УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички факултет

проф. д-р Весна Манова-Ераковиќ
ас. м-р Стево Ѓоргиев

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО КОМПЛЕКСНА АНАЛИЗА

Скопје, 2024

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Биљана Ангелова, ректор

Уредник на публикацијата:
проф. д-р Весна Манова-Ераковиќ,
ас. м-р Стево Ѓоргиев

Рецензенти:
1. проф. д-р Никита Шекутковски, редовен професор во пензија
2. проф. д-р Петар Соколоски, вонреден професор на Природно-математички факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје

Техничка обработка:
проф. д-р Весна Манова-Ераковиќ,
ас. м-р Стево Ѓоргиев

Лектура на македонски јазик:
Виолета Јовановска-Никовска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517.52/.55(075.8)(076)

МАНОВА-Ераковиќ, Весна
Збирка решени задачи по комплексна анализа [Електронски извор] / Весна Манова-Ераковиќ, Стево Ѓоргиев. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2024

Начин на пристапување (URL):
https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/PMF/Zbirka_resheni_zadachi_po_kompleksna_analiza.pdf.
- Текст во PDF формат, содржи II, 88 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 31.01.2024. - Библиографија: стр. 88

ISBN 978-9989-43-507-2

1. Ѓоргиев, Стево [автор]
а) Функции од комплексни броеви -- Математичка анализа -- Вискошколски учебници -- Вежби

COBISS.MK-ID 62879749

Предговор

Оваа збирка, пред сè е наменета за студентите на предметот Комплексна анализа на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје.

Меѓутоа, збирката може да ја користитат и студентите од техничките факултети, како и сите оние студенти во чии наставни програми се опфатени содржините што се обработуваат во оваа збирка.

Збирката е резултат на повеќегодишни предавања и вежби кои ги одржувале авторите на студиите по математика.

Збирката е работена според наставната програма за овој предмет.

Опфатени се темите: Редови од холоморфни функции, Нули и изолирани сингуларитети, Принцип на максимум на модул, Остатоци (Резидиуми), Принцип на аргумент.

Во сите глави се дадени и основните поими потребни за решавање на задачите, а по потреба, се користени и цртежи за подобра илустрација.

Збирката е напишана на високо стручен, но истовремено едноставен и разбирлив начин. Се потрудивме стилот на пишување да биде прикладен како за студентите, така и за останатите читатели кои ќе ја користат во својата професионална работа.

Особено им се заблагодаруваме на рецензентите на оваа збирка, кои со своите коментари и забелешки многу придонесоа за нејзино подобрување.

Ќе бидеме благодарни на сите читатели кои со своите сугестии ќе придонесат за идни подобрувања на оваа збирка.

На сите читатели им посакуваме успешно навлегување во техниките на математиката преку оваа збирка и успешно совладување на нејзините содржини.

Скопје, 2024 Од Авторите

Содржина

Глава 1

РЕДОВИ ОД ХОЛОМОРФНИ ФУНКЦИИ

„Complex Analysis is a dangerous subject. If you are not careful, you can lose an „i“.”

— Prof. K. Koenig

Лорановиот развој е претставување на комплексната функција $f(z)$ како степенски ред. За разлика од Тејлоровиот развој кој ја претставува функцијата $f(z)$ во облик на степенски ред по степените на $(z-a)$ со ненегативни експоненти (по ненегативните степени на $(z-a)$), Лорановиот развој содржи и членови по негативните степени на $(z-a)$.

1.1 Степенски редови

Дефиниција 1.1. Редот од облик

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

се нарекува степенски ред во околина на точката $a \in \mathbb{C}$. Комплексните броеви $c_0, c_1, c_2 \dots$ се нарекуваат *коефициенти на степенскиот ред.*

Прашањето кое природно се наметнува е за кои вредности, односно за кои комплексни броеви дадениот степенски ред ќе конвергира? Одговорот на ова прашање е даден во продолжение.

Теорема 1.1. *Ако степенскиот ред* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ *конвергира за некое* $z = z_1 \in \mathbb{C}$, *тогаш тој конвергира (и тоа апсолутно) за секое*

$z \in \mathbb{C}$ за кое важи $|z-a| < |z_1 - a|$. Обратно, ако редот дивергира за некое $z = z_1 \in \mathbb{C}$, тогаш тој дивергира за секое $z \in \mathbb{C}$ за кое важи $|z-a| > |z_1 - a|$.

Од претходната теорема добиваме дека областа на конвергенција на степенскиот ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ е множеството $D = \{z \mid |z-a| < R\}$, што претставува отворен круг со центар во точката a. Радиусот R на кругот D се нарекува *радиус на конвергенција на степенскиот ред.* Степенскиот ред дивергира во случај кога $|z-a| > R$, односно во надворешноста на множеството D. Степенскиот ред може да конвергира, но може и да дивергира на работ на множеството D, односно на кружницата $|z-a| = R$.

Радиусот на конвергенција може да се определи преку коефициентите на степенскиот ред со помош на формулите:

1. $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ - Кошиев критериум;

2. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ - Даламберов критериум.

Со сумата на редот е дефинирана холоморфна функција на кругот D дадена со

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, z \in D.$$

Задача 1.1. Определи го множеството од комплексни броеви за кои конвергираат редовите:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n! z^n$

Решение. 1) За коефициентите на степенскиот ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$ важи $c_n = \dfrac{1}{(n+1)^3 4^n}$, па со помош на Даламберовиот критериум го добиваме радиусот на конвергенција

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^3 4^n}}{\frac{1}{(n+2)^3 4^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4(n+2)^3}{(n+1)^3} \right| = 4 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^3 = 4.$$

За точките на кружницата $|z+2| = 4$, имаме

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z+2|^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3},$$

па редот е апсолутно конвергентен, односно конвергентен. Според тоа, множеството од комплексни броеви на кое дадениот ред конвергира е кругот $D = \{z |\, |z+2| \leq 4\}$.

2) Дадениот ред конвергира за секој комплексен број $z \in \mathbb{C}$.

3) Дадениот ред конвергира само ако $z = 0$.

Задача 1.2. Определи го множеството од комплексни броеви за кои конвергираат редовите:

1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2-i} \right)^n$

2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\cosh{(in)})^n z^n$

Решение. 1) Од тоа што $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2-i} \right)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2-i)^n} z^n$, за коефициентите на дадениот дадени степенски ред важи $c_n = \frac{1}{(2-i)^n}$. Со примена на Кошиевиот критериум имаме

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{(2-i)^n} \right|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|2-i|^n}}} = |2-i| = \sqrt{5}.$$

Според тоа, можеството комплексни броеви на кои дадениот ред конвергира е $D = \left\{ z |\, |z| < \sqrt{5} \right\}$.

2) Во овој случај $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Со примена на Даламберовиот критериум имаме

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{n!}{n^n}}{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^n}{n^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e,$$

па множеството од комплексни броеви на кои дадениот ред конвергира е $D = \{z| \, |z| < e\}$.

3) Јасно $c_n = (\cosh(in))^n$. Со помош на идентитетот $\cosh z = \cos(iz)$ и Кошиевиот критериум, добиваме

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|(\cosh(in))^n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\cosh(in)|^n}} =$$

$$= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} |\cos n|} = 1.$$

Според тоа, редот конвергира на $D = \{z| \, |z| < 1\}$.

1.2 Лоранов и Тејлоров развој

Теорема 1.2. *Секоја функција $f(z)$ која е холоморфна во точката $z = a$, може да се развие во ред, односно*

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n (z-a)^n,$$

којшто е конвергентен во кругот $D_r = \{z \mid |z-a| < r\}$ каде $r < |b-a|$, а b е најблиската точка до точката a во којашто функцијата $f(z)$ не е холоморфна и

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, n \in \mathbb{N}_0.$$

Овој ред се нарекува Тејлоров (ред) развој *на функцијата $f(z)$ во точката $z = a$.*

Теорема 1.3. *Секоја холоморфна функција $f(z)$ на прстенот $P = \{z \mid r_1 \leq |z-a| \leq r_2\}$, $r_1 \geq 0$, $r_2 \leq +\infty$, може да се развие во ред, односно*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n,$$

каде што

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

за $\Gamma = \{z \mid |z-a| = r\}$, $r_1 \leq r \leq r_2$.
Овој ред е конвергентен на прстенот P и се нарекува Лоранов (ред) развој *на функцијата $f(z)$. Делот по ненегативните степени на $(z-a)$ во Лорановиот развој, односно $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n (z-a)^n$ се нарекува* правилен (регуларен) дел, *а делот по негативните степени на $(z-a)$, односно $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} A_n (z-a)^n$ се нарекува* главен (суштински) дел.

Задача 1.3. Нека $f(z)$ е холоморфна функција на прстенот $P = \{z \mid r < |z-a| < R\}$. Докажи дека $f(z)$ има единствено претставување во Лоранов ред.

Решение. Да претпоставиме спротивно, односно дека $f(z)$ има две претставувања

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \tag{1.1}$$

и

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-a)^n. \tag{1.2}$$

Со множење на последниот израз со $(z-a)^m$ за $m \in \mathbb{Z}$, добиваме

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-a)^{m+n}. \tag{1.3}$$

Редот (1.2) рамномерно конвергира на прстенот P, па рамномерно конвергира на секоја кружница којашто се содржи во P, односно и на кружницата $C = \{z \mid |z-a| = \lambda\}$, каде $r < \lambda < R$.
Поради рамномерната конвергенција редот (1.3) може да се интегрира член по член, па добиваме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C (z-a)^m f(z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-a)^{m+n} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \int_C (z-a)^{m+n} dz. \tag{1.4}$$

Го разгледуваме интегралот $\int\limits_C (z-a)^{m+n} dz$, односно разгледуваме два случаја:

1. Ако $m+n \neq -1$, тогаш $\int\limits_C (z-a)^{m+n} dz = 0$.

2. Ако $m+n = -1$, тогаш $n = -m-1$ и

$$\int_C (z-a)^{m+n} dz = \int_C (z-a)^{m-m-1} dz = \int_C (z-a)^{-1} dz =$$

$$= \int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

Според тоа, добиваме дека

$$\int_C (z-a)^{m+n} dz = \begin{cases} 0, & m+n \neq -1 \\ 2\pi i, & m+n = -1 \end{cases}. \tag{1.5}$$

Од (1.4) и (1.5) добиваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C (z-a)^m f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot b_{-m-1}\cdot 2\pi i = b_{-m-1},\ m\in\mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

Од $-m-1=n$, имаме $-m=n+1$, па (1.6) добива облик

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-a)^{-m}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = a_n,$$

од каде заклучуваме дека $b_n = a_n$ за секое $n\in\mathbb{Z}$, односно претставувањето е единствено.

Задача 1.4. Определи го Лорановиот развој на функцијата $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ на областа:

1) $D_1 = \{z|\,|z|<1\}$

2) $D_2 = \{z|\,|z|>1\}$

Решение. 1) Единствениот сингуларитет на функцијата $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ е точката $z=1$, но таа не припаѓа на дадената област D_1. Притоа и функцијата $\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}$, за $n\in\mathbb{Z}^-$ е холоморфна на D_1. Според тоа, за $\Gamma=\{z|\,|z|=r\}$, $0<r<1$, имаме

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\frac{1}{1-z}}{z^{n+1}}dz = 0, n\in\mathbb{Z}^-,$$

па Лорановиот развој се состои само од правилниот дел.
За $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ користејќи ја Кошиевата интегрална формула, добиваме дека

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\frac{1}{1-z}}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{n!}\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\frac{1}{1-z}}{z^{n+1}}dz = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1.$$

Добиваме дека бараниот Лоранов развој е $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$, за $z\in D_1$.

2) Функцијата $f(z)$ е холоморфна на D_2. Користејќи ја Кошиевата теорема за повеќесврзливи области и Кошиевата интегрална формула,

за $\Gamma = \{z| \, |z| = r\}$, $r > 1$, имаме дека

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\frac{1}{1-z}}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^{n+1}(1-z)} dz =$$

$$= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} - \left.\frac{1}{z^{n+1}}\right|_{z=1} = 1 - 1 = 0,$$

за секое $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, и

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\frac{1}{1-z}}{z^{n+1}} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{z^{-n-1}}{z-1} dz = -z^{-n-1}\big|_{z=1} = -1,$$

за секое $n \in \mathbb{Z}^-$. Според тоа, добиваме дека бараниот Лоранов развој се состои само од главниот дел, односно

$$f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Од сето ова добиваме дека важи

$$f(z) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n, & |z| < 1 \\ -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}, & |z| > 1 \end{cases}.$$

Задача 1.5. Определи го Лорановиот развој на функцијата $f(z) = \dfrac{1}{z+4}$ на областа:

1) $D_1 = \{z| \, |z| < 4\}$

2) $D_2 = \{z| \, |z| > 4\}$

Решение. Областа D_1 е отворен круг со центар во точката $(0,0)$ и радиус со должина 4. Областа D_2 е надворешноста на D_1. Дадената функција можеме да ја запишеме во облик

$$f(z) = \frac{1}{4\left(1+\frac{z}{4}\right)} = \frac{1}{4\left(1-\left(-\frac{z}{4}\right)\right)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{4}\right)}.$$

Со помош на претходната Задача 1.4, го добиваме бараниот Лоранов развој

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n, & |z| < 4 \\ -\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(-\frac{z}{4}\right)^n}, & |z| > 4 \end{cases} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{4^{n+1}}, & |z| < 4 \\ -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^{n-1}}{z^n}, & |z| > 4 \end{cases}.$$

Да забележиме дека Лорановиот развој на функцијата $f(z) = \dfrac{1}{z+4}$, на областа D_1 се состои само од правилен дел, а на областа D_2 се состои само од главен дел.

Задача 1.6. Определи го Лорановиот развој на функцијата $f(z) = \dfrac{1}{z(z+4)}$ на областа $D = \{z|\,|z| < 4\}$.

Решение. Функцијата $f(z)$ е холоморфна на целата област D, освен во точката $z = 0$. Од претходната Задача 1.5, имаме дека Лорановиот развој на функцијата $g(z) = \dfrac{1}{z+4}$ на областа $D = \{z|\,|z| < 4\}$ е $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{4^{n+1}}$. Според тоа добиваме дека бараниот Лоранов развој е

$$f(z) = \frac{1}{z}g(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{4^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{n-1}}{4^{n+1}}.$$

Задача 1.7. Определи го Лорановиот развој на функцијата $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+4)}$ на областа $D = \{z|\,3 < |z-2| < 6\}$.

Решение. Воведуваме смена $w = z-2$. Тогаш дадената функција преминува во облик $f(w) = \dfrac{1}{(w+3)(w+6)}$ и областа D преминува во област $D' = \{w|\,3 < |w| < 6\}$. Ќе ја запишеме функцијата $f(w)$ во вид на збир од прости дропки, па

$$f(w) = \frac{1}{(w+3)(w+6)} = \frac{A}{w+3} + \frac{B}{w+6} = \frac{(A+B)w + 6A + 3B}{(w+3)(w+6)},$$

од каде добиваме дека $A = \dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{1}{3}$, односно

$$f(w) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{w+3} - \frac{1}{w+6}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\left(1-\left(-\frac{w}{3}\right)\right)} - \frac{1}{6\left(1-\left(-\frac{w}{6}\right)\right)}\right).$$

Од тоа што

$$\frac{1}{3\left(1-\left(-\frac{w}{3}\right)\right)}=\begin{cases}\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{w}{3}\right)^n, & |w|<3\\ -\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(-\frac{w}{3}\right)^n}, & |w|>3\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n w^n}{3^{n+1}}, & |w|<3\\ -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 3^{n-1}}{w^n}, & |w|>3\end{cases},$$

и

$$\frac{1}{6\left(1-\left(-\frac{w}{6}\right)\right)}=\begin{cases}\frac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{w}{6}\right)^n, & |w|<6\\ -\frac{1}{6}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(-\frac{w}{6}\right)^n}, & |w|>6\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n w^n}{6^{n+1}}, & |w|<6\\ -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 6^{n-1}}{w^n}, & |w|>6\end{cases},$$

добиваме дека Лорановиот развој на функцијата $f(w)$ на областа D' е

$$f(w)=\frac{1}{3}\left[-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 3^{n-1}}{w^n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n w^n}{6^{n+1}}\right].$$

Со враќање на смената $w=z-2$ го добиваме Лорановиот развој на функцијата $f(z)$ на областа $D=\{z|\,3<|z-2|<6\}$ кој гласи

$$f(z)=-\frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 3^{n-1}}{(z-2)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n (z-2)^n}{6^{n+1}}\right].$$

Задача 1.8. Определи го Лорановиот развој на функцијата $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$ на областа $D=\{z|\,|z-3i|>6\}$.

Решение. Поради тоа што $f(z)=\dfrac{1}{(z-3i)(z+3i)}$, ставајќи смена $w=z-3i$, функцијата преминува во облик $f(w)=\dfrac{1}{w(w+6i)}$ и областа D во област $D'=\{w|\,|w|>6\}$. Притоа е исполнето дека

$$\frac{1}{w(w+6i)}=\frac{1}{6wi\left(1-\frac{iw}{6}\right)}=\begin{cases}\frac{1}{6iw}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{iw}{6}\right)^n, & |w|<6\\ -\frac{1}{6iw}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{iw}{6}\right)^n}, & |w|>6\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(iw)^{n-1}}{6^{n+1}}, & |w|<6\\ -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{6^{n-1}}{(iw)^{n+1}}, & |w|>6\end{cases},$$

па според тоа

$$f(w)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6^{n-1}}{(iw)^{n+1}}.$$

Со враќање на смената $w=z-3i$, конечно го добиваме Лорановиот развој на функцијата $f(z)$ на областа $D=\{z|\,|z-3i|>6\}$ кој гласи

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6^{n-1}}{(i(z-3i))^{n+1}}.$$

Да забележиме дека Лорановиот развој на функцијата $f(z)=\frac{1}{z^2+9}$ на областа D се состои само од главен дел.

Задача 1.9. Определи го Лорановиот развој на функцијата $f(z)=\frac{1}{(1-z)(z+2)}$ на областа:

1) $D_1=\{z|\,|z|<1\}$

2) $D_2=\{z|\,1<|z|<2\}$

3) $D_3=\{z|\,|z|>2\}$

Решение. Прво, ќе ја запишеме функцијата $f(z)$ во вид на збир од прости дропки, па

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)(z+2)}=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{z+2}=\frac{(A-B)z+2A+B}{(1-z)(z+2)},$$

од каде добиваме дека $A=B=\frac{1}{3}$ и $f(z)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z+2}\right]$. Притоа важи дека

$$\frac{1}{1-z}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n, & |z|<1\\ -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}, & |z|>1\end{cases}$$

и

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2\left(1-\left(-\frac{z}{2}\right)\right)}=\begin{cases}\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n, & |z|<2\\ -\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(-\frac{z}{2}\right)^n}, & |z|>2\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}, & |z|<2\\ -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{z^n}, & |z|>2\end{cases}.$$

Според тоа, Лорановиот развој на функцијата $f(z)$ гласи:

1) $f(z)=\frac{1}{3}\left[\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}\right]$ на областа $D_1=\{z|\,|z|<1\}$;

2) $f(z)=\frac{1}{3}\left[-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}\right]$ на областа $D_2=\{z|\,1<|z|<2\}$;

3) $f(z)=\frac{1}{3}\left[-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{z^n}\right]$ на областа $D_3=\{z|\,|z|>2\}$.

Задача 1.10. Определи го Лорановиот развој на функцијата $f(z)=\frac{1}{z(z-3)}$ на областа $D_1=\{z|\,1<|z-1|<2\}$.

Решение. Прво, ќе ја запишеме функцијата $f(z)$ во вид на збир од прости дропки, па

$$f(z)=\frac{1}{z(z-3)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-3}=\frac{(A+B)z-3A}{z(z-3)},$$

од каде добиваме дека $A=-\frac{1}{3}$ и $B=\frac{1}{3}$, па $f(z)=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z-3}\right]$. Од условите на задачата, развивањето на функцијата е по степените на $(z-1)$ и притоа важи

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+z-1}=\frac{1}{1-(-(z-1))}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n, & |z-1|<1\\ -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n}, & |z-1|>1\end{cases}\quad \text{и}$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-1-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z-1}{2}\right)^n, & |z-1|<2\\ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{z-1}{2}\right)^n}, & |z-1|>2\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(z-1)^n}{2^{n+1}}, & |z-1|<2\\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^{n-1}}{(z-1)^n}, & |z-1|>2\end{cases}.$$

Според тоа го добиваме Лорановиот развој на функцијата $f(z)$ на областа $D_1=\{z|\,1<|z-1|<2\}$ кој гласи

$$f(z)=-\frac{1}{3}\left[-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}\right].$$

Задача 1.11. Определи го Лорановиот развој на функцијата $f(z)$ по степените на $(z-a)$ на дадената област D, каде што:

1) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$, $a=0$ и $D=\{z|\,0<|z|<+\infty\}$;

2) $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$, $a=2$ и $D=\{z|\,0<|z-2|<+\infty\}$;

3) $f(z)=\dfrac{e^z}{z(1-z)}$, $a=0$ и $D=\{z|\,1<|z|<+\infty\}$;

4) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z+1}$, $a=-1$ и $D=\{z|\,0<|z+1|<+\infty\}$.

