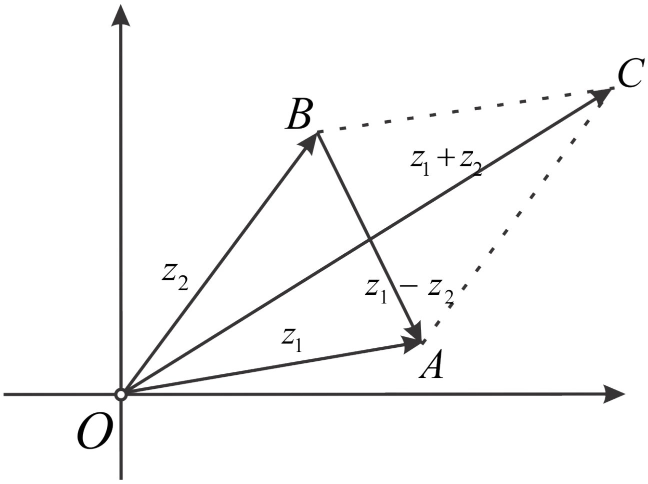
а) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$,

б) $\left|z_1\overline{z_2}+1\right|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)$,

в) $\left|z_1\overline{z_2}-1\right|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)$.

Решение.

а) Користејќи ја геометриската интерпретација на комплексниот број, ако со А и В ги означиме точките од комплексната рамнина што ги претставуваат комплексните броеви z_1 и z_2, соодветно, ја добиваме следнава фигура:



Од $z_1=\overrightarrow{OA}$, $z_2=\overrightarrow{OB}$, добиваме

$|z_1+z_2|=\overline{OC}$ и $|z_1-z_2|=\overline{BA}$, па $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ е еквивалентно со

$$\overline{OC}^2+\overline{AB}^2=2\left(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2\right),$$

т.е. збирот на квадратите на дијагоналите на еден паралелограм е еднаков со удвоениот збир на квадратите на неговите страни. (Теорема за паралелограм). Заради еквивалентноста, заклучуваме дека важи $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

Директниот доказ (со користење на особините на модул на комплексен број) е следниот:

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=\\&=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=\\&=z_1\overline{z_1}+\cancel{z_1\overline{z_2}}+\cancel{\overline{z_1}z_2}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}-\cancel{z_1\overline{z_2}}-\cancel{z_2\overline{z_1}}+z_2\overline{z_2}=,\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1|^2+|z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\end{aligned}$$

б) $\left|z_1\overline{z_2}+1\right|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)$ (Се остава на читателот.)

в) $\left|z_1\overline{z_2}-1\right|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2-1\right)\left(|z_2|^2-1\right)$ (Се остава на читателот.)

Задача 9. Да се докаже: Ако $|z|=1$ и $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{C}$, тогаш $\left|\dfrac{a_2z^2+a_1z+a_0}{\overline{a_0}z^2+\overline{a_1}z+\overline{a_2}}\right|=1$.

Решение. Множејќи ги броителот и именителот со $\overline{z}$ добиваме:

$$\left|\frac{a_2z^2+a_1z+a_0}{\overline{a_0}z^2+\overline{a_1}z+\overline{a_2}}\right|=\left|\frac{a_2z^2+a_1z+a_0}{\overline{a_0}z^2+\overline{a_1}z+\overline{a_2}}\cdot\frac{\overline{z}}{\overline{z}}\right|=\left|\frac{a_2zz\overline{z}+a_1z\overline{z}+a_0\overline{z}}{\overline{a_0}zz\overline{z}+\overline{a_1}z\overline{z}+\overline{a_2}\,\overline{z}}\right|=\left|\frac{a_2z|z|^2+a_1|z|^2+a_0\overline{z}}{\overline{a_0}z|z|^2+\overline{a_1}|z|^2+\overline{a_2}\,\overline{z}}\right|.$$

Заради условот, $z\overline{z}=|z|^2=1$, имаме

$$\left|\frac{a_2 z + a_1 + a_0\bar{z}}{\overline{a_0} z + \overline{a_1} + \overline{a_2}\,\overline{z}}\right| = \left|\frac{a_2 z + a_1 + a_0\bar{z}}{\overline{\left(a_0\bar{z} + a_1 + a_2 z\right)}}\right| = \left|\frac{b}{\bar{b}}\right| = 1,$$

каде $b = a_0\bar{z} + a_1 + a_2 z$.

Задача 10. Да се докаже идентитетот:

$$a\operatorname{Im}\left(\bar{b}c\right) + b\operatorname{Im}\left(\bar{c}a\right) + c\operatorname{Im}\left(\bar{a}b\right) = 0, \text{ каде } a,b,c \in \mathbb{C}.$$

Решение. Нека $a,b,c \in \mathbb{C}$. Заради задача 2, имаме

$$a\operatorname{Im}\left(\bar{b}c\right) + b\operatorname{Im}\left(\bar{c}a\right) + c\operatorname{Im}\left(\bar{a}b\right) = a\frac{1}{2i}\left(\bar{b}c - b\bar{c}\right) + b\frac{1}{2i}\left(\bar{c}a - c\bar{a}\right) + c\frac{1}{2i}\left(\bar{a}b - a\bar{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\cancel{a\bar{b}}c - a\bcancel{b\bar{c}} + b\bcancel{\bar{c}a} - \cancel{bc\bar{a}} + \cancel{c\bar{a}b} - \cancel{ca}\bar{b}\right) = 0.$$

Задача 11. Ако три точки z_1, z_2, z_3 од комплексната рамнина лежат на единечниот круг и ако важи $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, тогаш z_1, z_2, z_3 се темиња на рамностран триаголник.

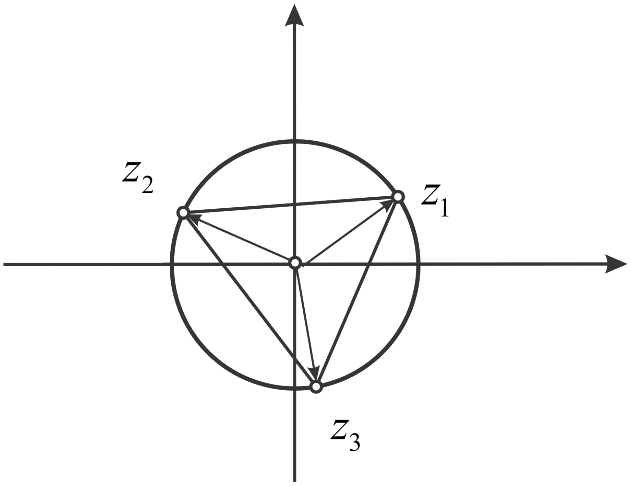
Решение. Нека со (1) го означиме вториот услов т.е.

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \tag{1}$$

Прviот услов, т.е. дека z_1, z_2, z_3 лежат на единечниот круг, значи

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \tag{2}$$

Нека точките z_1, z_2, z_3 се претставени во комплексната рамнина како на следниов цртеж:



За да докажеме дека z_1, z_2, z_3 се темиња на рамностран триаголник треба да докажеме дека $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$. Користејќи ги условите (1) и (2), добиваме

$$\begin{aligned}|z_3-z_2|^2 &\underset{(1)}{=}|-z_1-z_2-z_2|^2=|-z_1-2z_2|^2=(-z_1-2z_2)\overline{(-z_1-2z_2)}=\\ &=(-z_1-2z_2)\left(-\overline{z_1}-2\overline{z_2}\right)=z_1\overline{z_1}+2z_1\overline{z_2}+2z_2\overline{z_1}+4z_2\overline{z_2}=\\ &=|z_1|^2+2z_1\overline{z_2}+2z_2\overline{z_1}+4|z_2|^2\underset{(2)}{=}5+2z_1\overline{z_2}+2z_2\overline{z_1}.\end{aligned}\tag{3}$$

Слично,

$$\begin{aligned}|z_3-z_1|^2 &\underset{(1)}{=}|-z_1-z_2-z_1|^2=|-2z_1-z_2|^2=(-2z_1-z_2)\overline{(-2z_1-z_2)}=\\ &=(-2z_1-z_2)\left(-2\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=4z_1\overline{z_1}+2z_1\overline{z_2}+2\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=\\ &=4|z_1|^2+2z_1\overline{z_2}+2\overline{z_1}z_2+|z_2|^2\underset{(2)}{=}5+2z_1\overline{z_2}+2\overline{z_1}z_2.\end{aligned}\tag{4}$$

Од (3) и (4), добиваме дека $|z_3-z_2|=|z_3-z_1|$.

Слично, се докажува и дека $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|$.

Задача 12. Нека $a,b,c,d\in\mathbb{C};\ c\neq d;\ b\neq d;\ a\neq d$. Ако два од трите броеви $\frac{a-b}{c-d}$, $\frac{b-c}{a-d}$ и $\frac{c-a}{b-d}$ се чисто имагинарни, тогаш таков е и третиот број.

Решение. Нека $a=a_1+ia_2$, $b=b_1+ib_2$, $c=c_1+ic_2$, $d=d_1+id_2$. Заради задача 4, имаме

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{a-b}{c-d}\right)&=\frac{1}{2|c-d|^2}\left[\left(\overline{a}-\overline{b}\right)(c-d)+(a-b)\left(\overline{c}-\overline{d}\right)\right]=\\ &=\frac{1}{2|c-d|^2}\left[\overline{a}c-\overline{a}d-\overline{b}c+\overline{b}d+a\overline{c}-a\overline{d}-b\overline{c}+b\overline{d}\right]=\\ &=\frac{1}{2|c-d|^2}\left[\left(\overline{a}c+a\overline{c}\right)-\left(\overline{a}d+a\overline{d}\right)-\left(\overline{b}c+b\overline{c}\right)+\left(\overline{b}d+b\overline{d}\right)\right]\end{aligned}\tag{1}$$

Да го разгледаме изразот $\overline{X}Y+X\overline{Y}$, каде $X=X_1+iX_2$, $Y=Y_1+iY_2$.

$$\begin{aligned}\overline{X}Y+X\overline{Y}&=\overline{(X_1+iX_2)}(Y_1+iY_2)+(X_1+iX_2)\overline{(Y_1+iY_2)}=\\ &=(X_1-iX_2)(Y_1+iY_2)+(X_1+iX_2)(Y_1-iY_2)=\\ &=\underline{X_1Y_1}+\cancel{iX_1Y_2}-\cancel{iX_2Y_1}+\underline{\underline{X_2Y_2}}+\underline{X_1Y_1}-\cancel{iX_1Y_2}+\cancel{iX_2Y_1}+\underline{\underline{X_2Y_2}}=\\ &=2X_1Y_1+2X_2Y_2.\end{aligned}$$

Докажавме:

За $\overline{X}Y+X\overline{Y}$, каде $X=X_1+iX_2$, $Y=Y_1+iY_2$ важи $\overline{X}Y+X\overline{Y}=2X_1Y_1+2X_2Y_2$. (*)

Со замена на (*) во (1) добиваме

$$\operatorname{Re}\left(\frac{a-b}{c-d}\right)=\frac{1}{\cancel{2}|c-d|^2}\cancel{2}\left[a_1c_1+a_2c_2+b_1d_1+b_2d_2-a_1d_1-a_2d_2-b_1c_1-b_2c_2\right].$$

т.е. добивме дека

$$|c-d|^2\operatorname{Re}\left(\frac{a-b}{c-d}\right)=a_1c_1+a_2c_2+b_1d_1+b_2d_2-a_1d_1-a_2d_2-b_1c_1-b_2c_2.\tag{2}$$

Слично, се добиваат и следниве врски:

$$|a-d|^2\operatorname{Re}\left(\frac{b-c}{a-d}\right)=a_1b_1+a_2b_2+c_1d_1+c_2d_2-b_1d_1-b_2d_2-a_1c_1-a_2c_2.\tag{3}$$

$$|b-d|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{c-a}{b-d}\right)=b_1c_1+b_2c_2+a_1d_1+a_2d_2-c_1d_1-c_2d_2-a_1b_1-a_2b_2. \qquad (4)$$

Сега, од (2), (3) и (4), за збирот, добиваме

$$|c-d|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{a-b}{c-d}\right)+|a-d|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{b-c}{a-d}\right)+|b-d|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{c-a}{b-d}\right)=0,$$

од каде следува точноста на тврдењето.

Задача 13. Нека $a>0$ и $z_n=x_n+iy_n=\left(1+i\sqrt{a}\right)^n$, каде $x_n, y_n \in \mathbb{R}, n\in\mathbb{Z}$. Да се докаже дека $x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}=\sqrt{a}\left(1+a\right)^{n-1}$.

Решение. Од $z_n=x_n+iy_n$, имаме $z_{n-1}=x_{n-1}+iy_{n-1}$ и $\overline{z_{n-1}}=x_{n-1}-iy_{n-1}$, па за производот $\overline{z_{n-1}}z_n$ добиваме

$$\overline{z_{n-1}}z_n=\left(x_{n-1}-iy_{n-1}\right)\left(x_n+iy_n\right)=x_{n-1}x_n+y_{n-1}y_n+i\left(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}\right).$$

Од последното и условот на задачата, $z_n=\left(1+i\sqrt{a}\right)^n$, имаме

$$\begin{aligned}x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}&=\operatorname{Im}\left(\overline{z_{n-1}}z_n\right)=\operatorname{Im}\left(\overline{z_{n-1}}\left(1+i\sqrt{a}\right)^n\right)=\operatorname{Im}\left(\overline{z_{n-1}}\left(1+i\sqrt{a}\right)^{n-1}\left(1+i\sqrt{a}\right)\right)=\\&=\operatorname{Im}\left(\overline{z_{n-1}}z_{n-1}z_1\right)=\operatorname{Im}\left(\left|z_{n-1}\right|^2 z_1\right)=\left|z_{n-1}\right|^2\operatorname{Im}\left(z_1\right)=\left|z_{n-1}\right|^2\operatorname{Im}\left(1+i\sqrt{a}\right)=\\&=\left|z_{n-1}\right|^2\sqrt{a}=\overline{z_{n-1}}z_{n-1}\sqrt{a}=\left(1-i\sqrt{a}\right)^{n-1}\left(1+i\sqrt{a}\right)^{n-1}\sqrt{a}=\\&=\left[\left(1-i\sqrt{a}\right)\left(1+i\sqrt{a}\right)\right]^{n-1}\sqrt{a}=\left(1+a\right)^{n-1}\sqrt{a}.\end{aligned}$$

Задача 14. Да се најде множеството точки во комплексната рамнина за кое важи:

а) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{a},\ a>0$; б) $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0$;

в) $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0$; г) $|z-a|=b,\ a\in\mathbb{C}, b\in\mathbb{R}$.

Решение.

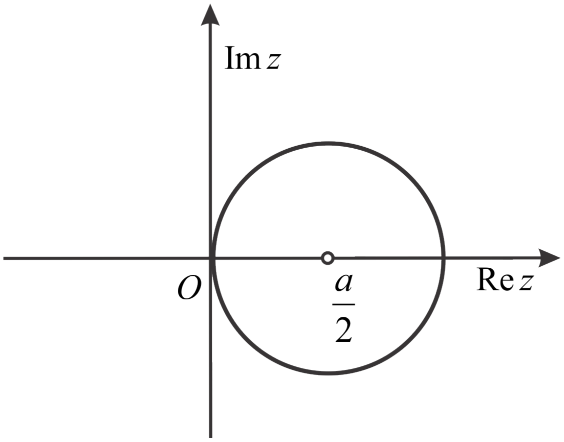
а) Од $\frac{1}{a}=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)=\frac{1}{2}\frac{z+\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\frac{1}{2}\frac{z+\overline{z}}{|z|^2}$ т.е. $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\frac{z+\overline{z}}{|z|^2}$, имаме $2|z|^2=a\left(z+\overline{z}\right)$. Со замена на $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$ во последниот израз, добиваме дека $2|z|^2=a\cdot 2\operatorname{Re}z$, односно

$$|z|^2=a\operatorname{Re}z \qquad (*)$$

Користејќи го алгебарскиот облик $x+iy$ за комплексниот број z, (*) е еквивалентна со

$$x^2+y^2=ax \Leftrightarrow x^2-ax+y^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Последната равенка претставува равенка на кружница $K\left(C,\dfrac{a}{2}\right)$ со центар во $C\left(\dfrac{a}{2},0\right)$ и радиус $r=\dfrac{a}{2}$, односно бараното множеството точки во комплексната рамнина е претставено на следниов цртеж.

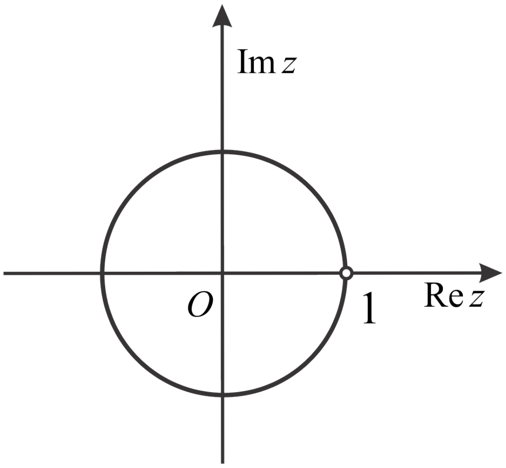


б) Заради задача 4, добиваме

$$0=\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{1}{2\left|z+1\right|^{2}}\left[\left(\bar{z}-1\right)\left(z+1\right)+\left(z-1\right)\left(\bar{z}+1\right)\right]$$, од каде следува

$$\bar{z}z+\cancel{\bar{z}}-\cancel{z}-1+z\bar{z}+\cancel{z}-\cancel{\bar{z}}-1=0\Leftrightarrow 2\bar{z}z-2=0\Leftrightarrow 2\left|z\right|^{2}-2=0\Leftrightarrow \left|z\right|^{2}=1.$$

Со замена на алгебарскиот облик $z=x+iy$ во последното равенство $\left|z\right|^{2}=1$, имаме $x^{2}+y^{2}=1$, па бараното множество точки преставува кружница $K\left(0+i\cdot 0,1\right)$.



в) Се остава на читателот.

г) Со Γ ќе го означиме множеството точки во комплексната рамнина за кои важи $\left|z-a\right|=b,\ b\in\mathbb{R}$. Ќе ги разгледаме следниве 3 случаи: i) $b<0$; ii) $b=0$; iii) $b>0$.

i) Нека $b<0$. Во овој случај, $\left|z-a\right|=b$ значи дека негативниот реален број b е еднаков со ненегативниот реален број $\left|z-a\right|$ (модул на комплексен број), што не е можно. Заклучуваме дека бараното геометриското место на точки е празно множество, т.е. $\Gamma=\varnothing$.

ii) Нека $b=0$. Во овој случај, $|z-a|=b$ се еквивалентно со $|z-a|=0$. Последното е можно само ако $z=a$, па $\Gamma=\{a\}$.

iii) Нека $b>0$. Со замена на алгебарските облици $z=x+iy$ и $a=a_1+ia_2$ во $|z-a|=b$, добиваме

$$|(x-a_1)+i(y-a_2)|=b\Leftrightarrow(x-a_1)^2+(y-a_2)^2=b^2,$$

па $\Gamma=K(a_1+ia_2,b)$.

Задача 15. Нека $A,C\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{C}$ се такви да $|B|^2>AC$, $A>0$. Да се докаже дека $A|z|^2+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0$ е равенка на кружница и да се одреди нејзиниот центар и радиус.

Решение. Точни се следниве еквиваленции:

$$A|z|^2+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0/:A,\quad A>0$$

$$\Leftrightarrow|z|^2+\frac{\overline{B}}{A}z+\frac{B}{A}\overline{z}+\frac{C}{A}=0$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}+\frac{\overline{B}}{A}z+\frac{B}{A}\overline{z}+\frac{C}{A}=0$$

$$\Leftrightarrow z\left(\overline{z}+\frac{\overline{B}}{A}\right)+\frac{B}{A}\overline{z}+\frac{B}{A}\cdot\frac{\overline{B}}{A}-\frac{B}{A}\cdot\frac{\overline{B}}{A}+\frac{C}{A}=0$$

$$\Leftrightarrow z\left(\overline{z}+\frac{\overline{B}}{A}\right)+\frac{B}{A}\left(\overline{z}+\frac{\overline{B}}{A}\right)-\frac{|B|^2}{A^2}+\frac{C}{A}=0$$

$$\Leftrightarrow z\left(\overline{z}+\frac{\overline{B}}{A}\right)+\frac{B}{A}\left(\overline{z}+\frac{\overline{B}}{A}\right)=\frac{|B|^2}{A^2}-\frac{C}{A}$$

$$\Leftrightarrow\left(z+\frac{B}{A}\right)\left(\overline{z}+\frac{\overline{B}}{A}\right)=\frac{|B|^2-AC}{A^2}$$

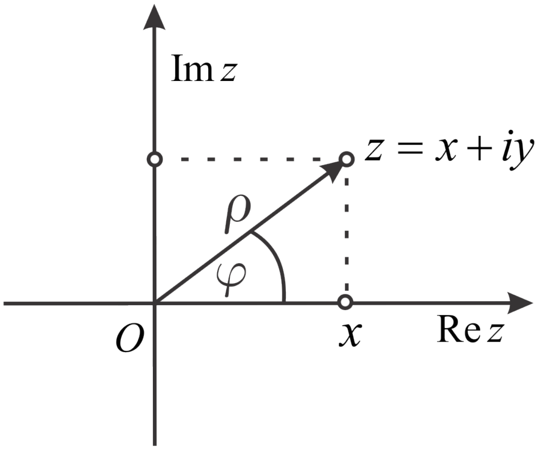
Од тоа што $A\in\mathbb{R}$, следува дека $\overline{A}=A$ и $\frac{\overline{B}}{A}=\frac{\overline{B}}{\overline{A}}=\overline{\left(\frac{B}{A}\right)}$, па, заради погоре, $A|z|^2+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0$ е еквивалентна со

$$\left(z+\frac{B}{A}\right)\overline{\left(z+\frac{B}{A}\right)}=\frac{|B|^2-AC}{A^2}>0$$

$$\Leftrightarrow\left|z+\frac{B}{A}\right|^2=\frac{|B|^2-AC}{A^2}>0.$$

Последното претставува равенка на кружница $K\left(-\frac{B}{A},\sqrt{\frac{|B|^2-AC}{A^2}}\right)$ со центар во $-\frac{B}{A}$ и радиус $\sqrt{\frac{|B|^2-AC}{A^2}}$.

2. Други облици на комплексен број. Корен од комплексен број. Важни неравенства



Алгебарскиот облик на комплексниот број $z=(x,y)$ е $z=x+iy$, каде $x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z$.

Изразот $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, каде $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$, $\varphi=Argz$ е секој реален број кој задоволува услов $\sin\varphi=\frac{y}{|z|},\ \cos\varphi=\frac{x}{|z|}$, се нарекува тригонометриски облик на комплексниот број $z=(x,y)$. Притоа, геометриската интерпретација е следната: ρ е растојанието од O до z, односно должината на радиус векторот на z, а $\varphi=Argz$ (аргумент на z) е аголот кој се добива со ротирање на позитивниот дел на реалната оска до поклопување со радиус векторот на z.

Помеѓу сите вредности за $\operatorname{Arg} z$ се наоѓа една и само една вредност која припаѓа на интервалот $(-\pi,\pi]$ и таа се означува со $\arg z$ и се нарекува главна вредност на аргументот. За пресметување на главна вредност важи следнава формула:

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{atctg}\left(\frac{y}{x}\right), & x>0\\ \pi+\operatorname{atctg}\left(\frac{y}{x}\right), & x<0,\ y\geq 0\\ -\pi+\operatorname{atctg}\left(\frac{y}{x}\right), & x<0,\ y<0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0,\ y\geq 0\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0\end{cases}.$$

За степенување на e со комплексен број $z=x+iy$ важи следнава формула:

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Комплексниот број z, може да се запише и со изразот $z=\rho e^{i\varphi}=|z|e^{i\operatorname{Arg}z}$ и се нарекува негов експоненцијален облик.

Формула на Моавр: Ако $\varphi\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}$, тогаш $\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$.

За $z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$, $n-$ти корен од комплексниот број z, се дефинира со
$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),k\in\left\{0,1,2,...,n-1\right\}$$

Задача 1. Користејќи ја главната вредност на аргументот $-\pi<\arg z\le\pi$, да се претставаат во тригонометриски и експоненцијален облик, следните комплексни броеви:

а) $-i$; б) -4; в) $4-3i$; г) e^{2-3i}.

Решение.

а) Алгебарскиот облик на $-i$ е $0+(-1)i$. Имаме $x=0,\ y=-1$ па $\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$.

За тригонометрискиот облик имаме
$$z=-i=|-i|\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Па експоненцијалниот облик е
$$z=-i=|-i|e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

б) Алгебарскиот облик на -4 е $-4+0i$ па $x=-4,\ y=0$. За модулот имаме $|-4|=\sqrt{\left(-4\right)^2+0^2}=4$. Главната вредност на аргументот е $\arg(-4)=\pi+\operatorname{arctg}0=\pi$. Па тригонометрискиот облик е
$$z=-4=4\left(\cos\left(\pi\right)+i\sin\left(\pi\right)\right).$$

Експоненцијалниот облик на -4 е
$$z=4e^{i\pi}.$$

в) Алгебарски облик на $4-3i$ е $4+\left(-3\right)i$ па $x=4,\ y=-3$. За модулот имаме $|4-3i|=\sqrt{\left(4\right)^2+\left(-3\right)^2}=\sqrt{25}=5$. Главната вредност е $\arg\left(4-3i\right)=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right)$. Па, тригонометрискиот облик е
$$z=5\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)\right),$$

а експоненцијалниот облик е
$$z=5e^{i\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)}.$$

г) $z=e^{2-3i}=e^2e^{-3i}=e^2\left(\cos(-3)+i\sin(-3)\right)$ што е тригонометрискиот облик на дадениот број.

Експоненцијалниот облик е
$$z=e^2e^{i(-3)}.$$

Задача 2. Да се пресмета:

а) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}$; б) $(2-i2)^{6}$;

в) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$; г) $\left(\sqrt{3}-3i\right)^{6}$.

Решение.

а) За $z=x+iy=-1+i\sqrt{3}$, имаме $x=-1<0$ и $y=\sqrt{3}>0$, па оттука добиваме

$$|z|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2,$$

и

$$\arg z=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)+\pi=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

Тригонометрискиот облик на z е

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Користејќи ја Моавровата формула добиваме

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}=2^{60}\left[\cos\left(60\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(60\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]=2^{60}\left[\cos(40\pi)+i\sin(40\pi)\right]=$$
$$=2^{60}\left[\cos(20\cdot2\pi)+i\sin(20\cdot2\pi)\right]=2^{60}(1+i\cdot0)=2^{60}.$$

б) Се остава на читателот.

в) Нека $w=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$. За експоненцијалниот облик на броителот и именителот имаме:

$$\arg(1-i)=\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right)=-\frac{\pi}{4},\quad 1-i=\sqrt{1+1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

$$\arg(1+i)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4},\quad 1+i=\sqrt{1+1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Сега за количникот добиваме $\frac{1-i}{1+i}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$, па $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}=\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{8}=e^{-4i\pi}$.

Алгебарскиот облик на добиениот број е

$$e^{-4i\pi}=\cos(-4\pi)+i\sin(-4\pi)=1+i\cdot0=1,\text{ т.е. } w=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}=1.$$

г) Нека $w=\left(\sqrt{3}-3i\right)^{6}$. Тогаш

$$\left|\sqrt{3}-3i\right|=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3},\text{ а } \arg\left(\sqrt{3}-3i\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{-3}{\sqrt{3}}\right)=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}.$$

Па,

$$\begin{aligned} w=\left(\sqrt{3}-3i\right)^{6} &= \left[2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{6}= \\ &= 2^{6}\sqrt{3}^{6}\left[\cos\left(-\frac{6\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{6\pi}{3}\right)\right]= \qquad . \\ &= 2^{6}3^{3}\left[\cos\left(2\pi\right)-i\sin\left(2\pi\right)\right]=2^{6}3^{3}=1728. \end{aligned}$$

Задача 3. Нека $z_n = x_n + iy_n = \left(1-i\sqrt{3}\right)^{n}$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Да се докаже равенството $x_{n-1}x_n + y_{n-1}y_n = 2^{2n-2}$.

Решение. Нека $z_n = x_n + iy_n = \left(1-i\sqrt{3}\right)^{n}$. Тогаш

$$\left|1-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2, \ \arg\left(1-i\sqrt{3}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

За степенот имаме

$$\begin{aligned} \left(1-i\sqrt{3}\right)^{n} &= \left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{n} = 2^{n}\left[\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right]= \\ &= 2^{n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]. \end{aligned}$$

За реалниот и имагинарниот дел на $z_n = x_n + iy_n = \left(1-i\sqrt{3}\right)^{n}$ добиваме $x_n = 2^{n}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$, $y_n = -2^{n}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

Ако ги замениме x_{n-1}, y_{n-1} и x_n, y_n во изразот $x_{n-1}x_n + y_{n-1}y_n$ добиваме

$$\begin{aligned} x_{n-1}x_n + y_{n-1}y_n &= 2^{n-1}\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{3}\right)2^{n}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+2^{n-1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{3}\right)2^{n}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)= \\ &= 2^{2n-1}\left[\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]= \\ &= 2^{2n-1}\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{3}-\frac{n\pi}{3}\right)=2^{2n-1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{n\pi}{3}\right)= \\ &= 2^{2n-1}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2^{2n-1}\cdot\frac{1}{2}=2^{2n-2}. \end{aligned}$$

Задача 4. Да се докаже:

а) $\left(1+\cos x + i\sin x\right)^{2n} = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{2n} e^{inx}$, каде $n \in \mathbb{N}$;

б) $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}\right)^{n} = \frac{1+i\operatorname{tg}nx}{1-i\operatorname{tg}nx}$, каде $n \in \mathbb{N}$.

Решение.

а) Нека $w = 1+\cos x + i\sin x$.

$$\left|1+\cos x+i\sin x\right|=\sqrt{\left(1+\cos x\right)^2+\sin^2 x}=\sqrt{1+2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}=$$
$$=\sqrt{2\left(1+\cos x\right)}=2\left|\cos\frac{x}{2}\right|.$$
,

Бидејќи $\operatorname{Re} w=1+\cos x\geq 0$ и $\operatorname{Im} w=\sin x$, имаме

$$\arg w=\arg\left(1+\cos x+i\sin x\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)=$$
$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}.$$
.

Конечно, добиваме

$$1+\cos x+i\sin x=2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)=2\left|\cos\frac{x}{2}\right|e^{i\frac{x}{2}},$$

$$\left(1+\cos x+i\sin x\right)^{2n}=2^{2n}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2n}e^{inx}.$$

б) Користејќи тригонометриски трансформации и Моавровата формула, добиваме:

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}\right)^n=\frac{\left(1+i\frac{\sin x}{\cos x}\right)^n}{\left(1-i\frac{\sin x}{\cos x}\right)^n}=\frac{\left(\cos x+i\sin x\right)^n}{\left(\cos x-i\sin x\right)^n}=\frac{\left(\cos x+i\sin x\right)^n}{\left(\cos\left(-x\right)+i\sin\left(-x\right)\right)^n}=$$
$$=\frac{\cos nx+i\sin nx}{\cos\left(-nx\right)+i\sin\left(-nx\right)}=\frac{\frac{\cos nx+i\sin nx}{\cos nx}}{\frac{\cos nx-i\sin nx}{\cos nx}}=\frac{1+i\frac{\sin nx}{\cos nx}}{1-i\frac{\sin nx}{\cos nx}}=$$
$$=\frac{1+i\operatorname{tg}nx}{1-i\operatorname{tg}nx}.$$

Задача 5. За кои природни броеви $n\in\mathbb{N}$ важи идентитетот: $\left(\sin x+i\cos x\right)^n=\sin nx+i\cos nx$?

Решение. Да претпоставиме дека $\left(\sin x+i\cos x\right)^n=\sin nx+i\cos nx$. За левата страна на идентитетот имаме

$$L=\left(\sin x+i\cos x\right)^n=\left[i\left(\cos x-i\sin x\right)\right]^n=i^n\left(\cos nx-i\sin nx\right).$$

Ако последниот израз го замениме во идентитетот, добиваме:

$$i^n\left(\cos nx-i\sin nx\right)=\sin nx+i\cos nx\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow i^n\left(\cos nx-i\sin nx\right)=i\left(\cos nx-i\sin nx\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow i^n=i.$$

Од последниот идентитет добиваме дека $n = 4k+1,\ k = 0,1,2,\ldots$.

Задача 6. Да се реши равенката $\prod_{k=1}^{n}(\cos kx + i\sin kx) = 1$.

Решение. Заради $\cos kx + i\sin kx = (\cos x + i\sin x)^k = (e^{ix})^k = e^{ikx}$, добиваме дека равенката $\prod_{k=1}^{n}(\cos kx + i\sin kx) = 1$ е еквивалентна со:

$$\prod_{k=1}^{n} e^{ikx} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{ix}\cdot e^{2ix}\cdot e^{3ix}\cdot\ldots\cdot e^{nix} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{ix\cdot(1+2+3+\ldots+n)} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{ix\cdot\frac{n(n+1)}{2}} = 1.$$

Бидејќи $1 = e^{i\cdot 2k\pi}$ за некој $k \in \mathbb{Z}$, добиваме

$$e^{ix\cdot\frac{n(n+1)}{2}} = e^{i\cdot 2k\pi},$$

односно треба да важи $ix\cdot\frac{n(n+1)}{2} = i\cdot 2k\pi$, за некој $k\in\mathbb{Z}$. Оттука, за x добиваме

$$x = \frac{4\pi}{n(n+1)}\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Задача 7. Да се пресметаат сумите:

а) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;

б) $\binom{n}{1}\sin x + \binom{n}{2}\sin 2x + \ldots + \binom{n}{n}\sin nx$;

в) $1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} + \ldots + \frac{\cos nx}{\sin^n x}$;

г) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$.

Решение.

а) Нека означиме со $A = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$ и $B = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$. Имаме

$$A + iB = (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \ldots + (\cos nx + i\sin nx) =$$
$$= e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{nix} = e^{ix}\left[1 + e^{ix} + \ldots + (e^{ix})^{n-1}\right] =$$
$$= e^{ix}\frac{1-(e^{ix})^n}{1-e^{ix}} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}.$$

Докажавме

$$A + iB = (\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx) + i(\sin x + \sin 2x + \ldots \sin nx) = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}. \qquad (1)$$

Од

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ и } e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta,$$

за тригонометриските функции имаме

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ и } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \qquad (*)$$

Следува $1-e^{ix} = e^{ix/2}\left(e^{-ix/2}-e^{ix/2}\right)\underset{(*)}{=}-2ie^{ix/2}\sin\frac{x}{2}.$

Последниот израз го заменуваме во (1), па имаме

$$A+iB = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{-2ie^{ix/2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{i}{i}\cdot\frac{e^{ix/2}\left(1-e^{inx}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = i\left[\frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right]=$$

$$= i\frac{\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}-\left[\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}} = \qquad .$$

$$= \frac{-\sin\frac{x}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} + i\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Конечно, за имагинарниот дел добиваме,

$$B = \frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}..$$

б) Нека означиме со

$$A = 1+\binom{n}{1}\cos x+\binom{n}{2}\cos 2x+\ldots+\binom{n}{n}\cos nx \text{ и}$$

$$B = \binom{n}{1}\sin x+\binom{n}{2}\sin 2x+\ldots+\binom{n}{n}\sin nx.$$

Тогаш

$$A+iB = 1+\binom{n}{1}\left[\cos x+i\sin x\right]+\binom{n}{2}\left[\cos 2x+i\sin 2x\right]+\ldots+\binom{n}{n}\left[\cos nx+i\sin nx\right].$$

Ако го искористиме идентитетот $\cos kx+i\sin kx = e^{ikx}$, добиваме

$$A+iB = 1+\binom{n}{1}e^{ix}+\binom{n}{2}e^{2ix}+\ldots+\binom{n}{n}e^{nix} = 1+\binom{n}{1}e^{ix}+\binom{n}{2}\left(e^{ix}\right)^2+\ldots+\binom{n}{n}\left(e^{ix}\right)^n.$$

Последниот израз, заради биномната формула, го добива обликот

$$A+iB = \left(1+e^{ix}\right)^n = \left(1+\cos x+i\sin x\right)^n = \left(2\cos^2\frac{x}{2}+i\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^n.$$

Со користење на Моавровата формула, имаме

$$A+iB = \left[2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)\right]^n = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right),$$

па $B = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}$.

в) Се остава на читателот.

(Упатство. $A=1+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}+...+\frac{\cos nx}{\sin^n x}$, $B=\frac{\sin x}{\sin x}+\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}+...+\frac{\sin nx}{\sin^n x}$)

г) Се остава на читателот.

Задача 8. Со решавање на равенката $z^5-1=0$ и нејзината еквивалентна равенка $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$ да се пресмета: $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}$.

Решение.

Од $z^5-1=0 \Leftrightarrow z^5=1 \Leftrightarrow z=\sqrt[5]{1} \Leftrightarrow z=\sqrt[5]{1^2+0^2}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{5}+i\sin\frac{0+2k\pi}{5}\right)$, каде $k=0,1,2,...,4$, имаме:

$$z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},\ k=0,1,2,...,4 \tag{1}$$

Од друга страна:

$$z^5-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z-1)(z^2+a_1z+a_2)(z^2+b_1z+b_2)=0$$

каде $(z^2+a_1z+a_2)(z^2+b_1z+b_2)=z^4+z^3+z^2+z+1$. Последниот израз е еквивалентен со

$$z^4+(a_1+b_1)z^3+(a_2+a_1b_1+b_2)z^2+(a_2b_1+a_1b_2)z+a_2b_2\equiv z^4+z^3+z^2+z+1.$$

Со изедначување на коефициентите пред истите степени, од последниот израз го добиваме системот:

$$\begin{cases} a_1+b_1=1 \\ a_2+a_1b_1+b_2=1 \\ a_2b_1+a_1b_2=1 \\ a_2b_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ a_2=1 \\ b_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ b_2=1 \end{cases}.$$

Па,

$$(z-1)\left(z^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1\right)\left(z^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1\right)=0.$$

Решенијата на последната равенка се:

$z_1=1$,

$$z_{2/3}=\frac{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-4}}{2}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{2}\cdot i,$$

$$z_{4/5}=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{2}\cdot i.$$

Решенијата z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 може да ги добиеме и од (1), т.е. од

$$z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},\ k=0,1,2,...,4.$$

За $k=0$, $z=\cos 0+i\sin 0=1$, за $k=1$, $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, за $k=2$, $z=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$, за $k=3$, $z=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$ и за $k=4$, $z=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$.

Аргументот на $\cos\frac{2\pi}{5}$ е $\varphi_0=\frac{2\pi}{5}=72^\circ$. За комплексниот број $z_0=x_0+iy_0$, што го има како аргумент овој агол, важи $x_0>0,\ y_0>0$. Од решенијата z_1,z_2,z_3,z_4,z_5, само бројот $z_4=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{2}\cdot i$ ги исполнува тие услови па,

$$\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{2}\cdot i$$

Од последното, за реалниот дел имаме:

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\quad \sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{2}.$$

Конечно, $\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2}=\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{8}$.

Задача 9. Ако $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$ и $z_0=\cos\theta+i\sin\theta$ е решение на равенката

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0,$$

да се докаже дека $a_1\sin\theta+a_2\sin 2\theta+...+a_n\sin n\theta=0$.

Решение. Со (1) ја означуваме дадената равенка. Нека $z_0=\cos\theta+i\sin\theta$ е решение на (1). Тогаш важи:

$$z_0{}^n+a_1z_0{}^{n-1}+a_2z_0{}^{n-2}+...+a_{n-1}z_0+a_n=0/:z_0{}^n$$

$$\Leftrightarrow 1+a_1z_0{}^{-1}+a_2z_0{}^{-2}+...+a_{n-1}z_0{}^{1-n}+a_nz_0{}^{-n}=0$$

$$\Leftrightarrow 1+a_1\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^{-1}+a_2\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^{-2}+...+a_n\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^{-n}=0$$

$$\Leftrightarrow 1+a_1\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)+a_2\left(\cos 2\theta-i\sin 2\theta\right)+...+a_n\left(\cos n\theta-i\sin n\theta\right)=0$$

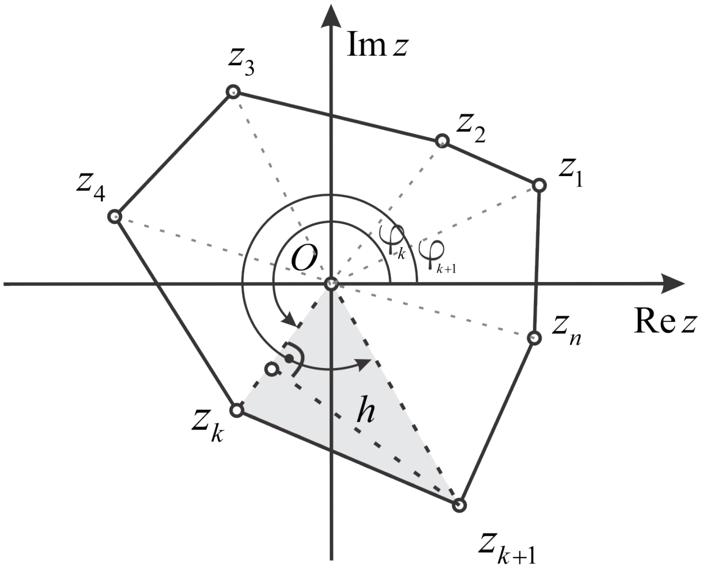
$$\Leftrightarrow 1+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\theta-i\sum_{k=1}^{n}a_k\sin k\theta=0$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sin k\theta=0.$$

Задача 10. Нека $0<\arg z_1<\arg z_2<...<\arg z_n<2\pi$. Да се докаже дека плоштината на многуаголникот со темиња во точките $z_1,z_2,...,z_n$ е дадена со формулата:

$$P=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}\,z_{k+1},\ z_{n+1}=z_1.$$

Решение.



Нека $\varphi_k = \arg z_k$ и $\varphi_{k+1} = \arg z_{k+1}$ и нека со P_k ја означиме плоштината на $\Delta O z_k z_{k+1}$. Јасно, $P = \sum_{k=1}^{n} P_k$. За плоштината на триаголникот P_k имаме:

$$\begin{aligned}
P_k &= \frac{1}{2}|z_k| \cdot h = \frac{1}{2}|z_k| \cdot |z_{k+1}| \sin\left(\varphi_{k+1} - \varphi_k\right) = \\
&= \frac{1}{2}|z_k| \cdot |z_{k+1}| \frac{e^{i(\varphi_{k+1}-\varphi_k)} - e^{-i(\varphi_{k+1}-\varphi_k)}}{2i} = \\
&= \frac{1}{2}|z_k| \cdot |z_{k+1}| \frac{e^{i\varphi_{k+1}} \cdot e^{-i\varphi_k} - e^{-i\varphi_{k+1}} \cdot e^{i\varphi_k}}{2i} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{|z_{k+1}| e^{i\varphi_{k+1}} \cdot |z_k| e^{-i\varphi_k} - |z_{k+1}| e^{-i\varphi_{k+1}} \cdot |z_k| e^{i\varphi_k}}{2i} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{z_{k+1} \cdot \overline{z_k} - \overline{z_{k+1}} \cdot z_k}{2i} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Im}\left(z_{k+1} \cdot \overline{z_k}\right)
\end{aligned}$$

Конечно, добиваме,

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Im}\left(z_{k+1} \cdot \overline{z_k}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k+1} \cdot \overline{z_k}\right).$$

Задача 11. Да се докажат формулите:

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}, \quad \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}.$$

Решение.

Од биномната формула имаме

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot i^k.$$

Бидејќи $i^{2k} = \left(i^2\right)^k = (-1)^k$, $i^{2k+1} = (-1)^k \cdot i$, добиваме

$$\left(1+i\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot i^k=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}+i\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\binom{n}{2k+1} \qquad (1)$$

Од друга страна,

$$\left|1+i\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\ \arg\left(1+i\right)=\operatorname{arctg}\left(1\right)=\frac{\pi}{4},$$

па следува

$$\left(1+i\right)^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \qquad (2)$$

Од (1) и (2), добиваме

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} \text{ и } \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Задача 12. Да се докаже дека

$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}=\left(z-\varepsilon\right)\left(z-\varepsilon^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(z-\varepsilon^{n-1}\right),$$

каде бројот ε е некој n-ти примитивен корен на 1. Користејќи го овој резултат да се докаже

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Решение.

Комплексниот број ε е n-ти примитивен корен на 1 ако $\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\ldots,\varepsilon^{n-1}\neq 1$ и $\varepsilon^n=1$.

Ја разгледуваме равенката

$$z^n-1=0 \qquad (1)$$

Таа е еквивалентна со

$$\left(z-1\right)\left(z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1\right)=0 \qquad (2)$$

Бидејќи $\varepsilon^n=1$, имаме дека ε е решение на (1).

Да ги најдеме сите корени на (1).

$$z^n=1\Leftrightarrow z=\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{1\cdot\left(\cos 0+i\sin 0\right)}$$

т.е. $z_k=1\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

Корените се:

$$z_0=1,\ z_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=\varepsilon,\ z_2=\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}=\varepsilon^2,\ldots,$$

$$z_{n-1}=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=\varepsilon^{n-1}.$$

Равенката (1) може да се запише во обликот

$$\left(z-z_0\right)\left(z-z_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(z-z_{n-1}\right)=0$$

т.е.

$$\left(z-1\right)\left(z-\varepsilon\right)\left(z-\varepsilon^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(z-\varepsilon^{n-1}\right)=0 \qquad (3)$$

Од (3) и (2), имаме

$$\left(z-1\right)\left(z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1\right)=\left(z-1\right)\left(z-\varepsilon\right)\left(z-\varepsilon^{2}\right)\cdot...\cdot\left(z-\varepsilon^{n-1}\right)$$

т.е.

$$z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1=\left(z-\varepsilon\right)\left(z-\varepsilon^{2}\right)\cdot...\cdot\left(z-\varepsilon^{n-1}\right) \qquad (4)$$

Да го покажеме вториот дел од задачата:

Со замена на $z=1,\ \varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ во (4), имаме

$$\underbrace{1+1+...+1}_{n}=\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\cos\frac{2\left(n-1\right)\pi}{n}-i\sin\frac{2\left(n-1\right)\pi}{n}\right),$$

Земајќи модул на двете страни во последното равенство, добиваме

$$n=\left|1-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right|\cdot...\cdot\left|1-\cos\frac{2\left(n-1\right)\pi}{n}-i\sin\frac{2\left(n-1\right)\pi}{n}\right|.$$

Сега, од

$$\left|1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right|=\sqrt{1-2\cos\frac{2k\pi}{n}+\cos^{2}\frac{2k\pi}{n}+\sin^{2}\frac{2k\pi}{n}}=$$

$$=\sqrt{2-2\cos\frac{2k\pi}{n}}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}=$$

$$=\sqrt{2\cdot2\cdot\sin^{2}\frac{k\pi}{n}}=2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|=2\sin\frac{k\pi}{n}$$

имаме

$$n=2\sin\frac{\pi}{n}\cdot...\cdot2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\cdot...\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot...\cdot\sin\frac{\left(n-1\right)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Задача 13. Нека $B,\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ и $A,C\in\mathbb{R}$. Да се докаже дека $A\left|\lambda\right|^{2}+B\lambda\overline{\mu}+\overline{B\lambda}\mu+C\left|\mu\right|^{2}$ е ненегативен за кои било вредности на λ и μ ако и само ако е исполнето $A\geq0,\ C\geq0,\ \left|B\right|^{2}\leq AC$.

Решение. Нека $A\geq0,\ C\geq0,\ \left|B\right|^{2}\leq AC$.

Ако $A=0$, тогаш од претпоставката $\left|B\right|^{2}\leq AC=0$, следува дека $B=0$, па изразот $A\left|\lambda\right|^{2}+B\lambda\overline{\mu}+\overline{B\lambda}\mu+C\left|\mu\right|^{2}$ добива облик $0\cdot\left|\lambda\right|^{2}+0\cdot\lambda\overline{\mu}+0\cdot\overline{\lambda}\mu+C\left|\mu\right|^{2}=C\left|\mu\right|^{2}\geq0$.

Ако $\mu=0$, тогаш изразот $A\left|\lambda\right|^{2}+B\lambda\overline{\mu}+B\overline{\lambda}\mu+C\left|\mu\right|^{2}$ добива облик $A\left|\lambda\right|^{2}+B\lambda\cdot0+B\overline{\lambda}\cdot0+C\left|0\right|^{2}=A\left|\lambda\right|^{2}\geq0$. Значи, може да претпоставиме дека $A\neq0$ и $\mu\neq0$. Имаме

$$A|\lambda|^2 + B\lambda\overline{\mu} + \overline{B}\,\overline{\lambda}\mu + C|\mu|^2 =$$

$$= |\mu|^2 A\left[\left(\frac{|\lambda|}{|\mu|}\right)^2 + \frac{B}{A}\frac{\lambda\cdot\overline{\mu}}{\mu\cdot\overline{\mu}} + \frac{\overline{B}}{A}\frac{\overline{\lambda}\cdot\mu}{\mu\cdot\overline{\mu}} + \frac{C}{A}\right] =$$

$$= |\mu|^2 A\left[\frac{\lambda}{\mu}\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\mu}} + \frac{B}{A}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\overline{B}}{A}\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\mu}} + \frac{C}{A}\right] =$$

$$= |\mu|^2 A\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\mu}} + \frac{B}{A}\right) + \frac{\overline{B}}{A}\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\mu}} + \frac{C}{A} + \frac{\overline{B}}{A}\frac{B}{A} - \frac{\overline{B}}{A}\frac{B}{A}\right] =$$

$$= |\mu|^2 A\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\mu}} + \frac{B}{A}\right) + \frac{\overline{B}}{A}\left(\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\mu}} + \frac{B}{A}\right) - \frac{|B|^2}{A^2} + \frac{C}{A}\right] =$$

$$= |\mu|^2 A\left[\left(\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\mu}} + \frac{B}{A}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\overline{B}}{A}\right) - \frac{|B|^2}{A^2} + \frac{C}{A}\right] =$$

$$= |\mu|^2 A\left[\overline{\left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\overline{B}}{A}\right)}\left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\overline{B}}{A}\right) - \frac{|B|^2}{A^2} + \frac{C}{A}\right] =$$

$$= |\mu|^2 A\left[\left|\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\overline{B}}{A}\right|^2 + \frac{AC - |B|^2}{A^2}\right] \geq 0,\ \forall\lambda,\ \mu\in\mathbb{C}.$$

Во продолжение ќе го докажеме обратното тврдење.

Нека важи условот $A|\lambda|^2 + B\lambda\overline{\mu} + \overline{B}\,\overline{\lambda}\mu + C|\mu|^2 \geq 0,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, и истиот ќе го означиме со (*). Специјално, за $\lambda = 1,\ \mu = 0$, (*) го добива обликот

$A\cdot 1 + B\cdot 0 + \overline{B}\cdot 0 + C\cdot 0 \geq 0$, т.е. $A \geq 0$ (1)

За $\lambda = 0,\ \mu = 1$, (*) го добива обликот

$A\cdot 0 + B\cdot 0 + \overline{B}\cdot 0 + C\cdot 1 \geq 0$, т.е. $C \geq 0$ (2)

За $\lambda = -\frac{\overline{B}}{A}\mu$, (*) го добива обликот

$$A\left|\frac{\overline{B}}{A}\mu\right|^2 - B\frac{\overline{B}}{A}\mu\overline{\mu} - \overline{B}\frac{B}{A}\overline{\mu}\mu + C|\mu|^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\left|\overline{B}\right|^2|\mu|^2\frac{1}{A^2} - |B|^2\frac{1}{A}|\mu|^2 - |B|^2\frac{1}{A}|\mu|^2 + C|\mu|^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{|B|^2|\mu|^2}\frac{1}{A} - \cancel{|B|^2\frac{1}{A}}|\mu|^2 - |B|^2\frac{1}{A}|\mu|^2 + C|\mu|^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C|\mu|^2 - |B|^2\frac{1}{A}|\mu|^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\mu|^2\left(C - |B|^2\frac{1}{A}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\mu|^2\left(\frac{AC - |B|^2}{A}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AC - |B|^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow AC \geq |B|^2. \qquad (3)$$

(1), (2) и (3) е тоа што требаше да се докаже.

Задача 14. Да се докаже дека за кои било комплексни броеви $z_1, z_2, \ldots, z_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in \mathbb{C}$, важи следното неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\eta_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2\right).$$

Решение. За произволни $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, важи следново неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda z_i + \mu\overline{\eta_i}\right|^2 \geq 0 \qquad (1)$$

Од (1) следуваат следниве еквиваленции.

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda z_i + \mu\overline{\eta_i}\right|^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda z_i + \mu\overline{\eta_i}\right)\left(\overline{\lambda}\,\overline{z_i} + \overline{\mu}\eta_i\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\overline{\lambda}z_i\overline{z_i} + \lambda\overline{\mu}z_i\eta_i + \overline{\lambda}\mu\overline{z_i}\,\overline{\eta_i} + \mu\overline{\mu}\eta_i\overline{\eta_i}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(|\lambda|^2|z_i|^2 + \lambda\overline{\mu}z_i\eta_i + \overline{\lambda}\mu\overline{(z_i\eta_i)} + |\mu|^2|\eta_i|^2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |\lambda|^2\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 + \lambda\overline{\mu}\sum_{i=1}^{n}z_i\eta_i + \overline{\lambda}\mu\left(\overline{\sum_{i=1}^{n}z_i\eta_i}\right) + |\mu|^2\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2 \geq 0,$$

Ако сега земаме $A = \sum_{i=1}^{n}|z_i|^2$, $C = \sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2$ и $B = \sum_{i=1}^{n}z_i\eta_i$, тогаш последното неравенство добива облик

$$A|\lambda|^2 + B\lambda\overline{\mu} + \overline{B}\,\overline{\lambda}\mu + C|\mu|^2 \geq 0, \ \forall\lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Од претходната задача добиваме дека $A \ge 0,\ C \ge 0,\ |B|^2 \le AC$. Изразот $|B|^2 \le AC$ е всушност $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\eta_i\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2\right)$, што и требаше да се докаже.