Решение. 1) Ќе го искористиме познатиот развој $e^z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$. Тогаш, Лорановиот развој на функцијата $f(z)$ на областа $D=\{z|\,0<|z|<+\infty\}$ гласи

$$f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n=z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{n!z^{n-3}}.$$

2) Ќе го искористиме развојот $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^nz^{2n}}{(2n)!}$, па

$$\cos\frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}}.$$

Од тоа што развиваме по степените на $(z-2)$ и

$$z^3 = ((z-2)+2)^3 = (z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12\,(z-2) + 8,$$

добиваме дека Лорановиот развој на функцијата $f\,(z)$ на областа $D = \{\, z|\, 0 < |z-2| < +\infty\}$ гласи

$$f\,(z) = \left((z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12\,(z-2) + 8\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}}.$$

3) Од тоа што $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ и затоа што

$$\frac{1}{z\,(1-z)} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^{n-1}, & |z| < 1 \\ -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{z^{n+1}}, & |z| > 1 \end{cases},$$

добиваме дека Лорановиот развој на функцијата $f\,(z)$ по степените на z на областа $D = \{\, z|\, 1 < |z| < +\infty\}$ може да се претстави во облик

$$f\,(z) = -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

4) Од тоа што

$$\cos\frac{z}{z+1} = \cos\left(\frac{z+1-1}{z+1}\right) = \cos\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) =$$

$$= \cos 1 \cos\left(\frac{1}{z+1}\right) + \sin 1 \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$$

и затоа што $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ и $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, добиваме дека Лорановиот развој на функцијата $f\,(z)$ по степените на $(z+1)$ на областа $D = \{\, z|\, 0 < |z+1| < +\infty\}$ гласи

$$f\,(z) = \cos\frac{z}{z+1} = \cos\left(\frac{z+1-1}{z+1}\right) = \cos\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) =$$

$$= \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n}} + \sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}}.$$

Задача 1.12. Определи го Лорановиот развој на функцијата $f(z) = \ln\dfrac{z-2}{z+2}$ по степените на z на областа $D = \{z|\,|z| > 2\}$.

Решение. Лорановите развои на функциите

$$f_1(z) = \frac{1}{z+2} \text{ и } f_2(z) = \frac{1}{z-2}$$

на $D = \{z|\,|z| > 2\}$ се

$$f_1(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{z^n} \text{ и } f_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

Заради Теоремата на Абел за конвергенција, можеме да извршиме почлено интегрирање на двата степенски реда. Според тоа,

$$\ln(z+2) = \int \frac{dz}{2+z} = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} - ...\right) dz = \ln z + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{z^{n-1}(n-1)}$$

и

$$\ln(z-2) = \int \frac{dz}{z-2} = \int \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + ...\right) dz = \ln z - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{z^{n-1}(n-1)}$$

Тогаш, со одземање на првото од второто равенство добиваме дека

$$\ln\frac{z-2}{z+2} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{z^{n-1}(n-1)} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{z^{n-1}(n-1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{z^{2n-1}(2n-1)},$$

што претставува Лоранов развој за функцијата $f(z) = \ln\dfrac{z-2}{z+2}$ на $D = \{z|\,|z| > 2\}$.

Глава 2

НУЛИ И ИЗОЛИРАНИ СИНГУЛАРИТЕТИ

2.1 Нули на холоморфна функција

Со $\mathbb{H}(\Omega)$ го означуваме множеството од сите холоморфни функции на област Ω.

Дефиниција 2.1. Ако $f(z)$ е функција за која $f(a) = 0$, тогаш $z = a$ е нула на функцијата f.

За функција $f(z)$ холоморфна во точката $z = a$ важи Тејлоров развој

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n (z-a)^n,$$

каде што $A_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, за $n = 0, 1, 2....$

Дефиниција 2.2. Ако во развојот на функцијата $f(z)$, холоморфна во точката $z = a$, важи $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, ..., $A_{k-1} = 0$, $A_k \neq 0$, за $k > 0$, што е еквивалентно со $f(a) = 0$, $f'(a) = 0, ..., f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$ за $k > 0$, тогаш за $z = a$ велиме дека е *нула од ред* k за холоморфната функција f во точката $z = a$.

Ако $k = 1$ тогаш велиме дека a е *проста нула*. Множеството нули на холоморфна функција f на област Ω (отворено и сврзано множество) го означуваме со $Z(f, \Omega) = Z(f) = \{z \in \Omega |\, f(z) = 0\}$.

Теорема 2.1. *Нулите на холомофрна функција којашто не е идентички еднаква на нула се изолирани.*

Теорема 2.2. *Нека* $f(z)$ *е холоморфна функција на област* Ω *и* $Z(f) = \{z \in \Omega | \, f(z) = 0\}$ *е множеството нули на функцијата на дадената област. Тогаш или* $Z(f)$ *нема точка на натрупување на* Ω *или* $f(z) = 0$*, за секое* $z \in \Omega$*, односно* $f \equiv 0$ *на* Ω*.*

Задача 2.1. Нека $z = a$ е нула од ред k за холоморфната функција f во точката $z = a$. Докажи дека $k = \lim\limits_{z \to a} (z-a) \dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

Решение. Нека $z = a$ е нула од ред k за холоморфната функција f во точката $z = a$. Тогаш $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, ..., $A_{k-1} = 0$ и $A_k \neq 0$, за $k > 0$, па Тејлоровиот развој на функцијата има облик

$$f(z) = A_k (z-a)^k + A_{k+1}(z-a)^{k+1} + A_{k+2}(z-a)^{k+2} + ... =$$

$$= (z-a)^k \left[A_k + A_{k+1}(z-a) + A_{k+2}(z-a)^2 + ... \right],$$

односно $f(z) = (z-a)^k g(z)$, каде што

$$g(z) = A_k + A_{k+1}(z-a) + A_{k+2}(z-a)^2 + ...$$

Функцијата $g(z)$ е холоморфна во точката $z = a$ и $g(a) \neq 0$. Од

$$f(z) = (z-a)^k g(z) \;\text{ и }\; f'(z) = k(z-a)^{k-1} g(z) + (z-a)^k g'(z),$$

добиваме дека

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1} g(z) + (z-a)^k g'(z)}{(z-a)^k g(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

од каде множејќи со $(z-a)$ добиваме дека

$$(z-a) \frac{f'(z)}{f(z)} = k + (z-a) \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Ако во последното равенство побараме лимес кога $z \to a$, добиваме

$$k = \lim_{z \to a} (z-a) \frac{f'(z)}{f(z)},$$

бидејќи $\lim\limits_{z \to a} (z-a) \dfrac{g'(z)}{g(z)} = 0$. (функцијата g е холоморфна во точката $z = a$ и $g(a) \neq 0$)

Задача 2.2. Нека $f(z)$ и $g(z)$ се холоморфни функции во точката $z = a$ и нека важи $f(a) = g(a) = 0$. Докажи дека:

1) $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

2) $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to a}\left(\dfrac{g'(a)}{f'(a)}\cdot\dfrac{f^2(z)}{g^2(z)}\right).$

Доказ. Нека $f(z)$ и $g(z)$ се холоморфни функции во точката $z=a$ и нека важи $f(a)=g(a)=0$.

1) Тогаш,

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}}{\dfrac{g(z)-g(a)}{z-a}}=\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

2) Важи и

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to a}\frac{g(z)}{f(z)}\frac{f^2(z)}{g^2(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\dfrac{g(z)-g(a)}{z-a}}{\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}}\frac{f^2(z)}{g^2(z)}=$$

$$=\frac{g'(a)}{f'(a)}\lim_{z\to a}\frac{f^2(z)}{g^2(z)}.$$

Задача 2.3. Определи ги нулите и редот на нулите на функцијата:

1) $f(z)=1-\cos z.$

2) $f(z)=\left(1-z^2\right)\sin z$

3) $f(z)=z^3\left(e^z-1\right)$

4) $f(z)=\dfrac{z(z-1)^2}{z^2+2z-1}$

5) $f(z)=\dfrac{\sin^8(z)}{z^5}$

6) $f(z)=(z-1)^2\left(e^{3z}-1\right)^3$

7) $f(z)=e^z-e^{2z}$

8) $f(z)=\sinh z$

Решение. 1) Решенијата на равенката $1-\cos z=0$ се нулите на дадената функција. Според тоа, нулите на дадената функција се $z_m=2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$. За да го одредиме редот на овие нули ќе ја искористиме претходната Задача 2.1. Од тоа што $f'(z)=\sin z$, имаме

$$k=\lim_{z\to 2m\pi}(z-2m\pi)\frac{\sin z}{1-\cos z}=$$

$$=\lim_{z\to 2m\pi}(z-2m\pi)\frac{\sin(z-2m\pi+2m\pi)}{1-\cos(z-2m\pi+2m\pi)}=$$

$$=\lim_{z\to 2m\pi}(z-2m\pi)\frac{\sin(z-2m\pi)}{1-\cos(z-2m\pi)}=$$

$$=\lim_{z\to 2m\pi}(z-2m\pi)\frac{\sin(z-2m\pi)}{2\sin^2\frac{z-2m\pi}{2}}=$$

$$=\lim_{z\to 2m\pi}\frac{(z-2m\pi)^2}{\frac{(z-2m\pi)^2}{4}}\cdot\frac{\sin(z-2m\pi)}{z-2m\pi}\cdot\frac{\frac{(z-2m\pi)^2}{4}}{2\sin^2\frac{z-2m\pi}{2}}=\frac{4}{2}=2,$$

за секое $m\in\mathbb{Z}$. Според тоа сите нули на дадената функција се нули од ред 2.

2) Решенијата на равенката $\left(1-z^2\right)\sin z=0$ се нулите на дадента функција. Според тоа, множеството нули на функцијата е $Z(f)=\{m\pi|\, m\in\mathbb{Z}\}\cup\{-1,1\}$. Од тоа што

$$\lim_{z\to m\pi}(z-m\pi)\frac{-2z\sin z+\left(1-z^2\right)\cos z}{(1-z^2)\sin z}=$$

$$=\lim_{z\to m\pi}(z-m\pi)\left(\frac{-2z\sin z}{(1-z^2)\sin z}+\frac{\left(1-z^2\right)\cos z}{(1-z^2)\sin z}\right)=$$

$$=\lim_{z\to m\pi}(z-m\pi)\left(\frac{-2z}{1-z^2}+\frac{\cos z}{\sin z}\right)=$$

$$=\lim_{z\to m\pi}(z-m\pi)\left(\frac{-2z}{1-z^2}+\frac{\cos(z-m\pi+m\pi)}{\sin(z-m\pi+m\pi)}\right)=$$

$$=\lim_{z\to m\pi}(z-m\pi)\left(\frac{-2z}{1-z^2}+\frac{\cos(z-m\pi)\cos m\pi-\sin(z-m\pi)\sin m\pi}{\sin(z-m\pi)\cos m\pi+\sin m\pi\cos(z-m\pi)}\right)=$$

$$=\lim_{z\to m\pi}(z-m\pi)\left(\frac{-2z}{1-z^2}+\frac{\cos(z-m\pi)\cos m\pi}{\sin(z-m\pi)\cos m\pi}\right)=$$

$$= \lim_{z \to m\pi} (z - m\pi) \left(\frac{-2z}{1 - z^2} + \frac{\cos(z - m\pi)}{\sin(z - m\pi)} \right) =$$

$$= \lim_{z \to m\pi} \left(\frac{-2z(z - m\pi)}{1 - z^2} + \frac{(z - m\pi)}{\sin(z - m\pi)} \cos(z - m\pi) \right) = 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

за секое $m \in \mathbb{Z}$, следува дека $z_m = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ се нули на функцијата од ред 1. Исто така, од тоа што

$$\lim_{z \to 1} (z - 1) \frac{-2z \sin z + \left(1 - z^2\right) \cos z}{(1 - z^2) \sin z} =$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(\frac{-2z(z - 1) \sin z}{(1 - z^2) \sin z} + \frac{(z - 1) \left(1 - z^2\right) \cos z}{(1 - z^2) \sin z} \right) =$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(\frac{-2z(z - 1)}{(1 - z^2)} + \frac{(z - 1) \cos z}{\sin z} \right) =$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(\frac{-2z(z - 1)}{-(z - 1)(1 + z)} + \frac{(z - 1) \cos z}{\sin z} \right) =$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(\frac{-2z}{-(1 + z)} + \frac{(z - 1) \cos z}{\sin z} \right) = \frac{-2}{-2} + 0 = 1$$

и

$$\lim_{z \to -1} (z + 1) \frac{-2z \sin z + \left(1 - z^2\right) \cos z}{(1 - z^2) \sin z} =$$

$$= \lim_{z \to -1} \left(\frac{-2z(z + 1) \sin z}{(1 - z^2) \sin z} + \frac{(z + 1) \left(1 - z^2\right) \cos z}{(1 - z^2) \sin z} \right) =$$

$$= \lim_{z \to -1} \left(\frac{-2z(z + 1)}{(1 - z^2)} + \frac{(z + 1) \cos z}{\sin z} \right) =$$

$$= \lim_{z \to -1} \left(\frac{-2z(z + 1)}{(z + 1)(1 - z)} + \frac{(z + 1) \cos z}{\sin z} \right) =$$

$$= \lim_{z \to -1} \left(\frac{-2z}{(1 - z)} + \frac{(z + 1) \cos z}{\sin z} \right) = \frac{2}{2} + 0 = 1$$

добиваме дека $z = -1$ и $z = 1$ се нули од ред 1. Значи, сите нули на функцијата се нули од ред 1.

3) Решенијата на равенката $f(z) = z^3 (e^z - 1)$ се нулите на дадената функција. Според тоа, множеството нули на функцијата е $Z(f) = \{2m\pi i |\, m \in \mathbb{Z}\}$. Притоа $z_m = 2m\pi i$, $m \in \mathbb{Z}$ се нули од ред 4 за дадената функција.

4) Решенија на равенката $\dfrac{z(z-1)^2}{z^2+2z-1}=0$ се $z=0$ и $z=1$, па тие се и нули на дадената функција. Според тоа, множеството нули на функцијата е $Z(f)=\{0,1\}$. Од

$$\lim_{z\to 0} z\frac{\dfrac{(z-1)\left(z^3+5z^2-3z+1\right)}{\left(z^2+2z-1\right)^2}}{\dfrac{z(z-1)^2}{z^2+2z-1}}=\lim_{z\to 0} z\frac{z^3+5z^2-3z+1}{z(z-1)\left(z^2+2z-1\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z^3+5z^2-3z+1}{(z-1)\left(z^2+2z-1\right)}=\frac{1}{(-1)\cdot(-1)}=1$$

и

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\dfrac{(z-1)\left(z^3+5z^2-3z+1\right)}{\left(z^2+2z-1\right)^2}}{\dfrac{z(z-1)^2}{z^2+2z-1}}=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2\left(z^3+5z^2-3z+1\right)\left(z^2+2z-1\right)}{z(z-1)^2\left(z^2+2z-1\right)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{z^3+5z^2-3z+1}{z\left(z^2+2z-1\right)}=\frac{4}{2}=2$$

добиваме дека $z=0$ е нула од ред 1 за дадената функција, а $z=1$ е нула од ред 2.

5) **Прв начин:** Решенија на равенката $\dfrac{\sin^8(z)}{z^5}=0$ се $z_m=m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$. Значи, множеството нули на функцијата е $Z(f)=\{m\pi|\, m\in\mathbb{Z}\}$. Од

$$\lim_{z\to m\pi}(z-m\pi)\frac{\dfrac{8z^5\sin^7 z\cos z-5z^4\sin^8 z}{z^{10}}}{\dfrac{\sin^8 z}{z^5}}=\begin{cases}8, & m\neq 0\\ 3, & m=0\end{cases},$$

за $m\in\mathbb{Z}$, добиваме дека $z=m\pi$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ е нула од ред 8 за дадената функција, а $z=0$ е нула од ред 3.

Втор начин: До истиот заклучок доаѓаме со користење на Тејлоровите развои на функцијата $\sin z$ во околина на точката $a=0$ и $a=m\pi$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Во случај кога $a=0$, добиваме

$$f(z)=\frac{1}{z^5}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^8=\frac{1}{z^5}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)^8=$$

$$= \frac{z^8}{z^5}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...\right)^8 = z^3 g\left(z\right),$$

каде $g\left(z\right) = \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...\right)^8$ и $g\left(0\right) \neq 0$, па $z = 0$ е нула од ред 3.

Во случај кога $a = m\pi$, $m \in \mathbb{Z} \backslash \left\{0\right\}$, имаме

$$f\left(z\right) = \frac{1}{z^5}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z - m\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^8 =$$

$$= \frac{1}{z^5}\left((z - m\pi) - \frac{(z - m\pi)^3}{3!} + \frac{(z - m\pi)^5}{5!} - ...\right)^8 =$$

$$= (z - m\pi)^8 \cdot \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{(z - m\pi)^2}{3!} + \frac{(z - m\pi)^4}{5!} - ...\right)^8 = (z - m\pi)^8 g\left(z\right)$$

каде $g\left(z\right) = \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{(z - m\pi)^2}{3!} + \frac{(z - m\pi)^4}{5!} - ...\right)^8$ и $g\left(m\pi\right) \neq 0$, па навистина $z = m\pi$, $m \in \mathbb{Z} \backslash \left\{0\right\}$ е нула од ред 8.

6) Се остава како вежба на читателот.

7) Равенката $e^z - e^{2z} = 0$ ќе ја запишеме во облик $e^z\left(1 - e^z\right) = 0$. Равенката $e^z = 0$ нема решение, додека пак решенијата на равенката $1 - e^z = 0$ се $z_m = 2m\pi i$, $m \in \mathbb{Z}$. Според тоа, множеството нули на функцијата е $Z\left(f\right) = \left\{2m\pi i \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$. Од

$$\lim_{z \to 2m\pi i} \left(z - 2m\pi i\right) \frac{e^z - 2e^{2z}}{e^z - e^{2z}} = \lim_{z \to 2m\pi i} \left(z - 2m\pi i\right) \frac{e^z\left(1 - 2e^z\right)}{e^z\left(1 - e^z\right)} =$$

$$= \lim_{z \to 2m\pi i} \frac{\left(z - 2m\pi i\right)\left(1 - 2e^z\right)}{1 - e^z} \overset{\text{Л.П.}}{=}$$

$$= \lim_{z \to 2m\pi i} \frac{1 - 2e^z + \left(z - 2m\pi i\right)\left(-2e^z\right)}{-e^z} = 1$$

добиваме дека редот на нулите е 1.

8) Ќе го искористиме идентитетот $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Тогаш, решението на равенката $\sinh z = 0$ е решение на равенката $e^{2z} - 1 = 0$. Користејќи го претходно покажаното во 7), добиваме дека решенија на

равенката се $z_m = m\pi i$, $m \in \mathbb{Z}$. Според тоа, множеството нули на функцијата е $Z(f) = \{m\pi i | m \in \mathbb{Z}\}$. Редот на нулите е 1.

Задача 2.4. Нека $f(z)$ е холоморфна функција во точката $z = a$ и точката $z = a$ е нула од ред k. Покажи дека точката $z = a$ е нула од ред $(k-1)$ за функцијата $f'(z)$.

Решение. Нека $f(z)$ е холоморфна функција во точката $z = a$ и точката $z = a$ е нула од ред k. Тогаш,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n (z-a)^n = A_0 + A_1 (z-a) + A_2 (z-a)^2 + ...,$$

$A_0 = 0$, $A_1 = 0$, ..., $A_{k-1} = 0$, $A_k \neq 0$, за $k > 0$, што е еквивалентно со $f(a) = 0$, $f'(a) = 0, ..., f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$ за $k > 0$. Според тоа, $f'(z) = A_1 + A_2 (z-a) + A_3 (z-a)^2 + ...$ и $A_1 = 0$, ..., $A_{k-1} = 0$, $A_k \neq 0$, за $k > 0$, односно $z = a$ е нула од ред $(k-1)$ за функцијата $f'(z)$.