Задача 15. Нека $p > 1,\ q > 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и $z_i \in \mathbb{C}$, $\eta_i \in \mathbb{C}$, $i=\overline{1,n}$. Да се докаже дека

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\eta_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Решение. Ќе го користиме неравенството на Јенсен

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\ a,b \ge 0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \qquad (1)$$

Нека означиме $A=\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $B=\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Ако сега ги замениме $a=\frac{|z_i|}{A}$ и $b=\frac{|\eta_i|}{B}$ во (1), за секој $i \in \{1,2,\dots,n\}$, добиваме

$$\frac{|z_i|}{A}\frac{|\eta_i|}{B} \le \frac{|z_i|^p}{p}\cdot\frac{1}{A^p}+\frac{|\eta_i|^q}{q}\cdot\frac{1}{B^q} / \sum_{i=1}^{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AB}\sum_{i=1}^{n}|z_i||\eta_i| \le \frac{1}{pA^p}\sum_{i=1}^{n}|z_i|^p+\frac{1}{qB^q}\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AB}\sum_{i=1}^{n}|z_i||\eta_i| \le \frac{1}{pA^p}A^p+\frac{1}{qB^q}B^q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AB}\sum_{i=1}^{n}|z_i||\eta_i| \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

Од $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, последното неравенство добива облик

$$\frac{1}{AB}\sum_{i=1}^{n}|z_i||\eta_i| \le 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|z_i||\eta_i| \le AB.$$

односно $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\eta_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, што и требаше да се докаже.

Задача 16. Нека $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Да се докаже дека важи

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \le \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2}.$$

Решение. Ако во неравенството $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\eta_i\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2\right)$ ги замениме вредностите $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $\eta_1=\eta_2=\dots=\eta_n=1$, добиваме:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}1^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2 \le n\sum_{i=1}^{n}\left|z_i\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \le \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\left|z_i\right|^2}\ .$$

Задача 17. Нека $\omega_k \in \mathbb{C}$, $k=\overline{1,n}$. Да се докаже дека важи

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\left(1+\omega_k\right)-1\right| \le \prod_{k=1}^{n}\left(1+\left|\omega_k\right|\right)-1 \qquad (1)$$

Решение. Ќе докажеме со математичка индукција.
За $n=1$:

$$\left|\left(1+\omega_1\right)-1\right| \le \left(1+\left|\omega_1\right|\right)-1$$

$$\Leftrightarrow \left|\omega_1\right| \le \left|\omega_1\right| \text{ што е точно.}$$

Ако означиме со $p_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\omega_k\right)$ и $p_n{*}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left|\omega_k\right|\right)$, тогаш неравенството (1) го добива обликот

$$\left|p_n-1\right| \le p_n{*}-1 \qquad (1')$$

Да претпоставиме дека (1), односно (1′) важи за $n=m$, т.е. е точно

$$\left|\prod_{k=1}^{m}\left(1+\omega_k\right)-1\right| \le \prod_{k=1}^{m}\left(1+\left|\omega_k\right|\right)-1 \text{ односно } \left|p_m-1\right| \le p_m{*}-1\,.$$

Треба да докажеме дека (1′) важи за $n=m+1$, т.е. дека е точно $\left|p_{m+1}-1\right| \le p_{m+1}{*}-1$.

Од $p_{m+1}=\prod_{k=1}^{m+1}\left(1+\omega_k\right)=\left[\prod_{k=1}^{m}\left(1+\omega_k\right)\right]\left(1+\omega_{m+1}\right)=p_m\left(1+\omega_{m+1}\right)$, имаме

$$p_{m+1}-1=p_m(1+\omega_{m+1})-1=p_m(1+\omega_{m+1})-1+\omega_{m+1}-\omega_{m+1}=\left(p_m-1\right)(1+\omega_{m+1})+\omega_{m+1},$$

т.е. докажавме дека важи

$$p_{m+1}-1=\left(p_m-1\right)(1+\omega_{m+1})+\omega_{m+1}\,.$$

Од последното следува

$$\begin{aligned}
\left|p_{m+1}-1\right| &= \left|\left(p_m-1\right)(1+\omega_{m+1})+\omega_{m+1}\right| \underset{\text{неравенство на }\Delta}{\le} \\
&\le \left|p_m-1\right|\left|1+\omega_{m+1}\right|+\left|\omega_{m+1}\right| \underset{\text{индуктивна претпоставка}}{\le} \\
&\le \left(p_m{*}-1\right)\left|1+\omega_{m+1}\right|+\left|\omega_{m+1}\right| \underset{\text{неравенство на }\Delta}{\le} \\
&\le \left(p_m{*}-1\right)\left(1+\left|\omega_{m+1}\right|\right)+\left|\omega_{m+1}\right| = \\
&= p_m{*}+p_m{*}\left|\omega_{m+1}\right|-1-\cancel{\left|\omega_{m+1}\right|}+\cancel{\left|\omega_{m+1}\right|} = \\
&= p_m{*}\left(1+\left|\omega_{m+1}\right|\right)-1=p_{m+1}{*}-1.
\end{aligned}$$

Согласно принципот на математичка индукција, (1′) односно (1) важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

Задача 18. Нека $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ и $p\ge 1$. Да се докаже дека важи

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|\right)^{p} \le n^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{p}\right).$$

Решение. Ако во неравенството $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\eta_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$ од задача 15 ставаме $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ и $\eta_i = \frac{1}{n},\ i = \overline{1,n}$, добиваме

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\eta_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^{q}\right)^{\frac{1}{q}},\ p>1,\ q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left|z_i\cdot\frac{1}{n}\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}|z_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(n\frac{1}{n^{q}}\right)^{\frac{1}{q}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n^{1-\frac{1}{q}}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\underset{1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i| \le \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|\right)^{p} \le n^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{p}\right).$$

3. Низи

Низата од комплексни броеви $\{z_n\}$ конвергира кон $A \in \mathbb{C}$ ако важи

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})$ така што $|z_n - A| < \varepsilon$, $\forall n \ge n_\varepsilon$

Задача 1. Нека е дадена низа од комплексни броеви $\{z_n\}$. Нека $x_n = \operatorname{Re} z_n$, $y_n = \operatorname{Im} z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже дека низата $\{z_n\}$ конвергира кон $A \in \mathbb{C}$, ако и само ако низите $\{x_n\}, \{y_n\}$ конвергираат кон $\operatorname{Re} A, \operatorname{Im} A$, соодветно.

Решение. Нека $\{z_n\}$ конвергира кон $A \in \mathbb{C}$. Тогаш важи

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})$ така да $|z_n - A| < \varepsilon$, $\forall n \ge n_\varepsilon$. (1)

Од $A \in \mathbb{C}$, следува дека $A = a_1 + ia_2$, $a_1 = \operatorname{Re} A$, $a_2 = \operatorname{Im} A$.

Ќе покажеме дека $\lim_{n\to\infty} x_n = a_1$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Тогаш постои $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ така што важи (1). Ќе ја разгледаме разликата $|x_n - a_1|$.

$$|x_n - a_1| = |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} A| = |\operatorname{Re}(z_n - A)| \le |z_n - A| \underset{(1)}{<} \varepsilon, \quad \forall n \ge n_\varepsilon .$$

Значи, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_1 = \operatorname{Re} A$.

Слично се докажува дека $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a_2 = \operatorname{Im} A$.

Обратно, нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_1 = \operatorname{Re} A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a_2 = \operatorname{Im} z_n$. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Од $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_1 = \operatorname{Re} A$ имаме дека

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N}) \text{ така да } |x_n - a_1| < \varepsilon/2, \ \forall n \ge n_1. \tag{2}$$

Од $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a_2 = \operatorname{Im} A$ имаме дека

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N}) \text{ така да } |y_n - a_2| < \varepsilon/2, \ \forall n \ge n_2. \tag{3}$$

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш добиваме дека за $n \ge n_0$ важи

$$|z_n - A| = |x_n + iy_n - a_1 - ia_2| = |x_n - a_1 + i(y_n - a_2)| \le$$

$$\le |x_n - a_1| + |i||y_n - a_2| = |x_n - a_1| + |y_n - a_2| \underset{(2),(3)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

т.е. важи

$$|z_n - A| < \varepsilon \text{ за сите } n \ge n_0, \text{ односно } \lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

Задача 2. Нека $\{z_n\}$ е низа од комплексни броеви така што $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. Да се докаже дека важи $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |A|$. Дали важи обратното?

Решение. Прво, ќе докажеме дека важи

$$\big||z_n| - |A|\big| \le |z_n - A|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{*}$$

За $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$|z_n| = |z_n - A + A| \le |z_n - A| + |A| \Rightarrow |z_n| - |A| \le |z_n - A| \tag{1}$$

$$|A| = |A - z_n + z_n| \le |A - z_n| + |z_n| \Rightarrow |A| - |z_n| \le |A - z_n| = |z_n - A| \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува $\big||z_n| - |A|\big| \le |z_n - A|$.

Нека $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ и $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Тогаш постои $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ така што важи $|z_n - A| < \varepsilon$, за сите $n \ge n_\varepsilon$.

Со користење на последното и (*) добиваме дека за сите $n \ge n_\varepsilon$, важи $\big||z_n| - |A|\big| \le |z_n - A| < \varepsilon$, односно $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |A|$.

Обратното не важи! На пример, ако ја земаме низата $z_n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases}$ имаме

$$|z_n| = 1 \text{ за сите } n \in \mathbb{N} \text{ и } \lim_{n\to\infty} |z_n| = 1 \text{ но } \lim_{n\to\infty} z_n \text{ не постои.}$$

Задача 3. Да се докаже дека ако $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$, тогаш важи $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Решение. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Тогаш

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ така да } \big||z_n| - 0\big| < \varepsilon, \ \forall n \ge n_0 \tag{*}$$

Тогаш за сите $n \geq n_0$, имаме $|z_n - 0| = |z_n| = \|z_n\| = \||z_n| - 0| < \varepsilon$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Задача 4. Да се испита за кои вредности на комплексниот број a, дадената низа конвергира?

а) $\{a^n\}$; б) $\left\{\dfrac{a^n}{n}\right\}$; в) $\{na^n\}$; г) $\left\{\dfrac{a^n}{1+a^n}\right\}$.

Решение.

а) Нека $a_n = a^n$, $a \in \mathbb{C}$.

i) За $|a| < 1$ имаме

$$|a_n| = |a|^n \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ бидејќи } |a| < 1.$$

Значи $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, па од Задача 3., следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, |a| < 1$, односно $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0, |a| < 1$.

ii) Нека $|a| > 1$. Тогаш $\left|\dfrac{1}{a}\right| < 1$, па заради i), имаме $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = 0$ т.е. $\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^n} = 0$.

Последното е можно само ако $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.

iii) Ако $|a| = 1$, тогаш $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$ па $a^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. За лимесот имаме

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \lim_{n\to\infty}\cos n\varphi + i\lim_{n\to\infty}\sin n\varphi.$$

За $\varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ лимесите $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\varphi, \lim\limits_{n\to\infty}\sin n\varphi$ не постојат, па за $\varphi \neq 2k\pi$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ не постои. За $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ имаме $a = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.

б) Нека $a_n = \dfrac{a^n}{n} = x_n + iy_n$ и $a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, каде $\rho = |a|$, $\varphi = \arg a$. Имаме $a^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $a_n = \rho^n\left(\dfrac{\cos n\varphi}{n} + i\dfrac{\sin n\varphi}{n}\right)$, па $x_n = \rho^n\dfrac{\cos n\varphi}{n}$, $y_n = \rho^n\dfrac{\sin n\varphi}{n}$.

За $\rho < 1$, имаме:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\rho^n \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos n\varphi}{n}\right) = 0\cdot 0 = 0,\ \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\rho^n \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin n\varphi}{n}\right) = 0\cdot 0 = 0.$$

Следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

За $\rho = 1$, имаме:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}1^n \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos n\varphi}{n}\right) = 1\cdot 0 = 0,\ \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}1^n \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin n\varphi}{n}\right) = 1\cdot 0 = 0,$$

па и во овој случај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

За $\rho > 1$, имаме:

За низата со општ член $b_n = a_n^{-1} = \dfrac{n}{a^n}$, важи $|a| > 1$, $\dfrac{1}{|a|} < 1$ и $|b_n| = \dfrac{n}{|a|^n}$.

Имаме:

$$\frac{n}{|a|^n}=\frac{n}{\left(1+|a|-1\right)^n}$$

$$=\frac{n}{1+\underbrace{n\left(|a|-1\right)}_{>0}+\frac{n(n-1)}{2}\left(|a|-1\right)^2+\ldots+\underbrace{\binom{n}{k}\left(|a|-1\right)^k}_{>0}+\ldots+\underbrace{\left(|a|-1\right)^n}_{>0}}.$$

$$<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\left(|a|-1\right)^2}=\frac{1}{n-1}\frac{2}{\left(|a|-1\right)^2}=\frac{M}{n-1}$$

Следува дека:

$$0\le\frac{n}{|a|^n}\le\frac{M}{n-1},\text{ каде } n\in\mathbb{N},\ M=\frac{2}{\left(|a|-1\right)^2}>0.$$

Па за лимесот добиваме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|a|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n-1}=0.$$

Заклучуваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, а $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

в) Се остава на читателот.

г) Нека означиме $c_n=\dfrac{a^n}{1+a^n}$. Оттука, $c_n=\dfrac{a^n+1-1}{1+a^n}=1-\dfrac{1}{1+a^n}$. Од а), имаме:

i) Ако $|a|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=1-1=0$.

ii) Ако $|a|=1\Rightarrow a=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

За $\varphi=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

За $\varphi\neq0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n$ не постои $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ не постои.

iii) Ако $|a|>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=1-0=1$.

Задача 5. Да се докаже дека ако $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=r$, $r>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\varphi$ тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=re^{i\varphi}$.

Решение. Нека $z_n=u_n+iv_n=|z_n|\left(\cos(\arg z_n)+i\sin(\arg z_n)\right)$, т.е. $u_n=|z_n|\cos(\arg z_n)$, $v_n=|z_n|\sin(\arg z_n)$. Од $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=r$, $r>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\varphi$ и од непрекинатост на функциите $\sin x,\ \cos x$ имаме дека:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}|z_n|\lim_{n\to\infty}\cos(\arg z_n)=r\cdot\cos(\lim_{n\to\infty}\arg z_n)=r\cos\varphi,$$

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}|z_n|\lim_{n\to\infty}\sin(\arg z_n)=r\cdot\sin(\lim_{n\to\infty}\arg z_n)=r\sin\varphi.$$

Следствено, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_n+i\lim\limits_{n\to\infty}v_n=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=re^{i\varphi}$.

Задача 6. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A\neq\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=B\neq\infty$. Да се докаже дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1\eta_n+z_2\eta_{n-1}+\ldots+z_n\eta_1}{n}=AB\,.$$

Решение. Важи следната оценка

$$L=\left|\frac{z_1\eta_n+z_2\eta_{n-1}+\ldots+z_n\eta_1}{n}-AB\right|=\frac{1}{n}\left|z_1\eta_n+z_2\eta_{n-1}+\ldots+z_n\eta_1-nAB\right|=$$

$$=\frac{1}{n}\left|\left(z_1\eta_n-AB\right)+\left(z_2\eta_{n-1}-AB\right)+\ldots+\left(z_n\eta_1-AB\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{n}\left|\left(z_1\eta_n-z_1B+z_1B-AB\right)+\left(z_2\eta_{n-1}-z_2B+z_2B-AB\right)+\ldots+\left(z_n\eta_1-z_nB+z_nB-AB\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{n}\Big[\left|z_1\left(\eta_n-B\right)\right|+\left|B\left(z_1-A\right)\right|+\left|z_2\left(\eta_{n-1}-B\right)\right|+\left|B\left(z_2-A\right)\right|+\ldots+\left|z_n\left(\eta_1-B\right)\right|+\left|B\left(z_n-A\right)\right|\Big]=$$

$$=\frac{1}{n}\left(|z_1||\eta_n-B|+|B||z_1-A|+|z_2||\eta_{n-1}-B|+|B||z_2-A|+\ldots+|z_n||\eta_1-B|+|B||z_n-A|\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(|z_1||\eta_n-B|+|z_2||\eta_{n-1}-B|+\ldots+|z_n||\eta_1-B|+|B||z_1-A|+|B||z_2-A|+\ldots+|B||z_n-A|\right).$$

Од $B\neq\infty$ следува дека $|B|<\infty$. Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A\neq\infty$ следува дека низата $\{z_n\}$ е ограничена, па постои $C>0$ така што $|z_n|<C$ за сите $n\in\mathbb{N}$. Добиваме:

$$L\le\frac{1}{n}\left(C\sum_{k=1}^{n}|\eta_k-B|+|B|\sum_{k=1}^{n}|z_k-B|\right)\underset{D=\max\{|B|,C\}}{\le}$$

$$\le\frac{D}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k-B|+\sum_{k=1}^{n}|z_k-B|\right).\qquad(1)$$

Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран. Од $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A\neq\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=B\neq\infty$ постојат $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ такви што $|z_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{4D}$, за сите $n\ge n_1$ и $|\eta_n-B|<\dfrac{\varepsilon}{4D}$, за сите $n\ge n_2$. Нека $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ и $n\ge n_0$. Имаме

$$L=\left|\frac{z_1\eta_n+z_2\eta_{n-1}+\ldots+z_n\eta_1}{n}-AB\right|\underset{(1)}{\le}\frac{D}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k-B|+\sum_{k=1}^{n}|z_k-B|\right)=$$

$$=\frac{D}{n}\left[\sum_{k=1}^{n_0}\left(|\eta_k-B|+|z_k-B|\right)+\sum_{k=n_0+1}^{n}\left(|\eta_k-B|+|z_k-B|\right)\right]=L_1\,.$$

Нека $R=\max\limits_{1\le k\le n_0}\left\{|\eta_k-B|,|z_k-B|\right\}$. Тогаш

$$L\le L_1\le\frac{D}{n}\left\{2Rn_0+2\frac{\varepsilon}{4D}(n-n_0)\right\}=\frac{D}{n}2Rn_0+\frac{\varepsilon}{2n}\left(n-n_0\right).$$

Ќе најдеме $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ такво да важи $\dfrac{D}{n}2Rn_0+\dfrac{\varepsilon}{2n}\left(n-n_0\right)<\varepsilon$, за сите $n\ge n_\varepsilon$. Последниот израз е еквивалентен со:

$$\frac{D}{n}2Rn_0-\frac{n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n}\left(2DRn_0-\frac{\varepsilon}{2}n_0\right)<\frac{\varepsilon}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{2\left(2DRn_0 - \frac{\varepsilon}{2}n_0\right)}{\varepsilon}.$$

Земајќи $n_\varepsilon = \left[\frac{2\left(2DRn_0 - \frac{\varepsilon}{2}n_0\right)}{\varepsilon}\right] + 1$, за сите $n \ge n_\varepsilon$ важи $\left|\frac{z_1\eta_n + z_2\eta_{n-1} + \ldots + z_n\eta_1}{n} - AB\right| < \varepsilon$ што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_1\eta_n + z_2\eta_{n-1} + \ldots + z_n\eta_1}{n} = AB$.

Задача 7. Нека $a_n \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. Да се докаже дека важи

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{m} n|a_n|}{m} = 0.$$

Решение. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Од $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, следува дека

$$(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \text{ така што } |na_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \ge n_\varepsilon.$$

т.е.

$$n|a_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \ge n_\varepsilon \qquad (1)$$

Ја разгледуваме разликата

$$L = \left|\frac{\sum\limits_{n=1}^{m} n|a_n|}{m} - 0\right| = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} n|a_n| = \frac{1}{m}\left[\sum_{n=1}^{n_\varepsilon} n|a_n| + \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{m} n|a_n|\right].$$

Земајќи $B = \max\limits_{1\le k\le n_\varepsilon}\{n|a_n|\}$, за $n \ge n_\varepsilon$ важи

$$L \le \frac{1}{m}\left[Bn_\varepsilon + (m - n_\varepsilon)\frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Бараме $m_0 \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{m}\left[Bn_\varepsilon + (m - n_\varepsilon)\frac{\varepsilon}{2}\right] < \varepsilon$, за сите $m \ge m_0$. Последното е еквивалентно со:

$$\frac{1}{m}Bn_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{n_\varepsilon}{m}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m}\left(Bn_\varepsilon - \frac{\varepsilon n_\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow m > \frac{2}{\varepsilon}\left(Bn_\varepsilon - \frac{\varepsilon n_\varepsilon}{2}\right).$$

Избираме $m_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\left(Bn_\varepsilon - \frac{\varepsilon n_\varepsilon}{2}\right)\right] + 1$, и тогаш за сите $m \geq m_0$ важи $L = \left|\frac{\sum\limits_{n=1}^{m} n|a_n|}{m} - 0\right| < \varepsilon$,

па $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{m} n|a_n|}{m} = 0$.

4. Редови

Редот од комплексни броеви

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

конвергира ако $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, каде $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ е n-та парцијална сума на редот (1).

Во спротивно, редот (1) дивергира.

Задача 1. Да се испита конвергенција на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin(in)}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$.

Решение.

а) За низата $\{S_n\}$, каде $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{i^k}{k}$, имаме

$$S_n = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \ldots + \frac{(i)^n}{n}$$

i) За $n = 4k+1$, имаме

$$\begin{aligned} S_{4k+1} &= i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \ldots + \frac{1}{4k} + \frac{i}{4k+1} = \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{4k}\right) + \left(i - \frac{i}{3} + \frac{i}{5} - \frac{i}{7} + \ldots + \frac{i}{4k+1}\right)' \end{aligned}$$

ii) За $n = 4k+2$, имаме

$$\begin{aligned} S_{4k+2} &= i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \ldots + \frac{i}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} = \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots - \frac{1}{4k+2}\right) + \left(i - \frac{i}{3} + \frac{i}{5} - \frac{i}{7} + \ldots + \frac{i}{4k+1}\right)' \end{aligned}$$

iii) За $n = 4k+3$, имаме

$$\begin{aligned} S_{4k+3} &= i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \ldots - \frac{1}{4k+2} - \frac{i}{4k+3} = \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots - \frac{1}{4k+2}\right) + \left(i - \frac{i}{3} + \frac{i}{5} - \frac{i}{7} + \ldots - \frac{i}{4k+3}\right)' \end{aligned}$$

iv) За $n = 4k+4$, имаме

$$S_{4k}=i-\frac{1}{2}-\frac{i}{3}+\frac{1}{4}+\frac{i}{5}-\ldots-\frac{i}{4k-1}+\frac{1}{4k}=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{4k}\right)+\left(i-\frac{i}{3}+\frac{i}{5}-\frac{i}{7}+\ldots-\frac{i}{4k-1}\right).$$

Од $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}$.

б) Од

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z\,,\ e^{-iz}=\cos z-i\sin z$$

следува дека

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Имаме,

$$\frac{\cos(in)}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\left[e^{i\cdot in}+e^{-i\cdot in}\right]=\frac{1}{2^{n+1}}\left[e^{-n}+e^{n}\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2e}\right)^n+\left(\frac{e}{2}\right)^n\right],$$

па

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n\right].$$

Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n$, конвергира бидејќи $\frac{1}{2e}<1$, а редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n$ дивергира од $\frac{e}{2}>1$. Следува, нивниот збир $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}=\frac{1}{2}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n\right]$ е дивергентен ред.

в) Нека $a_n=\frac{n\sin(in)}{3^n}$. Од

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)\sin(i(n+1))}{3^{n+1}}}{\frac{n\sin(in)}{3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{|\sin(i(n+1))|}{|\sin(in)|}.$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\left(i(n+1)\right)\right|}{\left|\sin\left(in\right)\right|}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left|e^{i\cdot i(n+1)}-e^{-i\cdot i(n+1)}\right|}{\left|e^{i\cdot in}-e^{-i\cdot in}\right|}\cdot\frac{|2i|}{|2i|}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left|e^{-(n+1)}-e^{n+1}\right|}{\left|e^{-n}-e^{n}\right|}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|\frac{1}{e^{n+1}}-e^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{e^{n}}-e^{n}\right|}\right)\underset{\frac{1}{e^{\alpha}}<e^{\alpha},\alpha\geq 1}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{n+1}-\frac{1}{e^{n+1}}}{e^{n}-\frac{1}{e^{n}}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{e^{2(n+1)}-1}{e^{n+1}}}{\frac{e^{2n}-1}{e^{n}}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{2(n+1)}-1}{e\left(e^{2n}-1\right)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{2}\cdot e^{2n}-e^{2}+e^{2}-1}{e\left(e^{2n}-1\right)}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{2}\left(e^{2n}-1\right)+e^{2}-1}{e\left(e^{2n}-1\right)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[e+\frac{e^{2}-1}{e\left(e^{2n}-1\right)}\right]=e,$$

добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\left|\sin\left(i(n+1)\right)\right|}{\left|\sin\left(in\right)\right|}\right)=\frac{e}{3}<1$. Од критериумот на Даламбер следува дека редот апсолутно конвергира т.е. конвергира.

г) Се остава на читателот.

д) Од $e^{in}=\cos n+i\sin n$ следува $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n+i\sin n}{n}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}+i\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$.

Според критериумот на Дирихле, редовите $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k},\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}$ конвергираат бидејќи $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k,\ \sum\limits_{k=1}^{n}\sin k$ се ограничени и низата $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотоно тежи кон нула. Заклучуваме дека и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n}$ конвергира.

Задача 2. Нека $z_n=x_n+iy_n$ се такви што $x_n\geq 0$ за сите $n\in\mathbb{N}$ и нека редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n^{\,2}$ конвергираат. Да се докаже дека $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|^2$ конвергира.

Решение: Од $z_n=x_n+iy_n$ следува дека , $z_n^{\,2}=x_n^{\,2}-y_n^{\,2}+2ix_ny_n$, па за модулот имаме $|z_n|^2=\sqrt{\left(x_n^{\,2}-y_n^{\,2}\right)^2+\left(2x_ny_n\right)^2}=x_n^{\,2}+y_n^{\,2}$.

Ќе докажеме дека $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\,2}$ конвергира. Нека со S_n ја означиме n-та парцијална сума на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\,2}$. За секој $n\in\mathbb{N}$ е точно

$$S_{n+1}=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_n^{\,2}+x_{n+1}^{\,2}>x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_n^{\,2}=S_n,$$

т.е.

$$\{S_n\} \text{ е монотоно растечка низа} \tag{1}$$

Од друга страна,

$$S_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \underset{x_i>0}{<} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2\sum_{\substack{i\neq j\\ 1\leq i,\, j\leq n}} x_i x_j = \left(x_1 + \ldots + x_n\right)^2,$$

па добивме дека

$$S_n \leq \left(x_1 + \ldots + x_n\right)^2 \tag{2}$$

Од $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ конвергира, следува дека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ конвергира, па низата со општ член $S_n' = x_1 + \ldots + x_n$ е ограничена како конвергентна позитивна низа, односно

$$\left(\exists M > 0\right) S_n' = x_1 + \ldots + x_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Од (2) и (3) следува

$$S_n \leq \left(x_1 + \ldots + x_n\right)^2 = \left(S_n'\right)^2 \leq M^2, \text{ односно}$$

$$\{S_n\} \text{ е ограничена низа} \tag{4}$$

Од (1) и (4) добиваме дека $\{S_n\}$ е конвергентна низа, па заклучуваме дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ конвергира} \tag{5}$$

Од конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$, следува дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(z_n^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^2 - y_n^2\right) \text{ конвергира} \tag{6}$$

Од $x_n^2 + y_n^2 = 2x_n^2 - \left(x_n^2 - y_n^2\right)$, (5) и (6) следува дека и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x_n^2 + y_n^2\right)$ конвергира.