Задача 2.5. Нека точката $z = a$ е нула од ред n за функцијата f и нула од ред m за функцијата g. Провери дали е нула, и одреди го редот на нулата $z = a$, за функциите:

1) $f + g$

2) $f \cdot g$

3) $\dfrac{f}{g}$

Решение. Од условите на задачата, f и g можат да се претставаат во облик

$$f(z) = (z-a)^n f_1(z) \text{ и } g(z) = (z-a)^m g_1(z),$$

каде f_1 и g_1 се холоморфни функции во $z = a$ и $f_1(a) \neq 0$, $g_1(a) \neq 0$.

1) Нека $p = \min\{m, n\}$. Тогаш имаме дека

$$f(z) + g(z) = (z-a)^p \left[(z-a)^{n-p} f_1(z) + (z-a)^{m-p} g_1(z)\right],$$

од каде добиваме дека $z = a$ е нула од ред p, ако $n \neq m$.

Во случај кога $n = m$, нулата $z = a$ може да е од повисок ред.

2) Во овој случај добиваме дека

$$f(z)\, g(z) = (z-a)^{n+m} f_1(z)\, g_1(z),$$

односно $z = a$ е нула од ред $n + m$.

3) Заради тоа што
$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-a)^{n-m}\frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$
добиваме дека $z = a$ е нула од ред $n - m$, ако $n > m$. Ако, $n \leq m$ тогаш $z = a$ не е нула на функцијата.

Задача 2.6. Нека f и g се холоморфни функции на областа Ω и нека $fg \equiv 0$ на Ω. Покажи дека $f \equiv 0$ или $g \equiv 0$ на Ω.

Решение. Нека f и g се холоморфни функции на областа Ω и нека $fg \equiv 0$ на Ω. Да претпоставиме дека f и g не се идентички еднакви на нула на Ω. Тогаш постои $z_0 \in \Omega$ така што $f(z_0) \neq 0$ и $z_1 \in \Omega$ така што $g(z_1) \neq 0$. Бидејќи f е холоморфна на Ω, таа е и непрекината на Ω. Значи, постои околина U на точката z_0, $U_\varepsilon = \{z | |z - z_0| < \varepsilon\}$ така што $f(z) \neq 0$ за секое $z \in U_\varepsilon$. Од $fg \equiv 0$ на Ω, добиваме дека $fg \equiv 0$ на U_ε. Од $fg \equiv 0$ на U_ε и $f(z) \neq 0$ за секое $z \in U_\varepsilon$, следува дека $g \equiv 0$ на U_ε. Значи множеството нули $Z(g) \subseteq \Omega$ на функцијата g има точка на натрупување во Ω, па $g \equiv 0$ на Ω. Но, ова противречи на почетната претпоставка дека постои $z_1 \in \Omega$ така што $g(z_1) \neq 0$. Заклучуваме дека $f \equiv 0$ или $g \equiv 0$ на Ω.

Задача 2.7. Испитај дали постои функција $f(z)$ којашто е холоморфна на единечниот круг $D = \{z | |z| < 1\}$ и за која важи:

1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n+1}$ за секое $n \in \mathbb{N}$;

2) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\cos(n\pi)$ за секое $n \in \mathbb{N}$.

Решение. 1) Да претпоставиме дека постои таква функција $f(z)$, $f \in \mathbb{H}(D)$. Дадениот услов на функцијата може да се запише во облик
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}},$$
за секое $n \in \mathbb{N}$. Дефинираме функција $F(z) = f(z) - \dfrac{z}{2+z}$. Бидејќи $f \in \mathbb{H}(D)$ и $z + 2 \neq 0$ за секое $z \in D$, имаме дека $F \in \mathbb{H}(D)$. Притоа,
$$F\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 0,$$

односно $F\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ за секое $n \in \mathbb{N}$. Значи, елементите на множеството $A = \left\{\dfrac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ се нули на функцијата F, па $A \subseteq Z(F)$. Од $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, добиваме дека множеството нули $Z(F)$ има точка на натрупување на D. Според тоа, $F(z) = 0$ за секое $z \in D$, односно $f(z) = \dfrac{z}{2+z}$ за секое $z \in D$ е бараната функција.

2) Да претпоставиме дека постои таква функција $f(z)$, $f \in \mathbb{H}(D)$. Дадениот услов на функцијата може да се запише во облик $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n}$, за секое $n \in \mathbb{N}$, односно

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ парен број} \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ непарен број} \end{cases}.$$

За n парен број, односно $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, ја разгледуваме функцијата $F(z) = f(z) - z$, $z \in D$. Тогаш,

$$F\left(\frac{1}{2k}\right) = f\left(\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} = 0,$$

односно $F\left(\dfrac{1}{2k}\right) = 0$ за секое $k \in \mathbb{N}$. Значи, елементите на множеството $A_1 = \left\{\dfrac{1}{2k}\middle| k \in \mathbb{N}\right\}$ се нули на функцијата F, па $A_1 \subseteq Z(F)$. Од $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2k} = 0$, добиваме дека множеството нули на $F(z)$ има точка на натрупување, а $F \in \mathbb{H}(D)$, како разлика на две холоморфни функции. Заклучуваме дека $F(z) = 0$ за секое $z \in D$, односно $f(z) = z$ за секое $z \in D$.

За n непарен број, односно $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, ја разгледуваме функцијата $G(z) = f(z) + z$, $z \in D$. Тогаш,

$$G\left(\frac{1}{2k+1}\right) = f\left(\frac{1}{2k+1}\right) + \frac{1}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+1} = 0,$$

односно $G\left(\dfrac{1}{2k+1}\right) = 0$ за секое $k \in \mathbb{N}$. Значи, елементите на множеството $A_2 = \left\{\dfrac{1}{2k+1}\middle| k \in \mathbb{N}\right\}$ се нули на функцијата G, па $A_2 \subseteq Z(G)$. Од $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2k+1} = 0$, добиваме дека множеството нули на $G(z)$ има точка на натрупување, а $G \in \mathbb{H}(D)$. Заклучуваме дека $G(z) = 0$ за секое $z \in D$, односно $f(z) = -z$ за секое $z \in D$. Добиваме дека, од една страна $f(z) = z$ за секое $z \in D$, а од друга страна $f(z) = -z$ за секое $z \in D$, односно $-z = z$ за секое $z \in D$, што е невозможно. Значи бараната функција не постои.

Задача 2.8. Определи ги сите холоморфни функции $f(z)$ на областа $D = \{z | \, |z-1| < 1\}$ за кои важи $f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$ за секое $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Да претпоставиме дека постои таква функција $f(z)$, $f \in \mathbb{H}(D)$. Дадениот услов на функцијата може да се запише во облик

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1} = \frac{2n^2+2n}{n^2+n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{2n(n+1)}{n^2+(n+1)^2} = \frac{2\frac{n}{n+1}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+1},$$

за секое $n \in \mathbb{N}$. Дефинираме функција $F(z) = f(z) - \frac{2z}{z^2+1}$. Од тоа што $f \in \mathbb{H}(D)$, $z^2+1 \neq 0$ за секое $z \in D$, имаме дека $F \in \mathbb{H}(D)$. Притоа,

$$F\left(\frac{n}{n+1}\right) = f\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{2\frac{n}{n+1}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+1} = 0,$$

односно $F\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$ за секое $n \in \mathbb{N}$. Значи, елементите на множеството $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ се нули на функцијата F, па $A \subseteq Z(F)$. Од $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, добиваме дека множеството нули $Z(F)$ има точка на натрупување на D. Според тоа, $F(z) = 0$ за секое $z \in D$, односно $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$ за секое $z \in D$ е бараната функција.

Задача 2.9. Најди холоморфна функција $f(z)$ на областа $D = \{z | \, |z| < R\}$ за која важи $f(2z) = f(3z)$ за секое $z \in D$ и $f(0) = 1$.

Решение. Воведуваме смена $3z = w$. Тогаш $z = \frac{w}{3}$ и $f(w) = f\left(\frac{2}{3}w\right)$.

Означуваме

$$\underbrace{f(w) = f\left(\frac{2}{3}w\right)}_{(*)}.$$

Конструираме низа $\{w_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ на следниот начин:
Нека $w_1 = r < R$, $R > 0$. Тогаш

$$f(r) = f\left(\frac{2}{3}r\right).$$

Нека $w_2 = \dfrac{2}{3}w_1$. Имаме дека $w_2 < w_1$ и $f(w_2) = f\left(\dfrac{2}{3}w_1\right) \overset{(*)}{=} f(w_1)$. Слично, ако $w_3 = \dfrac{2}{3}w_2$, добиваме дека

$$w_3 < w_2 < w_1 \text{ и } f(w_3) = f\left(\frac{2}{3}w_2\right) = f(w_2),$$

односно $f(w_3) = f(w_2) = f(w_1)$. Со продолжување на постапката ја конструираме низата $\{w_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $w_n = r\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < r < R$, чии членови припаѓаат на дадената област D и за којашто е исполнето $w_n < w_{n-1} < ... < w_2 < w_1$, $w_n > 0$ за секое $n \in \mathbb{N}$ и

$$f(w_n) = f(w_{n-1}) = ... = f(w_2) = f(w_1).$$

Нека $f(w_1) = c$, за некој произволно избран број c. Од $f(w_n) = f(w_1)$ за секое $n \in \mathbb{N}$, добиваме дека $f(w_n) = c$ за секое $n \in \mathbb{N}$. Дефинираме функција $F(w) = f(w) - c$. Од тоа што $f \in \mathbb{H}(D)$, имаме дека $F \in \mathbb{H}(D)$. Притоа,

$$F(w_n) = f(w_n) - c = 0,$$

односно $F(w_n) = 0$ за секое $n \in \mathbb{N}$. Значи, елементите на множеството $A = \{w_n | n \in \mathbb{N}\}$ се нули на функцијата F, па $A \subseteq Z(F)$. Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, добиваме дека множеството нули $Z(F)$ има точка на натрупување на D. Според тоа, $F(w) = 0$ за секое $w \in D$, односно $f(w) = c$ за секое $w \in D$. Од условот на задачата дека $f(0) = 1$, добиваме $c = 1$, односно $f(w) = 1$ е бараната функција.

Задача 2.10. Определи ги сите цели функции $f(z)$ така што $f(z) = f(\sin z)$ за секое $z \in \mathbb{C}$.

Решение. Означуваме $\underbrace{f(z) = f(\sin z)}_{(*)}$.

Конструираме низа $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ на следниот начин:
Нека $z_1 = 1$. Тогаш

$$f(1) = f(\sin 1).$$

Сега, нека $z_2 = \sin z_1 = \sin 1$. Од тоа што важи неравенството $\sin x < x$, за секое $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, следува дека $z_2 = \sin z_1 = \sin 1 < 1 = z_1$, односно $z_2 < z_1$. Притоа важи,

$$f(z_2) = f(\sin 1) \overset{(*)}{=} f(1) = f(z_1),$$

односно $f(z_2) = f(z_1)$. Значи $z_2 < z_1$ и $f(z_2) = f(z_1)$. Ја продолжуваме постапката, ставајќи $z_3 = \sin z_2$. Од $z_2 = \sin 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$, добиваме дека $\sin z_2 < z_2$, односно $z_3 = \sin z_2 < z_2$, односно $z_3 < z_2 < z_1$. Исто така важи дека

$$f(z_3) = f(\sin z_2) \overset{(*)}{=} f(z_2),$$

односно $f(z_3) = f(z_2) = f(z_1)$. Со продолжување на постапката, на сличен начин ги конструираме останатите членови на низата $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. За неа е исполнето $z_n < z_{n-1} < ... < z_2 < z_1$, $z_n > 0$ за секое $n \in \mathbb{N}$ и

$$f(z_n) = f(z_{n-1}) = ... = f(z_2) = f(z_1).$$

Забележуваме дека низата $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, е монотоно опаѓачка и ограничена (од долу со 0 и од горе со 1), односно конструиравме конвергентна низа. Значи вака конструираната низа има гранична вредност, односно точка на натрупување на $\mathbb{C}$. Нека $f(z_1) = c$, за c произволен број. Од тоа што $f(z_n) = f(z_{n-1}) = ... = f(z_1)$, добиваме дека $f(z_n) = f(z_1) = c$ за секое $n \in \mathbb{N}$. Дефинираме функција $F(z) = f(z) - c$. Од $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, имаме дека $F \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Притоа,

$$F(z_n) = f(z_n) - c = 0,$$

односно $F(z_n) = 0$ за секое $n \in \mathbb{N}$. Значи, елементите на множеството $A = \{z_n | n \in \mathbb{N}\}$ се нули на функцијата F, па $A \subseteq Z(F)$ и од тоа што постои $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, добиваме дека множеството нули $Z(F)$ има точка на натрупување на $\mathbb{C}$. Според тоа, $F(z) = 0$ за секое $z \in \mathbb{C}$, односно $f(z) = c$ за секое $z \in \mathbb{C}$ е бараната функција.

2.2 Изолирани сингуларитети

За холоморфна функција $f(z)$ на област $D = \{z | 0 < |z-a| < R\}$, разликуваме три вида на изолирани сингуларитети и тоа:

1) ако $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A < \infty$, тогаш $z = a$ се нарекува *отстранлив сингуларитет*;

2) ако $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, тогаш $z = a$ се нарекува *пол*;

3) ако $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не постои, тогаш $z = a$ се нарекува *есенцијален (суштински) сингуларитет.*

Теорема 2.3. *Нека $z = a$ е сингуларитет за функцијата $f(z)$ и $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ е Лорановиот развој на функцијата на областа $D = \{z | 0 < |z-a| < R\}$. Тогаш:*

1) $f(z)$ има отстранлив сингуларитет во точката $z = a$ ако и само ако $c_n = 0$ за секое $n \leq -1$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $f(z)$ има пол во точката $z = a$ ако и само ако постои $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 < 0$ така што $c_{n_0} \neq 0$ и $c_n = 0$ за секое $n < n_0$, $n \in \mathbb{Z}$;

3) $f(z)$ има есенцијален сингуларитет во точката $z = a$ ако и само ако главниот дел на Лорановиот развој има бесконечно многу членови.

Задача 2.11. Докажи дека точката $z = a$ е отстранлив сингуларитет за функцијата $f(z)$ каде што:

1) $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z-1}$ и $a = 1$;

2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ и $a = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$ и $a = 0$;

4) $f(z) = ctgz - \dfrac{1}{z}$ и $a = 0$.

Решение. Ќе покажеме дека граничните вредности $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ постојат и се конечни.

1) $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z^2-1}{z-1} = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(z+1)}{1} = 2.$

2) $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1.$

3) $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{z^2} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{z}{2}}{z^2} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{z}{2}}{4\frac{z^2}{4}} = \dfrac{1}{2}.$

4) $\lim\limits_{z\to 0} \left(ctgz - \dfrac{1}{z}\right) = \lim\limits_{z\to 0} \left(\dfrac{\cos z}{\sin z} - \dfrac{1}{z}\right) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z\cos z - \sin z}{z\sin z} = 0.$

Задача 2.12. Докажи дека точката $z = a$ е пол за функцијата $f(z)$ каде што:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ и $a = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ и $a = i$;

3) $f(z) = \dfrac{z}{1-\cos z}$ и $a = 0$;

4) $f(z) = \dfrac{z}{e^z+1}$ и $a = \pi i$.

Доказ. Ќе покажеме дека е исполнето $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

1) $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{z} = \infty.$

2) $\lim\limits_{z\to i} f(z) = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{1}{(z^2+1)^2} = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} = \infty.$

3) $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{1-\cos z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{1-\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\ldots\right)} =$

$= \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{z}{2!}-\dfrac{z^3}{4!}+\dfrac{z^5}{6!}-\ldots} = \infty.$

4) $\lim\limits_{z\to \pi i} f(z) = \lim\limits_{z\to \pi i} \dfrac{z}{e^z+1} = \lim\limits_{z\to \pi i} \dfrac{z}{e^{z-\pi i}\left(e^{\pi i}+e^{\pi i - z}\right)} =$
$= \lim\limits_{z\to \pi i} \dfrac{z}{-e^z\left(e^{\pi i}+e^{\pi i - z}\right)} = \lim\limits_{z\to \pi i} \dfrac{z}{1-e^{\pi i + z}} = \infty.$

Задача 2.13. Нека $f(z)$ и $g(z)$ се холоморфни функции во точката $z = a$ и $f(a) = g(a) = 0$. Докажи дека точката $z = a$ е изолиран сингуларитет за функцијата $F(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ и дека тој сингуларитет не може да е есенцијален.

Доказ. Нека важат условите на задачата. Тогаш имаме дека $z = a$ е нула на функциите $f(z)$ и $g(z)$, па постојат природни броеви $n, p \in \mathbb{N}$ така што $f(z) = (z-a)^n f_1(z)$ и $g(z) = (z-a)^p g_1(z)$, каде $f_1(a) \neq 0$, $g_1(a) \neq 0$ и $f_1, g_1 \in \mathbb{H}(D_\varepsilon(a))$. Според тоа, за функцијата $F(z)$ добиваме

$$F(z) = \frac{(z-a)^n f_1(z)}{(z-a)^p g_1(z)} = (z-a)^{n-p} \frac{f_1(z)}{g_1(z)}.$$

Тогаш,

$$\lim_{z\to a} F(z) = \lim_{z\to a} \left[(z-a)^{n-p} \frac{f_1(z)}{g_1(z)}\right] = \begin{cases} 0, & n > p \\ \dfrac{f_1(a)}{g_1(a)}, & n = p \\ \infty, & n < p \end{cases},$$

што значи дека $z = a$ е изолиран сингуларитет за функцијата $F(z)$, и притоа тој е отстранлив во случај кога $n \geq p$, а е пол во случај кога $n < p$.

Задача 2.14. Докажи дека $z = \infty$ е есенцијален сингуларитет за функцијата $f(z) = \sin z$.

Решение. Ако постојат две низи $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$ така што $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = \lim\limits_{n\to\infty} z''_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z'_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z''_n) = B$, $A \neq B$, тогаш точката $z = a$ е есенцијален сингуларитет за функцијата $f(z)$. Да ги разгледаме низите $z'_n = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$ и $z''_n = 2n\pi$. Тогаш е исполнето

$$\lim_{n\to\infty} z'_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = \infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} z''_n = \lim_{n\to\infty} 2n\pi = \infty,$$

а од друга страна важи

$$\lim_{n\to\infty} f\left(z'_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1 \text{ и}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(z''_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0.$$

Но, $-1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(z'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(z''_n) = 0$, па добиваме дека $z = \infty$ е есенцијален сингуларитет.

Задача 2.15. Докажи дека $z = a$ е есенцијален сингуларитет за функцијата $f(z)$ каде:

1) $f(z) = e^z$ и $a = \infty$

2) $f(z) = e^{-z^2}$ и $a = \infty$

3) $f(z) = \sin\dfrac{\pi}{z^2}$ и $a = 0$

4) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z-1}$ и $a = 1$.

Решение. 1) Да ги разгледаме низите

$$z'_n = i(\pi + 2n\pi) \text{ и } z''_n = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right).$$

Тогаш е исполнето

$$\lim_{n\to\infty} z'_n = \lim_{n\to\infty} i(\pi + 2n\pi) = \infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} z''_n = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \infty.$$

Од друга страна важи

$$\lim_{n\to\infty} f\left(z'_n\right) = \lim_{n\to\infty} e^{i(\pi+2n\pi)} = -1 \text{ и}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f\left(z''_n\right) = \lim_{n\to\infty} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)} = i.$$

Па, од $-1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(z'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(z''_n) = i$, добиваме дека $z = \infty$ е есенцијален сингуларитет.

2) Нека $z'_n = n$ и $z''_n = in$. Тогаш е јасно дека $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = \lim\limits_{n\to\infty} z''_n = \infty$ и притоа е исполнето

$$\lim_{n\to\infty} f\left(z'_n\right) = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2} = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} f\left(z''_n\right) = \lim_{n\to\infty} e^{n^2} = \infty,$$

што значи дека $z = \infty$ е есенцијален сингуларитет.

3) Нека $z'_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ и $z''_n = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{4n+1}{2}}}$. Тогаш, $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = \lim\limits_{n\to\infty} z''_n = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f\left(z'_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} f\left(z''_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{4n+1}{2}}}\right)^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

што значи дека $z = 0$ е есенцијален сингуларитет.

4) Се остава на читателот за вежба да утврди дали со помош на низите со општи членови $z'_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ и $z''_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, соодветно, може да се дојде до соодветниот заклучок.

Задача 2.16. Определи ги сингуларитетите за функцијата и испитај ја нивната природа:

1) $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$

2) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$

3) $f(z) = z\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right)$.

Решение. 1) Решенијата на равенката $\sin z = 0$ се $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, па тие се и изолираните сингуларитети на дадената функција. Бидејќи $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\sin z} = 1$, следува дека $z = 0$ отстранлив сингуларитет, а од $\lim\limits_{z\to k\pi} \dfrac{z}{\sin z} = \infty$, за секое $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, добиваме дека $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ се полови на функцијата.

2) Дадената функција може да ја трансформираме во облик

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{\sin^2 z} = \frac{2\sin^2\dfrac{z}{2}}{4\sin^2\dfrac{z}{2}\cos^2\dfrac{z}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\dfrac{z}{2}},$$

или

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{\sin^2 z} = \frac{1-\cos z}{(1-\cos z)(1+\cos z)} = \frac{1}{1+\cos z},$$

па добиваме дека изолираните сингуларитети се решенијата на равенката $\cos\frac{z}{2} = 0$, а тоа се $z_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Притоа, од тоа што $\lim\limits_{z\to(2k+1)\pi} f(z) = \infty$, следува дека сите $z_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се полови.

3) Ќе ја искористиме Теорема 2.3. За Лорановиот развој на дадената функција во точката $a = 0$ имаме

$$f(z) = z\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n - 1\right) = z\left(1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + ... - 1\right) =$$

$$= z\left(\frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + ...\right) = 1 + \frac{1}{2!}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^2} + ...,$$

што значи дека главниот дел на Лорановиот развој има бесконечно многу членови, односно $z = 0$ е есенцијален сингуларитет за дадената функција.

Задача 2.17. Нека $f(z)$ е холоморфна и ограничена функција на областа $D = \{z|\, 0 < |z-a| < R\}$. Докажи дека точката $z = a$ е отстранлив сингуларитет за функцијата $f(z)$.

Решение. Нека важат условите на задачата. Дефинираме функција $h(z) = (z-a)^2 f(z)$. Од тоа што f припаѓа на $\mathbb{H}(D)$, следува дека и $h \in \mathbb{H}(D)$. Исто така е исполнето дека $h(a) = 0$. Притоа,

$$\lim_{z\to a}\left|\frac{h(z)-h(a)}{z-a}\right| = \lim_{z\to a}\left|\frac{(z-a)^2 f(z) - 0}{z-a}\right| = \lim_{z\to a}|(z-a)\,f(z)|\,.$$

Бидејќи функцијата f е ограничена на D, следува дека постои реален број $M > 0$ така што за секое $z \in D$, $|f(z)| \leq M$, па

$$0 \leq \lim_{z\to a}\left|\frac{h(z)-h(a)}{z-a}\right| = \lim_{z\to a}|(z-a)\,f(z)| =$$

$$= \lim_{z\to a}|(z-a)|\,|f(z)| \leq M\lim_{z\to a}|(z-a)| = 0,$$

односно $\lim\limits_{z\to a}\left|\frac{h(z)-h(a)}{z-a}\right| = 0$. Според тоа, $|h'(a)| = 0$, односно $h'(a) = 0$. Значи $h(a) = 0$, $h'(a) = 0$ и $h \in \mathbb{H}(D)$, па нејзиниот развој се состои само од правилниот дел, почнувајќи од вториот член, односно

$$h(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n (z-a)^n.$$

Со замена на $h(z) = (z-a)^2 f(z)$, добиваме

$$(z-a)^2 f(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n (z-a)^n \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n \frac{(z-a)^n}{(z-a)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-2}.$$

Според тоа, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_{k+2}(z-a)^k$ на D, од каде доаѓаме до заклучок дека главниот дел на развојот е идентички еднаков на 0, па $z=a$ е отстранлив сингуларитет за функцијата $f(z)$.

Задача 2.18. Нека $z=a$ е есенцијален сингуларитет за холоморфната функција $f(z)$. Докажи дека за кој било комплексен број $B \in \mathbb{C}$, вклучувајќи и $B = \infty$, постои низа $\{z_n\}$ од комплексни броеви така што $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = B$.

Доказ. Нека $B = \infty$. Тогаш, за секое $n \in \mathbb{N}$, постои

$$z_n \in D_{\frac{1}{n}}(a) = \left\{ z \middle| \, 0 < |z-a| < \frac{1}{n} \right\}$$

така што $|f(z_n)| > n$. Во спротивно, ако постои природен број $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што за секое $z_n \in D_{\frac{1}{n_0}}(a) = \left\{ z \middle| \, 0 < |z-a| < \frac{1}{n_0} \right\}$ важи $|f(z_n)| \leq n_0$, добиваме дека $f(z)$ е ограничена функција во околина на точката $z=a$, па, заради претходната задача, следува дека $z=a$ отстранлив сингуларитет. Според тоа, мора да важи за секое $n \in \mathbb{N}$, постои $z_n \in D_{\frac{1}{n}}(a) = \left\{ z \middle| \, 0 < |z-a| < \frac{1}{n} \right\}$ така што $|f(z_n)| > n$, што е еквивалентно со тоа дека постои $\{z_n\}$ така што $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty = B$.

Нека $B < \infty$. За да го покажеме тврдењето, доволно е да покажеме дека за секое $\varepsilon > 0$ и секое $\delta > 0$, постои $z_\delta \in D_\delta(a) = \{z | \, 0 < |z-a| < \delta\}$ така што $|f(z_\delta) - B| < \varepsilon$. Навистина, за $\delta = \frac{1}{n}$, претходното е еквивалентно со тоа дека за секое $\varepsilon > 0$ и секое $n \in \mathbb{N}$, постои $z_n \in D_{\frac{1}{n}}(a) = \left\{ z \middle| \, 0 < |z-a| < \frac{1}{n} \right\}$ така што $|f(z_n) - B| < \varepsilon$, односно е еквивалентно со $\lim\limits_{z\to a} z_n = a$ и $\lim\limits_{z\to a} f(z_n) = B$. Во продолжение ќе го покажеме тврдењето дека за секое $\varepsilon > 0$ и секое $\delta > 0$, постои $z_\delta \in D_\delta(a) = \{z | \, 0 < |z-a| < \delta\}$ така што $|f(z_\delta) - B| < \varepsilon$. Да претпоставиме спротивно на тврдењето, односно дека постои $\varepsilon_0 > 0$, постои $\delta_0 > 0$, така што за секое $z \in D_{\delta_0}(a) = \{z | \, 0 < |z-a| < \delta_0\}$, следува $|f(z) - B| \geq \varepsilon_0$. Дефинираме функција $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - B}$. Значи $f(z) = B + \dfrac{1}{g(z)}$. Добиваме дека $|g(z)| \leq \dfrac{1}{\varepsilon_0}$ за секое $z \in D_{\delta_0}(a)$, односно $g(z)$ е ограничена на $D_{\delta_0}(a)$. Од холоморфноста на $f(z)$ на $D_{\delta_0}(a)$, следува дека и $g(z)$ е холоморфна на $D_{\delta_0}(a)$. Заради претходната задача, добиваме дека $z = a$ е отстранлив сингуларитет за $g(z)$, односно $\lim\limits_{z\to a} g(z) = b$. Па,

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a}\left(B + \frac{1}{g(z)}\right) = B + \frac{1}{b}.$$

Според тоа, ако $b = 0$ добиваме дека $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, односно $z = a$ е пол, а ако $b \neq 0$, тогаш $\lim\limits_{z\to a} f(z) = B + \dfrac{1}{b} = C < \infty$, односно $z = a$ е отстранлив сингуларитет. Последново противречи на претпоставката дека $z = a$ е есенцијален сингуларитет. Според тоа, добиваме дека претпоставката е неточна, односно докажавме дека ако $z = a$ е есенцијален сингуларитет, тогаш за секое $\varepsilon > 0$ и секое $\delta > 0$, постои $z_\delta \in D_\delta(a)$ така што $|f(z_\delta) - B| < \varepsilon$ што е еквивалентно со за секое $\varepsilon > 0$ и секое $\delta > 0$ постои $z_n \in D_{\frac{1}{n}}(a) = \left\{z | 0 < |z - a| < \dfrac{1}{n}\right\}$ така што $|f(z_n) - B| < \varepsilon$, односно $\lim\limits_{z\to a} z_n = a$ и $\lim\limits_{z\to a} f(z_n) = B$.

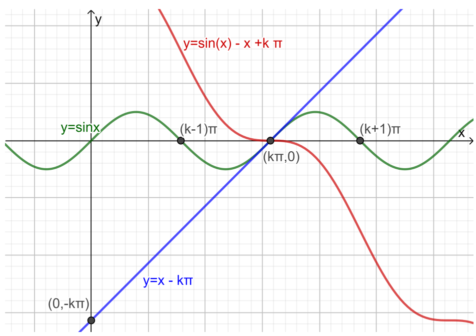
Задача 2.19. Докажи дека за функцијата $f(z) = e^{\frac{1}{\sin z}}$, точките $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се есенцијални сингуларитети.

Решение. Ќе покажеме дека $\lim\limits_{z\to k\pi} f(z)$, $k \in \mathbb{Z}$ не постои. Нека $z = x$, $x \in \mathbb{R}$, и нека за $\delta > 0$, означуваме со $A_\delta = (k\pi, k\pi + \delta)$. Тогаш, за $\delta < \pi$, $A_\delta \subset (k\pi, (k+1)\pi)$. Дефинираме функција

$$g(x) = \sin x - x + k\pi,$$

$x \in A_\delta$. Од тоа што,

$$g'(x) = \cos x - 1 < 0 \text{ за } x \in A_\delta,$$



Слика 2.1 Графички приказ на функциите

следува дека функцијата $g(x)$ е монотоно опаѓачка функција. Па, за $x > k\pi$, следува дека $g(x) < g(k\pi)$, односно

$$g(x) = \sin x - x + k\pi < \sin(k\pi) - k\pi + k\pi = 0 = g(k\pi),$$

односно $\sin x < x - k\pi$, за $x \in A_\delta$. Според тоа имаме дека,

$$\lim_{\substack{x\to k\pi\\ x\in A_\delta}} f(x) = \lim_{\substack{x\to k\pi\\ x\in A_\delta}} e^{\frac{1}{\sin x}} > \lim_{\substack{x\to k\pi\\ x\in A_\delta}} e^{\frac{1}{x-k\pi}} = \infty,$$

затоа што $x - k\pi > 0$.

Од друга страна, нека за $\delta > 0$, означуваме со $B_\delta = (k\pi - \delta, k\pi)$. Јасно, за $\delta < \pi$, $B_\delta \subset ((k-1)\pi, k\pi)$. За $x \in B_\delta$, $x < k\pi$, па користејќи го фактот дека $g(x)$ е монотоно опаѓачка функција, добиваме дека,

$$g(x) = \sin x - x + k\pi > \sin(k\pi) - k\pi + k\pi = 0 = g(k\pi),$$

односно важи дека $\sin x > x - k\pi$, за $x \in B_\delta$. Според тоа имаме дека

$$\lim_{\substack{x\to k\pi\\ x\in B_\delta}} f(x) = \lim_{\substack{x\to k\pi\\ x\in B_\delta}} e^{\frac{1}{\sin x}} < \lim_{\substack{x\to k\pi\\ x\in B_\delta}} e^{\frac{1}{x-k\pi}} = 0,$$

затоа што $x-k\pi < 0$. Добиваме дека левиот и десниот лимес на функцијата во точката $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се различни, односно лимесот $\lim\limits_{z\to k\pi} f(z)$, $k \in \mathbb{Z}$ не постои.

Глава 3

ПРИНЦИП НА МАКСИМУМ НА МОДУЛ

Теорема 3.1. *Нека* Ω *е област и* $f \in \mathbb{H}(\Omega)$*. Ако* $|f(z)| = c$*,* $c \in \mathbb{C}$*, за секој* $z \in \Omega$*, тогаш и* $f(z) = c$ *за секој* $z \in \Omega$*.*

Теорема 3.2 (Принцип на максимум на модул)**.** *Нека* Ω *е ограничена област, нека* $f(z)$ *е холоморфна функција на* Ω *и непрекината функција на* $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$*. Ако* $|f(z)|$ *достигнува максимум во внатрешна точка* $z_0 \in \Omega$*, тогаш* $f(z) = c$*,* $c \in \mathbb{C}$*, за секој* $z \in \overline{\Omega}$*, односно модулот на* $f(z)$*,* $|f(z)|$*, достигнува максимум на* $\partial\Omega$*.*

Теорема 3.3 (Принцип на максимум на модул)**.** *Нека* Ω *е ограничена област, нека* $f(z)$ *е холоморфна функција на* Ω *и непрекината функција на* $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$*. Тогаш е исполнето*

$$|f(z)| \leq \sup\{|f(z)|| z \in \partial\Omega\},$$

за секој $z \in \Omega$*, и притоа равенство се постигнува ако и само ако* $f(z) = c$*, за секој* $z \in \Omega$*.*

Задача 3.1 (Лема на Шварц)**.** Нека $f(z)$ е холоморфна функција на кругот $D = \{z| |z| < 1\}$, нека $|f(z)| \leq 1$, за секој $z \in D$ и $f(0) = 0$. Докажи дека:

1) $|f(z)| \leq z$ за секој $z \in D$ и ако се достигнува равенство барем за една точка $z \in D \setminus \{0\}$, тогаш $f(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$.

2) $|f'(0)| \leq 1$.

Решение. 1) Ја разгледуваме функцијата $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$.

Бидејќи $f(0) = 0$, функцијата $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ има отстранлив сингуларитет во точката $z = 0$ и од тоа што $f \in \mathbb{H}(D)$, добиваме дека и $g \in \mathbb{H}(D)$, па јасно и непрекината на D. Од $f(0) = 0$, имаме и

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - 0}{z - 0} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} g(z) = g(0),$$

односно $f'(0) = g(0) = \lim\limits_{z \to 0} g(z)$. Нека $z_0 \in D$ и r е произволно избран број таков што $|z_0| < r < 1$. За $D_r = \{z | \, |z| < r\}$ важи $D_r \subseteq D$, па $g \in \mathbb{H}(D_r)$ и $g(z)$ е непрекината на $\overline{D}_r$. Од Принципот на максимум на модул (ПММ) добиваме дека

$$|g(z_0)| \leq \sup\{|g(z)| \, | \, z \in \partial D_r\} = \sup\left\{ \frac{|f(z)|}{|z|} \middle| \, z \in \partial D_r \right\} \leq \frac{1}{r},$$

односно $|g(z_0)| \leq \dfrac{1}{r}$, за секој z_0, таков што $|z_0| < r < 1$ и за секој $0 < r < 1$. Следствено $\lim\limits_{r \to 1} |g(z_0)| \leq \lim\limits_{r \to 1} \dfrac{1}{r}$, односно $|g(z_0)| \leq 1$, $z_0 \in D$, па $\dfrac{|f(z_0)|}{|z_0|} \leq 1$, $z_0 \in D$. Од произволноста на $z_0 \in D$, следува дека $|f(z_0)| \leq |z_0|$ за секој $z_0 \in D$.

Нека постои некое $z_0 \in D$ за кое се постигнува равенство во $|f(z)| \leq |z|$. Тогаш $|f(z_0)| = |z_0|$, па $|g(z_0)| = \dfrac{|f(z_0)|}{|z_0|} = 1$, т.е. $|g(z_0)| = 1$. Од ПММ добиваме дека $g(z) = c$ за секој $z \in D$, односно $\dfrac{f(z)}{z} = c$ за секој $z \in D$, т.е. $f(z) = cz$ за секој $z \in D$. Бидејќи за $z_0 \in D$ важи $|f(z_0)| = |z_0|$, од $f(z) = cz$ добиваме дека $|c| \cdot |z_0| = |z_0|$, па $|c| = 1$. Конечно, $f(z) = cz$ за секој $z \in D$, каде што $|c| = 1$, односно $f(z) = e^{i\theta} z$, за реална константа $\theta \in \mathbb{R}$ и секој $z \in D$.

2) Претходно покажавме дека $|f(z)| \leq |z|$ за секој $z \in D$, односно $|g(z)| \leq 1$ за секој $z \in D$. Специјално за $z = 0$, $|g(0)| \leq 1$ и од тоа што $f'(0) = g(0) = \lim\limits_{z \to 0} g(z)$, следува дека $|f'(0)| \leq 1$.

Задача 3.2. Нека $\alpha \in D$, $D = \{z | \, |z| < 1\}$. Нека $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$.

1) Докажи дека φ_α е биекција од $\overline{D}$ во $\overline{D}$, $\overline{D} = \{z | \, |z| \leq 1\}$ така што ∂D се пресликува на ∂D, D се пресликува на D и инверзното пресликување на φ_α е $\varphi_{-\alpha}$.

2) Докажи дека ${\varphi'}_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$ и ${\varphi'}_\alpha(\alpha) = \dfrac{1}{1-|\alpha|^2}$.

Решение. 1) Нека $\varphi_\alpha : \overline{D} \to \overline{D}$ и $\overline{D} = \{z \mid |z| \leq 1\}$. Од тоа што $1 - \overline{\alpha} z = 0$ за $z = \dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ и $|z| = \dfrac{1}{|\overline{\alpha}|} = \dfrac{1}{|\alpha|} > 1$, следува дека $\varphi_\alpha \in \mathbb{H}(D)$. Ќе покажеме дека за секој $z \in \overline{D}$ важи $\varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z)) = z = \varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z))$. Јасно, $\varphi_{-\alpha}(z) = \dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}$, па за секој $z \in D$ имаме:

$$\varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z)) = \varphi_\alpha\left(\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}\right) = \frac{\dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z} - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}} =$$

$$= \frac{\dfrac{z+\alpha-\alpha-\alpha\overline{\alpha}z}{1+\overline{\alpha}z}}{\dfrac{1+\overline{\alpha}z-\overline{\alpha}z-\overline{\alpha}\alpha}{1+\overline{\alpha}z}} = \frac{z-|\alpha|^2 z}{1-|\alpha|^2} = z,$$

$$\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z)) = \varphi_{-\alpha}\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right) = \frac{\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} + \alpha}{1 + \overline{\alpha}\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}} =$$

$$= \frac{\dfrac{z-\alpha+\alpha-\alpha\overline{\alpha}z}{1-\overline{\alpha}z}}{\dfrac{1-\overline{\alpha}z+\overline{\alpha}z-\alpha\overline{\alpha}}{1-\overline{\alpha}z}} = \frac{z-|\alpha|^2 z}{1-|\alpha|^2} = z.$$

Значи важи $\varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z)) = \varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z))$, за секој $z \in \overline{D}$.

Ќе покажеме дека $\varphi_\alpha(z)$ е инјекција. Нека $\varphi_\alpha(z_1) = \varphi_\alpha(z_2)$, $z_1, z_2 \in \overline{D}$. Ако примениме $\varphi_{-\alpha}$, добиваме

$$\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z_1)) = \varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z_2)).$$

Заради тоа што $\varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z)) = \varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z))$, за секој $z \in \overline{D}$, следува дека $z_1 = z_2$, односно φ_α е инјекција.