Задача 3. Нека комплексниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ е конвергентен и нека низата од реални броеви $\{a_n\}$ монотоно опаѓа и конвергира. Да се докаже дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ конвергира.

Решение. Ќе го користиме Кошиевот критериум за конвергенција:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ конвергира акко } \left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\right)\left(\forall n \geq n_\varepsilon\right)\left(\forall p \in \mathbb{N}\right), \ \left|\sum_{k=n}^{n+p} z_k\right| < \varepsilon .$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Точно е

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k z_k\right| &= \left|\sum_{k=n}^{n+p} \left[\left(a_k z_k - a_{k+1} z_k\right) + a_{k+1} z_k\right]\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \left|a_k z_k - a_{k+1} z_k\right| + \sum_{k=n}^{n+p} \left|a_{k+1}\right|\left|z_k\right| = \\ &= \sum_{k=n}^{n+p} \left|z_k\right|\left|a_k - a_{k+1}\right| + \sum_{k=n}^{n+p} \left|a_{k+1}\right|\left|z_k\right| \underset{\{a_k\}\downarrow}{=} \sum_{k=n}^{n+p} \left|z_k\right|\left(a_k - a_{k+1}\right) + \sum_{k=n}^{n+p} \left|a_{k+1}\right|\left|z_k\right|.\end{aligned} \tag{*}$$

Од тоа што $\{a_n\}$ конвергира, следува дека $\{a_n\}$ е ограничена, па постои $S_1 > 0$ така што $|a_n| \leq S_1$, за сите $n \in \mathbb{N}$. Од (*) имаме,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k z_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |z_k| \left(a_k - a_{k+1}\right) + S_1 \sum_{k=n}^{n+p} |z_k|. \qquad (**)$$

Од конвергентноста на редот $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, следува дека $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ па низата $\{z_n\}$ е ограничена т.е. постои $S_2 > 0$ така да $|z_n| \leq S_2$ за сите $n \in \mathbb{N}$. Од (**) следува

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k z_k\right| &\leq S_2 \sum_{k=n}^{n+p} \left(a_k - a_{k+1}\right) + S_1 \sum_{k=n}^{n+p} |z_k| = \\ &= S_2 \left(a_n - \cancel{a_{n+1}} + \cancel{a_{n+1}} - \cancel{a_{n+2}} + \ldots + \cancel{a_{n+p}} - a_{n+p+1}\right) + S_1 \sum_{k=n}^{n+p} |z_k| = \\ &= S_2 \left(a_n - a_{n+p+1}\right) + S_1 \sum_{k=n}^{n+p} |z_k|.\end{aligned}$$

(***)

Од Кошиевиот критериум за конвергенција на низата $\{a_n\}$ и на редот $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, следува дека:

за $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2S_2} > 0$, $\left(\exists n_1 \in \mathbb{N}\right)\left(\forall n \geq n_1\right)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, важи $\left|a_n - a_{n+p+1}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2S_2}$, (1)

за $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2S_1} > 0$, $\left(\exists n_2 \in \mathbb{N}\right)\left(\forall n \geq n_2\right)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, важи $\sum_{k=n}^{n+p} |z_k| < \dfrac{\varepsilon}{2S_1}$. (2)

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш, со користење на (***), (1) и (2), за $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$, добиваме

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k z_k\right| \leq S_2 \left(a_n - a_{n+p+1}\right) + S_1 \sum_{k=n}^{n+p} |z_k| \leq S_2 \frac{\varepsilon}{2S_2} + S_1 \frac{\varepsilon}{2S_1} = \varepsilon .$$

Следствено, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ конвергира.

5. Елементарни комплексни функции

Задача 1. Да се докаже дека $|\sin z| = |\sin x + \sin(iy)|$, за $z = x + iy$.

Решение. Од $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ имаме дека

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right] = \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}\right) = \frac{1}{2i}\left[e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)\right] =\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\left(e^{-y}-e^{y}\right)\cos x+i\left(e^{-y}+e^{y}\right)\sin x\right)=$$
$$=i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x+\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\sin x=$$
$$=\sin x\cdot\operatorname{ch} y+i\cos x\cdot\operatorname{sh} y .$$

Следува дека $\left|\sin z\right|=\left|\sin x\cdot\operatorname{ch} y+i\cos x\cdot\operatorname{sh} y\right|=\sqrt{\sin^2 x\cdot\operatorname{ch}^2 y+\cos^2 x\cdot\operatorname{sh}^2 y}$.

Од $\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y=1$, имаме

$$\left|\sin z\right|=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 x\cdot\operatorname{sh}^2 y+\cos^2 x\cdot\operatorname{sh}^2 y}=\sqrt{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y} \qquad (1)$$

Од друга страна,

$$\sin iy=\frac{1}{2i}\left[e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}\right]=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=i\cdot\operatorname{sh} y,$$

па

$$\left|\sin x+\sin iy\right|=\left|\sin x+i\cdot\operatorname{sh} y\right|=\sqrt{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\left|\sin z\right|=\left|\sin x+\sin(iy)\right|$, што и требаше да се докаже.

Задача 2. Да се докаже дека $\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$, ако $z=x+iy$.

Решение. Нека $z=x+iy$.

$$\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)=\frac{1}{2}\left[e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^{y}\right)=\frac{1}{2}\left[e^{-y}\left(\cos x+i\sin x\right)+e^{y}\left(\cos x-i\sin x\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(e^{y}+e^{-y}\right)\cos x+i\left(e^{-y}-e^{y}\right)\sin x\right]=\operatorname{ch} y\cdot\cos x-i\operatorname{sh} y\cdot\sin x,$$

т.е.

$$\cos z=\operatorname{ch} y\cdot\cos x-i\operatorname{sh} y\cdot\sin x \qquad (1)$$

Од друга страна,

$$\cos\bar{z}=\frac{1}{2}\left[e^{i(x-iy)}+e^{-i(x-iy)}\right]=\frac{1}{2}\left(e^{ix}e^{y}+e^{-ix}e^{-y}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^{y}\left(\cos x+i\sin x\right)+e^{-y}\left(\cos x-i\sin x\right)\right]=$$
$$=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x+i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sin x=\operatorname{ch} y\cdot\cos x+i\operatorname{sh} y\cdot\sin x,$$

па

$$\cos\bar{z}=\operatorname{ch} y\cdot\cos x+i\operatorname{sh} y\cdot\sin x \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$.

Задача 3. Нека $a>0$, $f(z)=\left(z+a\right)e^{z}+\left(z-a\right)e^{-z}$. Да се докаже дека сите нули на $f(z)$ се чисто имагинарни.

Решение. За $z=x+iy$, имаме

$$\left|\left(z+a\right)e^{z}\right|=\left|z+a\right|\left|e^{z}\right|=\left|x+iy+a\right|\left|e^{x}\right|\left|e^{iy}\right|=e^{x}\sqrt{(x+a)^2+y^2},$$

$$\left|\left(z-a\right)e^{-z}\right|=\left|z-a\right|\left|e^{-z}\right|=\left|x+iy-a\right|\left|e^{-x}\right|\left|e^{-iy}\right|=e^{-x}\sqrt{(x-a)^2+y^2}\ .$$

i) Нека $x>0$:

Од $e^{-x}<1<e^{x}$, $x+a>x-a$ следува

$$\left|\left(z+a\right)e^{z}\right|>\left|\left(z-a\right)e^{-z}\right| \tag{1}$$

ii) Нека $x<0$:

Од $e^{-x}>e^{x}$, $\left|x+a\right|<\left|x-a\right|$ следува

$$\left|\left(z+a\right)e^{z}\right|<\left|\left(z-a\right)e^{-z}\right| \tag{2}$$

Нека $z_0\in\mathbb{C}$ е нула за $f(z)$. Тогаш $\left(z_0+a\right)e^{z_0}+\left(z_0-a\right)e^{-z_0}=0$, па следува $\left(z_0+a\right)e^{z_0}=-\left(z_0-a\right)e^{-z_0}$,

т.е.

$$\left|\left(z_0+a\right)e^{z_0}\right|=\left|-\left(z_0-a\right)e^{-z_0}\right|=\left|\left(z_0-a\right)e^{-z_0}\right| \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) следува дека мора $\operatorname{Re}z_0=0$ т.е. z_0 е чисто имагинарен број.

Задача 4. Да се докажат неравенствата:

а) $\left|\cos z\right|\le \operatorname{ch} z$, б) $\left|\sin z\right|\le \operatorname{sh} z$.

Решение.

а) Нека $z\in\mathbb{C}$. Слично како во реална анализа, важат формулите:

$$e^{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},\ \cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{z^{2k}}{\left(2k\right)!}.$$

Од друга страна за хиперболичната функција имаме

$$\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k!}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\cancel{\frac{z}{1!}}+\frac{z^2}{2!}+\cancel{\frac{z^3}{3!}}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+1-\cancel{\frac{z}{1!}}+\frac{z^2}{2!}-\cancel{\frac{z^3}{3!}}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\left(2k\right)!}.$$

Па, користејќи го фактот дека неравенство се запазува при барање лимес, имаме

$$\left|\cos z\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{z^{2k}}{\left(2k\right)!}\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(-1\right)^k\right|\frac{\left|z\right|^{2k}}{\left(2k\right)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|z\right|^{2k}}{\left(2k\right)!}=\operatorname{ch}\left|z\right|,$$

што и требаше да се докаже.

б) Се остава на читателот.

Задача 5. Нека $z=x+iy$, $y>0$. Да се докаже дека важи $\left|\operatorname{tg} z-i\right|\ge\frac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}}$.

Решение. Нека $z=x+iy$ и $y>0$. Тогаш имаме

$$\left|\operatorname{tg} z-i\right|=\left|\frac{\sin z}{\cos z}-i\right|=\left|\frac{\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}-i\right|=\left|-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}-i\right|=$$

$$=\left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}+e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\right|=\frac{2\left|e^{iz}\right|}{\left|e^{iz}+e^{-iz}\right|}=\frac{2\left|e^{iz}\right|\left|e^{iz}\right|}{\left|e^{2iz}+1\right|}=$$

$$=\frac{2\left|e^{i(x+iy)}\right|\left|e^{i(x+iy)}\right|}{\left|e^{2iz}+1\right|}=\frac{2e^{-2y}}{\left|e^{2iz}+1\right|},$$

и

$$\left|e^{2iz}+1\right|=\left|e^{2i(x+iy)}+1\right|=\left|e^{2ix}e^{-2y}+1\right|=\left|e^{-2y}\left(\cos 2x+i\sin 2x\right)+1\right|=$$

$$=\left|\left(e^{-2y}\cos 2x+1\right)+ie^{-2y}\sin 2x\right|=\sqrt{\left(e^{-2y}\cos 2x+1\right)^2+\left(e^{-2y}\sin 2x\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+e^{-4y}\cos^2 2x+2e^{-2y}\cos 2x+e^{-4y}\sin^2 2x}=\sqrt{1+e^{-4y}+2e^{-2y}\cos 2x}\,.$$

Користејќи ги последните пресметки, добиваме

$$\left(1+e^{-2y}\right)^2=1+2e^{-2y}+e^{-4y}\geq 1+e^{-2y}\cos 2x+e^{-4y}=\left|e^{2iz}+1\right|^2.$$

односно

$$\frac{1}{1+e^{-2y}}\leq\frac{1}{\left|e^{2iz}+1\right|}\,/\,2e^{-2y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}}\leq\frac{2e^{-2y}}{\left|e^{2iz}+1\right|}\,.$$

Од почетните пресметки и последниот докажан резултат следува $\left|\operatorname{tg} z-i\right|=\dfrac{2e^{-2y}}{\left|e^{2iz}+1\right|}\geq\dfrac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}}$.

Задача 6. Нека $n\geq 2,\ m\in\mathbb{N},\ z\in\mathbb{Z}$, $y>0$. Да се докаже

$$\left|e^{z}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}\right|<e^{|z|}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^{n}<e^{|z|}\frac{|z|^2}{2n}\,.$$

Решение. Во ова решение ќе ја користиме следната дефиниција на e^{z}, $z=x+iy$

$$e^{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},\quad z=x+iy\,. \tag{1}$$

Користејќи ја Биномната формула добиваме

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{z^k}{n^k}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\frac{z^k}{n^k}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}z^k=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)z^k\,.$$

Докажавме

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)z^k\,. \tag{2}$$

Со користење на (1) и (2), добиваме

$$\left|e^z-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \underset{(1),(2)}{=} \left|1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)z^k\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)z^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]z^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]z^k\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]|z|^k=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{|z|^k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)|z|^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)|z|^k+1-1\underset{(1),(2)}{=}e^{|z|}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n.$$

Докажавме

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]|z|^k=e^{|z|}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n \qquad (*)$$

и

$$\left|e^z-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|<e^{|z|}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n \qquad (3)$$

Во продолжение ќе го докажеме другото неравенство. Заради (1) имаме

$$e^{|z|}\frac{|z|^2}{2n}=\frac{|z|^2}{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}.$$

Со индукција се покажува дека за $a_i,\ 0\leq a_i\leq 1,\ i=\overline{1,m}$ важи

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdot\ldots\cdot(1-a_m)\geq 1-\sum_{i=1}^{m}a_i.$$

Земајќи $a_i=\frac{i}{n}$ и $m=k-1$ добиваме

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\geq 1-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{n}=1-\frac{1}{n}\frac{(k-1)k}{2}=1-\frac{k(k-1)}{2n},$$

па следува

$$-1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\geq-\frac{k(k-1)}{2n},$$

т.е.

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\leq\frac{k(k-1)}{2n} \qquad (4)$$

Го разгледуваме неравенството $\frac{1}{k!}<\frac{1}{2n(k-2)!}$.

$$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2n(k-2)!} \Leftrightarrow k!>2n(k-2)! \Leftrightarrow k(k-1)(k-2)!>2n(k-2)!.$$

Последниот израз е еквивалентен со $k(k-1)>2n$ т.е. $n<\frac{k(k-1)}{2}=1+2+\ldots+(k-1)$.

Значи,

$$\text{за } n<\frac{k(k-1)}{2}=1+2+\ldots+(k-1) \text{ важи } \frac{1}{k!}<\frac{1}{2n(k-2)!} \qquad (5)$$

Користејќи $\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2+k}{2}>k$ и (5), добиваме дека

$$\text{за } k>n+1 \quad \text{важи } \frac{k(k+1)}{2}>n \text{ па } \frac{1}{k!}<\frac{1}{2n(k-2)!}. \qquad (6)$$

Сега

$$e^{|z|}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n \underset{(*)}{=} \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]|z|^k \le$$

$$\underset{(6),(4)}{\le} \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{2n(k-2)!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{k(k-1)}{2n}|z|^k =$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{2n(k-2)!}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!2n}|z|^k=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{2n(k-2)!}+\sum_{k=2}^{n}\frac{|z|^k}{2n(k-2)!}=$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!2n}|z|^k=\frac{|z|^2}{2n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}|z|^{k-2}=\frac{|z|^2}{2n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}|z|^m=\frac{|z|^2}{2n}e^{|z|}.$$

Докажавме дека

$$e^{|z|}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n<e^{|z|}\frac{|z|^2}{2n} \qquad (7)$$

(3) и (7) е тоа што требаше да се докаже.

Задача 7. Да се пресмета:

а) $\log 4$; б) $\log(-1)$; в) $\log(i)$; г) $\log(2-3i)$; е) $\log\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$

Решение. Важи формулата $\log z=\ln|z|+i\left(\arg z+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

а)

$$\log 4=\ln|4|+i\left(\arg 4+2k\pi\right)=\ln 4+i\left(0+2k\pi\right)=\ln 4+2ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б)

$$\log(-1)=\ln|-1|+i\left(\arg(-1)+2k\pi\right)=\ln 1+i\left(\pi+2k\pi\right)=i\pi\left(2k+1\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

в)

$$\log(i)=\ln 1+i\left(\arg(i)+2k\pi\right)=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\frac{i\pi}{2}\left(1+4k\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

г) Се остава на читателот.

е)

Од $\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$, за аргументот и модулот имаме

$$\arg\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\operatorname{arc\,tg}\left(-1\right)=-\frac{\pi}{4} \text{ и } \left|\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{1}=1.$$

Следува дека

$$\log\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\ln 1+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{i\pi}{4}\left(8k-1\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

6. Диференцијабилност на комплексни функции

Дефиниција. Нека f е дефинирана на $D\subseteq\mathbb{C}$, $z_0\in\mathbb{C}$. Ако постои $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ тогаш велиме дека f е диференцијабилна во $z=z_0$ и за изводот на функцијата f во точката $z_0\in\mathbb{C}$ пишуваме $f'\left(z_0\right)=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

Дефиниција. Нека *L* е полуправа со почеток во точката z_0 и зафаќа агол φ со позитивниот дел на реалната оска. Ако постои $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in L}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ тогаш велиме дека постои извод на функцијата f во точката z_0 по правецот *L* и го означуваме со $f_\varphi'\left(z_0\right)$.

Дефиниција. Ако функцијата f е диференцијабилна во секоја точка од областа D, $D\subseteq\mathbb{C}$, тогаш f се нарекува холоморфна на D.

Дефиниција. Функцијата f се нарекува холоморфна во точка од областа D, $D\subseteq\mathbb{C}$, ако постои околина на точката во која функцијата е холоморфна.

Теорема. (Коши-Риманови услови) Нека за функцијата $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ постојат $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ и се непрекинати. Тогаш, $f(z)$ е холоморфна на D ако и само ако важат Коши-Риманови услови т.е. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Дефиниција. Функцијата $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е хармониска во областа $D\subseteq\mathbb{C}$ ако и само ако:

i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ постојат и се непрекинати,

ii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ за сите $x, y \in D$.

Задача 1. Да се испита диференцијабилност на функциите:

а) $f(z)=y+ix$, б) $f(z)=\overline{z}$, в) $f(z)=\left|z\right|^2$, г) $f(z)=\operatorname{Re} z$, д) $f(z)=\left|z\right|$.

Решение.

а) Нека $z_0=x_0+iy_0$ е произволно избран комплексен број и нека $f(z)=y+ix$, $z=x+iy$. Имаме

$$f'\left(z_0\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{f(x+iy)-f(x_0+iy_0)}{x+iy-\left(x_0+iy_0\right)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{y+ix-\left(y_0+ix_0\right)}{x+iy-x_0-iy_0}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{\left(y-y_0\right)+i\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)+i\left(y-y_0\right)}\cdot\frac{\left(x-x_0\right)-i\left(y-y_0\right)}{\left(x-x_0\right)-i\left(y-y_0\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{\left(y-y_0\right)\left(x-x_0\right)+\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)-i\left(y-y_0\right)^2+i\left(x-x_0\right)^2}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}.$$

Означувајќи $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, имаме дека $z-z_0=\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, и притоа,

$$\Delta z\to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\to x_0\\ y\to y_0\end{cases} \Leftrightarrow \Delta x\to 0 \wedge \Delta y\to 0$$

па добиваме

$$f'\left(z_0\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta y\Delta x+\Delta x\Delta y-i\Delta y^2+i\Delta x^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(\frac{\Delta y\Delta x+\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}+i\frac{\Delta x^2-\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$

.

Ќе докажеме дека лимесот не постои. Нека *L* е полуправа со почеток во точката z_0 и зафаќа агол φ со позитивниот дел на реалната оска. Заради $\Delta x+i\Delta y=\Delta z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\Delta z\to 0$ ако и само ако $\rho\to 0$ и бидејќи изводот по правецот *L*

$$f_\varphi'\left(z_0\right)=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in L}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ z\in L}}\left(\frac{\Delta y\Delta x+\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}+i\frac{\Delta x^2-\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\left[\frac{\rho\sin\varphi\rho\cos\varphi+\rho\cos\varphi\rho\sin\varphi}{\left(\rho\cos\varphi\right)^2+\left(\rho\sin\varphi\right)^2}+i\frac{\left(\rho\cos\varphi\right)^2-\left(\rho\sin\varphi\right)^2}{\left(\rho\cos\varphi\right)^2+\left(\rho\sin\varphi\right)^2}\right]=,$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\left[2\sin\varphi\cos\varphi+i\left(2\cos^2\varphi-1\right)\right]=\sin\left(2\varphi\right)+i\cos\left(2\varphi\right)$$

зависи од аголот φ, заклучуваме дека не постои $f'(z_0)$. Од произволноста на z_0 следува дека функцијата $f(z)=y+ix$ не е диференцијабилна во ниту една точка од комплексната рамнина.

б) Нека $z_0 = x_0 + iy_0$ е произволно избран комплексен број и нека $f(z) = x - iy$, $z = x + iy$. Имаме:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x+iy)-f(x_0+iy_0)}{x+iy-(x_0+iy_0)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x-iy-(x_0-iy_0)}{x+iy-x_0-iy_0} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{(x-x_0)-i(y-y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)} \cdot \frac{(x-x_0)-i(y-y_0)}{(x-x_0)-i(y-y_0)} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \cdot \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x - i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x^2 - \Delta y^2 - 2i\Delta x\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Нека *L* е полуправа со почеток во точката z_0 и зафаќа агол φ со позитивниот дел на реалната оска. Тогаш $\Delta x + i\Delta y = \Delta z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\Delta z \to 0$ ако и само ако $\rho \to 0$, па за изводот по правецот *L*, $f_\varphi'(z_0)$, добиваме

$$f_\varphi'(z_0) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in L}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\varphi)^2 - (\rho\sin\varphi)^2 - 2i(\rho\cos\varphi)(\rho\sin\varphi)}{(\rho\sin\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos 2\varphi - i\rho^2\sin 2\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi) = \cos 2\varphi - i\sin 2\varphi.$$

Последниот израз зависи од аголот φ, па функцијата $f(z) = x - iy$ не е диференцијабилна во ниту една точка од комплексната рамнина.

в) Се остава на читателот.

г) Нека $z_0 = x_0 + iy_0$ е произволно избран комплексен број и нека $f(z) = \operatorname{Re} z$, $z = x + iy$. Имаме

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x-x_0}{x+iy-(x_0+iy_0)} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x^2 - i\Delta x\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Ќе докажеме дека лимесот не постои. Ако побараме лимес по правецот на реалната оска, тогаш $\Delta y = 0$, $\Delta z = \Delta x$, па изводот по правецот на реалната оска е $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}} \frac{\Delta x^2 - i\Delta x\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x^2 - i\cdot 0}{\Delta x^2 + 0} = 1$. Ако побараме лимес по правецот на имагинарната оска, тогаш за $\Delta x = 0$, $\Delta z = i\cdot\Delta y$, па изводот по правецот на имагинарната оска е $\lim\limits_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x^2 - i\Delta x\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \lim\limits_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}} \frac{0}{0 + \Delta y^2} = 0$. Следствено, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x^2 - i\Delta x\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ не постои, па функцијата $f(z) = \operatorname{Re} z$ не е диференцијабилна во ниту една точка од комплексната рамнина.

д) Се остава на читателот.

Задача 2. Користејќи Коши-Риманови услови да се провери дали функцијата $f(z)$ е холоморфна на $\mathbb{C}$, каде:

а) $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$, $z = x + iy$;

б) $f(z) = x^2 y^2$, $z = x + iy$;

в) $f(z)=|z|\operatorname{Re} z$;

г) $f(z)=\sin 3z-i$.

Решение.

а) $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$. За парцијалните изводи имаме:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x,\text{ па следува } \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\text{ па следува } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

Од (1), (2) и од непрекинатоста на $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ следува дека функцијата $f(z)=x^2-y^2+2xyi$ е холоморфна на комплексната рамнина.

б) $u(x,y)=x^2y^2$, $v(x,y)=0$. Имаме:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x^2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

За $x\neq 0$ и $y\neq 0$, не важат Коши-Римановите услови, па функцијата f не е холоморфна на $\mathbb{C}$.

Се остава на читателот да испита диференцијабилност на функцијата во точки од множествата $\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}$, $\{(0,y)|y\in\mathbb{R}\}$, на кои важат Коши-Римановите услови. Функцијата не може да биде холоморфна во ниту една точка од тие множества бидејќи секоја околина на која било точка $(x_0,0)$ или $(0,y_0)$ содржи точки во кои не важат Коши-Римановите услови.

в) Се остава на читателот.

г) $$f(z)=\sin 3z-i=\frac{1}{2i}\left[e^{i3z}-e^{-i3z}\right]-i=\frac{1}{2i}\left[e^{3ix-3y}-e^{-3ix+3y}\right]-i=$$

$$=\frac{1}{2i}\left[e^{-3y}\left(\cos 3x+i\sin 3x\right)-e^{3y}\left(\cos 3x-i\sin 3x\right)\right]-i=$$

$$=\frac{1}{i}\left[-\frac{e^{3y}-e^{-3y}}{2}\cos 3x+i\frac{e^{3y}+e^{-3y}}{2}\sin 3x\right]-i=$$

$$=(-i)\left[-\cos 3x\cdot\operatorname{sh}3y+i\sin 3x\cdot\operatorname{ch}3y\right]=$$

$$=i\cos 3x\cdot\operatorname{sh}3y+\sin 3x\cdot\operatorname{ch}3y-i=$$

$$=\sin 3x\cdot\operatorname{ch}3y+i\left(\cos 3x\cdot\operatorname{sh}3y-1\right).$$

За реалниот и имагинарниот дел имаме:

$$u(x,y)=\sin 3x\cdot\operatorname{ch}3y,\ v(x,y)=\cos 3x\cdot\operatorname{sh}3y-1.$$

За нивните парцијални изводи добиваме:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3\cos 3x\cdot\operatorname{ch}3y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=3\operatorname{ch}3y\cdot\cos 3x\text{ па } \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3\sin 3x\cdot\operatorname{sh}3y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-3\sin 3x\cdot\operatorname{sh}3y\text{ па } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Заклучуваме дека f е холоморфна на $\mathbb{C}$.

Задача 3. Ако $f(z)=u+iv$ е холоморфна функција на D, да се докаже дека

$$u, v, \ln\left|f(z)\right|, arc\,\mathrm{tg}\frac{v}{u}$$

се хармониски функции на D.

Решение. Бидејќи $f(z)=u+iv$ е холоморфна функција, следува дека важат Коши-Римановите услови:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Оттука добиваме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\underset{(1)}{=}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\underset{(1)}{=}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}.$$

За холоморфната функција $f(z)=u+iv$, $\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-n}\partial y^n}$, $\frac{\partial^k v}{\partial x^{k-n}\partial y^n}$ се непрекинати функции и важи $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$, па, заради погоре, имаме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Од последното добиваме дека функцијата $u(x,y)=\mathrm{Re}\,f(z)$ е хармониска функција.