Ќе покажеме дека $\varphi_\alpha(\partial D) = \partial D$ и $\varphi_\alpha(D) = D$, $\partial D = \{z \mid |z| = 1\}$. Нека $z \in \partial D$. Тогаш $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, па

$$|\varphi_\alpha(z)| = \left|\varphi_\alpha\left(e^{it}\right)\right| = \left|\frac{e^{it}-\alpha}{1-\overline{\alpha}e^{it}}\right| = \left|\frac{e^{it}-\alpha}{e^{it}\left(e^{-it}-\overline{\alpha}\right)}\right| =$$

$$= \frac{1}{|e^{it}|} \cdot \left|\frac{e^{it}-\alpha}{e^{-it}-\overline{\alpha}}\right| = \frac{1}{|e^{it}|} \cdot \left|\frac{e^{it}-\alpha}{\overline{e^{it}-\alpha}}\right| = 1.$$

Според тоа, добиваме дека за секој $z \in \partial D$ е исполнето $|\varphi_\alpha(z)| = 1$, т.е. $\varphi_\alpha(\partial D) \subseteq \partial D$. Да го покажеме обратното т.е. да покажеме дека $\partial D \subseteq \varphi_\alpha(\partial D)$. Нека $z_1 \in \partial D$. Треба да покажеме дека $z_1 \in \varphi_\alpha(\partial D)$, т.е. дека постои $z \in \partial D$ така што $\varphi_\alpha(z) = z_1$. Нека $z = \varphi_{-\alpha}(z_1)$. Од тоа што $z_1 \in \partial D$ имаме $z_1 = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$ и

$$|\varphi_{-\alpha}(z_1)| = \left|\varphi_{-\alpha}\left(e^{it}\right)\right| = \left|\frac{e^{it} + \alpha}{1 + \overline{\alpha} e^{it}}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{e^{it}}\right| \left|\frac{e^{it} + \alpha}{e^{-it} + \overline{\alpha}}\right| = \left|\frac{1}{e^{it}}\right| \left|\frac{e^{it} + \alpha}{\overline{e^{it} + \alpha}}\right| = 1,$$

односно $|z| = |\varphi_{-\alpha}(z_1)| = 1$, па следува дека $z \in \partial D$. Дополнително $\varphi_\alpha(z) = \varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z_1)) = z_1$, односно $\varphi_\alpha(z) = z_1$. Значи, навистина важи $\partial D \subseteq \varphi_\alpha(\partial D)$. Докажавме $\varphi_\alpha(\partial D) \subseteq \partial D$ и $\partial D \subseteq \varphi_\alpha(\partial D)$, односно $\varphi_\alpha(\partial D) = \partial D$. Ќе покажеме дека $\varphi_\alpha(D) = D$. Прво, да покажеме дека $\varphi_\alpha(D) \subseteq D$. Од $\varphi_\alpha \in \mathbb{H}(D)$, φ_α е непрекината на $D \cup \partial D$ и ПММ, добиваме дека $|\varphi_\alpha(z)| \leq \sup\{|\varphi_\alpha(z)|| z \in \partial D\}$ за секој $z \in D$. Но, заради $\varphi_\alpha(\partial D) = \partial D$, последното неравенство е еквивалентно со $|\varphi_\alpha(z)| \leq 1$ за секој $z \in D$, односно $\varphi_\alpha(z) \in D$ за секој $z \in D$, т.е. $\varphi_\alpha(D) \subseteq D$. Да го покажеме и обратното, т.е. да покажеме дека $D \subseteq \varphi_\alpha(D)$. Заради $\varphi_\alpha(D) \subseteq D$, е исполнето и дека $\varphi_{-\alpha}(D) \subseteq D$. Ако примениме φ_α на $\varphi_{-\alpha}(D) \subseteq D$, добиваме дека $\varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(D)) \subseteq \varphi_\alpha(D)$, односно $D \subseteq \varphi_\alpha(D)$. Докажавме $\varphi_\alpha(D) \subseteq D$ и $D \subseteq \varphi_\alpha(D)$, односно $\varphi_\alpha(D) = D$. Од сето ова, добиваме дека φ_α е биекција, со $\varphi_\alpha^{-1}(z) = \varphi_{-\alpha}(z)$.

2) За првиот извод на функцијата $\varphi_\alpha(z)$ имаме

$$\varphi'_\alpha(z) = \left(\frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}\right)' = \frac{1 - \overline{\alpha} z - (z - \alpha)(-\overline{\alpha})}{(1 - \overline{\alpha} z)^2} =$$

$$= \frac{1 - \overline{\alpha} z + \overline{\alpha} z - \alpha\overline{\alpha}}{(1 - \overline{\alpha} z)^2} = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha} z)^2}.$$

Од овде, $\varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$ и $\varphi'_\alpha(\alpha) = \dfrac{1}{1 - |\alpha|^2}$.

Задача 3.3. Нека α и β се комплексни броеви такви што $|\alpha| < 1$ и $|\beta| < 1$. Нека $f(z)$ е холоморфна функција на $D = \{z| \, |z| < 1\}$, таква што $|f(z)| \leq 1$ за секој $z \in D$ и $f(\alpha) = \beta$.

1) Докажи дека $|f'(\alpha)| \leq \dfrac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}$.

2) Определи ги функциите за кои се достигнува равенство.

Решение. 1) Ја разгледуваме функцијата $g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$ каде φ_α и φ_β се функции дефинирани во претходната Задача 3.2. Бидејќи $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathbb{H}(D)$, и од условите на задачата, $f \in \mathbb{H}(D)$, заклучуваме дека $g \in \mathbb{H}(D)$. За $z \in D$, од $\varphi_{-\alpha}(D) = D$, следува дека $\varphi_{-\alpha}(z) \in D$. Според тоа, и користејќи го условот дека $|f(z)| \leq 1$ за секој $z \in D$, добиваме дека $f(\varphi_{-\alpha}(z)) \in D$. Од тоа што $\varphi_\beta(D) = D$ и претходно добиеното, добиваме дека $\varphi_\beta(f(\varphi_{-\alpha}(z))) \in D$, односно $g(z) \in D$, за секој $z \in D$, т.е. $|g(z)| < 1$ за секој $z \in D$.

За $g(0)$ имаме

$$g(0) = \varphi_\beta(f(\varphi_{-\alpha}(0))) = \varphi_\beta(f(\alpha)) = \varphi_\beta(\beta) = 0,$$

бидејќи по услов $f(\alpha) = \beta$ и $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$, $\varphi_\beta(z) = \dfrac{z-\beta}{1-\overline{\beta}z}$. Па, од $|g(z)| < 1$ за секој $z \in D$, $g(0) = 0$ и Лемата на Шварц, добиваме дека $|g(z)| \leq |z|$ за секој $z \in D$ и $|g'(0)| \leq 1$. Сега, од $g(z) = \varphi_\beta(f(\varphi_{-\alpha}(z)))$, за првиот извод на функцијата имаме

$$g'(z) = \varphi'_\beta(f(\varphi_{-\alpha}(z))) \cdot f'(\varphi_{-\alpha}(z)) \cdot \varphi'_{-\alpha}(z),$$

па за $z = 0$, имаме

$$g'(0) = \varphi'_\beta(f(\varphi_{-\alpha}(0))) \cdot f'(\varphi_{-\alpha}(0)) \cdot \varphi'_{-\alpha}(0),$$

односно

$$g'(0) = \varphi'_\beta(\beta) \cdot f'(\alpha) \cdot \varphi'_{-\alpha}(0).$$

Според тоа,

$$|f'(\alpha)| = \frac{|g'(0)|}{|\varphi'_\beta(\beta)| \cdot |\varphi'_{-\alpha}(0)|} \leq \frac{1}{\frac{1}{1-|\beta|^2}\left(1-|\alpha|^2\right)} = \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2},$$

односно добиваме дека $|f'(\alpha)| \leq \dfrac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$.

2) Во неравенството $|f'(\alpha)| \leq \dfrac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$, се достигнува равенство за оние функции f за кои $|g'(0)| = 1$, т.е. заради Лемата на Шварц, оние за кои $g(z) = e^{it}z$, $z \in D$, односно $g(z) = \lambda z$, $z \in D$, $|\lambda| = 1$. Според тоа, од $g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$ добиваме дека $\lambda z = \varphi_\beta(f(\varphi_{-\alpha}(z)))$. Да означиме со $w = \varphi_{-\alpha}(z)$. Тогаш, $\varphi_\alpha(w) = \varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z)) = z$, т.е. $\varphi_\alpha(w) = z$.

Тогаш, равенството $\lambda z = \varphi_\beta\left(f\left(\varphi_{-\alpha}\left(z\right)\right)\right)$ е еквивалентно со

$$\lambda\varphi_\alpha\left(w\right) = \varphi_\beta\left(f\left(\varphi_{-\alpha}\left(\varphi_\alpha\left(w\right)\right)\right)\right) \Leftrightarrow \lambda\varphi_\alpha\left(w\right) = \varphi_\beta\left(f\left(w\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi_{-\beta}\left(\lambda\varphi_\alpha\left(w\right)\right) = \varphi_{-\beta}\left(\varphi_\beta\left(f\left(w\right)\right)\right) \Leftrightarrow \varphi_{-\beta}\left(\lambda\varphi_\alpha\left(w\right)\right) = f\left(w\right),$$

односно $f\left(w\right) = \varphi_{-\beta}\left(\lambda\varphi_\alpha\left(w\right)\right)$. Па, бараните функции f за кои се постигнува равенство, се оние f, за кои $f\left(z\right) = \varphi_{-\beta}\left(\lambda\varphi_\alpha\left(z\right)\right)$, $|\lambda| = 1$ и $z \in D$.

Задача 3.4. Нека $f\left(z\right)$ е холоморфна функција на ограничена област D и непрекината на $\overline{D}$ така што $f\left(z\right) = c$ за $z \in \partial D$ и $|f\left(z\right)| \neq const$ за $z \in D$. Докажи дека f има барем една нула на D.

Решение. Да претпоставиме спротивното, односно да претпоставиме дека $f\left(z\right) \neq 0$ за секој $z \in D$. Бидејќи $f \in \mathbb{H}\left(D\right)$, f е непрекината на $\overline{D}$ и претпоставката што ја направивме, добиваме дека и функцијата $g\left(z\right) = \dfrac{1}{f\left(z\right)}$ е непрекината на $\overline{D}$ и $g \in \mathbb{H}\left(D\right)$. Од принцип на максимум на модул, добиваме дека за секој $z_0 \in D$, важи:

$$|g\left(z_0\right)| \leq \sup\left\{|g\left(z\right)|\,|\, z \in \partial D\right\} = \sup\left\{\frac{1}{|f\left(z\right)|}\,\middle|\, z \in \partial D\right\} \overset{|f|\equiv c}{=} \frac{1}{c},$$

односно $|g\left(z_0\right)| \leq \dfrac{1}{c}$ за секој $z_0 \in D$, т.е. $\dfrac{1}{|f\left(z_0\right)|} \leq \dfrac{1}{c}$ за секој $z_0 \in D$, т.е. $|f\left(z_0\right)| \geq c$ за секој $z_0 \in D$. Од друга страна, од принцип на максимум на модул на функцијата f на D важи $|f\left(z_0\right)| \leq \sup\left\{|f\left(z\right)|\,|\, z \in \partial D\right\}$ за секој $z_0 \in D$. Но, $f\left(z\right) = c$ за $z \in \partial D$, па добиваме дека $|f\left(z_0\right)| \leq c$ за секој $z_0 \in D$. Според тоа, од $|f\left(z_0\right)| \geq c$ и $|f\left(z_0\right)| \leq c$ за секој $z_0 \in D$, добиваме дека $|f\left(z_0\right)| = c$ за секој $z_0 \in D$. Но, ова противречи на претпоставката дека $|f\left(z\right)| \neq const$ за $z \in D$. Со тоа добиваме дека претпоставката дека $f\left(z\right) \neq 0$ за секој $z \in D$ е неточна, па мора да постои точка $z_0 \in D$ така што $f\left(z_0\right) = 0$.

Задача 3.5. Нека $\Omega = \left\{z = x + iy \,|\, -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ и нека $f\left(z\right) = e^{e^z}$. Покажи дека не важи принципот на максимум на модул, односно дека не важи

$$\sup\left\{|f\left(z\right)|\,|\, z \in \Omega\right\} \leq \sup\left\{|f\left(z\right)|\,|\, z \in \partial\Omega\right\}.$$

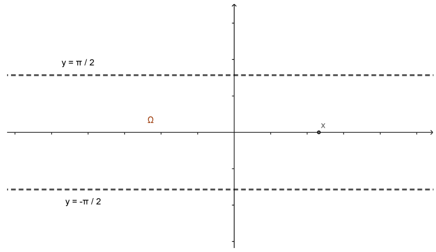
Решение. Нека $z \in \partial\Omega$. Тогаш $z = x \pm i\dfrac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ и

$$e^z = e^{x \pm i\frac{\pi}{2}} = e^x\left(\cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^x\left(0 \pm i\right) = \pm ie^x.$$

Значи, за $z \in \partial\Omega$, $f(z) = e^{\pm ie^x}$, па $|f(z)| = \left|e^{\pm ie^x}\right| = 1$ за секој $z \in \partial\Omega$, односно $|f(z)| = 1$ за секој $z \in \partial\Omega$.
Според тоа,

$$B = \sup\{|f(z)|| z \in \partial\Omega\} = 1,$$

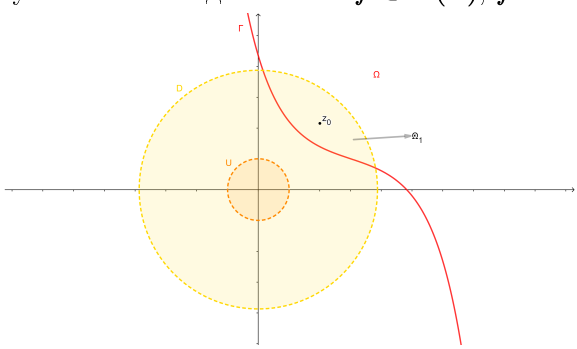
односно $B = 1$.
Од друга страна, за $x \in \mathbb{R}$, $z = x$ и $z \in \Omega$, добиваме дека $f(z) = e^{e^x}$. Тогаш $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, па јасно $A = \sup\{|f(z)|| z \in \Omega\} \to \infty$. Значи, не е можно $A \le B = 1$. Според тоа, навистина не важи принципот на максиумум на модул за дадената функција на дадената област.



Слика 3.1 Графички приказ на областа Ω

Задача 3.6. Нека Γ е контура на неограничена област Ω така што $\Omega \cap U = \varnothing$, каде $U = \{z||z| < 1\}$. Нека f е холоморфна функција на Ω и непрекината на $\Omega \cup \Gamma$, и нека постојат константи $B, M < \infty$ такви што $|f(z)| \le M$ за секој $z \in \Gamma$ и $|f(z)| \le B$ за секој $z \in \Omega$. Докажи дека $|f(z)| \le M$ за секој $z \in \Omega$.

Решение. Нека се исполнети условите на задачата т.е. $f \in \mathbb{H}(\Omega)$, f е непрекината на $\Omega \cup \Gamma$, $\Omega \cap U = \varnothing$, $|f(z)| \le M$ за секој $z \in \Gamma$ и $|f(z)| \le B$ за секој $z \in \Omega$. Сакаме да покажеме дека $f(z) \le M$ за секој $z \in \Omega$. Нека $z_0 \in \Omega$ е произволно избрана точка и нека $n \in \mathbb{N}$ е произволно избран природен број. Дефинираме функција $g(z) = \frac{(f(z))^n}{z}$. Бидејќи $\Omega \cap U = \varnothing$, $0 \in U$, $f \in \mathbb{H}(\Omega)$, добиваме дека $g \in \mathbb{H}(\Omega)$. Нека $r \in \mathbb{R}^+$, $r > 1$ е доволно големо така што $z_0 \in D(0,r) = \{z||z| < r\}$ и $\frac{B^n}{r} < M^n$. Нека $\Omega_1 = \Omega \cap D(0,r)$. Јасно $z_0 \in \Omega_1$. Бидејќи $\Omega_1 = \Omega \cap D(0,r) \subset D(0,r)$, следува дека Ω_1 е ограничена област. Од тоа што $\Omega_1 = \Omega \cap D(0,r) \subset \Omega$, $0 \notin \Omega$, $g \in \mathbb{H}(\Omega)$, следува дека $g \in \mathbb{H}(\Omega_1)$. Од тоа што f е непрекината на $\Omega \cup \Gamma$, следува дека и g е непрекината на $\overline{\Omega}_1$. Сега, од тоа што Ω_1 е ограничена област, $g \in \mathbb{H}(\Omega_1)$, g е непрекината на $\overline{\Omega}_1$ и принципот на максимум на модул,



Слика 3.2 Графички приказ на областите

добиваме дека важи

$$|g(z_0)| \leq \sup\{|g(z)| \,|\, z \in \partial\Omega_1\},$$

$\partial\Omega_1 = (\partial\Omega \cap D(0,r)) \cup (\partial D(0,r) \cap \Omega)$. Според тоа, $z \in \partial\Omega_1$ е еквивалентно со $z \in \partial\Omega \cap D(0,r)$ или $z \in \partial D(0,r) \cap \Omega$, па имаме два случаја:

1. За $z \in \partial\Omega \cap D(0,r)$, од $\partial\Omega \cap D(0,r) \subset \partial\Omega = \Gamma$ и од условот $|f(z)| \leq M$ за секој $z \in \Gamma$, следува дека

$$|g(z)| \leq \frac{|f(z)|^n}{|z|} \leq \frac{M^n}{|z|} \leq \frac{M^n}{1} = M^n.$$

Последното неравенство го добиваме од тоа што $z \in D(0,r)$ и $r > 1$. Значи, ако $z \in \partial\Omega \cap D(0,r)$, тогаш $|g(z)| \leq M^n$.

2. За $z \in \partial D(0,r) \cap \Omega$, од $z \in \partial D(0,r) \cap \Omega \subset \Omega$ и од условот $|f(z)| \leq B$ за секој $z \in \Omega$, следува дека

$$|g(z)| \leq \frac{|f(z)|^n}{|z|} \leq \frac{B^n}{|z|} = \frac{B^n}{r}.$$

Последното равенство следува од тоа што $z \in \partial D(0,r)$, па $|z| = r$. Значи, ако $z \in \partial D(0,r) \cap \Omega$, тогаш $|g(z)| \leq \dfrac{B^n}{r}$.

Според тоа, добиваме дека

$$\sup\{|g(z)| \,|\, z \in \partial\Omega_1\} \leq \max\left\{M^n, \frac{B^n}{r}\right\}.$$

Од изборот на r, $\dfrac{B^n}{r} < M^n$, добиваме дека $\sup\{|g(z)| \,|\, z \in \partial\Omega_1\} \leq M^n$. Од последното неравенство $\sup\{|g(z)| \,|\, z \in \partial\Omega_1\} \leq M^n$ и од претходно добиеното дека $|g(z_0)| \leq \sup\{|g(z)| \,|\, z \in \partial\Omega_1\}$, следува дека $|g(z_0)| \leq M^n$, односно $\dfrac{|f(z_0)|^n}{|z_0|} \leq M^n$. Оттука,

$$|f(z_0)| \leq M\sqrt[n]{|z_0|}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Имајќи предвид дека $z_0 \in \Omega$, $\Omega \cap U = \varnothing$ и $|z_0| > 1$, добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} |f(z_0)| \leq \lim_{n\to\infty} M\sqrt[n]{|z_0|} \Leftrightarrow |f(z_0)| \leq M \cdot 1 \Leftrightarrow |f(z_0)| \leq M.$$

Од произволноста на точката $z_0 \in \Omega$, добиваме дека $|f(z)| \leq M$ за секој $z \in \Omega$.

Глава 4

ОСТАТОЦИ (РЕЗИДИУМИ)

Нека $f(z)$ е холоморфна функција на $D = \{z|\, 0 < |z-a| < R\}$, каде $R > 0$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = ... + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ...,$$

е Лорановиот развој на функцијата $f(z)$ во околина на точката $z = a$. Тогаш c_{-1} се нарекува *остаток (резидиум)* на $f(z)$ во точката $z = a$ и се означува со $c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$. Уште повеќе,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} f(z)\, dz, 0 < r < R$$

4.1 Пресметување и својства на резидиуми

Теорема 4.1. *Ако $z = a$ е пол од ред n, $n \in \mathbb{N}$, за функцијата $f(z)$, тогаш*

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z)\right].$$

Теорема 4.2. *Нека $f(z)$ е холоморфна функција во проширената комплексна рамнина, освен во конечен број точки $z = a_i$, $i = 0, 1, ..., n$. Тогаш важи $\sum\limits_{i=0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_i} f(z) = 0$.*

Теорема 4.3. *Ако $f(z)$ е холоморфна функција на $\mathbb{C}$, освен во конечен број сингуларитети, тогаш $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right)$.*

Задача 4.1. Најди $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$ во точката $z=a$:

1) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $a=0$

2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^6}$, $a=0$

3) $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z+1}$, во $a=-1$

Решение. 1) Лорановиот развој на функцијата $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ во околина на $a=0$ е

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + ...,$$

па $c_{-1} = \dfrac{1}{1!} = 1 = \operatorname*{Res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}}$.

2) Лорановиот развој на функцијата $g(z) = \sin z$ во околина на точката $a=0$ е $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, па Лорановиот развој на $f(z)$ во околина на точката $a=0$ е

$$f(z) = \frac{1}{z^6}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^6}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...\right) =$$

$$= \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{7!}\cdot z + ...,$$

па $c_{-1} = \dfrac{1}{5!} = \operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{\sin z}{z^6}$.