Слично, се покажува дека и $v(x,y)=\mathrm{Im}\,f(z)$ е хармониска.

Нека сега означиме со $u_1(x,y)=\ln\left|f(z)\right|=\ln\sqrt{u^2+v^2}=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+v^2\right)$. Имаме

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{1}{u^2+v^2}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1}{u^2+v^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{u^2+v^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=-\frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^2}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\\&+\frac{1}{u^2+v^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=\\&=\frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^2}\left\{-2\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\right.\\&\left.+\left(u^2+v^2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Слично,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=\frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^2}\left\{-2\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\right.$$

$$\left.+\left(u^2+v^2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]\right\}$$

Па,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=\frac{1}{u^2+v^2}\left\{-2\left[u^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+v^2\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)+2uv\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\left(u^2+v^2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]\right\}.$$

Од Коши-Римановите услови следува дека $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, па важи $-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}$, а бидејќи u,v се хармониски, важи $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$, па добиваме

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=\frac{1}{u^2+v^2}\left\{-2\left[u^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+v^2\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\left(u^2+v^2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left\{-2\left(u^2+v^2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2\left(u^2+v^2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right\}=0.$$

Докажавме дека $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0$, па следува $u_1=\ln|f|$ е хармониска на D.

Проверката на хармоничноста на последната функција се остава на читателот.

Задача 4. Да се докаже дека ако $w=f(z)$ е холоморфна функција на D таква што $\operatorname{Im} w=0$, тогаш $f(z)=const$ за сите $z\in D$.

Решение. Нека $w=u+iv$. Од тоа што $w=f(z)$ е холоморфна на D следува дека

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

Но, $v=0$ за сите $z\in D$, па следува дека

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(0)=0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}(0)=0.$$

Ако последните равенства ги интегрираме по променливата x имаме

$$u=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+\varphi(y)=\int 0\,dx+\varphi(y)=\varphi(y)\text{ т.е. } u=\varphi(y).$$

Но, од друга страна, од $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ следува дека $\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)=0$, па $\varphi(y)=const$. Добиваме дека $u(x,y)=const$ за сите $x,y\in\mathbb{R}$, па заклучуваме дека $f(z)=const$ за сите $z\in D$.

Задача 5. Да се одреди $u=u(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ така што u,u^2 да се хармониски функции на $\mathbb{C}$.

Решение. Нека u,u^2 се хармониски функции. Тогаш:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\left(u^2\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(u^2\right)}{\partial y^2}=0 \tag{2}$$

Од друга страна имаме

$$\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2\left(u^2\right)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Слично се добива дека

$$\frac{\partial^2\left(u^2\right)}{\partial y^2}=2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Со замена на $\frac{\partial^2\left(u^2\right)}{\partial x^2},\frac{\partial^2\left(u^2\right)}{\partial y^2}$ во (2) добиваме

$$2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=0.$$

Заради (1) последното равенство го добива обликот

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$ па $\frac{\partial u}{\partial x}=0,\frac{\partial u}{\partial y}=0$, па следува дека $u(x,y)=const$ за сите $x,y\in\mathbb{R}$.

Задача 6. Да се најдат сите f, каде што $f(t)$ е диференцијабилна функција од реална променлива, така што $u=u(x,y)$ и $v=f(u)$ да се хармониски функции.

Решение. Нека $u=u(x,y)$ е хармониска функција. Следува

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Од тоа што $v=f(u)$ е хармониска следува дека

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

Од друга страна, $\frac{\partial v}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Слично, се добива дека $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Со замена на овие резултати во (2) добиваме

$$f''(u)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+f'(u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

$$\underset{(1)}{\Leftrightarrow} f''(u)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow f''(u)=0 \text{ или } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow f'(u)=c \text{ или } \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$\Leftrightarrow f(u)=cu+b \text{ или } u(x,y)=const\,.$$

Заклучуваме дека ако $u=u(x,y)$ е хармониска функција различна од константна, тогаш $f(t)=ct+b$.

Задача 7. Да се најде холоморфна функција $f(z)=u+iv$, каде $z=x+iy$ и $v=2e^x\cos y$, $f(0)=2(1+i)$.

Решение. Нека $f(z)=u+iv$ е холоморфна функција. Тогаш, за f важат Коши-Римановите услови

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\ . \tag{1}$$

Користејќи го условот, $v=2e^x\cos y$, (1) го добива обликот

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2e^x\sin y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^x\cos y\,. \tag{2}$$

Ако равенството $\frac{\partial u}{\partial x}=-2e^x\sin y$ од (2) се интегрира по променливата x следува

$$u(x,y)=\int\left(-2e^x\sin y\right)dx+\varphi(y)=-2\sin y\int e^x\,dx+\varphi(y),$$

т.е.

$$u(x,y)=-2\sin ye^x+\varphi(y)\,. \tag{3}$$

Ако (3) се диференцира по променливата y имаме

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2e^x\cos y+\varphi'(y)\,. \tag{4}$$

Од (2) и (4) добиваме дека $-2e^x\cos y+\varphi'(y)=-2e^x\cos y$, односно $\varphi'(y)=0$, па следува дека $\varphi(y)=c$. Со замена на овој услов во (3) се добива $u(x,y)=-2\sin ye^x+c$.

Добиваме дека

$$f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)=-2\sin ye^x+c+2ie^x\cos y\,.$$

Од условот $f(0)=2(1+i)$ имаме

$$2(1+i)=f(0)=-2\cdot 0\cdot 1+c+i\cdot 2\cdot 1=c+2i,$$

па $c=2$.

Заклучуваме дека бараната функција е

$$f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)=-2\sin ye^{x}+2+2ie^{x}\cos y.$$

Задача 8. Да се најде холоморфна функција $f(z)=u+iv$, каде $z=x+iy$ и така што v е функција која зависи од x^2+y^2.

Решение. Бидејќи v е функција која зависи од x^2+y^2, истата ја запишуваме во облик $v=\varphi\left(x^2+y^2\right)$.

Од холоморфноста на функцијата f следува хармоничност на v, па

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

Ако побараме парцијален извод на $v=\varphi\left(x^2+y^2\right)$ по променливата x добиваме

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2x\varphi'\left(x^2+y^2\right).$$

За вториот парцијален извод на $v=\varphi\left(x^2+y^2\right)$ по x добиваме

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x\varphi'\left(x^2+y^2\right)\right)=2\varphi'\left(x^2+y^2\right)+2x\cdot 2x\cdot\varphi''\left(x^2+y^2\right),$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2\varphi'\left(x^2+y^2\right)+4x^2\varphi''\left(x^2+y^2\right). \qquad (2)$$

Слично,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=2\varphi'\left(x^2+y^2\right)+4y^2\varphi''\left(x^2+y^2\right). \qquad (3)$$

Од (1), (2) и (3) добиваме

$$4\varphi'\left(x^2+y^2\right)+4\left(x^2+y^2\right)\varphi''\left(x^2+y^2\right)\equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi'\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+y^2\right)\varphi''\left(x^2+y^2\right)\equiv 0.$$

Со смената $x^2+y^2=t$ добиваме

$$\varphi'(t)+t\varphi''(t)\equiv 0$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi'}=-\frac{1}{t}\Leftrightarrow d\left(\ln\varphi'\right)=-\frac{1}{t}dt.$$

Интегрирајќи го последното равенство, имаме

$$\ln\varphi'=-\int\frac{1}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow \ln\varphi'=-\ln|t|dt+\ln C_1 \text{ каде } C_1>0$$

$$\Rightarrow \ln\varphi'=\ln\frac{C_1}{|t|}\Rightarrow\varphi'=\frac{C_1}{|t|}\Rightarrow\frac{d\varphi}{dt}=\frac{C_1}{|t|}$$

$$\Rightarrow d\varphi=\frac{C_1}{|t|}dt$$

$$\Rightarrow \varphi = \int \frac{C_1}{|t|} dt \Rightarrow \varphi = C_1 \ln\left(|t|\right) + C_2 \Rightarrow \varphi\left(x^2+y^2\right) = C_1 \ln\left(x^2+y^2\right) + C_2 .$$

Заклучуваме $v = \varphi\left(x^2+y^2\right) = C_1 \ln\left(x^2+y^2\right) + C_2$.

Користејќи ги Коши-Римановите услови за функцијата $f(z) = u + iv$ и добиениот облик на v, $v = \varphi\left(x^2+y^2\right) = C_1 \ln\left(x^2+y^2\right) + C_2$, во продолжение ќе ја најдеме функцијата u.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 2yC_1 \frac{1}{x^2+y^2} = 2C_1 \frac{y}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -C_1 \frac{2x}{x^2+y^2} = -2C_1 \frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Па,

$$u(x,y) = 2C_1 y \int \frac{dx}{x^2+y^2} + \phi(y) = 2C_1 y \frac{1}{y^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + \phi(y) =$$

$$= \frac{2C_1}{y} y \, arc\,\text{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + \phi(y) = 2C_1 arc\,\text{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + \phi(y),$$

т.е.

$$u\left(x,y\right) = 2C_1 arc\,\text{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + \phi(y).$$

Со диференцирање на функцијата u по y, добиваме

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2C_1 \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{x}{y^2} + \phi'(y) = -\frac{2C_1 x}{x^2+y^2} + \phi'(y). \tag{5}$$

Од (4) и (5) следува дека $-2C_1 \frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{2C_1 x}{x^2+y^2} + \phi'(y)$, па $\phi'(y) = 0$, односно $\phi(y) = C_3$.

Конечно, добиваме дека

$$u(x,y) = 2C_1 arc\,\text{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + C_3,$$

па

$$f(z) = u + iv = u(x,y) = 2C_1 arc\,\text{tg}\left(\frac{x}{y}\right) + C_3 + i\left[C_1 \ln\left(x^2+y^2\right) + C_2\right].$$

Задача 9. Да се најде холоморфна функција $f(z) = u + iv$, каде $z = x + iy$ и така што $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Решение. Бидејќи $f(z) = u + iv$ е холоморфна функција, следува дека u, v се хармониски функции. Па важи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Од друга страна, од $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, имаме

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{x^4}\right)+2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{y}{x^3}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)+\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot 0=\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Со заменување во (1), добиваме

$$\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left[\frac{1}{x^2}+\frac{y^2}{x^4}\right]+2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x^3}=0\ /\cdot x^2\neq 0,$$

$$\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left[1+\frac{y^2}{x^2}\right]+2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x}=0,$$

Со смена $\frac{y}{x}=t$, од последното добиваме

$$\varphi''(t)\cdot\left[1+t^2\right]+2\varphi'(t)\cdot t=0,$$

$$\left[\left(1+t^2\right)\varphi'(t)\right]'=0\Rightarrow\left(1+t^2\right)\varphi'(t)=C_1\Rightarrow\varphi'(t)=\frac{C_1}{1+t^2},$$

$$\varphi(t)=\int\frac{C_1}{1+t^2}dt=C_1 arc\,\mathrm{tg}(t)+C_2,$$

па,

$$u(x,y)=C_1 arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)+C_2.$$

Користејќи ги Коши-Римановите услови за функцијата $f(z)=u+iv$ и добиената функција u, слично како во задача 7, може да се определи и функцијата v. (Овој дел се остава на читателот).

Задача 10. Да се најде холоморфна функција $f(z)=u+iv$, каде $z=x+iy$ и така да $u-v\,\mathrm{tg}\,y=0$.

Решение. Ако условот $u-v\,\mathrm{tg}\,y=0$ го диференцираме по променливата x, добиваме

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{tg}\,y=0. \tag{1}$$

Ако условот $u-v\,\mathrm{tg}\,y=0$ го диференцираме по променливата y, добиваме

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{tg}\,y-v\frac{1}{\cos^2 y}=0. \tag{2}$$

Од холоморфноста на функцијата $f(z)=u+iv$ следува дека важат Коши-Римановите услови

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

Од (1), (2), и (3), имаме

$$\begin{cases} R_1 : \dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\operatorname{tg} y = 0, \\ R_2 : -\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\operatorname{tg} y - v\dfrac{1}{\cos^2 y} = 0 \end{cases}$$

Од првата равенка R_1 следува

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}\operatorname{tg} y .$$

Ако овој услов се замени во втората равенка R_2, добиваме

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}\operatorname{tg}^2 y - v\frac{1}{\cos^2 y} \text{ т.е. } \frac{\partial v}{\partial x}\left(1 + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}\right) = -v\frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\text{т.е. } \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}\right) = -v\frac{1}{\cos^2 y},$$

па

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -v .$$

Добивме

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -v \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -v\operatorname{tg} y \end{cases} .$$

Од првата равенка имаме

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -v \Rightarrow -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\ln v) = -1 .$$

Ако последното го интегрираме по x, имаме

$$\ln v = -x + \ln \varphi(y)$$

$$\Leftrightarrow \ln v = \ln e^{-x} + \ln \varphi(y)$$

$$\Leftrightarrow \ln v = \ln\left(e^{-x}\varphi(y)\right)$$

$$\Leftrightarrow v = e^{-x}\varphi(y),\ \varphi(y) > 0 .$$

Од друга страна, од втората равенка од системот и од пресметаното, $v = e^{-x}\varphi(y)$, $\varphi(y) > 0$, добиваме

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varphi'(y)\,\mathrm{e}^{-x} = -v\operatorname{tg} y = -e^{-x}\varphi(y)\operatorname{tg} y$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(y)\,\mathrm{e}^{-x} = -e^{-x}\varphi(y)\operatorname{tg} y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = -\operatorname{tg} y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(\varphi(y)\right)\right) = -\operatorname{tg} y \ \ /\int dy$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\varphi(y)\right) = -\int \operatorname{tg} y\, dy$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\varphi(y)\right) = -\left(-\ln\left|\cos y\right|\right) + \ln\mathrm{C}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\varphi(y)\right) = \ln\left(\mathrm{C}\left|\cos y\right|\right) \Rightarrow \varphi(y) = \mathrm{C}\left|\cos y\right| .$$

Конечно, добивме дека

$$v(x,y)=C\left|\cos y\right|e^{-x}.$$

Користејќи ги Коши-Римановите услови за функцијата $f(z)=u+iv$ и добиената функција v, слично како во задача 7, може да се определи и функцијата u. (Овој дел се остава на читателот)

Задача 11. Да се изведат Коши-Римановите услови во поларни координати.

Решение. Нека $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, каде $z=x+iy$.

Ако f е холоморфна, следува дека

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

Нека променливите x,y се дадени во поларни координати $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. За парцијалните изводи, со новите координати, имаме:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\rho}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\rho}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\varphi\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\left(-\rho\sin\varphi\right)+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\rho\cos\varphi\end{cases}$$

Оттука добиваме

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\rho} & \sin\varphi\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial\varphi} & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}}=\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\rho\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi\right)\frac{1}{\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi},$$

па

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi. \tag{2}$$

Слично, имаме

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\cos\varphi & \dfrac{\partial u}{\partial\rho}\\[2ex] -\rho\sin\varphi & \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\end{vmatrix}}{\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial\rho}\sin\varphi. \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3), добиваме

$$\frac{\partial v}{\partial\rho}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}=-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi=$$

$$\underset{(2),(3)}{=}-\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial\rho}\sin\varphi\right)\cos\varphi+\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi\right)\sin\varphi=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos^2\varphi-\cancel{\frac{\partial u}{\partial\rho}\sin\varphi}\cos\varphi+\cancel{\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\varphi}\sin\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin^2\varphi=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

Докажавме дека важи

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\ . \tag{4}$$

За парцијалниот извод на функцијата v по променливата φ имаме

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\rho\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\rho\cos\varphi=$$

$$\underset{(2),(3)}{=}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi\right)\cdot\rho\sin\varphi+\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi\right)\cdot\rho\cos\varphi=$$

$$=\cancel{\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi\sin\varphi}+\frac{\partial u}{\partial \rho}\rho\sin^2\varphi+\frac{\partial u}{\partial \rho}\rho\cos^2\varphi-\cancel{\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial \rho}\rho\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=\frac{\partial u}{\partial \rho}\rho\,,$$

Докажавме дека важи

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}=\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\,. \tag{5}$$

Заклучуваме дека Коши-Римановите услови во поларни координати се:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial \rho}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}=\rho\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\end{cases}$$

7. Комплексна интеграција

Дефиниција. За кривата $z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[a,b]$ велиме дека е:

1) Непрекината ако $x(t),\ y(t)$ се непрекинати како реално вредносни функции.

2) Жорданова ако е непрекината и важи: од $t_1\neq t_2\Rightarrow z(t_1)\neq z(t_2)$ за сите $t_1,\ t_2\in[a,b]$.

3) Затворена ако важи $z(a)=z(b)$.

4) Затворена Жорданова ако е Жорданова со исклучок на $z(a)=z(b)$.

5) Глатка ако постојат $\dot{x}(t),\ \dot{y}(t)$ за сите $t\in[a,b]$ и уште важи дека $\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\neq 0$ за сите $t\in[a,b]$.

Дефиниција. Нека $f(t)$, $t\in[a,b]$ е функција од реална променлива која прима комплексни вредности т.е. $f(t)=u(t)+iv(t)$. Тогаш $\int\limits_a^b f(t)dt=\int\limits_a^b u(t)dt+i\int\limits_a^b v(t)dt$.

Дефиниција. Ако Γ е крива што ги спојува границите a,b т.е. $\Gamma=\left\{z(t)=u(t)+iv(t)\middle|a\leq t\leq b\right\}$, а $f(z)$ е непрекината функција на Γ. Тогаш $\int\limits_\Gamma f(z)dz=\int\limits_a^b f(z(t))z'(t)dt$.

Задача 1. Дали кривата дефинирана со $z(t)=\dfrac{1+it}{1+t+t^2}$ е

а) Жорданова крива?
б) Затворена Жорданова крива?
в) Глатка крива?

Решение.

а) $z(t)=\dfrac{1+it}{1+t+t^2}=\dfrac{1}{1+t+t^2}+i\dfrac{t}{1+t+t^2}$ па $x(t)=\dfrac{1}{1+t+t^2}$ и $y(t)=\dfrac{t}{1+t+t^2}$ се непрекинати, од каде следува дека $z(t)=\dfrac{1+it}{1+t+t^2}$ е непрекината крива.

Нека $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ и $z(t_1)=z(t_2)$. Имаме:

$$\frac{1+it_1}{1+t_1+t_1^{\,2}}=\frac{1+it_2}{1+t_2+t_2^{\,2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+it_1}{1+t_1+t_1^{\,2}}-\frac{1+it_2}{1+t_2+t_2^{\,2}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(1+it_1\right)\left(1+t_2+t_2^{\,2}\right)-\left(1+it_2\right)\left(1+t_1+t_1^{\,2}\right)}{\left(1+t_1+t_1^{\,2}\right)\left(1+t_2+t_2^{\,2}\right)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+t_2+t_2^{\,2}-1-t_1-t_1^{\,2}+i\left(t_1+t_1t_2+t_1t_2^{\,2}-t_2-t_2t_1-t_2t_1^{\,2}\right)}{\left(1+t_1+t_1^{\,2}\right)\left(1+t_2+t_2^{\,2}\right)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{t_2+t_2^{\,2}-t_1-t_1^{\,2}+i\left(t_1+t_1t_2^{\,2}-t_2-t_2t_1^{\,2}\right)}{\left(1+t_1+t_1^{\,2}\right)\left(1+t_2+t_2^{\,2}\right)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_2+t_2^{\,2}-t_1-t_1^{\,2}+i\left(t_1+t_1t_2^{\,2}-t_2-t_2t_1^{\,2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t_2+t_2^{\,2}-t_1-t_1^{\,2}=0\\ t_1+t_1t_2^{\,2}-t_2-t_2t_1^{\,2}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t_2-t_1+t_2^{\,2}-t_1^{\,2}=0\\ t_1t_2^{\,2}-t_2t_1^{\,2}-(t_2-t_1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_2-t_1+(t_2-t_1)(t_2+t_1)=0\\ t_1t_2(t_2-t_1)-(t_2-t_1)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(t_2-t_1)(1+t_1+t_2)=0\\ (t_2-t_1)(t_1t_2-1)=0\end{cases}$$

Ако го претпоставиме спротивното, т.е. дека $t_1\neq t_2$, тогаш добиваме

$$\begin{cases}1+t_1+t_2=0\\ t_1t_2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_2=-1-t_1\\ t_1(-1-t_1)-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_2=-1-t_1\\ -t_1^{\,2}-t_1-1=0\end{cases}$$

Последната равенка $t_1^2+t_1+1=0$ нема реални решенија, што е контрадикција со $t_1,t_2\in\mathbb{R}$, па следува дека мора $t_1=t_2$. Докажавме дека кривата е Жорданова.

б) За да провериме дали кривата е затворена ќе ги разгледаме лимесите $z(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}z(t)$ и $z(-\infty)=\lim\limits_{t\to-\infty}z(t)$. Бидејќи кривата е дефинирана на отворениот интервал $(-\infty,\infty)$, за да $z(t)$ биде затворена треба да докажеме дека важи $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}z(t)$. Од

$$z(-\infty)=\lim_{t\to-\infty}z(t)=\lim_{t\to-\infty}\frac{1+it}{1+t+t^2}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+t+t^2}+i\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{1+t+t^2}=0+i0=0$$

$$z(\infty)=\lim_{t\to\infty} z(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1+it}{1+t+t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+t+t^2}+i\lim_{t\to\infty}\frac{t}{1+t+t^2}=0+i0=0$$

добивме дека $z(t)$ е затворена.

в) За да провериме дали $z(t)$ е глатка, прво ќе ги најдеме изводите $\dot{x}(t),\ \dot{y}(t)$, каде $x(t)=\dfrac{1}{1+t+t^2},\ y(t)=\dfrac{t}{1+t+t^2}$. Имаме

$$\dot{x}(t)=\left(\frac{1}{1+t+t^2}\right)_t'=\frac{-(2t+1)}{\left(1+t+t^2\right)^2},\ \dot{y}(t)=\left(\frac{t}{1+t+t^2}\right)_t'=\frac{\left(1+t+t^2\right)-t(2t+1)}{\left(1+t+t^2\right)^2}=\frac{1-t^2}{\left(1+t+t^2\right)^2}.$$

За збирот на квадратите добиваме

$$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)=\left[\frac{-(2t+1)}{\left(1+t+t^2\right)^2}\right]^2+\left[\frac{1-t^2}{\left(1+t+t^2\right)^2}\right]^2=$$

$$=\frac{(2t+1)^2}{\left(1+t+t^2\right)^4}+\frac{(1-t^2)^2}{\left(1+t+t^2\right)^4}=\frac{(2t+1)^2+(1-t^2)^2}{\left(1+t+t^2\right)^4}=\frac{4t^2+4t+1+1-2t^2+t^4}{\left(1+t+t^2\right)^4}=$$

$$=\frac{t^4+2t^2+4t+2}{\left(1+t+t^2\right)^4}=\frac{t^4+2(1+t)^2}{\left(1+t+t^2\right)^4}.$$

Оттука имаме дека

$$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)=0\Leftrightarrow t^4+2(1+t)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\1+t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\t=-1\end{cases},$$

па следува дека изразот $\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)$ не е различен од 0 за сите $t\in(-\infty,\infty)$, односно кривата не е глатка.

Задача 2. Да се пресмета $\int\limits_0^1 e^{it}\cos(at)\,dt$, каде $a\in\mathbb{R}$.

Решение. Од $e^{it}=\cos t+i\sin t$ и дефиницијата, имаме

$$\int\limits_0^1 e^{it}\cos(at)\,dt=\int\limits_0^1\left(\cos t+i\sin t\right)\cos(at)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1\left[\cos t\cos(at)+i\sin t\cos(at)\right]dt$$

$$=\int\limits_0^1\cos t\cos(at)\,dt+i\int\limits_0^1\sin t\cos(at)\,dt.$$

Во продолжение ќе ги пресметаме интегралите во последниот израз.

$$\int\limits_0^1\cos t\cos(at)\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[\cos\left(t+at\right)+\cos(t-at)\right]dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left\{\cos\left[\,t\left(1+a\right)\right]+\cos\left[\,t\left(1-a\right)\right]\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2\left(1+a\right)}\left(\sin\left(t\left(1+a\right)\right)\right)\Big|_0^1+\frac{1}{2\left(1-a\right)}\left(\sin\left(t\left(1-a\right)\right)\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2\left(1+a\right)}\sin\left(1+a\right)+\frac{1}{2\left(1-a\right)}\sin\left(1-a\right)=$$

$$=\frac{1}{2(a+1)}\sin(a+1)+\frac{1}{2(a-1)}\sin(a-1).$$

$$\int_0^1 \sin t\cos(at)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\sin(t+at)+\sin(t-at)\right]dt=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\sin\left[t(a+1)\right]-\sin\left[t(a-1)\right]\right\}dt=$$

$$=-\frac{1}{2(a+1)}\left(\cos\left(t\left(a+1\right)\right)\right)\Big|_0^1+\frac{1}{2(a-1)}\left(\cos\left(t\left(a-1\right)\right)\right)\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{2(a+1)}\cos(a+1)+\frac{1}{2(a+1)}+\frac{1}{2(a-1)}\cos(a-1)-\frac{1}{2(a-1)}=$$

$$=-\frac{1}{2(a+1)}\cos(a+1)+\frac{1}{2(a-1)}\cos(a-1)-\frac{1}{a^2-1}.$$

Добиваме

$$\int_0^1 e^{it}\cos(at)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2(a+1)}\sin(a+1)+\frac{1}{2(a-1)}\sin(a-1)+$$

$$+i\left[-\frac{1}{2(a+1)}\cos(a+1)+\frac{1}{2(a-1)}\cos(a-1)-\frac{1}{a^2-1}\right].$$

Задача 3. Да се пресмета интегралот $\int_\Gamma f(z)dz$ ако:

а) $f(z)=\bar{z}$ и $\Gamma=\left\{\cos t+i\sin t\,\middle|\,\pi\le t\le 2\pi\right\}$,

б) $f(z)=\bar{z}$ и $\Gamma=\left\{t+i(t^2-1)\,\middle|\,-1\le t\le 1\right\}$.

Решение.

а) $f(z)=\bar{z}=x-iy$, $z\left(t\right)=\cos t+i\sin t$, па за интегралот имаме

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_\pi^{2\pi} f(z(t))z'(t)dt=\int_\pi^{2\pi} f(\cos t+i\sin t)(\cos t+i\sin t)'\,dt=$$

$$=\int_\pi^{2\pi}(\cos t-i\sin t)(-\sin t+i\cos t)dt=i\int_\pi^{2\pi}(\cos t-i\sin t)(i\sin t+\cos t)dt=$$

$$=i\int_\pi^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=i\int_\pi^{2\pi}1dt=i\left(2\pi-\pi\right)=i\pi\ .$$

б) $f(z)=\bar{z}=x-iy$, $z\left(t\right)=t+i(t^2-1)$, па за интегралот добиваме

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_{-1}^{1} f(z(t))z'(t)dt=\int_{-1}^{1} f(t+i(t^2-1))(t+i(t^2-1))'\,dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[t-i(t^2-1)\right](1+2it)dt=\int_{-1}^{1}(t-it^2+i)(1+2it))dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}(t+2it^2-it^2+2t^3+i-2t)dt=\int_{-1}^{1}(2t^3-t)dt+i\int_{-1}^{1}(t^2+1)dt=$$

$$=\left(\frac{t^4}{2}-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}+i\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_{-1}^{1}=0-0+i\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}i.$$

Задача 4. Да се пресмета $\int\limits_{|z-a|=R}(z-a)^n\,dz$, за $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Кривата $\Gamma=\{z\,\|z-a|=R\}$ претставува кружница со центар во a и радиус R и таа може да се претстави во обликот

$$z(t)=a+Re^{it},\ t\in[0,2\pi].$$

За изводот на кривата имаме $z'(t)=\left(a+\mathrm{Re}^{it}\right)'=Rie^{it},\ t\in[0,2\pi]$, па за интегралот добиваме

$$\int\limits_{|z-a|=R}(z-a)^n\,dz=\int\limits_0^{2\pi}\left(a+\mathrm{Re}^{it}-a\right)^n Rie^{it}dt=\int\limits_0^{2\pi}R^n e^{\mathrm{int}}Rie^{it}dt=R^{n+1}\int\limits_0^{2\pi}ie^{it(n+1)}dt=$$

$$=R^{n+1}\int\limits_0^{2\pi}i\left(\cos(t(n+1))+i\sin(t(n+1))\right)dt=R^{n+1}i\int\limits_0^{2\pi}\cos(t(n+1))dt-R^{n+1}\int\limits_0^{2\pi}\sin(t(n+1))dt\,.$$

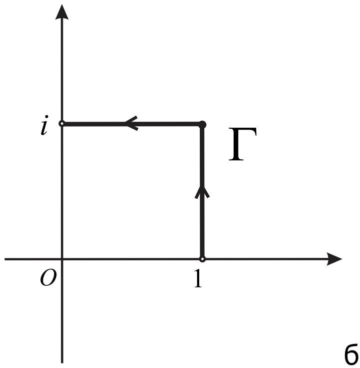
Сега, од

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos(t(n+1))dt=\left(\frac{1}{n+1}\sin(t(n+1))\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0,$$

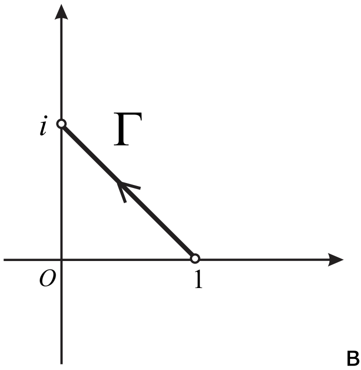
$$\int\limits_0^{2\pi}\sin(t(n+1))dt=\left(-\frac{1}{n+1}\cos(t(n+1))\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{1}{n+1}\cos(2\pi(n+1))+\frac{1}{n+1}\cos(0)=0$$

заклучуваме дека $\int\limits_{|z-a|=R}(z-a)^n\,dz=0$.

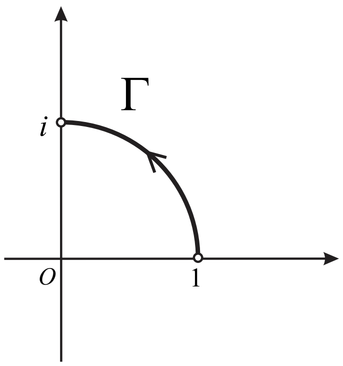
Задача 5. Да се пресмета $\int\limits_{\Gamma}\mathrm{Re}\,z\,dz$ ако:



а)



б)



в)

Решение.

а) Кривата Γ е унија од две отсечки Γ_1, Γ_2 каде

$$\Gamma_1=\{1+ti\,|\,0\le t\le 1\}\text{ и }\Gamma_2=\{t+i\,|\,t\ \text{од}\ 1\ \text{до}\ 0\}.$$

За интегралот имаме

$$\int\limits_{\Gamma}\mathrm{Re}\,z\,dz=\int\limits_{\Gamma_1}\mathrm{Re}\,z\,dz+\int\limits_{\Gamma_2}\mathrm{Re}\,z\,dz$$

$$\Gamma_1: \ z(t) = 1+ti,\ 0 \le t \le 1,\ f(z(t)) = \mathrm{Re}(z(t)) = \mathrm{Re}(1+ti) = 1,\ z'(t) = (1+ti)' = i,$$

па

$$\int_{\Gamma_1} \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_0^1 1 \cdot i\, dt = i,$$

и

$\Gamma_2: \ z(t) = t+i,$ од $t=1$ до $t=0$, $f(z(t)) = \mathrm{Re}(z(t)) = \mathrm{Re}(t+i) = t$, $z'(t) = (t+i)' = 1$,

па

$$\int_{\Gamma_2} \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_1^0 t \cdot 1\, dt = \left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^0 = -\frac{1}{2}.$$

Заклучуваме

$$\int_{\Gamma} \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_{\Gamma_1} \mathrm{Re}\, z\, dz + \int_{\Gamma_2} \mathrm{Re}\, z\, dz = i - \frac{1}{2}.$$

б) Кривата Γ е отсечката на правата што минува низ точките $1+0i,\ 0+i$. Од аналитичка геометрија, знаеме дека правата што минува низ точките $(1,0),\ (0,1)$ има облик

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{1-0}{0-1}(x-1) \Leftrightarrow y = -x+1.$$

Сега за да го добиеме параметарскиот облик на Γ треба $x \leftrightarrow t$, $\mathrm{Re}\, z = x = t,\ \mathrm{Im}\, z = y = -x+1 = -t+1$, па добиваме $\Gamma: z(t) = t + i(-\mathrm{t}+1)$, од $t=1$ до $t=0$ (од цртежот се гледа дека реалниот дел се движи од 1 до 0 за да се добие ориентацијата на кривата).

Значи,

$$\Gamma: z(t) = t + i(-\mathrm{t}+1), \text{ од } t=1 \text{ до } t=0,\ f(z(t)) = \mathrm{Re}(z(t)) = \mathrm{Re}(t+i(-\mathrm{t}+1)) = t,$$

$$z'(t) = (t+i(-t+1))' = 1-i,$$

па,

$$\int_{\Gamma} \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_1^0 t(1-i)\, dt = \left((1-i)\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^0 = -(1-i)\frac{1}{2}.$$

в) Кривата Γ е четвртина од кружницата $z(t) = e^{it}$, па затоа t се менува од $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$. Имаме

$$\Gamma: \ z(t) = e^{it}, \text{ од } t=0 \text{ до } t=\frac{\pi}{2},\ f(z(t)) = \mathrm{Re}(z(t)) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \mathrm{Re}(\cos t + i \sin t) = \cos t,$$

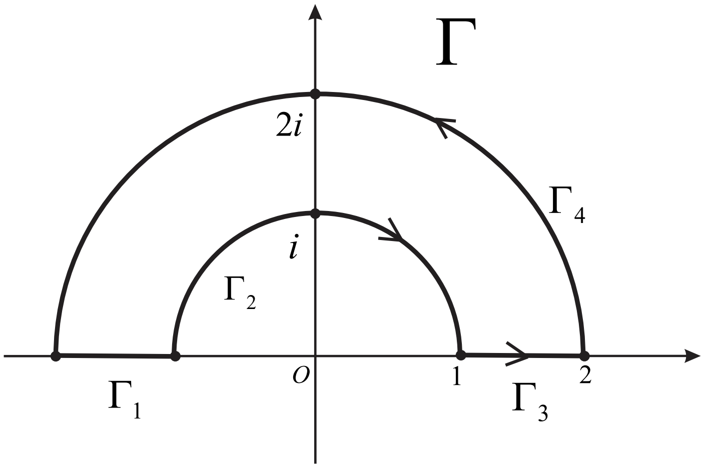
$$z'(t) = \left(e^{it}\right)' = ie^{it},$$

$$\int_{\Gamma} \mathrm{Re}\, z\, dz = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot ie^{it} dt = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot i(\cos t + i \sin t) dt =$$

$$= i\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt - \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt.$$

Заради едноставност и вежба, пресметката на последните интеграли се остава на читателот.

Задача 6. Да се пресмета $\int\limits_{\Gamma}\frac{z}{\overline{z}}dz$, каде $\Gamma = \partial D$ (со позитивна ориентација) за $D = \left\{ z \middle| 1 < |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 0 \right\}$.



.

Решение. Кривата $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, каде:

$$\Gamma_1 : z(t) = t,\ -2 \le t \le -1,\ z'(t) = t' = 1,\ f(z(t)) = \frac{t}{\overline{t}} = \frac{t}{t} = 1,$$

$$\int\limits_{\Gamma_1}\frac{z}{\overline{z}}dz = \int\limits_{-2}^{-1} 1\cdot 1\, dt = -1-(-2) = 1;$$

$\Gamma_2 : z(t) = e^{it}$, од $t = \pi$ до $t = 0$, $z'(t) = (e^{it})' = ie^{it}$, $f(z(t)) = \frac{e^{it}}{\overline{e^{it}}} = \frac{e^{it}}{e^{-it}} = e^{2it}$,

$$\int\limits_{\Gamma_2}\frac{z}{\overline{z}}dz = \int\limits_{\pi}^{0} e^{2it}\cdot ie^{it}\, dt = i\int\limits_{\pi}^{0} e^{3it}\, dt = i\int\limits_{\pi}^{0}(\cos 3t + i\sin 3t)\, dt = i\left(\frac{1}{3}\sin 3t - i\frac{1}{3}\cos 3t\right)\Bigg|_{\pi}^{0} = ;$$
$$= \frac{1}{3}\left(1-(-1)\right) = \frac{2}{3}$$

$$\Gamma_3 : z(t) = t,\ 1 \le t \le 2,\ z'(t) = t' = 1,\ f(z(t)) = \frac{t}{\overline{t}} = \frac{t}{t} = 1,$$

$$\int\limits_{\Gamma_1}\frac{z}{\overline{z}}dz = \int\limits_{1}^{2} 1\cdot 1\, dt = 2-1 = 1;$$

$$\Gamma_4 : z(t) = 2e^{it},\ \ 0 \le t \le \pi,\ z'(t) = (2e^{it})' = 2ie^{it},\ f(z(t)) = \frac{2e^{it}}{\overline{2e^{it}}} = \frac{2e^{it}}{2e^{-it}} = e^{2it},$$

$$\int\limits_{\Gamma_4}\frac{z}{\overline{z}}dz = \int\limits_{0}^{\pi} e^{2it}\cdot 2ie^{it}\, dt = 2i\int\limits_{0}^{\pi} e^{3it}\, dt = 2i\int\limits_{0}^{\pi}(\cos 3t + i\sin 3t)\, dt =$$

$$= 2i\left(\frac{1}{3}\sin 3t - i\frac{1}{3}\cos 3t\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = 2\cdot\frac{1}{3}\left(-1-1\right) = -\frac{4}{3}.$$

За бараниот интеграл, добиваме

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{z}{\overline{z}}dz = \int\limits_{\Gamma_1}\frac{z}{\overline{z}}\, dz + \int\limits_{\Gamma_2}\frac{z}{\overline{z}}\, dz + \int\limits_{\Gamma_3}\frac{z}{\overline{z}}\, dz + \int\limits_{\Gamma_4}\frac{z}{\overline{z}}\, dz = 1 + \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} = 2 - 2/3.$$

Задача 7. Нека функцијата $f(z)$ е непрекината во точката $z=0$. Да се докажат:

а) $\lim\limits_{r\to 0}\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})dt = 2\pi f(0)$; б) $\lim\limits_{r\to 0}\int\limits_{|z|=r} f(z)\frac{1}{z}dz = 2\pi i f(0)$.

Решение. а) Користејќи $2\pi f\left(0\right)=\int\limits_0^{2\pi} f(0)dt$ и неравенството на Дарбу, за $\left|\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})dt-2\pi f(0)\right|$, добиваме

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})dt-2\pi f(0)\right| = \left|\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})dt-\int\limits_0^{2\pi} f(0)dt\right| =$$

$$=\left|\int\limits_0^{2\pi}\left[f\left(re^{it}\right)-f(0)\right]dt\right| \le \int\limits_0^{2\pi}\left|f(re^{it})-f(0)\right|dt.$$

Функцијата $f(z)$ е непрекината во точката $z=0$, т.е.

$\left(\forall\varepsilon>0\right)$, $\left(\exists\delta_\varepsilon>0\right)$ така што за сите z, за кои $|z|<\delta_\varepsilon$ важи $|f(z)-f(0)|<\varepsilon$.

Нека ε е произволно избран позитивен реален број. Тогаш заради непрекинатоста на f во $z=0$, постои $\delta_1>0$ така што

$$\forall r>0,\ r<\delta_1 \text{ и } \forall t\in[0,2\pi] \text{ важи } \left|f(re^{it})-f(0)\right|<\frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

(Ова е точно бидејќи за $r<\delta_1 \Rightarrow \left|re^{it}\right|=r<\delta_1$.)

Оттука добиваме дека ако $0\le r<\delta_1$ тогаш

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|f(re^{it})-f(0)\right|dt<\int\limits_0^{2\pi}\frac{\varepsilon}{2\pi}dt=\varepsilon.$$

Користејќи ги почетните оценки за $\left|\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})dt-2\pi f(0)\right|$ и последното заклучуваме дека за секој $\varepsilon>0$, постои $\delta_1>0$ така што за сите $r\in(0,\delta_1)$ и $t\in[0,2\pi]$ важи

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})dt-2\pi f(0)\right|<\varepsilon,$$

односно важи $\lim\limits_{r\to 0}\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})dt=2\pi f(0)$.

б) Од

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz-2\pi i f(0)\right|=\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz-\int_0^{2\pi} i f(0)dt\right|=$$

$$=\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{re^{it}}ire^{it}dt-\int_0^{2\pi} i f(0)dt\right|=\left|\int_0^{2\pi} i f(re^{it})dt-\int_0^{2\pi} i f(0)dt\right|=$$

$$=\left|\int_0^{2\pi} i\left(f(re^{it})-f(0)\right)dt\right|\leq\int_0^{2\pi}\underbrace{|i|}_{=1}\left|\left(f(re^{it})-f(0)\right)\right|dt=\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})-f(0)\right|dt$$

и, со постапка слично како во а), следува дека $\lim\limits_{r\to 0}\int\limits_{|z|=r} f(z)\frac{1}{z}dz=2\pi i f(0)$.

Задача 8. Да се докаже неравенството $\left|\int\limits_C f(z)g(z)dz\right|^2\leq\int\limits_C|f(z)|^2|dz|\cdot\int\limits_C|g(z)|^2|dz|$, каде функциите f,g се непрекинати на $\mathbb{C}$.

Решение. За $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, разгледуваме функција $H(\lambda,\mu)=\int\limits_C\left|\lambda f(z)+\mu\overline{g(z)}\right|^2|dz|$ од λ,μ. Тогаш

$$H(\lambda,\mu)=\int_C\underbrace{\left|\lambda f(z)+\mu\overline{g(z)}\right|^2}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{|dz|}_{\in\mathbb{R}}\geq 0 \text{ за сите } \lambda,\mu\in\mathbb{C}.$$

Од друга страна, имаме

$$\left|\lambda f(z)+\mu\overline{g(z)}\right|^2=\left(\lambda f(z)+\mu\overline{g(z)}\right)\overline{\left(\lambda f(z)+\mu\overline{g(z)}\right)}=$$

$$=\left(\lambda f(z)+\mu\overline{g(z)}\right)\left(\overline{\lambda}\,\overline{f(z)}+\overline{\mu}g(z)\right)=|\lambda|^2|f(z)|^2+\lambda\overline{\mu}f(z)g(z)+\mu\overline{\lambda}\,\overline{g(z)}\,\overline{f(z)}+|\mu|^2|g(z)|^2.$$

Точни се следните еквиваленции:

$$\int_C\left|\lambda f(z)+\mu\overline{g(z)}\right|^2|dz|\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_C\left(|\lambda|^2|f(z)|^2+\lambda\overline{\mu}f(z)g(z)+\mu\overline{\lambda}\,\overline{g(z)}\,\overline{f(z)}+|\mu|^2|g(z)|^2\right)|dz|\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|\lambda|^2\int_C|f(z)|^2|dz|+\lambda\overline{\mu}\int_C\left(f(z)g(z)\right)|dz|+\overline{\lambda}\mu\int_C\overline{\left(f(z)g(z)\right)}|dz|+|\mu|^2\int_C|g(z)|^2|dz|\geq 0.$$

Означувајќи $A=\int\limits_C|f(z)|^2|dz|,\ B=\int\limits_C\left(f(z)g(z)\right)|dz|,\ C=\int\limits_C|g(z)|^2|dz|$, последното неравенство е еквивалентно со

$$|\lambda|^2A+\lambda\overline{\mu}B+\overline{\lambda}\mu\overline{B}+|\mu|^2C\geq 0.$$

Согласно задачата 13 од втората глава, добиваме дека треба да важи $A\geq 0, C\geq 0$ и $B^2\leq AC$. Од $B^2\leq AC$ следува $\left|\int\limits_C f(z)g(z)dz\right|^2\leq\int\limits_C|f(z)|^2|dz|\cdot\int\limits_C|g(z)|^2|dz|$.

Задача 9. Да се докаже неравенството

$$\left|\int_C f(z)g(z)dz\right|\leq\left(\int_C|f(z)|^p|dz|\right)^{1/p}\cdot\left(\int_C|g(z)|^q|dz|\right)^{1/q},$$

каде $p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и функциите f, g се непрекинати на $\mathbb{C}$.

Решение. Нека $p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ако a_i, b_i се комплексни броеви. Тогаш, од неравенството на Холдер, имаме

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/\mathrm{q}} \qquad (*)$$

Ако земаме поделба $z_0, z_1, \ldots, z_n$ на кривата C и избереме $\xi_i \in лакот(z_{i-1}z_i)$, тогаш

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g(\xi_i)(z_i - z_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g(\xi_i)(z_i - z_{i-1})^{1/p+1/q}\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(z_i - z_{i-1})^{1/p} g(\xi_i)(z_i - z_{i-1})^{1/q}\right| \underset{(*)}{\le} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|^p |z_i - z_{i-1}|\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i)|^q |z_i - z_{i-1}|\right)^{1/q}.$$

Согласно дефиницијата на интеграл од комплексна функција по крива, следува

$$\left|\int_C f(z) g(z) dz\right| \le \left(\int_C |f(z)|^p |dz|\right)^{1/p} \cdot \left(\int_C |g(z)|^q |dz|\right)^{1/q}.$$

Задача 10. Да се пресмета, по дефиниција, $\int_\Gamma z\,dz$, каде Γ произволна Жорданова крива.

Решение. Се остава на читателот.

8. Кошиева интегрална теорема и последици

Кошиева интегрална теорема. Ако функцијата $f(z)$ е холоморфна на едносврзлива област D и Γ е произволна затворена крива која се содржи во D, тогаш $\int_\Gamma f(z) dz = 0$.

Кошиева интегрална формула. Нека функцијата $f(z)$ е холоморфна на едносврзлива област D и непрекината на $D \cup \partial D$. Тогаш, за $a \in D$, важат

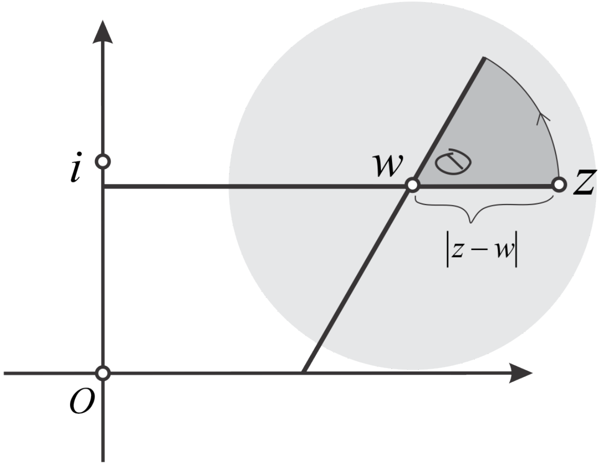
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \text{(Кошиева интегрална формула)}$$

и

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{(Обопштена Кошиева интегрална формула)}$$

Лема на Жордано. Нека $f(z)$ е непрекината функција на област D, каде $D = \left\{ z \,\middle|\, 0 < |z-w| < R,\ 0 \le \arg(z-w) \le \theta \right\}$ за $0 \le \theta \le 2\pi$ фиксен и нека постои лимесот

$\lim\limits_{z\to w}\left(z-w\right)f(z)=k$. Да се докаже дека $\lim\limits_{r\to 0}\int\limits_{L} f(z)dz=\pi\theta k$, каде L е дел од кружница $\left|z-w\right|=r$, која се наоѓа во областа D.

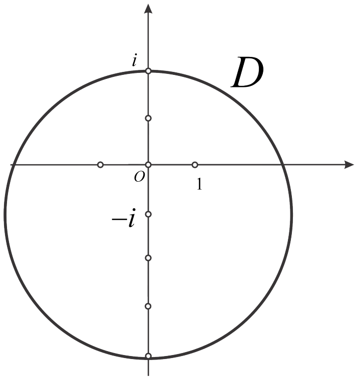


Задача 1. Користејќи ја Кошиевата интегрална формула да се пресметаат следните интеграли:

а) $\int\limits_{|z+i|=3}\frac{\sin z}{z+i}dz$; б) $\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}$; в) $\int\limits_{|z+1|=1}\frac{dz}{\left(1-z\right)\left(z+1\right)^3}dz$; г) $\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-1}dz$.

Решение.

а) Кривата $\Gamma:\left|z+i\right|=3$ и областа $D=\left\{z\,\middle|\,\left|z+i\right|<3\right\}$ се претставени на следниов цртеж.

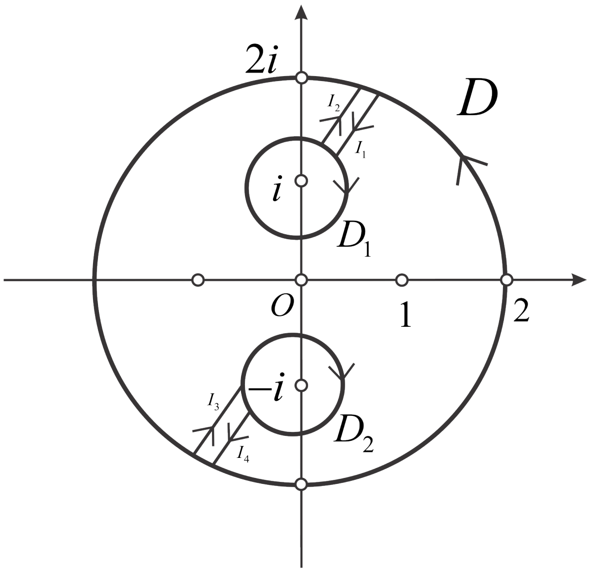


Функцијата $f(z)=\sin z$ е холоморфна на областа $D=\left\{z\,\middle|\,\left|z+i\right|<3\right\}$ и точката $a=-i\in D$ бидејќи $\left|a+i\right|=\left|-i+i\right|=0<3$. Тогаш од Кошиевата интегрална формула имаме дека:

$$\int\limits_{|z+i|=3}\frac{\sin z}{z+i}dz=\int\limits_{|z+i|=3}\frac{f(z)}{z-(-i)}dz=2\pi i f(-i)=2\pi i\sin(-i).$$

б) За функцијата $f\left(z\right)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}$ точките $z_1=i$ и $z_2=-i$ се единствените сингуларни точки во $\mathbb{C}$, и истите припаѓаат на областа $D=\left\{z\,\middle|\,\left|z\right|<2\right\}$.

За да може да се примени интегралната формула на Коши, избираме доволно мали кружници C_1, C_2, со внатрешности D_1, D_2 соодветно, такви што $i \in \operatorname{int} C_1 = D_1,\ -i \in \operatorname{int} C_2 = D_2$, C_1, C_2 се содржани во $D = \{z \mid |z| < 2\}$ и да имаат празен пресек. Имаме $\partial D_1 = C_1,\ \partial D_2 = C_2$ и $D_1, D_2 \subset D,\ D_1 \cap D_2 = \varnothing$. (како што е прикажано на следниов цртеж)



Тогаш $f \in H\left(\overline{D} \setminus \left(D_1 \cup D_2\right)\right)$, ($\partial\left(\overline{D} \setminus \left(D_1 \cup D_2\right)\right) = \Gamma_1$,
$\Gamma_1 = \partial D \cup I_1 \cup \partial D_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \partial D_2 \cup I_4$, па од интегралната теорема на Коши следува дека

$$\int_{\partial D} f(z)dz + \int_{I_1} f(z)dz + \int_{I_2} f(z)dz + \int_{I_3} f(z)dz + \int_{I_4} f(z)dz + \int_{\partial D_1} f(z)dz + \int_{\partial D_2} f(z)dz = 0 .$$

Од друга страна, $\int_{I_1} f(z)dz + \int_{I_2} f(z)dz = 0$ и $\int_{I_2} f(z)dz + \int_{I_3} f(z)dz = 0$, како збир на интеграли над исти криви со спротивни ориентации, па добиваме

$$\int_{\partial D} f(z)dz = -\int_{\partial D_1} f(z)dz - \int_{\partial D_2} f(z)dz .$$

Ако $\partial D_1^-,\ \partial D_2^-$ се, соодветно, кривите $\partial D_1,\ \partial D_2$ со спротивна ориентација, тогаш последниот израз е еквивалентен со

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\partial D_1^-} f(z)dz + \int_{\partial D_2^-} f(z)dz .$$

Притоа, ориентациите на $\partial D, \partial D_1^-, \partial D_2^-$ се позитивни.

За бараниот интеграл имаме:

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}=\int\limits_{\partial D_1^-}\frac{dz}{z^2+1}dz+\int\limits_{\partial D_2^-}\frac{dz}{z^2+1}dz\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}=\int\limits_{\partial D_1^-}\frac{\frac{1}{z+i}dz}{z-i}dz+\int\limits_{\partial D_2^-}\frac{\frac{1}{z-i}dz}{z+i}dz.$$

Означувајќи $\varphi_1(z)=\frac{1}{z+i},\ \varphi_2(z)=\frac{1}{z-i}$ добиваме

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}=\int\limits_{\partial D_1^-}\frac{\varphi_1(z)dz}{z-i}dz+\int\limits_{\partial D_2^-}\frac{\varphi_2(z)dz}{z+i}dz\,,$$

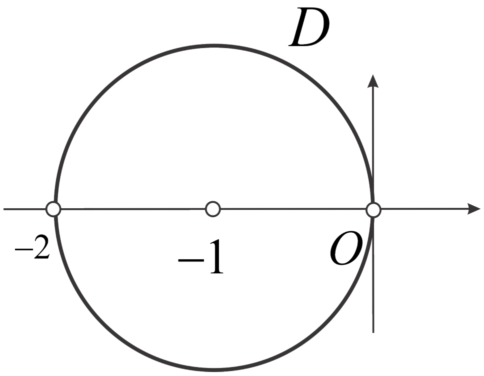
каде $\varphi_1(z)\in H(D_1),\ \varphi_2(z)\in H(D_2)$, $-i\notin D_1,\ i\notin D_2$. Од интегралната формула на Коши, имаме

$$\int\limits_{\partial D_1^-}\frac{\varphi_1(z)dz}{z-i}dz=2\pi i\varphi_1(i)=2\pi i\frac{1}{i+i}=\pi$$

$$\int\limits_{\partial D_2^-}\frac{\varphi_2(z)dz}{z+i}dz=2\pi i\varphi_2(-i)=2\pi i\frac{1}{-i-i}=-\pi$$

па добиваме $\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+1}=\pi+(-\pi)=0$.