3) За Лорановиот развој на функцијата $f(z)$ во околина на точката $a=-1$ имаме

$$f(z) = z\cos\frac{1}{z+1} = (z+1-1)\cos\frac{1}{z+1} =$$

$$= (z+1)\cos\frac{1}{z+1} - \cos\frac{1}{z+1} =$$

$$= (z+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z+1)^{2n}} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z+1)^{2n}} =$$

$$= (z+1)\left(1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{(z+1)^4} - ...\right) - \left(1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z+1)^2} + ...\right) =$$

$$= (z+1) - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{(z+1)^3} - ... - \left(1 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{(z+1)^4} - ...\right),$$

па $c_{-1} = -\frac{1}{2!} = \operatorname*{Res}_{z=0} z \cos \frac{1}{z+1}$.

Задача 4.2. Нека $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, каде што $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ се холоморфни функции во точката $z = a$, така што $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$ и $\psi'(a) \neq 0$. Докажи дека

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Решение. Прво ќе докажеме дека ако $z = a$ е прост пол за функцијата $h(z)$, тогаш $\operatorname*{Res}_{z=a} h(z) = \lim_{z \to a} (z-a) h(z)$. Нека $z = a$ е пол од ред n за функцијата $h(z)$. Тогаш е исполнето дека

$$h(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{n-1}}{(z-a)^{n-1}} + ... + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ...,$$

каде $c_{-n} \neq 0$. Ако $z = a$ е прост пол за функцијата $h(z)$, тогаш

$$h(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k (z-a)^k,$$

односно

$$(z-a) h(z) = c_{-1} + c_0 (z-a) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k (z-a)^{k+1}.$$

Според тоа,

$$\lim_{z \to a} (z-a) h(z) = c_{-1} + 0 = c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} h(z),$$

за $z = a$ прост пол.
Од условите на задачата, $\psi(a) = 0$, следува дека a е нула за $\psi(a)$. Нека претпоставиме дека $z = a$ е нула од ред m, за $m \geq 2$. Тогаш $\psi(z) = (z-a)^m g(z)$, и $g(a) \neq 0$ и $g \in \mathbb{H}(D_r(a))$. Тогаш $g(z)$ е ограничена во околина на точката $z = a$, односно постои $M > 0$ така што $|g(z)| \leq M$. Па, од

$$\psi(z) - \psi(a) = (z-a)^m g(z) - 0 = (z-a)^m g(z),$$

добиваме дека

$$\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}=(z-a)^{m-1}g(z).$$

Тогаш,

$$0\leq\left|\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}\right|=|z-a|^{m-1}\cdot|g(z)|\leq M\cdot|z-a|^{m-1},$$

па

$$0\leq\lim_{z\to a}\left|\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}\right|=\lim_{z\to a}\Big(|z-a|^{m-1}\cdot|g(z)|\Big)\leq$$

$$\leq M\cdot\lim_{z\to a}\Big(|z-a|^{m-1}\Big)=0,$$

односно $|\psi'(a)|=0$. Според тоа добиваме дека $\psi'(a)=0$. Но ова противречи на условот $\psi'(a)\neq 0$, па претпоставката дека редот на нулата $z=a$ е таков што $m\geq 2$ не е точна, односно $z=a$ е проста нула на функцијата. Значи, функцијата $\psi(z)$ има облик $\psi(z)=(z-a)g(z)$, каде $g\in\mathbb{H}(D_r(a))$ и $g(a)\neq 0$.
Сега за функцијата $f(z)$ имаме дека

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z)}{(z-a)g(z)}=\frac{\frac{\varphi(z)}{g(z)}}{z-a}=\frac{F(z)}{z-a},$$

каде $F(z)=\dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$. Од тоа што $\varphi(a)\neq 0$ и $g(a)\neq 0$, следува дека $F(a)\neq 0$ и $f(z)=(z-a)^{-1}F(z)$. Па, $z=a$ е прост пол за функцијата $f(z)$. Според тоа,

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{(z-a)}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Задача 4.3. Пресметај $\operatorname*{Res}_{z=k\pi}f(z)$ за функцијата $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$.

Решение. Од тоа што $\sin(k\pi)=0$ за секој $k\in\mathbb{N}$ и $\lim_{z\to k\pi}f(z)=\infty$ за секој $k\in\mathbb{N}$, добиваме дека $z_k=k\pi$, $k\in\mathbb{N}$ се полови на дадената функција. Бидејќи функцијата $f(z)$ е количник од функциите $\varphi(z)=1$ и $\psi(z)=\sin z$ кои се холоморфни во точката $z=k\pi$, $k\in\mathbb{N}$, $\varphi(k\pi)=1\neq 0$ и $\psi'(k\pi)=\cos(k\pi)\neq 0$, од претходно докажаното во

Задача 4.2 добиваме дека

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=k\pi} \frac{1}{\sin z} = \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=k\pi} = (-1)^k, k \in \mathbb{N}.$$

Задача 4.4. Пресметај $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)$ и $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$ за функцијата $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$.

Решение. Јасно $z = 1$ е прост пол за функцијата $f(z)$, затоа што $f(z) = (z-1)^{-1} h(z)$, каде $h(z) = \dfrac{z}{(z-2)^2}$ и $h \in \mathbb{H}(D_r(1))$. Тогаш

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z}{(z-2)^2} = \frac{1}{(1-2)^2} = 1.$$

Точката $z = 2$ е пол од ред 2 за функцијата $f(z)$. Притоа, $f(z) = (z-2)^{-2} h(z)$, каде $h(z) = \dfrac{z}{z-1}$ и $h \in \mathbb{H}(D_r(2))$. Тогаш добиваме дека

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-1)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 2} \left(\frac{z}{z-1}\right)' = \lim_{z\to 2} \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = -1.$$

Задача 4.5. Пресметај $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$ каде што:

1) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^k}$, $k \in \mathbb{N}$ и $a = 1$,

2) $f(z) = z e^{\frac{1}{z-1}}$ и $a = 1$,

3) $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^{2k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$ и $a = 0$.

Решение. 1) Точката $z = 1$ е пол од ред k за дадената функција. Тогаш

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} \left.\left[(z-1)^k \frac{e^z}{(z-1)^k}\right]\right|_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} \left.(e^z)\right|_{z=1} = \frac{e}{(k-1)!}.$$

(Обиди се да дојдеш до иститот резултат со определување на Лорановиот ред на дадената функција.)

2) Ќе го разгледаме Лорановиот развој на функцијата $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$ во околина на точката $z = a = 1$. Тогаш,

$$f(z) = (z-1+1)\, e^{\frac{1}{z-1}} = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(z-1)^n} =$$

$$= (z-1) + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z-1} + ... + 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z-1} + ... =$$

$$= (z-1) + 1 + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!}\right) \frac{1}{z-1} + ...$$

Според тоа, $c_{-1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$.

3) Да го разгледаме Лорановиот развој на функцијата $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^{2k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$ во околина на точката $z = a = 0$. Тогаш

$$f(z) = \frac{1}{z^{2k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n-2k-1}}{n!},$$

па за да го определиме c_{-1} го бараме решението на равенката $2n - 2k - 1 = -1$, од каде добиваме дека $n = k$. Според тоа, $c_{-1} = \frac{1}{k!} = \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$.

Задача 4.6. Определи $\operatorname*{Res}_{z=a} \left[g(z)\, \frac{f'(z)}{f(z)}\right]$, ако $g(z)$ е холоморфна функција, $a \neq \infty$ и:

1) Ако $z = a$ е нула од ред m за функцијата $f(z)$.

2) Ако $z = a$ е пол од ред m за функцијата $f(z)$.

Решение. 1) Нека $z = a$ е нула од ред m за функцијата $f(z)$ и со $F(z) = g(z)\, \frac{f'(z)}{f(z)}$. Тогаш $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, за $\varphi(a) \neq 0$ и $\varphi \in \mathbb{H}(D(a))$ и

$$F(z) = g(z)\, \frac{f'(z)}{f(z)} = g(z)\, \frac{m(z-a)^{m-1}\varphi(z) + (z-a)^m \varphi'(z)}{(z-a)^m \varphi(z)} =$$

$$= g(z)\left[\frac{m}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right].$$

Притоа, $g \in \mathbb{H}(D(a))$, $\varphi(a) \neq 0$ и $\varphi \in \mathbb{H}(D(a))$. За c_{-1} имаме дека

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} F(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{mg(z)}{z-a} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} g(z)\,dz.$$

Избираме доволно мало $r > 0$ така што функцијата $\varphi(z)$ нема сингуларитети во кругот $D_r = \{z \mid |z| < r\}$. Користејќи ја Кошиевата интегрална формула добиваме дека

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{mg(z)}{z-a} dz = mg(a),$$

а од Кошиевата теорема добиваме дека

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} g(z)\,dz = 0.$$

Конечно, заклучуваме $c_{-1} = mg(a) = \operatorname*{Res}_{z=a} \left[g(z) \dfrac{f'(z)}{f(z)} \right]$.

2) Нека $z = a$ е пол од ред m за функцијата $f(z)$ и $F(z) = g(z) \dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Тогаш $f(z) = (z-a)^{-m} \varphi(z)$, за $\varphi(a) \neq 0$ и $\varphi \in \mathbb{H}(D(a))$ и

$$F(z) = g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = g(z) \frac{-m(z-a)^{-m-1} \varphi(z) + (z-a)^{-m} \varphi'(z)}{(z-a)^{-m} \varphi(z)} =$$

$$= g(z) \left[\frac{-m}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right].$$

Притоа, $g \in \mathbb{H}(D(a))$, $\varphi(a) \neq 0$ и $\varphi \in \mathbb{H}(D(a))$. За c_{-1} имаме дека

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} F(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{-mg(z)}{z-a} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} g(z)\,dz.$$

Избираме доволно мало $r > 0$ така што функцијата $\varphi(z)$ нема сингуларитети во кругот $D_r = \{z \mid |z| < r\}$. Користејќи ја Кошиевата интегрална формула добиваме дека

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=r}\frac{-mg\left(z\right)}{z-a}dz=-mg\left(a\right),$$

а од Кошиевата теорема добиваме дека

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=r}\frac{\varphi'\left(z\right)}{\varphi\left(z\right)}g\left(z\right)dz=0.$$

Конечно, заклучуваме $c_{-1}=-mg\left(a\right)=\operatorname*{Res}\limits_{z=a}\left[g\left(z\right)\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}\right]$.

Задача 4.7. Пресметај $\operatorname*{Res}\limits_{z=a}f\left(z\right)$ за функцијата $f\left(z\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}z^{m}}{z+1}$, $m\in\mathbb{N}$, во нејзините полови и есенцијални сингуларитети на проширената комплексна рамнина.

Решение. Од

$$\lim_{z\to-1}f\left(z\right)=\lim_{z\to-1}\frac{e^{\frac{1}{z}}z^{m}}{z+1}=\infty \text{ и } \lim_{z\to\infty}f\left(z\right)=\lim_{z\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{z}}z^{m}}{z+1}=\infty$$

добиваме дека $z=-1$ и $z=\infty$ се полови за дадената функција. Од тоа што главниот дел од Лорановиот развој на функцијата $f\left(z\right)$ во околина на точката $z=0$ содржи бесконечно многу членови, добиваме дека $z=0$ е есенцијален сингуларитет за функцијата. Во продолжение ќе ги пресметаме остатоците во сингуларитетите. Јасно е дека $z=-1$ е прост пол за функцијата $f\left(z\right)$, па

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}f\left(z\right)=\lim_{z\to-1}\left(z+1\right)f\left(z\right)=\lim_{z\to-1}\left(z+1\right)\frac{e^{\frac{1}{z}}z^{m}}{z+1}=$$

$$=\lim_{z\to-1}e^{\frac{1}{z}}z^{m}=\frac{\left(-1\right)^{m}}{e}.$$

За $z=0$, го разгледуваме Лорановиот развој на функцијата во таа точка. Јасно е дека на областа $D=\left\{z\middle|\,|z|<1\right\}$ важи

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-z\right)^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^{n}z^{n} \text{ и } e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^{n}}.$$

Според тоа,

$$f(z) = \frac{1}{z+1} e^{\frac{1}{z}} z^m = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} \right) z^m = z^m \sum_{l=0}^{+\infty} c_l.$$

Во последниот израз имаме производ на два степенски реда и $c_l = \sum_{s=0}^{l} a_s b_{l-s}$, каде $a_n = (-1)^n z^n$ и $b_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$. Тогаш

$$c_l = \sum_{s=0}^{l} a_s b_{l-s} = \sum_{s=0}^{l} (-1)^s \frac{1}{(l-s)!} z^s z^{-(l-s)} =$$

$$= \sum_{s=0}^{l} (-1)^s \frac{1}{(l-s)!} z^s z^{-(l-s)} = \sum_{s=0}^{l} (-1)^s \frac{1}{(l-s)!} z^{2s-l}.$$

Па,

$$f(z) = z^m \sum_{l=0}^{+\infty} c_l = z^m \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\sum_{s=0}^{l} (-1)^s \frac{1}{(l-s)!} z^{2s-l} \right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\sum_{s=0}^{l} (-1)^s \frac{1}{(l-s)!} z^{2s-l+m} \right),$$

каде $l \in \mathbb{N}$, m е фиксен и $s = 0, 1, ..., l$. Од последниот облик, јасно е дека бараме l и s за кои важи $2s - l + m = -1$, па за $s = 0$ имаме $m - l = -1$ односно $l = m + 1$, за $s = 1$ имаме $m - l = -3$ односно $l = m + 3$, за $s = 2$ имаме $m - l = -5$ односно $l = m + 5$ и општо за $s = p \in \mathbb{N}_0$ имаме $m - l = -1 - 2p$ односно $l = m + (2p + 1)$. Според тоа,

$$c_{-1} = \frac{(-1)^0}{(m+1-0)!} + \frac{(-1)^1}{(m+3-1)!} + \frac{(-1)^2}{(m+5-2)!} + ... =$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} - \frac{1}{(m+2)!} + \frac{1}{(m+3)!} - ... = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(m+p+1)!} = \operatorname*{Res}_{z=0} f(z).$$

За пресметување на $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ ќе ја искористиме Теорема 4.2. Функцијата која е предмет на разгледување во оваа задача, има сингуларитети единствено во точките $z = -1$, $z = 0$ и $z = \infty$. Па според Теорема 4.2, добиваме дека

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Ако во последното равенство ги замениме претходно добиените резултати, добиваме дека

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\left(\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)\right) =$$
$$-\left(\frac{(-1)^m}{e} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(m+p+1)!}\right).$$

Задача 4.8. Пресметај $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ за функцијата $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$.

Решение. Со помош на Теорема 4.3 добиваме дека

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0} f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2} = -\operatorname*{Res}_{z=0} (1+z)\frac{1}{z^2} = -\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1+z}{z^2} =$$

$$= -\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(z^2 \cdot \frac{1+z}{z^2}\right)' = -\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}(1+z)' = -1.$$

Задача 4.9. Пресметај $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ за функцијата:

1) $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 1}{z^3 - 2z + 1}$,

2) $f(z) = \dfrac{z^2 - z - 1}{z^2 + z - 1}$,

3) $f(z) = z \sin \dfrac{1}{z+1}$.

Решение. 1) За $f\left(\frac{1}{z}\right)$ добиваме израз од облик

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{1}{z} + 1}{\left(\frac{1}{z}\right)^3 - 2\frac{1}{z} + 1} = \frac{\frac{1 - z + z^2}{z^2}}{\frac{1 - 2z^2 + z^3}{z^3}} = \frac{z\left(1 - z + z^2\right)}{1 - 2z^2 + z^3},$$

од каде добиваме дека $f\left(\frac{1}{z}\right)$ е холоморфна функција во точката $z = 0$, па и $f(z)$ е холоморфна функција во точката $z = \infty$. Од тоа што, $\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1 - z + z^2}{z\left(1 - 2z^2 + z^3\right)}$ имаме дека $z = 0$ е прост пол за $\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$, па добиваме дека

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^2 - z + 1}{z^3 - 2z + 1} = -\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1 - z + z^2}{z\left(1 - 2z^2 + z^3\right)} = -\lim_{z\to 0} \frac{1 - z + z^2}{1 - 2z^2 + z^3} = -1.$$

2) Од тоа што

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{1}{z} - 1}{\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{z} - 1} = \frac{1-z-z^2}{z^2\left(1+z-z^2\right)},$$

добиваме дека точката $z = 0$ е пол од ред 2 за функцијата $\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$. Тогаш

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{z^2-z-1}{z^2+z-1} = -\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1-z-z^2}{z^2\left(1+z-z^2\right)} = -\lim_{z\to 0}\left(\frac{1-z-z^2}{1+z-z^2}\right)' = 2.$$

3) Единствен конечен сингуларитет на функцијата е точката $z = -1$. Затоа што $\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^3}\sin\frac{z}{1+z}$, добиваме дека $z = 0$ е пол од ред 3 за функцијата $\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$. Тогаш

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(z\sin\frac{1}{z+1}\right) = -\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^3}\sin\frac{z}{1+z}\right) =$$

$$= -\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\sin\frac{z}{1+z}\right)'' = 1.$$

4.2 Основна теорема за резидиуми

Теорема 4.4 (Основна теорема за резидиуми)**.** *Нека $f(z)$ е холоморфна функција на ограничена област Ω, освен во конечен број точки $z_i \in \Omega$, $i = 1, 2, ..., n$ во кои $f(z)$ има сингуларитети. Тогаш важи*

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z).$$

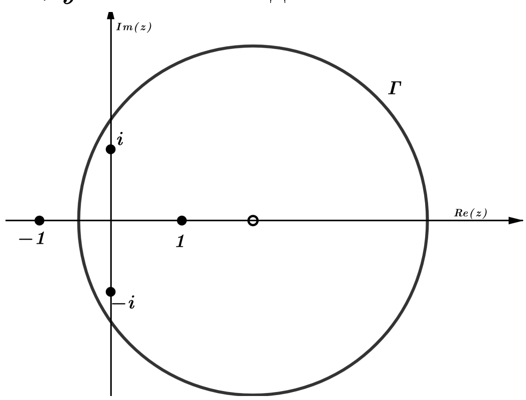
Задача 4.10. Пресметај го интегралот

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{z}{\left(z^2-1\right)^2\left(z^2+1\right)} dz,$$

каде $z = x + iy$ и $\Gamma : x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0$.

*Решение.*Со средување на изразот $x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0$ добиваме
$x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2$
односно добиваме дека кривата на интеграција е кружница со центар во точката со координати $(2, 0)$ и должина на радиус $\sqrt{6}$. Сингуларитетите на подинтегралната функција

$$f(z) = \frac{z}{\left(z^2-1\right)^2\left(z^2+1\right)}$$



Слика 4.1. Графички приказ на областа

се добиваат како решенија на равенката $\left(z^2-1\right)^2\left(z^2+1\right) = 0$. Според тоа сингуларитети на $f(z)$ се $z = i$, $z = -i$, $z = 1$ и $z = -1$, и тие се нејзини полови. На Слика 4.1 јасно се гледа дека $z = i$, $z = -i$ и $z = 1$ се наоѓаат во внатрешноста на областа ограничена со Γ, додека пак $z = -1$ е во надворешноста. Тогаш со примена на Теорема 4.4 добиваме дека

$$I = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) \right)$$

Во продолжение ќе ги пресметаме остатоците во сингуларитетите кои се наоѓаат во внатрешноста на областа ограничена со Γ.

За $z=-i$ и $z=i$ кои се прости полови за функцијата $f(z)$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{z}{\left(z^2-1\right)^2(z-i)(z+i)} =$$

$$= \lim_{z\to -i}\frac{z}{\left(z^2-1\right)^2(z-i)} = \frac{-i}{4\cdot(-2i)} = \frac{1}{8}$$

и

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z}{\left(z^2-1\right)^2(z-i)(z+i)} =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{z}{\left(z^2-1\right)^2(z+i)} = \frac{i}{4\cdot 2i} = \frac{1}{8}.$$

За $z=1$ кој е пол од ред 2 за функцијата $f(z)$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{z}{(z-1)^2(z+1)^2\left(z^2+1\right)}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{(z+1)^2\left(z^2+1\right)}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{(z+1)^2\left(z^2+1\right) - z\left(2(z+1)\left(z^2+1\right)+(z+1)^2\cdot 2z\right)}{(z+1)^4(z^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4\cdot 2 - 1\cdot(2\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 1)}{2^4\cdot 2^2} = \frac{-8}{64} = -\frac{1}{8}.$$

Според тоа добиваме дека $I = 2\pi i\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right) = \frac{2\pi i}{8} = \frac{\pi i}{4}$.

Задача 4.11. Пресметај го интегралот $I = \int\limits_{|z|=3}\frac{dz}{z^5\left(z^{20}-3\right)}$.