в) Кривата $\Gamma:|z+1|=1$ и областа $D=\{z\,|\,|z+1|<1\}$ се претставени на следниов цртеж.



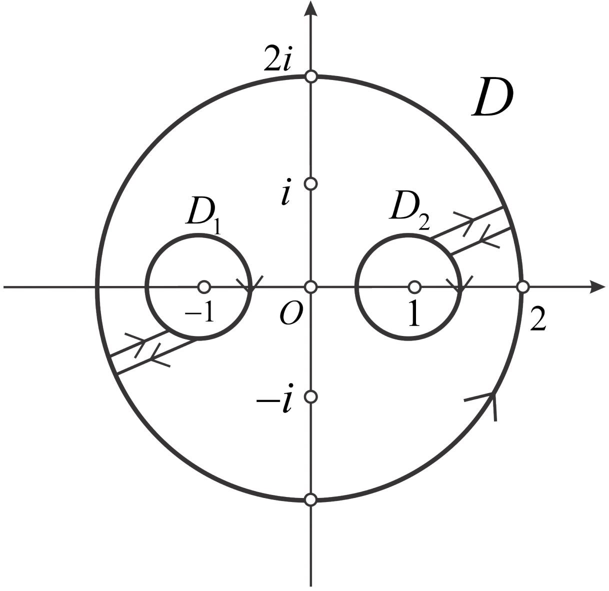
Функцијата $f(z)=\frac{1}{(1-z)(z+1)^3}$ има сингуларитет само во точката $z_1=-1$ (бидејќи $z_2=1\notin D$). Но, $z_1=-1$ е нула на $(1-z)(z-1)^3$ од кратност 3, па со примена на обопштената формула на Коши за $\varphi(z)=\frac{1}{1-z}\in H(D)$, добиваме

$$\int\limits_{|z+1|=1}\frac{1}{(1-z)(z+1)^3}dz=\int\limits_{|z+1|=1}\frac{\frac{1}{1-z}}{(z-(-1))^3}dz\underset{n=2}{=}\frac{2\pi i}{2!}\varphi''(-1)\,.$$

Од $\varphi'(z)=\dfrac{1}{\left(1-z\right)^2}$, следува $\varphi''(z)=\left(\dfrac{1}{\left(1-z\right)^2}\right)'=\dfrac{-2(1-z)(-1)}{\left(1-z\right)^4}=\dfrac{2}{\left(1-z\right)^3}$, за бараниот интеграл добиваме

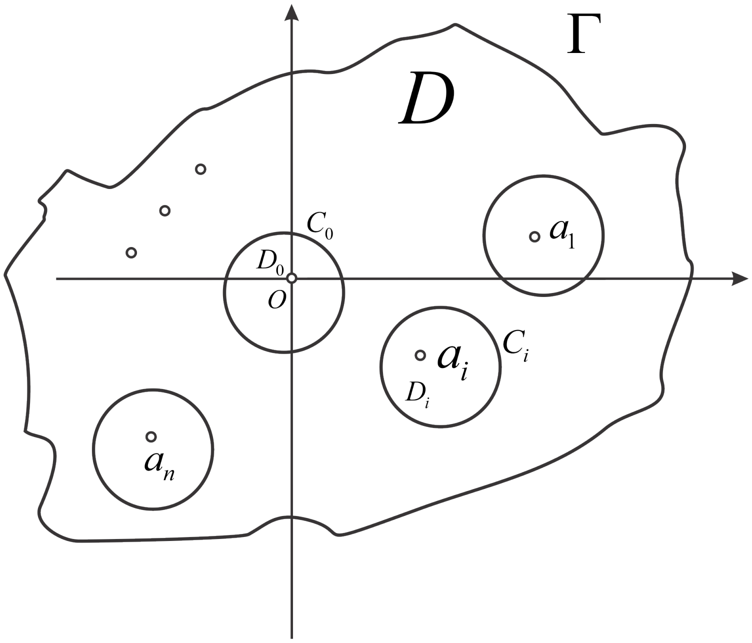
$$\int\limits_{|z+1|=1}\frac{1}{\left(1-z\right)\left(z+1\right)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{2}{8}\right)=\frac{\pi i}{4}.$$

г) Се остава на читателот. (Упатство. Да се користи следниов цртеж)



Задача 2. Да се пресмета интегралот $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{zg(z)}dz$, каде Γ е затворена Жорданова, дел по дел глатка крива во чија внатрешност лежи точката $z=0$, а f,g се холоморфни функции на $\Gamma\cup Int\Gamma$ и $g(z)$ има прости нули $a_1,a_2,\dots,a_n$ кои припаѓаат на $Int\Gamma$ и $a_i\neq 0$ за сите $i\in\{1,2,\dots,n\}$.

Решение. Согласно дадените услови, го имаме следниов цртеж.



За функцијата $F(z)=\frac{f(z)}{zg(z)}$, само точките $0,a_1,a_2,...,a_n$ се сингуларни точки во $\Gamma\cup Int\Gamma$. Опишуваме кружници $C_0,C_1,C_2,...,C_n$ околу тие точки, соодветно, така што $C_i\subset Int\Gamma$ за сите $i\in\{0,1,2,...,n\}$ и $C_i\cap C_j=\varnothing$ за $i\neq j$, $1\leq i,j\leq n$.

Функцијата $F(z)=\frac{f(z)}{zg(z)}$ е холоморфна на $\left(\Gamma\cup Int\Gamma\right)\setminus\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n}D_i\right)$, каде $D_i=IntC_i$. Според теоремата на Коши (се докажува слично како во задача 1, б), добиваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{zg(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}F(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=0}^{n}\int\limits_{C_i}F(z)dz\,.$$

Бидејќи единствени нули на функцијата $g(z)$ се $a_1,a_2,...,a_n$ добиваме дека за секој $i\in\{1,2,...,n\}$, $g(z)=(z-a_i)h_i(z)$, каде $h_i(z)\neq 0$ за $z\in D_i$, па, за секој $i\in\{1,2,...,n\}$, $\frac{f(z)}{zg(z)}=\frac{f(z)}{z(z-a_i)h_i(z)}=\frac{\frac{f(z)}{zh_i(z)}}{(z-a_i)}$ и $\frac{f(z)}{zh_i(z)}\in H(\mathrm{D}_i)$. Со примена на интегрална формула на Коши, имаме:

За C_i:

$$\int\limits_{C_i}F(z)dz=\int\limits_{C_i}\frac{f(z)}{zg(z)}dz=\int\limits_{C_i}\frac{f(z)}{z(z-a_i)h_i(z)}dz=\int\limits_{C_i}\frac{\frac{f(z)}{zh_i(z)}}{(z-a_i)}dz=2\pi i\left(\frac{f(a_i)}{a_ih_i(a_i)}\right);$$

За C_0:

$$\int\limits_{C_0}F(z)dz=\int\limits_{C_0}\frac{f(z)}{zg(z)}dz=\int\limits_{C_0}\frac{\frac{f(z)}{g(z)}}{z-0}dz\underset{\frac{f(z)}{g(z)}\in H(D_0)}{=}2\pi i\frac{f(0)}{g(0)}\,.$$

Од друга страна, од $g(z)=(z-a_i)h_i(z)$, добиваме $\dfrac{g(z)}{z-a_i}=h_i(z)$, а бидејќи $a_1,a_2,...,a_n$ се нули на $g(z)$, последниот израз може да се запише во обликот $\dfrac{g(z)-g(a_i)}{z-a_i}=h_i(z)$, па $h_i(a_i)=\lim\limits_{z\to a_i}h_i(z)=\lim\limits_{z\to a_i}\dfrac{g(z)-g(a_i)}{z-a_i}=g'(a_i)$. Добиваме

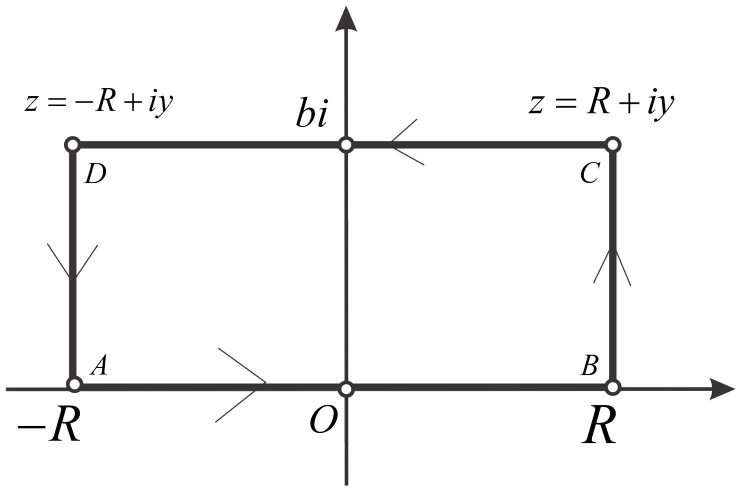
$$\int\limits_{C_i}F(z)dz=2\pi i\left(\frac{f(a_i)}{a_i g'(a_i)}\right)$$

па бараниот интеграл е

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{zg(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}2\pi i\frac{f(0)}{g(0)}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{n}2\pi i\left(\frac{f(a_i)}{a_i g'(a_i)}\right)=\frac{f(0)}{g(0)}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(a_i)}{a_i g'(a_i)}\right).$$

Задача 3. Да се докаже дека $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2}$.

Решение. Ја разгледуваме областа $L=\{z\,|\,0<\operatorname{Im}z<b,\ -R<\operatorname{Re}z<R\}$, преставена на следниов цртеж.



Функцијата $f(z)=e^{-z^2}$ е холоморфна на $\mathbb{C}$, па од теоремата на Коши следува

$$\int\limits_{\partial L}f(z)dz=0,$$

што е еквивалентно со

$$0=\int\limits_{\partial L}f(z)dz=\int\limits_{\overline{AB}}f(z)dz+\int\limits_{\overline{BC}}f(z)dz+\int\limits_{\overline{CD}}f(z)dz+\int\limits_{\overline{DA}}f(z)dz.$$

Посебно, ќе ги разгледаме сите интеграли:

1) $\overline{AB}$: $z(t)=t$, $-R\le t\le R$, $z'(t)=1$ и уште $f(z(t))=e^{-t^2}$, па

$$\int\limits_{\overline{AB}}f(z)dz=\int\limits_{-R}^{R}e^{-t^2}dt;$$

2) $\overline{BC}$: $z(t)=R+it$, $0\le t\le b$, $z'(t)=i$ и уште $f(z(t))=e^{-(R+it)^2}$, па

$$\int\limits_{\overline{BC}}f(z)dz=\int\limits_{0}^{b}ie^{-(R+it)^2}dt=i\int\limits_{0}^{b}e^{-(R+it)^2}dt;$$

3) $\overline{CD}$: $z(t)=t+ib$, t од R до $-R$, $z'(t)=1$ и уште $f\left(z(t)\right)=e^{-(t+ib)^2}$, па

$$\int\limits_{\overline{CD}} f(z)dz=\int\limits_{R}^{-R} e^{-(t+ib)^2}dt;$$

4) $\overline{DA}$: $z(t)=-R+it$, t од b до 0, $z'(t)=i$ и уште $f\left(z(t)\right)=e^{-(-R+it)^2}$, па

$$\int\limits_{\overline{DA}} f(z)dz=\int\limits_{b}^{0} ie^{-(-R+it)^2}dt=\frac{1}{i}\int\limits_{0}^{b} e^{-(-R+it)^2}dt.$$

Добиваме

$$\int\limits_{\partial L} f(z)dz=\int\limits_{-R}^{R} e^{-t^2}dt+i\int\limits_{0}^{b} e^{-(R+it)^2}dt+\int\limits_{R}^{-R} e^{-(t+ib)^2}dt+\frac{1}{i}\int\limits_{0}^{b} e^{-(-R+it)^2}dt. \qquad (*)$$

Ако побараме лимес во (*) кога $R\to\infty$, добиваме:

1) Познато е дека $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} e^{-t^2}dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

2) $\lim\limits_{R\to\infty} i\int\limits_{0}^{b} e^{-(R+it)^2}dt=\lim\limits_{R\to\infty} i\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2-2Rit+t^2}dt$. Од $0\le t\le b$, имаме

$$e^{-R^2+t^2}\le e^{-R^2+b^2} \qquad (1)$$

$$\left|i\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2-2Rit+t^2}dt\right|=|i|\left|\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2-2Rit+t^2}dt\right|=\left|\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2-2Rit+t^2}dt\right|\le\int\limits_{0}^{b}\left|e^{-R^2-2Rit+t^2}\right|dt\le$$

$$=\int\limits_{0}^{b}\left|e^{-R^2+t^2}e^{-2Rti}\right|dt=\int\limits_{0}^{b}\left|e^{-R^2+t^2}\right|\underbrace{\left|e^{-2Rti}\right|}_{=1}dt=\int\limits_{0}^{b}\left|e^{-R^2+t^2}\right|dt\le$$

$$\underset{(1)}{\le}\int\limits_{0}^{b}\left|e^{-R^2+b^2}\right|dt\underset{e^{-R^2+b^2}>0}{=}\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2+b^2}\,dt=e^{-R^2+b^2}\int\limits_{0}^{b}1dt=be^{-R^2+b^2}=\frac{be^{b^2}}{e^{R^2}}.$$

Докажавме $0\le\left|i\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2-2Rit+t^2}dt\right|\le\dfrac{be^{b^2}}{e^{R^2}}$, па ако побараме лимес во последното неравенство кога $R\to\infty$, и заради $\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{be^{b^2}}{e^{R^2}}=0$, добиваме $\lim\limits_{R\to\infty}\left|i\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2-2Rit+t^2}dt\right|=0$, па

$$\lim_{R\to\infty}\left(i\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2-2Rit+t^2}dt\right)=0.$$

3)

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{R}^{-R} e^{-(t+ib)^2}dt=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{R}^{-R} e^{-t^2-2tbi+b^2}dt\underset{t=-u,\,dt=-du}{=}-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} e^{-u^2+2ubi+b^2}du=$$

$$=-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} e^{-u^2+b^2}e^{2ubi}du=-e^{b^2}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} e^{-u^2}e^{2ubi}du=-e^{b^2}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} e^{-u^2}\left[\cos(2ub)+i\sin(2ub)\right]du=$$

$$=-e^{b^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos(2ub)du-ie^{b^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\sin(2ub)du$$

4) Слично, како во 2), се докажува дека $\lim\limits_{R\to\infty}\left(\dfrac{1}{i}\int\limits_{0}^{b} e^{-(-R+it)^2}dt\right)=0$.

Со замена на пресметките од 1), 2), 3) и 4) во (*) добиваме

$$\sqrt{\pi}+0+\left(-e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos(2ub)du - ie^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\sin(2ub)du\right)+0=0,$$

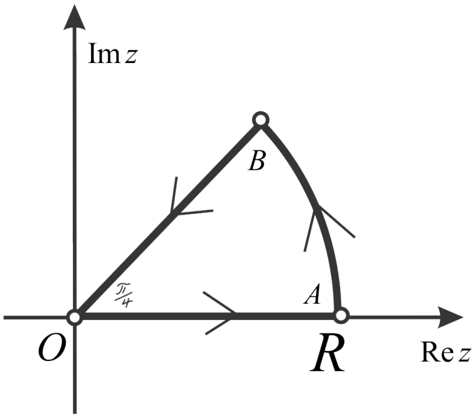
од каде следува дека

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos(2ub)du=\frac{\sqrt{\pi}}{e^{b^2}}.$$

Задача 4. Користејќи дека $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ докажи дека

$$\int_0^{\infty}\cos t^2 dt=\int_0^{\infty}\sin t^2 dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Решение. Ја разгледуваме областа $L=\left\{z\,\middle|\,0<\arg z<\pi/4,\ |z|<R\right\}$, претставена на следниов цртеж.



Функцијата $f(z)=e^{-z^2}$ е холоморфна на $\mathbb{C}$, па од теоремата на Коши, добиваме

$$\int_{\partial L} f(z)dz=0$$

Имаме

$$0=\int_{\partial L} f(z)dz=\int_{\overline{OA}} f(z)dz+\int_{AB} f(z)dz+\int_{\overline{BO}} f(z)dz. \qquad (**)$$

Посебно, ќе ги разгледаме сите интеграли во (**):

1) $\overline{OA}$: $z(t)=t$, $0\le t\le R$, $z'(t)=1$ и $f\left(z(t)\right)=e^{-t^2}$, па

$$\int_{\overline{OA}} f(z)dz=\int_0^R e^{-t^2}dt;$$

2) AB: $z(t)=\mathrm{Re}^{ti}$, $0\le t\le\frac{\pi}{4}$, $z'(t)=Rie^{ti}$ и $f\left(z(t)\right)=e^{-\left(\mathrm{Re}^{ti}\right)^2}$, па

$$\int_{лак(AB)} f(z)dz=\int_0^{\pi/4} e^{-\left(\mathrm{Re}^{ti}\right)^2}Rie^{ti}dt=Ri\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\mathrm{e}^{2ti}}e^{ti}dt;$$

3) $\overline{BO}$: $z(t)=te^{i\frac{\pi}{4}}$, $t\,од\,R\,до\,0$, $z'(t)=e^{i\frac{\pi}{4}}$ и

$$f\left(z(t)\right)=e^{-\left(te^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}=e^{-\left[t^2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2\right]}=e^{-\left[t^2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]}=e^{-\left[t^2(0+i\cdot 1)\right]}=e^{-it^2}$$, па

$$\int\limits_{\overline{BO}} f(z)dz=\int\limits_R^0 e^{-\left(te^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}e^{i\frac{\pi}{4}}dt=\int\limits_R^0 e^{-it^2}e^{i\frac{\pi}{4}}dt=e^{i\frac{\pi}{4}}\int\limits_R^0 e^{-it^2}dt\,.$$

Од 1), 2) и 3), добиваме:

1’) $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^R e^{-t^2}dt=\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt\underset{e^{-t^2}\ епарна}{=}\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

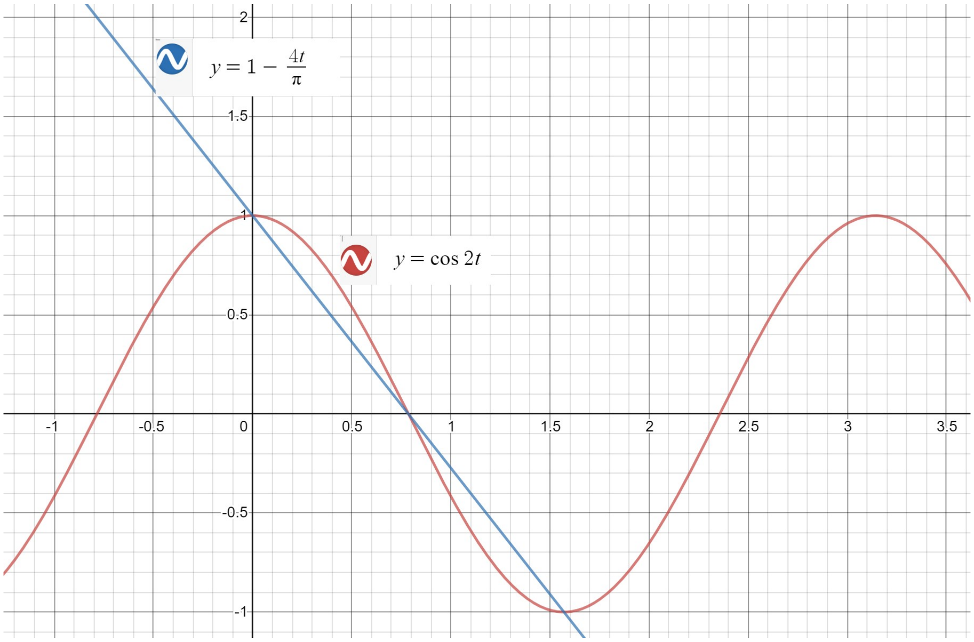
3’)

$$\int\limits_{\overline{BO}} f(z)dz=\lim_{R\to\infty}e^{i\frac{\pi}{4}}\int\limits_R^0 e^{-it^2}dt=e^{i\frac{\pi}{4}}\lim_{R\to\infty}\int\limits_R^0\left[\cos\left(t^2\right)-i\sin\left(t^2\right)\right]dt=-e^{i\frac{\pi}{4}}\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R\left(\cos\left(t^2\right)-i\sin\left(t^2\right)\right)dt=$$

$$=-e^{i\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^\infty\cos\left(t^2\right)dt+ie^{i\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^\infty\sin\left(t^2\right)dt;$$

2’)

$$\left|\int\limits_{лак(AB)} f(z)dz\right|=\left|Ri\int\limits_0^{\pi/4}e^{-R^2e^{2ti}}e^{ti}dt\right|=R\left|\int\limits_0^{\pi/4}e^{-R^2e^{2ti}}e^{ti}dt\right|\le R\int\limits_0^{\pi/4}\left|e^{-R^2e^{2ti}}\right|\left|e^{ti}\right|dt=R\int\limits_0^{\pi/4}\left|e^{-R^2e^{2ti}}\right|dt$$



Бидејќи $\cos 2t\ge 1-\frac{4t}{\pi}$ за $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ (види цртеж) следува

$$R\int\limits_0^{\pi/4}\left|e^{-R^2e^{2ti}}\right|dt=R\int\limits_0^{\pi/4}\left|e^{-R^2(\cos 2t+i\sin 2t)}\right|dt=R\int\limits_0^{\pi/4}\left|e^{-R^2\cos 2t}\right|\left|e^{-iR^2\sin 2t}\right|dt=$$

.

$$=R\int\limits_0^{\pi/4}e^{-R^2\cos 2t}dt\le R\int\limits_0^{\pi/4}e^{-R^2\left(1-\frac{4t}{\pi}\right)}dt$$

За последниот интеграл, имаме

$$R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\left(1-\frac{4t}{\pi}\right)}dt = \mathrm{Re}^{-R^2}\int_0^{\pi/4} e^{R^2\frac{4t}{\pi}}dt \underset{R^2\frac{4t}{\pi}=u,\, dt=\frac{\pi}{4R^2}du}{=} \mathrm{Re}^{-R^2}\left(\frac{\pi}{4R^2}e^{R^2\frac{4t}{\pi}}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= \mathrm{Re}^{-R^2}\frac{\pi}{4R^2}\left(e^{R^2}-1\right) = \frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right) \to 0 \quad \textit{кога} \;\; R\to\infty.$$

Со замена на резултатите од 1′), 2′) и 3′) во (**) , добиваме

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}+0+\left(-e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty \cos\left(t^2\right)dt + ie^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty \sin\left(t^2\right)dt\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}+0+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left[\int_0^\infty \cos\left(t^2\right)dt - i\int_0^\infty \sin\left(t^2\right)\right]dt\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left[\int_0^\infty \cos\left(t^2\right)dt - i\int_0^\infty \sin\left(t^2\right)\right]dt \quad /(1-i) \Leftrightarrow$$

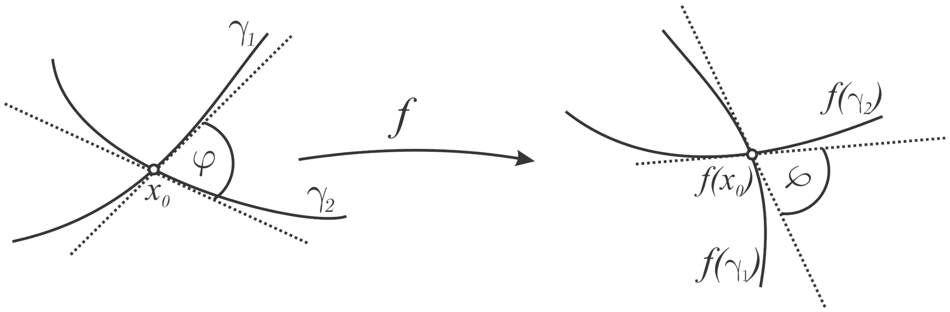
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\mathrm{i})=\frac{\sqrt{2}}{2}2\left[\int_0^\infty \cos\left(t^2\right)dt - i\int_0^\infty \sin\left(t^2\right)\right]dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}-i\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{2}\int_0^\infty \cos\left(t^2\right)dt - i\sqrt{2}\int_0^\infty \sin\left(t^2\right)dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\infty \cos\left(t^2\right)dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \wedge \int_0^\infty \sin\left(t^2\right)dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

9. Конформни пресликувања

Дефиниција. Нека D е област. Велиме дека f е конформно пресликување во точката $z_0 \in D$ ако f го запазува аголот меѓу кои било две криви што се сечат во точката z_0.



Теорема. Нека f е холоморфна функција во околина на z_0 и $f'(z_0)\neq 0$. Тогаш f е конформно пресликување во z_0.

Пресликувањето $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$ се нарекува Мобиусова трансформација и е конформно пресликување.

Теорема. Ако $w=f(z)$ е конформно пресликување на D и ако $w(D)$ е слика на D при f, тогаш $f(\partial D)=\partial f(D)$.

Дефиниција. Ако $K(O,R)$ е кружница со центар во O и радиус R, тогаш велиме дека точките A,B се симетрични во однос на кружницата K ако важи условот

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=R^2.$$

По дефиниција, симетрична точка на центарот на кружницата K е ∞. Секоја точка од работ на кружницата е симетрична сама на себе.

Теорема. Нека $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$ и нека z и z_k се симетрични во однос на кружницата K_1. Тогаш точките $w(z)$, $w(z_k)$ се симетрични во однос на (правата или кружницата) $w(K_1)$.

Задача 1. Дадена е функцијата $w(z)=3z+i$ и областа $D=\left\{z=x+iy\,\middle|\,x^2+y^2-2x\leq 0\right\}$. Да се определи $w(D)$.

Решение. Границата на областа D, ∂D, е кривата

$$x^2+y^2-2x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=1.$$

За да се определи сликата на D при w доволно е да ја најдеме сликата на ∂D. Нека $z=x+iy\in\partial D$. Тогаш

$$(x-1)^2+y^2=1^2 \tag{1}$$

Од друга страна, $w(z)=3z+i=3(x+iy)+i=3x+(3y+1)i$. Од тоа што функцијата w може да се напише во облик $u+iv$, каде $u=\operatorname{Re}w$, $v=\operatorname{Im}w$ следува

$$u+iv=3x+(3y+1)i\Rightarrow u=3x,\ v=3y+1$$
$$\Rightarrow x=\frac{u}{3},\ y=\frac{v-1}{3}.$$

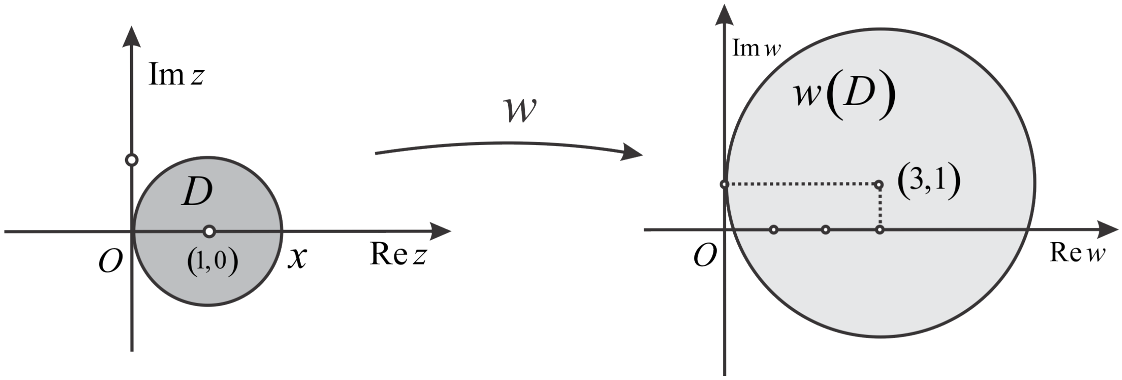
Од (1) добиваме

$$\left(\frac{u}{3}-1\right)^2+\left(\frac{v-1}{3}\right)^2=1\ /\cdot 3^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(u-3)^2+(v-1)^2=3^2.$$

Последното множество од точки е кружница $K(S,3)$, со центар во точката $S(3,1)$ и радиус $R=3$. Добивме дека $w(\partial D)=K(S,3)$. Сега, избираме точка $z_0=1$ од внатрешноста на D. Сликата на z_0 при w е $w(z_0)=w(1)=3\cdot 1+i=3+i$ и припаѓа во внатрешност на кругот $D(S,3)=\left\{u+iv\,\middle|\,(u-3)^2+(v-1)^2\leq 3^2\right\}$, па добиваме дека внатрешноста на D се пресликува во внатрешноста на $D(S,3)$.

Заклучуваме дека

$$w(D)=\left\{u+iv\,\middle|\,(u-3)^2+(v-1)^2\le 3^2\right\}.$$



Задача 2. Дадена е функцијата $w(z)=\dfrac{2z-i}{2+iz}$ и обласата $D=\left\{z\,\middle|\,|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\right\}$. Да се определи $w(D)$.

Решение. Ако ја решаваме равенката $w(z)=w$ по променливата z имаме:

$$w=\frac{2z-i}{2+iz}\Leftrightarrow w\left(2+iz\right)=2z-i\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow wiz-2z=-2w-i\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\left(wi-2\right)=-2w-i\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2w-i}{wi-2}=\frac{2w+i}{2-wi}\Leftrightarrow$$

т.е.

$$z=\frac{-2w-i}{wi-2}=\frac{2w+i}{2-wi}. \tag{1}$$

Ако $z\in D$, тогаш $|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0$.

Од (1) имаме дека:

$$|z|<1\Leftrightarrow\left|\frac{2w+i}{2-iw}\right|<1\Leftrightarrow\left|\frac{2w+i}{2-iw}\right|^2<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2w+i}{2-iw}\right)\overline{\left(\frac{2w+i}{2-iw}\right)}<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(2w+i\right)}{\left(2-iw\right)}\frac{\left(2\overline{w}-i\right)}{\left(2+i\overline{w}\right)}<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4|w|^2-2wi+2\overline{w}i+1}{4-2i\overline{w}+2iw+|w|^2}<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4|w|^2-\cancel{2wi}+\cancel{2\overline{w}i}+1<4-\cancel{2i\overline{w}}+\cancel{2iw}+|w|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|w|^2<3\Leftrightarrow|w|^2<1\Leftrightarrow|w|<1.$$

Значи, условот $|z|<1$ е еквивалентен со условот $|w|<1$ т.е. точките од xOy рамнината за кои важи $|z|<1$ се пресликуваат во точки од uOv рамнината за кои важи условот $|w|<1$ ($w=u+iv$).

Останува да се определи и сликата на множеството $\{z\,|\operatorname{Im} z>0\}$ при w.

$$\operatorname{Im} z>0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\frac{2w+i}{2-wi}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{2w+i}{2-wi}-\frac{2\overline{w}-i}{2+\overline{wi}}\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\frac{4w+2|w|^2 i+2i-\overline{w}-\left(4\overline{w}-2|w|^2 i-2i-w\right)}{(2-wi)\left(2+\overline{wi}\right)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\frac{4|w|^2 i-5\overline{w}+4i+5w}{|2-wi|^2}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left(4|w|^2 i-5\overline{w}+4i+5w\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|w|^2+5\frac{w-\overline{w}}{2}+2>0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\frac{w-\overline{w}}{2}=\operatorname{Im} w}{\Leftrightarrow} \quad 2|w|^2+5\operatorname{Im} w+2>0\,.$$

Ако земаме $w=u+iv$, тогаш последниот услов е еквивалентен со условот:

$$2\left(u^2+v^2\right)+5v+2>0\ /:2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2+v^2+\frac{5}{2}v+1>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2+v^2+2\frac{5}{4}v+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2+1>0 \Leftrightarrow$$

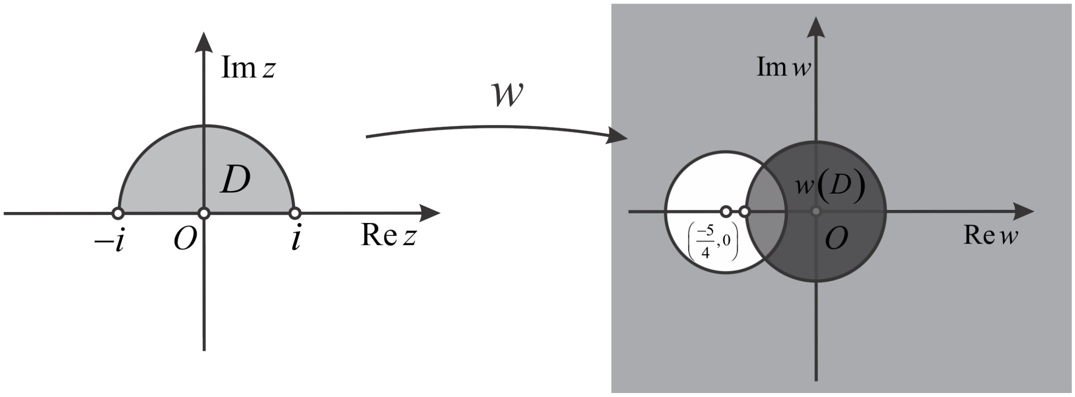
$$\Leftrightarrow u^2+\left(v+\frac{5}{4}\right)^2>\frac{25-16}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2+\left(v+\frac{5}{4}\right)^2>\left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Значи, точките од xOy рамнината за кои важи $\operatorname{Im} z>0$ се пресликуваат во точки од uOv рамнината за кои важи условот $u^2+\left(v+\frac{5}{4}\right)^2>\left(\frac{3}{4}\right)^2$ ($w=u+iv$), односно во надворешноста на кругот $D\left(C\left(\frac{-5}{4},0\right),\frac{3}{4}\right)$ со центар во $C\left(\frac{-5}{4},0\right)$ и радиус $R=\frac{3}{4}$.

Конечно, имаме дека:

$$w(D)=w\left(\{z\,|\,|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}\right)=\{w\,|\,|w|<1\}\cap\left[D\left(C\left(\frac{-5}{4},0\right),\frac{3}{4}\right)\right]^C.$$



Задача 3. Нека е дадена функцијата $w(z)=\frac{z}{z-1}$ и областа $D=\left\{z \,\middle|\, 0<\arg z<\frac{\pi}{4}\right\}$. Да се определи $w(D)$.

Решение. За областа D имаме

$$D=\left\{z=x+iy \,\middle|\, 0<\arg z<\frac{\pi}{4}\right\}=$$

$$=\left\{z=x+iy \,\middle|\, y>0,\ x\in\mathbb{R}\right\}\cap\left\{z=x+iy \,\middle|\, y\le x\right\}.$$

Од друга страна за функцијата w важи:

$$w=\frac{z}{z-1}\Leftrightarrow w\left(z-1\right)=z\Leftrightarrow wz-w=z\Leftrightarrow z(w-1)=w\Leftrightarrow z=\frac{w}{w-1}.$$

Ако означиме со $D_1=\left\{z=x+iy \,\middle|\, y>0,\ x\in\mathbb{R}\right\},\ D_2=\left\{z=x+iy \,\middle|\, y\le x\right\}$:

Од друга страна за $z\in D_1\Leftrightarrow \operatorname{Im} z>0$ каде $\operatorname{Im} z>0$:

$$\operatorname{Im} z=\operatorname{Im}\left(\frac{w}{w-1}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{w}{w-1}-\frac{\overline{w}}{\overline{w}-1}\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2i}\frac{|w|^2-w-|w|^2+\overline{w}}{|w-1|^2}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2i}\frac{-\left(w-\overline{w}\right)}{|w-1|^2}>0\Leftrightarrow\frac{-1}{|w-1|^2}\frac{\left(w-\overline{w}\right)}{2i}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-1}{|w-1|^2}\operatorname{Im} w>0\Leftrightarrow \operatorname{Im} w<0. \tag{1}$$

За вториот услов $z\in D_2\Leftrightarrow \operatorname{Im} z<\operatorname{Re} z$ каде $\operatorname{Im} z>0$:

$$\operatorname{Im} z<\operatorname{Re} z\Leftrightarrow\frac{1}{2i}\left(\frac{w}{w-1}-\frac{\overline{w}}{\overline{w}-1}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{w}{w-1}+\frac{\overline{w}}{\overline{w}-1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{|w-1|^2}\frac{1}{2i}\left(|w|^2-w-|w|^2+\overline{w}\right)<\frac{1}{|w-1|^2}\frac{1}{2}\left(|w|^2-w+|w|^2-\overline{w}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|w-1|^2}\left(-\frac{\left(w+\overline{w}\right)}{2i}\right) < \frac{1}{|w-1|^2}\left(|w|^2-\frac{\left(w+\overline{w}\right)}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|w-1|^2}\left(-\operatorname{Im} w\right) < \frac{1}{|w-1|^2}\left(|w|^2-\operatorname{Re} w\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{Im} w < |w|^2-\operatorname{Re} w,$$

земаме $w=u+iv$ за последниот услов, па имаме:

$$-v < u^2+v^2-u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2-u+v^2+v>0 \Leftrightarrow$$

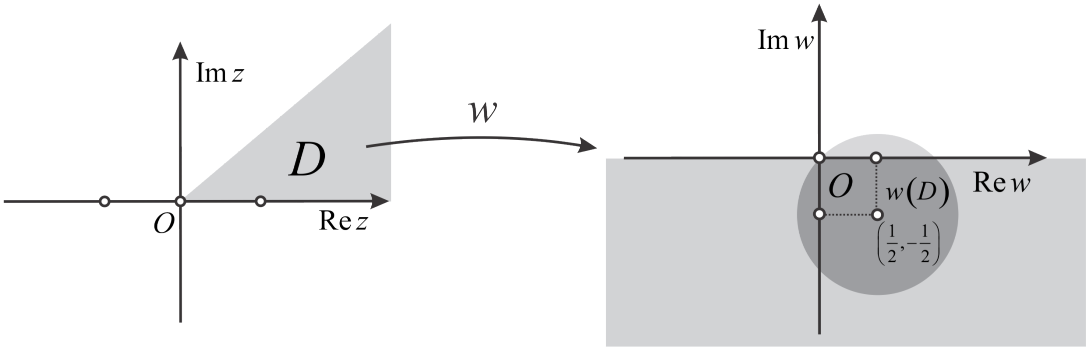
$$\Leftrightarrow u^2-2\cdot\frac{1}{2}u+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+v^2+2\cdot\frac{1}{2}v+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) имаме дека:

$$w(D)=w(D_1\cap D_2)=w(D_1)\cap w(D_2)$$

$$\Rightarrow w(D)=\left\{w=u+iv \,\middle|\, \operatorname{Im} w<0\right\}\cap\left\{w=u+iv \,\middle|\, \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}.$$



Задача 4. Да се најде линеарна функција која триаголникот со темиња $0,\,1,\,i$ го пресликува во триаголник со темиња $0,\,2,\,1+i$.

Решение. Нека $O(0,0)$ $A(1,0)$, $B(0,1)$ се темињата на триаголникот. Ако $w_1=e^{i\varphi}z$ и ако $\arg z=\phi$, тогаш $z=|z|\left(\cos\phi+i\sin\phi\right)$, па

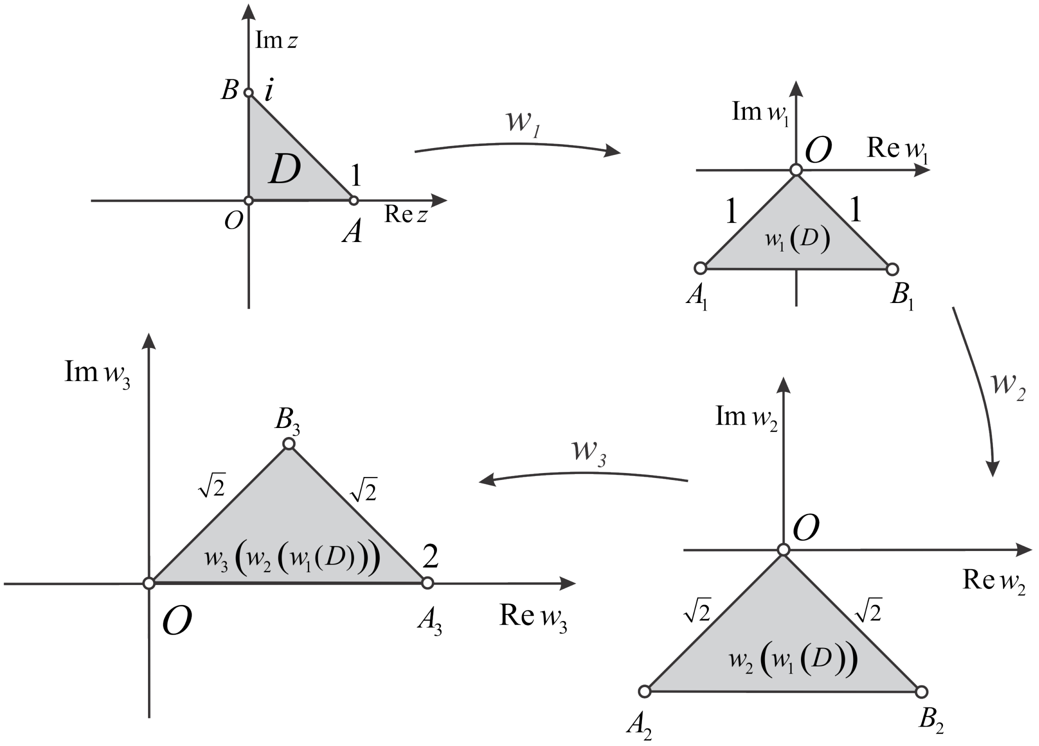
$$w_1=e^{i\varphi}|z|e^{i\phi}=|z|e^{i(\varphi+\phi)}|z|\left(\cos(\varphi+\phi)+i\sin(\varphi+\phi)\right).$$

Оттука добиваме дека со функцијата $w_1=e^{i\varphi}z$, точката z од комплексната рамнина се пресликува во $w_1(z)=z_1$ така што $\arg z_1=\varphi+\phi$, односно $w_1=e^{i\varphi}z$ е ротација за агол φ. Со функцијата $w_1=e^{\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}z$ триаголникот OAB се пресликува во OA_1B_1, каде $O(0,0)$, $A_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ако земеме функција $w_2=kw_1$, тогаш триаголникот OA_1B_1 ќе се пресликува во триаголник, OA_2B_2 кој е сличен на OA_1B_1. Избираме $k=\sqrt{2}$, и тогаш со функцијата

$w_2 = \sqrt{2}w_1$, триаголникот OA_1B_1 се пресликува во OA_2B_2, каде $O(0,0)$ $A_2(-1,-1)$, $B_2(1,-1)$. Конечно, добивме дека со пресликувањето $w_3 = w_2 + 1 + i$, триаголникот OA_2B_2 се пресликува во бараниот триаголник OA_3B_3, каде $O(0,0)$ $A_3(2,0)$, $B_3(1,1)$.

$$w_3 = w_2 + 1 + i = \sqrt{2}w_1 + 1 + i = \sqrt{2}e^{i\varphi}z + 1 + i .$$



Задача 5. Која од кривите

а) $2x + 3y - 1 = 0$; б) $2x - 3y - 1 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$; г) $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$,

дробно-линеарната функција $w = \dfrac{z-1}{iz + 1 - 2i}$ ја пресликува во права, а која во кружница?

Решение. При дробно-рационална функција кружница се пресликува во кружница или во права и права се пресликува во кружница или во права.

За да знаеме дали некоја крива се пресликува или не во права, доволно е да се разгледа дали функцијата добива вредност ∞ за некоја точка од кривата.

$$w = \infty \Leftrightarrow iz + 1 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow iz = 2i - 1 / \cdot i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -z = -2 - i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = 2 + i .$$

а) Ако $z = 2 + i$, тогаш $x = 2, y = 1$, па ако овие вредности ги замениме во равенката на кривата $2x + 3y - 1 = 0$ следува $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 6 = 0$, што не е можно, па заклучуваме дека точката $z = 2 + i$ не припаѓа на кривата $2x + 3y - 1 = 0$. Значи, со функцијата w, $2x + 3y - 1 = 0$ се пресликува во кружница.

б) Ако ги замениме овие вредности $x = 2, y = 1$ во равенката на кривата $2x - 3y - 1 = 0$ следува $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, од каде добиваме дека точката $z = 2 + i$

припаѓа на кривата $2x+3y-1=0$. Заклучуваме дека со функцијата w, $2x+3y-1=0$ се пресликува во права.

в) Ако ги замениме овие вредности $x=2, y=1$ во равенката на кривата $x^2+y^2-2x-y=0$ следува $2^2+1^2-2\cdot 2-1=0 \Leftrightarrow 0=0$, од каде добиваме дека точката $z=2+i$ припаѓа на кривата $x^2+y^2-2x-y=0$. Значи, со функцијата w, $2x+3y-1=0$ се пресликува во права.

г) Се остава на читателот.

Задача 6. Да се најде дробно-рационална функција која областа $D=\{z|\operatorname{Re} z>1\}$ ја пресликува во $G=\{w||w-1|<1\}$, така што точката $z=2$ да се преслика во $w=1$.

Решение. Треба да најдеме функција $w=\dfrac{az+b}{cz+d}, ad-bc\neq 0$, така што $w(D)=G$ и $w(2)=1$. Точката $O(0,0)$ е симетрична со $A(2,0)$ во однос на правата $p:\operatorname{Re} z=1$. Од друга страна, $w(0)=\dfrac{b}{d}$. Да претпоставиме дека $w(A)=A'$. Од условот на задачата имаме дека $A'(1,0)$. Точките $O'\left(\dfrac{b}{d},0\right)$, $A'(1,0)$ се симетрични во однос на кружницата $K\left((1,0),1\right)$. Бидејќи $A'(1,0)$ е центар на $K\left((1,0),1\right)$, мора $\dfrac{b}{d}=\infty$, од каде следува $d=0$ и $b\neq 0$. Значи, $w(z)=\dfrac{az+b}{cz}$.

Од $w(2)=1$ т.е. $w(2)-1=0$, па

$$\frac{2a+b}{2c}=1 \Rightarrow b=2c-2a \Rightarrow w(z)=\frac{a(z-2)}{cz}+\frac{2}{z}.$$

Од друга страна,

$$w(z)-1=\frac{a(z-2)}{cz}+\frac{2-z}{z} \Rightarrow w(z)-1=\frac{(a+c)(2-z)}{z},$$

па акоземеме смена $k=a+c$ добиваме $w(z)-1=\dfrac{k(2-z)}{z}$.

За w добиваме:

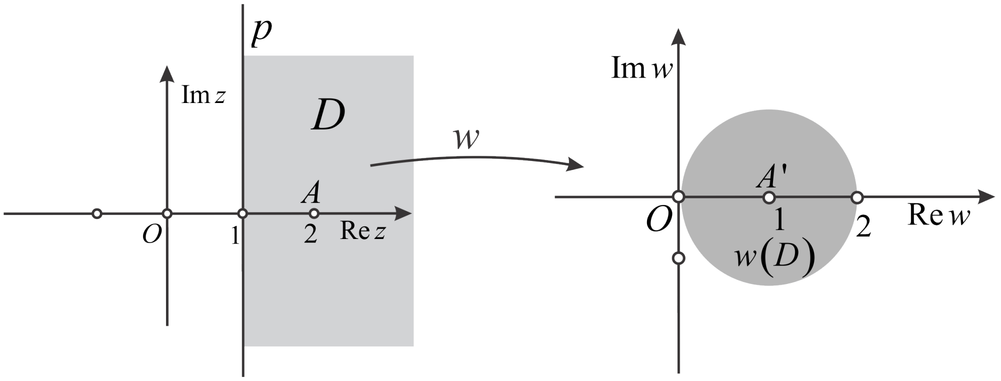
$$z=1\in\partial D \Rightarrow w(z)\in w(\partial D)=K\left((1,0),1\right)$$

$$w(1)\in K\left((1,0),1\right) \Rightarrow |w(1)-1|=1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{k(2-1)}{1}\right|=1 \Rightarrow \left|\frac{k}{1}\right|=1 \Rightarrow |k|=1 \Rightarrow k=\pm 1.$$

Нека избираме $k=1$.

Добиваме $w(z)=\dfrac{z-2}{z}+1$.



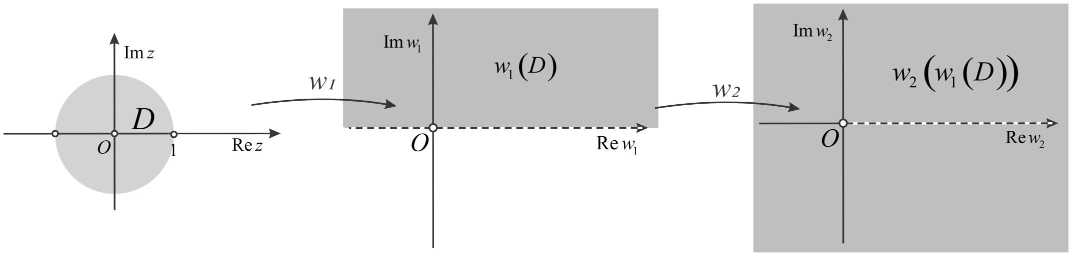
Задача 7. Да се најде дробно-рационална функција која кружницата $D=\left\{z\,\middle|\,|z|<1\right\}$ ја пресликува во комплексната рамнина со исечок долж позитивниот дел од реалната права $G=\mathbb{C}\setminus\left\{w\,\middle|\,\operatorname{Re}w>0\wedge\operatorname{Im}w=0\right\}$.

Решение. $w=\dfrac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0$. Прво, ќе побараме пресликување $w_1=\dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$, кое кругот $D=\left\{z\,\middle|\,|z|<1\right\}$ го пресликува во горната полурамнина $D_1=\left\{w_1\,\middle|\,\operatorname{Im}w_1>1\right\}$. Бараме $w_1(-1)=1$, $w_1(i)=0$, $w_1(1)=-1$ и го добиваме системот:

$$\begin{cases}\dfrac{1+\dfrac{b_1}{a_1}}{\dfrac{c_1}{a_1}+\dfrac{d_1}{a_1}}=-1\\[2ex] \dfrac{i+\dfrac{b_1}{a_1}}{\dfrac{c_1}{a_1}i+\dfrac{d_1}{a_1}}=0\\[2ex] \dfrac{-1+\dfrac{b_1}{a_1}}{-\dfrac{c_1}{a_1}+\dfrac{d_1}{a_1}}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\dfrac{b_1}{a_1}=c_1-\dfrac{d_1}{a_1}\\[1ex] i+\dfrac{b_1}{a_1}=0\\[1ex] -1+\dfrac{b_1}{a_1}=-\dfrac{c_1}{a_1}+\dfrac{d_1}{a_1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-i=-\dfrac{c_1}{a_1}-\dfrac{d_1}{a_1}\\[1ex] \dfrac{b_1}{a_1}=-i\\[1ex] -1-i=-\dfrac{c_1}{a_1}+\dfrac{d_1}{a_1}\end{cases},$$

Имаме $\dfrac{b_1}{a_1}=-i$, $\dfrac{c_1}{a_1}=i$, $\dfrac{d_1}{a_1}=-1$ па $w_1=\dfrac{z-i}{iz-1}$. Бидејќи 0 е во внатрешноста на кругот $D=\left\{z\,\middle|\,|z|<1\right\}$ и бидејќи $w_1(0)=\dfrac{0-i}{0-1}=i$, добиваме дека со w_1 кругот D се пресликува во горната полурамнина. Потоа, земаме $w_2=w_1^{\ 2}$, со кое горната полурамнина се пресликува во $D_1=\left\{w_1\,\middle|\,\operatorname{Im}w_1>1\right\}$. Заклучуваме дека бараната функција е:

$$w_2(w_1(z)) = \left(w_1(z)\right)^2 = \left(\frac{z-i}{iz-1}\right)^2 .$$



Задача 8. Да се најде дробно-рационална функција која $D = \left\{ z \middle| 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}$ ја пресликува во областа $G = \left\{ w \middle| |w| < 1 \right\}$.

Упатство: Со функцијата $w(z) = z^n$, комплексниот број $z_1 = \rho e^{i\phi}$ се пресликува во:

$w(z_1) = w(\rho e^{i\phi}) = \rho^n e^{i\phi n}$, т.е. се променува аргументот од ϕ до $n\phi$.

Со функцијата $w(z) = z^4$, областа $D = \left\{ z \middle| 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}$ се пресликува во $w(D) = \left\{ w \middle| 0 < \arg w < \pi \right\} = \left\{ w \middle| \operatorname{Im} w > 0 \right\}$. Останува само да се најде конформно пресликување од $w(D)$ до $G = \left\{ w \middle| |w| < 1 \right\}$.

Содржина **стр.**

Литература

[1] J. B. Conway, Functions of One Complex Variable, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1978
[2] T. W. Gamelin, Complex Analysis, Undergraduate Texts in Mathematics, SpringerVerlag, New York, 2001.
[3] М. Јевтиќ, Аналитичке функције, збирка решених задатака, Природно математички факултет у Београду, и Југословенски завод за продуктивност рада, Београд, 1986
[4] Д.С. Митриновиќ, Комплексна анализа, Научна књига Београд, 1971
[5] Д.С. Митриновиќ, Зборник задатака и проблема, Научна књига Београд, 1989
[6] E. Pap, Complex analysis through examples and exercises, Springer, 2010
[7] H.A. Priestley, Introduction to complex analysis, Clarendon Press, Oxford, 1985

Е-издание: https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/PMF/Zbirka_resheni_zadachi_po_kompleksna_analiza_(prv_del).pdf