Решение. Сингуларитетите на подинтегралната функција $f(z) = \frac{1}{z^5\left(z^{20}-3\right)}$ се $z=0$ кој е пол од ред 5 и $z=\sqrt[20]{3}e^{\frac{k\pi}{10}}$, $k=0,1,...,19$ кои се прости полови. Сите полови припаѓаат во внатрешноста на областа ограничена со $|z|=3$. Значи, подитегралната функција $f(z)$ има вкупно 21 пол во $|z|\le 3$. Во проширената комплексна рамнина сингуларитет на $f(z)$ е и $z=\infty$. Од Теорема 4.2 имаме дека $\sum\limits_{i=1}^{22}\operatorname*{Res}\limits_{z=z_i} f(z) = 0$ во проширената комплексна рамнина, па $\sum\limits_{i=1}^{21}\operatorname*{Res}\limits_{z=z_i} f(z) = -\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)$. Со помош на Теорема 4.3 за $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z)$ добиваме

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right) =$$

$$-\operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)^5 \left(\left(\frac{1}{z}\right)^{20} - 3\right)} \right) = -\operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z^5} \cdot \frac{1-3z^{20}}{z^{20}}} \right) =$$

$$= -\operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \frac{z^{25}}{1-3z^{20}} \right) = -\operatorname*{Res}_{z=0} \left(\frac{z^{23}}{1-3z^{20}} \right) = 0.$$

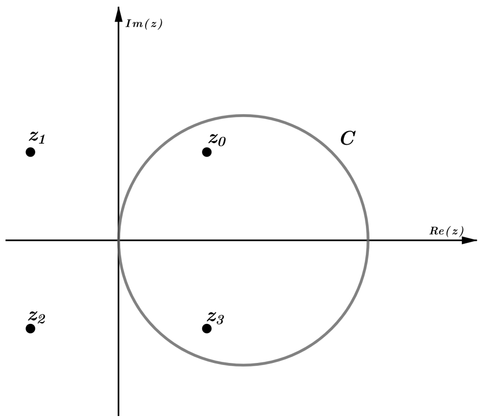
Значи, $\sum\limits_{i=1}^{21} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_i} f(z) = 0$, па $I = 2\pi i \sum\limits_{i=1}^{21} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_i} f(z) = 2\pi i \cdot 0 = 0$.

Задача 4.12. Пресметај го интегралот $\int\limits_C \frac{dz}{1+z^4}$ каде $C = \{z \,|\, |z-1| = 1\}$.

Решение. Нека со $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ ја означиме подинтегралната функција. Решенијата на равенката $1 + z^4 = 0$ се

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{4},$$

$k = 0, 1, 2, 3$, односно $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значи, подинтегралната функција има четири сигуларитета и сите се прости полови.



Слика 4.2. Графички приказ на областа

Само половите z_0 и z_3 припаѓаат во внатрешноста на областа ограничена со кривата на интеграција C (Слика 4.2), па

$$\int\limits_C \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z) \right].$$

Со помош на Задача 4.2 ги пресметуваме бараните резидиуми, па имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1+z^4)'} = \lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{4z^3} = \frac{2}{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1+z^4)'} = \lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{4z^3} = \frac{2}{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^3}.$$

Според тоа добиваме

$$\int_C \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i\left[\frac{2}{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3} + \frac{2}{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^3}\right] =$$

$$= 4\pi i \cdot \frac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^3 + \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3}{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^3} =$$

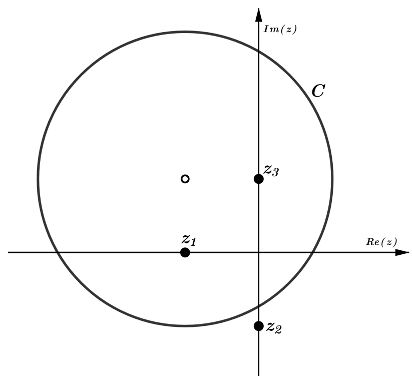
$$= 4\pi i \cdot \frac{-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i-4\sqrt{2}i-4\sqrt{2}}{64} = 4\pi i \cdot \frac{-8\sqrt{2}}{64} = \frac{-\pi\sqrt{2}i}{2}.$$

Задача 4.13. Пресметај го интегралот $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+1)}$ каде $C = \{z \mid |z+1-i| = 2\}$.

Решение. Подинтегралната функција $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2(z^2+1)}$ има сингуларитети $z_1 = -1$, $z_2 = -i$ и $z_3 = i$. Притоа z_1 е пол од ред 2, а z_2 и z_3 се прости полови. Во внатрешноста на областа ограничена со кривата на интеграција припаѓаат половите z_1 и z_3 (Слика 4.3), па

$$\int_C \frac{1}{(z+1)^2(z^2+1)}dz =$$

$$= 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_3} f(z)\right].$$



Слика 4.3. Графички приказ на областа

Од

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-1}\left((z+1)^2\frac{1}{(z+1)^2(z^2+1)}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to-1}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)' = \lim_{z\to-1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}$$

и

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z+1)^2(z-i)(z+i)} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+1)^2 (z+i)} = \frac{1}{2i(i+1)^2} = -\frac{1}{4},$$

добиваме дека

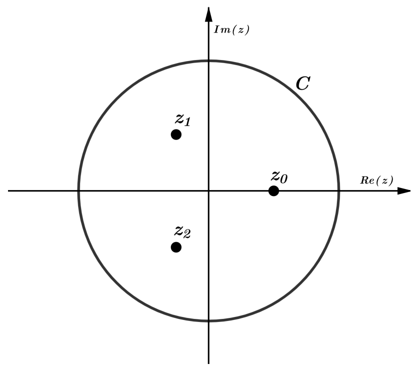
$$\int_C \frac{1}{(z+1)^2 (z^2+1)} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi i}{2}.$$

Задача 4.14. Пресметај го интегралот $\int\limits_C \frac{z^2}{z^3-1} dz$ каде $C = \{z |\, |z| = 2\}$.

Решение. Сингуларитетите на подинтегралната функција $f(z) = \frac{z^2}{z^3-1}$ се решенијата на равенката $z^3 - 1 = 0$, односно

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i \sin\frac{2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2,$$

т.е. $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Сите сингуларитети се прости полови кои припаѓаат во внатрешноста на областа ограничена со кривата на интеграција (Слика 4.4), па



Слика 4.4. Графички приказ на областа

$$\int_C \frac{z^2}{z^3-1} dz = 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z)\right].$$

Со помош на Задача 4.2 ги пресметуваме бараните резидиуми, па имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2}{(z^3-1)'} = \lim_{z\to 1} \frac{z^2}{3z^2} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} f(z) = \lim_{z\to -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{z^2}{(z^3-1)'} = \lim_{z\to -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{z^2}{3z^2} = \frac{1}{3} \text{ и}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} f(z) = \lim_{z\to -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{z^2}{(z^3-1)'} = \lim_{z\to -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{z^2}{3z^2} = \frac{1}{3}.$$

Според тоа добиваме $\int\limits_C \frac{z^2}{z^3-1} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = 2\pi i.$

4.2.1 Интеграли од видот $\int\limits_{0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$

Разгледуваме интеграли кои содржат тригонометриски функции во подинтегралната функција, односно интеграли од облик

$$\int\limits_{0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt,$$

каде $R(x, y)$ е дробно-рационална функција дефинирана на внатрешноста на единечниот круг $D = \{z = x + iy|\, |z| = 1\}$. Интегралите од реална функција од овој вид, преминуваат во криволиниски интеграли околу единечниот круг со смената $z = e^{it}$, така што добиваме дека

$$dz = ie^{it}dt = izdt,$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Според тоа, горенаведениот интеграл преминува во облик

$$\int\limits_{0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} \left[\frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\right],$$

каде z_i, $i = 1, ..., n$ се сигуларитетите на функцијата во внатрешноста на единечниот круг.

Задача 4.15. Пресметај ја вредноста на интегралот $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos 2x}{2 + \cos x} dx$.

Решение. Со помош на претходно воведената смена, за $z = e^{ix}$, дадениот интеграл го трансформираме во облик

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{2+\cos x} = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}{2+\frac{\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}} dz == -i \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{\frac{4z+z^2+1}{2z}} dz =$$
$$-i \int_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2\left(z^2+4z+1\right)} dz.$$

Нека со $f(z) = \dfrac{z^4+1}{z^2\left(z^2+4z+1\right)}$ ја означиме подинтегралната функција. Од тоа што решенија на равенката $z^2\left(z^2+4z+1\right) = 0$ се $z_1 = 0$, $z_2 = -2-\sqrt{3}$ и $z_3 = -2+\sqrt{3}$, ги добиваме сингуларитетите на подинтегралната функција. Притоа, добиваме дека $z = 0$ е пол од ред 2, а $z = -2-\sqrt{3}$ и $z = -2+\sqrt{3}$ се прости полови. Јасно е дека $z_1 = 0$ и $z_3 = -2+\sqrt{3}$ припаѓаат во единечниот круг. Користејќи ги својствата за пресметување на остатоци во случај на полови, добиваме дека

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{z^4+1}{z^2+4z+1}\right)' = -4$$

и

$$\operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f(z) = \lim_{z\to\left(-2+\sqrt{3}\right)} \frac{z^4+1}{z^2\left(z+2+\sqrt{3}\right)} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Според тоа,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{2+\cos x} dx = (-i)\, 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f(z)\right] = 2\pi\left(-4+\frac{7}{\sqrt{3}}\right).$$

Задача 4.16. Пресметај ја вредноста на интегралот $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{a-b\cos x} dx$ за $a > b > 0$.

Решение. Функцијата $f(x) = \dfrac{1}{a-b\cos x}$ е парна функција, затоа што важи

$$f(-x) = \frac{1}{a-b\cos(-x)} = \frac{1}{a-b\cos x} = f(x).$$

Според тоа,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{a-b\cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a-b\cos x} dx.$$

Со помош на идентитетот $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, добиваме дека

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{a-b\cos x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a-b\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a-b\dfrac{e^{2ix}+1}{2e^{ix}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2e^{ix}}{2ae^{ix}-b\left(e^{2ix}+1\right)}dx = \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{2ae^{ix}-b\left(e^{2ix}+1\right)}dx.$$

Па со смената $z = e^{ix}$ овој интеграл може да се трансформира во криволиниски интеграл

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{iz}\cdot\frac{z}{2az-b\left(z^2+1\right)}dz = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2az-bz^2-b} =$$

$$= i\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{bz^2-2az+b}.$$

Нека со $f(z) = \dfrac{1}{bz^2-2az+b}$ ја означиме подинтегралната функција. Од тоа што решенија на равенката $bz^2-2az+b=0$ се $z_1 = \dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ и $z_2 = \dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ ги добиваме сингуларитетите на подинтегралната функција. Јасно е дека z_1 и z_2 се реални корени на равенката, затоа што $a > b > 0$, па $(a-b)(a+b) > 0$. Од друга страна, $\dfrac{a}{b} > 1$, па z_1 е надвор од единечниот круг. Значи единствен сигуларитет кој го разгледуваме е $z_2 = \dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ којшто е прост пол за функцијата $f(z)$. Според тоа,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_2}\left(\frac{1}{bz^2-2az+b}\right) =$$

$$= \lim_{z\to z_2}\left[\left(z-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\frac{1}{b\left(z-\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\left(z-\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to z_2} \left[\frac{1}{b\left(z - \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)} \right] = \left[\frac{1}{b\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b} - \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)} \right] =$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{a^2-b^2}}$$

Конечно добиваме дека

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{a - b\cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b\cos x} dx = i \cdot 2\pi i \frac{1}{-2\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

4.2.2 Интеграли од видот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

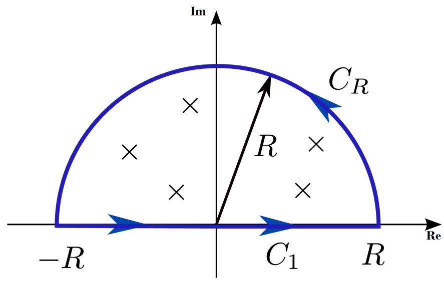
За интегралите од типот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, такви што:

1. $f(z)$ е дробно-рационална функција без сингуларитети на реалната оска;

2. $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$,

   важи

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z),$$



Слика 4.5. Графички приказ на областа

каде z_i, $i=1,2,...,n$ се сигуларитетите на функцијата $f(z)$ во горната полурамнина.
Ја интегрираме $f(z)$ на затворената крива C која се состои од горната полукружница на $C_R((0,0),R)$ и дијаметарот од $-R$ до R. Според тоа, од основната теорема за резидиуми

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z),$$

каде z_i, $i=1,2,...,n$ се полови на $f(z)$ во внатрешноста на C. Како што $R\to\infty$ сите полови на $f(z)$ во горната полурамнина ќе се најдат во C. За тврдењето, доволно е да покажеме дека $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 0$. Да го разгледаме модулот на интегралот $\int\limits_{C_R} f(z)\,dz$. Тогаш,

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{0}^{\pi} \left|f\left(Re^{it}\right)\right| Ridt \le \max_{0\le t\le\pi} \left|f\left(Re^{it}\right)\right| R \int\limits_{0}^{\pi} dt =$$

$$= \pi \max_{z \in C_R} |zf(z)| \to 0,$$

кога $R \to \infty$, бидејќи $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$.

Задача 4.17. Пресметај ја вредноста на интегралот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6} dx$.

Решение. Нека $f(z) = \frac{z^4}{1+z^6}$. Решенијата на равенката $1 + z^6 = 0$ се

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

односно $z_0 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $z_1 = i$, $z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $z_3 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$, $z_4 = -i$ и $z_5 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$, и ниту еден од нив не лежи на реалната оска. Во горната полурамнина се z_0, z_1 и z_2 и тие се прости полови за дадената функција. Исто така е исполнето дека $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{z^5}{1+z^6} = 0$. Според тоа,

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{z^4}{1+z^6} dz + \int\limits_{C_R} \frac{z^4}{1+z^6} dz = 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z)\right],$$

односно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^4}{1+z^6} dz + \lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{z^4}{1+z^6} dz = 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z)\right].$$

Со помош на Задача 4.2 ги пресметуваме бараните резидиуми, па имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{\sqrt{3}+i}{2}} \frac{z^4}{(1+z^6)'} = \lim_{z\to\frac{\sqrt{3}+i}{2}} \frac{1}{6z} = \frac{\sqrt{3}-i}{12},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z^4}{(1+z^6)'} = \lim_{z\to i} \frac{1}{6z} = -\frac{i}{6},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{-\sqrt{3}+i}{2}} \frac{z^4}{(1+z^6)'} = \lim_{z\to\frac{-\sqrt{3}+i}{2}} \frac{1}{6z} = \frac{-\sqrt{3}-i}{12}.$$

Значи, $2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z)\right] = \frac{2\pi}{3}$. Од друга страна,

$$\left|\int\limits_{C_R} \frac{z^4}{1+z^6}dz\right| = \left|\int\limits_0^\pi \frac{R^4e^{4it}}{1+R^6e^{6it}}Rie^{it}dt\right| \leq \int\limits_0^\pi \left|\frac{R^4e^{4it}}{1+R^6e^{6it}}Rie^{it}\right| dt \leq$$

$$\leq \frac{R^5}{1-R^6}\int\limits_0^\pi dt = \frac{\pi R^5}{1-R^6} \to 0,$$

кога $R \to \infty$. Од сето ова добиваме дека

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^4}{1+z^6}dz + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} \frac{z^4}{1+z^6}dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^4}{1+z^6}dz = \frac{2\pi}{3},$$

односно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^6}dx = \frac{2\pi}{3}.$$

Задача 4.18. Пресметај ја вредноста на интегралот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Решение. Функцијата $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ има сигуларитети во точките каде што $z^4+1=0$, т.е. во

$$z_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}, k = 0,1,2,3.$$

Од тоа што $z_0 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ и $z_4 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$, јасно е дека немаме сингуларитети на реалната оска, z_0 и z_1 се во горната полурамнина и сите се полови за функцијата $f(z)$. Избираме доволно голем радиус $R>0$, така што z_0 и z_1 се опфатени во кружниот лак C_R. Тогаш,

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz + \int\limits_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)\right].$$

Со помош на Задача 4.2 ги пресметуваме бараните резидиуми, па имаме

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}} \frac{z^2+1}{(z^4+1)'} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}{4\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^3} = -\frac{i\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}} \frac{z^2+1}{(z^4+1)'} = \frac{\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}{4\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^3} = -\frac{i\sqrt{2}}{4}.$$

Значи, $2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)\right] = \pi\sqrt{2}$. Од друга страна

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz\right| \le \int_0^{\pi} \left|\frac{R^2e^{2it}+1}{1+R^4e^{4it}}Rie^{it}\right| dt \le \frac{R^2+1}{R^4-1}R\int_0^{\pi} dt = \frac{\pi R\left(R^2+1\right)}{R^4-1} \to 0,$$

кога $R\to\infty$. Од сето ова добиваме дека

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = \sqrt{2}\pi,$$

односно

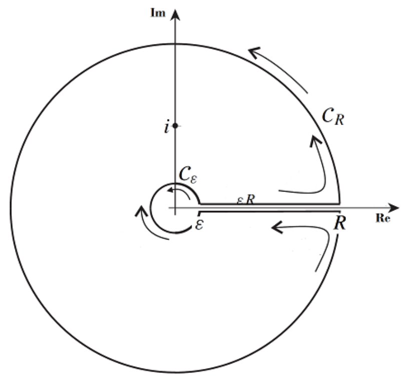
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \sqrt{2}\pi.$$

4.2.3 Интеграли од видот $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$, $0 < \alpha < 1$

Разгледуваме интеграли од облик $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$, $0 < \alpha < 1$ така што

1. $f(z)$ е дробно-рационална функција без сингуларуитети на позитивниот дел на реалната оска, вклучувајќи го и координатниот почеток,
2. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Ја интегрираме $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z^\alpha}$, на затворена крива како на цртежот. Затворената крива C се состои од една кружница со доволно голем радиус и мала кружница споени со отсечки во позитивниот дел на реалната оска. Според тоа, параметризацијата на деловите на кривата е:



Слика 4.6. Графички приказ на областа

1. отсечката од ε до R е дадена со $z = t$, $\varepsilon \le t \le R$,
2. надворешната кружница C_R, односно кружницата со поголем радиус е определена со $z = Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$,
3. отсечката од R до ε е дадена со $z = te^{2\pi i}$, $\varepsilon \le t \le R$,
4. внатрешната кружница C_ε, односно кружницата со помал радиус и ориентација во насока на стрелките на часовникот, е определена со $z = \varepsilon e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Ќе покажеме дека $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \varphi(z)\, dz = 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{C_\varepsilon} \varphi(z)\, dz = 0$. За изразите $\left|\int\limits_{C_R} \varphi(z)\, dz\right|$ и $\left|\int\limits_{C_\varepsilon} \varphi(z)\, dz\right|$ имаме

$$\left|\int\limits_{C_R} \varphi(z)\, dz\right| \le \int\limits_{C_R} \left|\varphi\left(\mathrm{Re}^{it}\right) Rie^{it}\right| dt \le 2\pi \max_{z\in C_R} |z\varphi(z)|$$

и

$$\left|\int\limits_{C_\varepsilon} \varphi(z)\,dz\right| \le \int\limits_{C_R} \left|\varphi\left(\varepsilon e^{it}\right)\varepsilon i e^{it}\right| dt \le 2\pi \max_{z\in C_\varepsilon} |z\varphi(z)|\,.$$

Од тоа што $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ и $f(z)$ е дробно-рационална функција, степенот на именителот на $f(z)$ е барем за еден поголем од степенот на броителот. Од условите имаме дека $0 < 1-\alpha < 1$, па добиваме дека

$$\lim_{z\to\infty} z\varphi(z) = \lim_{z\to\infty} z^{1-\alpha} f(z) = \lim_{z\to\infty} z^{1-\alpha} \cdot \lim_{z\to\infty} f(z) = 0.$$

Исто така, $f(z)$ е непрекината во точката $z = 0$ и $f(z)$ нема сингуларитети во координатниот почеток, па $\lim\limits_{z\to 0} z\varphi(z) = \lim\limits_{z\to 0} z^{1-\alpha} f(z) = 0$. Заклучуваме дека

$$\lim_{z\to\infty} \int\limits_{C_R} \varphi(z)\,dz = 0 \text{ и } \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{C_\varepsilon} \varphi(z)\,dz = 0.$$

Притоа важи следното

$$\int\limits_{C} \varphi(z)\,dz = \int\limits_{C_R} \varphi(z)\,dz + \int\limits_{C_\varepsilon} \varphi(z)\,dz + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{f(x)}{x^\alpha} + \int\limits_{R}^{\varepsilon} \frac{f\left(xe^{2\pi i}\right)}{x^\alpha e^{2\alpha\pi i}} dx =$$

$$= 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} \left(z^{-\alpha} \cdot f(z)\right),$$

каде z_i, $i = 1, 2, ..., n$ се сите конечни изолирани сингуларитети на $f(z)$ во комплексната рамнина $\mathbb{C}$.

Интегралот $\int\limits_{R}^{\varepsilon} \frac{f\left(xe^{2\pi i}\right)}{x^\alpha e^{2\alpha\pi i}} dx$ може да се запише во облик

$$\int\limits_{R}^{\varepsilon} \frac{f\left(xe^{2\pi i}\right)}{x^\alpha e^{2\alpha\pi i}} dx = e^{-2\alpha\pi i} \int\limits_{R}^{\varepsilon} \frac{f(x)}{x^\alpha} dx.$$

Сега, ако побараме лимес кога $\varepsilon \to 0$ и $R \to \infty$ во претходното равенство и ги искористиме наведените заклучоци, добиваме дека

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\alpha\pi i}} \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} \left(z^{-\alpha} \cdot f(z)\right),$$

каде z_i, $i = 1, 2, ..., n$ се сите конечни изолирани сингуларитети на $f(z)$ во комплексната рамнина.

Задача 4.19. Пресметај ја вредноста на интегралот $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\, x^\alpha} dx$, $0 < \alpha < 1$.

Решение. Ја разгледуваме функцијата $f(z) = \frac{1}{(1+z)\, z^\alpha}$, којашто има изолиран сингуларитет различен од нула во точката $z = -1$. Од претходно изложената постапка за пресметување на овој тип на интеграли, користејќи ја основната теорема за резидиуми добиваме дека

$$\int\limits_C f(z)\, dz = \int\limits_C \frac{dz}{(1+z)\, z^\alpha} =$$

$$= \left(1 - e^{-2\alpha\pi i}\right) \int\limits_\varepsilon^R \frac{dx}{(1+x)\, x^\alpha} + \int\limits_{C_R} \frac{dz}{(1+z)\, z^\alpha} + \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{dz}{(1+z)\, z^\alpha} =$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{1}{(1+z)\, z^\alpha} = 2\pi i \lim_{z \to -1} \frac{1+z}{(1+z)\, z^\alpha} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to -1} \frac{1}{z^\alpha} = \frac{2\pi i}{(-1)^\alpha} = \frac{2\pi i}{e^{\alpha\pi i}},$$

односно

$$\left(1 - e^{-2\alpha\pi i}\right) \int\limits_\varepsilon^R \frac{dx}{(1+x)\, x^\alpha} + \int\limits_{C_R} \frac{dz}{(1+z)\, z^\alpha} + \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{dz}{(1+z)\, z^\alpha} = \frac{2\pi i}{e^{\alpha\pi i}}.$$

Од тоа што, $\left| \int\limits_{C_R} \frac{dz}{(1+z)\, z^\alpha} \right| \le \frac{2\pi R}{(R-1)\, R^\alpha} \to 0$, кога $R \to \infty$ и

$$\left| \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{dz}{(1+z)\, z^\alpha} \right| \le \frac{2\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon)\, \varepsilon^\alpha} \to 0, \text{ кога } \varepsilon \to 0,$$

ако во последното равенство побараме лимес кога $R \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, добиваме

$$\left(1 - e^{-2\alpha\pi i}\right) \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\, x^\alpha} = \frac{2\pi i}{e^{\alpha\pi i}},$$

односно

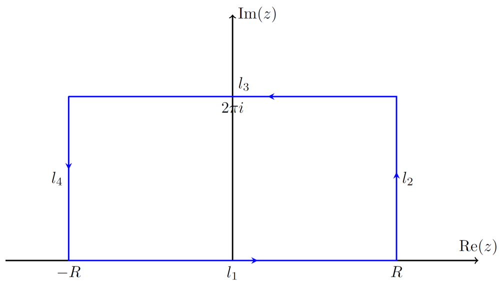
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\,x^\alpha} = \frac{2\pi i}{e^{\alpha\pi i}\left(1-e^{-2\alpha\pi i}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

4.2.4 Интеграли од видот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} f(x)\,dx,\ 0<\alpha<1$

При разгледување на интегралите од овој тип често се користи техниката наведена во претходниот параграф, само што во овој случај кривата на интеграција е правоаголник. Во продолжение ќе ја изведеме постапката за пресметување на конкретен пример.

Задача 4.20. Пресметај ја вредноста на интегралот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx$, $0<\alpha<1$.

Решение. Очигледно е дека функцијата $f(z)=\dfrac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ има бесконечно многу полови во комплексната рамнина. Всушност тоа е така, затоа што равенката $1+e^z=0$ има бесконечно многу решенија од облик $z_k=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Во оваа задача ќе интегрираме по правоаголна контура така што



Слика 4.7. Графички приказ на областа

$$l_1:\ y=0,\ -R\le x\le R,$$

$$l_2:\ x=R,\ 0\le y\le 2\pi,$$

$$l_3:\ y=2\pi,\ -R\le x\le R,$$

$$l_4:\ x=-R,\ 0\le y\le 2\pi.$$

како што е прикажано на Слика 4.7. Да забележиме дека избраниот правоаголник опфаќа само еден прост пол $z=\pi i$. Според тоа,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}dz =$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}idy + \int_R^{-R} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}dx + \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}idy =$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\pi i} \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z} = 2\pi i \lim_{z\to\pi i} \frac{e^{\alpha z}}{(1+e^z)'} = -2\pi i e^{\alpha\pi i},$$

односно

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} i dy + \int_R^{-R} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx + \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} i dy = -2\pi i e^{\alpha\pi i}.$$

Од тоа што $0 < \alpha < 1$,

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} i dy \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} dy = 2\pi \frac{e^{\alpha R}}{e^R-1} \to 0$$

и

$$\left| \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} i dy \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha R}}{1-e^{-R}} dy = 2\pi \frac{e^{-\alpha R}}{1-e^{-R}} \to 0$$

кога $R \to \infty$. Сега, ако во равенството погоре побараме лимес кога $R \to \infty$ добиваме

$$\left(1 - e^{2\alpha\pi i}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = -2\pi i e^{\alpha\pi i},$$

односно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = \frac{2\pi i e^{\alpha\pi i}}{e^{2\alpha\pi i} - 1}.$$

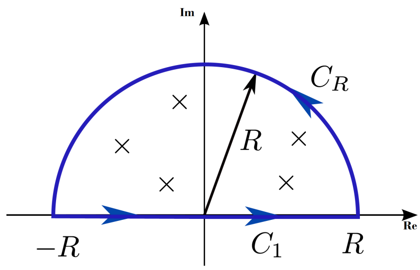
4.2.5 Интеграли од видот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x)\,dx,\ m>0$

Разгледуваме интеграли од облик $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x)\,dx,\ m>0$, така што

1. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$,

2. функцијата $f(z)$ нема сингуларитети на реалната оска,

кои се познати под името Фуриеви интеграли. Да забележиме дека ограничувањето за $m>0$, може, но и не мора да го има, затоа што овој метод за пресметување функционира дури и во случај кога $m<0$, а и кога е чисто имагинарен број. Исто така, да забележиме дека во случај кога $f(z)$ има сингуларитети на реалната оска, се разгледува Кошиевата главна вредност. Да го разгледаме изразот $\left|\int\limits_{C_R} f(z)\,e^{i\lambda z}dz\right|$ за $\lambda>0$, Слика 4.8.



Слика 4.8. Графички приказ на областа

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)\,e^{i\lambda z}dz\right| \le \int\limits_0^{\pi} \left|f\left(Re^{it}\right)\right| \left|e^{i\lambda R e^{it}}\right| Rdt \le$$

$$\le \max_{z\in C_R} |f(z)|\, R\int\limits_0^{\pi} e^{-\lambda R\sin t}dt =$$

$$= 2\max_{z\in C_R} |f(z)|\, R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin t}dt \le 2R\max_{z\in C_R} |f(z)| \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\frac{2t}{\pi}}\,dt =$$

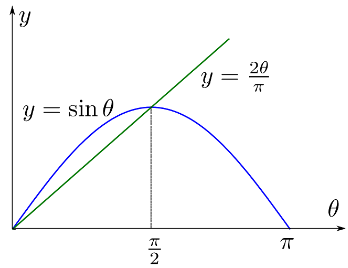
$$= 2R\max_{z\in C_R} |f(z)|\, \frac{\pi}{2R\lambda}\left(1-e^{-\lambda R}\right) \to 0,$$

кога $R\to\infty$, при дадено $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$. Последното е познато како Лема на Жордан. Да забележиме дека во разгледувањата е искористено неравенството $\int\limits_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta < \frac{\pi}{R}$ и неравенството $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq \frac{\pi}{2R}$ кое произлегува од претходното неравенство заради симетричноста на синусната функција во однос на правата $\theta = \frac{\pi}{2}$. Исто така, искористено е и неравенството $\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, за $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

За пресметување на Фуриевиот интеграл, интегрираме по затворена крива C, која се состои од горна полукружница C_R и нејзиниот дијаметар од $-R$ до R по реалната оска. Тогаш имаме дека,

$$\int\limits_C e^{imz} f(z)\, dz =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} e^{imx} f(x)\, dx + \int\limits_{C_R} e^{imz} f(z)\, dz.$$



Слика 4.9. Графички приказ на функциите од неравенството

Од лемата на Жордан,

$$\left| \int\limits_{C_R} e^{imz} f(z)\, dz \right| \to 0, \text{ кога } R \to \infty,$$

со помош на основната теорема за резидиуми, добиваме дека

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z),$$

каде z_i, $i = 1, 2, ..., n$ се сите изолирани сингуларитети на $f(z)$ во горната полурамнина, затоа што C ги опфаќа сите сингуларитети на $f(z)$ во горната полурамнина кога $R \to \infty$.

Задача 4.21. Пресметај ја вредноста на интегралот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + x + 1} dx$.

Решение. Нека $f(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}$. Бидејќи решенијата на равенката

$z^2+z+1=0$ се $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, добиваме дека функцијата има два сингуларитета, кои се прости полови и притоа нема сингуларитети на реалната оска. Полот $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ е во горната полурамнина, а полот $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ е во долната полурамнина. Исто така,

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2+z+1}=0.$$

За $x\in\mathbb{R}$, важи

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}dx=\operatorname{Im}\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}.$$

Користејќи ја лемата на Жордан и претходно покажаното добиваме дека

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}dx=\operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\int\limits_{C}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}dz\right)=\operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_i}f(z)\right),$$

каде z_i, $i=1,2,...,n$, се сите изолирани сингуларитети на $f(z)$ во горната полурамнина. Од тоа што,

$$\int\limits_{C}\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{2\pi i}{3}}}\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}=2\pi i\lim_{z\to e^{\frac{2\pi i}{3}}}\frac{e^{2iz}}{(z^2+z+1)'}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to e^{\frac{2\pi i}{3}}}\frac{e^{2iz}}{2z+1}=2\pi i\frac{e^{2ie^{\frac{2\pi i}{3}}}}{2e^{\frac{2\pi i}{3}}+1}=2\pi i\frac{e^{2i\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}}{-1+i\sqrt{3}+1}=$$

$$=2\pi i\frac{e^{-i-\sqrt{3}}}{i\sqrt{3}}=\frac{2\pi ie^{-\sqrt{3}}(\cos 1-i\sin 1)}{\sqrt{3}},$$

добиваме дека

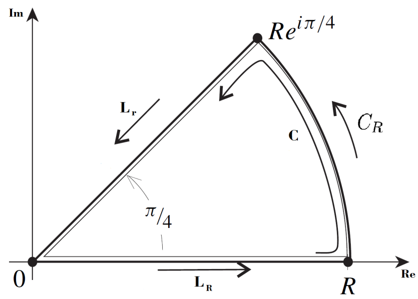
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}dx=\frac{2\pi e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}.$$

Задача 4.22. Покажи дека $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Решение Наместо да тргнеме директно со разгледување на $\cos\left(x^2\right)$ и $\sin\left(x^2\right)$, ќе разгледуваме e^{ix^2}, користејќи го фактот дека

$$e^{ix^2} = \cos x^2 + i \sin x^2.$$

Ако го пресметаме интегралот $\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$, тогаш бараните вредности ги добиваме од



Слика 4.10. Графички приказ на областа

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(e^{ix^2}\right) dx = \mathrm{Re}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2} dx\right)$$

и

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{Im}\left(e^{ix^2}\right) dx = \mathrm{Im}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2} dx\right).$$

За да го пресметаме $\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$, природно се наметнува да ја разгледуваме функцијата $f(z) = e^{iz^2}$ на $C = L_R \cup C_R \cup L_r$, како што е дадено на цртежот. Да забележиме дека избраната функција $f(z) = e^{iz^2}$ е холоморфна функција на целата комплексна рамнина. Според тоа, за произволно $R > 0$, имаме

$$0 = \int\limits_C e^{iz^2} dz = \int\limits_{L_R} e^{iz^2} dz + \int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz + \int\limits_{L_r} e^{iz^2} dz =$$

$$= \int\limits_0^R e^{ix^2} dx + \int\limits_{C_R} e^{iz^2} dz + \int\limits_{L_r} e^{iz^2} dz,$$

од каде добиваме дека

$$\int_0^R e^{ix^2} dx = -\int_{C_R} e^{iz^2} dz - \int_{L_r} e^{iz^2} dz.$$

Сега, ако во последното равенство побараме лимес кога $R \to \infty$ добиваме

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = -\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz - \lim_{R\to\infty} \int_{L_r} e^{iz^2} dz.$$

Параметризацијата на L_r е определена со $z = re^{\frac{i\pi}{4}}$ за r од R до 0, па

$$\lim_{R\to\infty} \int_{L_r} e^{iz^2} dz = \lim_{R\to\infty} \int_R^0 e^{-r^2} e^{\frac{i\pi}{4}} dr = -e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr = -e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

каде што го искористивме Гаусовиот интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$. Параметризацијата на C_R е определена со $z = Re^{it}$ за $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$. Според тоа,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2it}} iRe^{it} dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 \cos 2t - R^2 \sin 2t} iRe^{it} dt,$$

па користејќи ја трансформацијата $2t = \phi$ и од $\sin\phi \ge \dfrac{2\phi}{\pi}$ за $0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{2}$, добиваме

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 \cos 2t - R^2 \sin 2t} iRe^{it} dt \right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{iR^2 \cos 2t - R^2 \sin 2t} iRe^{it} \right| dt =$$

$$= R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2t} dt = \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin\phi} d\phi \le$$

$$\le \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2\phi}{\pi}} d\phi = \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-R^2}\right) \to 0,$$

кога $R \to \infty$. Од сето ова добиваме дека,

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = -\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz - \lim_{R\to\infty} \int_{L_r} e^{iz^2} dz == e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

односно

$$\int_0^{+\infty} \left(\cos x^2 + i \sin x^2\right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Конечно добиваме дека $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Глава 5

ПРИНЦИП НА АРГУМЕНТ

Теорема 5.1 (Теорема на Руше)**.** *Нека f и g се различни холоморфни функции на едносврзлива област D и за секој $z \in \partial D$ важи $|f(z)| > |g(z)|$. Тогаш, $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имаат ист број на нули во D.*

Задача 5.1. Определи го бројот на нули во кругот $D = \{z \,|\, |z| < 1\}$ на:

1) $z^4 - 5z + 1 = 0$

2) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$

Решение. 1) Функциите $f(z) = -5z$ и $g(z) = z^4 + 1$ се холоморфни функции на D. За $z \in \partial D$, $|z| = 1$, па $|f(z)| = |-5z| = 5|z| = 5$ и $|g(z)| = \left|z^4 + 1\right| \leq |z|^4 + 1 = 1^4 + 1 = 2$, односно

$$|g(z)| \leq 2 < 5 = |f(z)|,$$

т.е. $|f(z)| > |g(z)|$ за секој $z \in \partial D$. Според тоа, f и $f + g$ имаат ист број на нули во D. Јасно, $f(z) = -5z$ има една нула во D, што значи дека и $f(z) + g(z) = -5z + z^4 + 1 = z^4 - 5z + 1$ има една нула во D.

2) Функциите $f(z) = -8z$ и $g(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 2$ се холоморфни функции на D. За $z \in \partial D$, $|z| = 1$, па $|f(z)| = |-8z| = 8|z| = 8$ и

$$|g(z)| = \left|z^9 - 2z^6 + z^2 - 2\right| \leq |z|^9 + 2|z|^6 + |z|^2 + 2 = 6,$$

односно $|g(z)| \leq 6 < 8 = |f(z)|$, т.е. $|f(z)| > |g(z)|$ за секој $z \in \partial D$. Според тоа, f и $f+g$ имаат ист број на нули во D. Јасно, $f(z) = -8z$ има една нула во D, што значи дека и $f(z)+g(z) = z^9-2z^6+z^2-8z-2$ има една нула во D.

Задача 5.2. Докажи дека равенката $z^n = e^{z-k}$, за фиксно $k > 1$, има точно n нули во $D = \{z|\,|z| < 1\}$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик $e^{z-k} - z^n = 0$. Нека $f(z) = -z^n$ и $g(z) = e^{z-k}$, коишто се холоморфни функции на D. За $z \in \partial D$, $|z| = 1$, па $|f(z)| = |-z^n| = |z|^n = 1$, а за $|g(z)|$ користејќи дека $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, добиваме дека

$$|g(z)| = \left|e^{z-k}\right| = \left|e^z e^{-k}\right| = \left|e^{e^{i\varphi}} e^{-k}\right| = \left|e^{\cos\varphi + i\sin\varphi} e^{-k}\right| =$$

$$= \left|e^{\cos\varphi + i\sin\varphi - k}\right| = \left|e^{\cos\varphi - k}\right| \left|e^{i\sin\varphi}\right| = \left|e^{\cos\varphi - k}\right| < e^{1-1} = 1.$$

Според тоа, $|g(z)| < |f(z)|$, за секој $z \in \partial D$. Значи, $f(z) = -z^n$ и $f(z) + g(z) = e^{z-k} - z^n$ имаат ист број на нули во D. Јасно $f(z) = -z^n$ има n нули во D, па и почетната равенка има n нули во D.

Задача 5.3. Нека $h(z)$ е холоморфна функција на $D = \{z|\,|z| < 1\}$ и нека $|h(z)| < 1$ за секој $z \in \partial D$. Докажи дека $z = h(z)$ има точно едно решение во D.

Решение. Нека $f(z) = z$ и $g(z) = -h(z)$ коишто се холоморфни функции на D. За $z \in \partial D$, $|f(z)| = |z| = 1$ и $|g(z)| = |-h(z)| = |h(z)| < 1$, па добиваме дека $|f(z)| > |g(z)|$ за секој $z \in \partial D$. Според тоа, f и $f + g$ имаат ист број на нули во D. Јасно, $f(z) = z$ има точно една нула во D, па и $f(z) + g(z) = z - h(z)$ има точно една нула во D.

Задача 5.4. Докажи дека равенката $z + \lambda - e^z = 0$, каде $\lambda > 1$, има единствено решение на левата полурамнина $(\mathrm{Re}\, z < 0)$ и тоа решение е реален број.

Решение. Нека $D_R = \{z|\,\mathrm{Re}\, z < 0, |z| < R\}$, каде $R > \lambda + 1$ и нека

$$f(z) = z + \lambda \text{ и } g(z) = -e^z, f, g \in \mathbb{H}(D_R).$$

За ∂D_R имаме дека $\partial D_R = A_R \cup B_R$, каде $A_R = \{z|\,\mathrm{Re}\, z < 0, |z| = R\}$ и $B_R = \{z|\, z = it, -R \le t \le R\}$, Слика 5.1. Разгледуваме два случаја:

1. За $z \in A_R = \{z|\,\mathrm{Re}\, z < 0, |z| = R\}$,

$$|f(z)| = |z + \lambda| \ge ||z| - |\lambda|| = |R - \lambda| = R - \lambda > 1$$

и користејќи дека $z = Re^{i\varphi}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$

$$|g(z)| = |-e^z| = |e^z| = \left|e^{Rcos\varphi + iRsin\varphi}\right| = e^{Rcos\varphi} \left|e^{iRsin\varphi}\right| = e^{Rcos\varphi} < 1,$$

каде што неравенството $e^{Rcos\varphi} < 1$, е исполнето заради тоа што e^x е строго монотоно растечка функција, $R > 0$ и $cos\varphi < 0$, за $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$. Според тоа $|f(z)| > |g(z)|$, за секој $z \in A_R$.

2. За $z \in B_R = \{z| \, z = it, -R \leq t \leq R\}$,

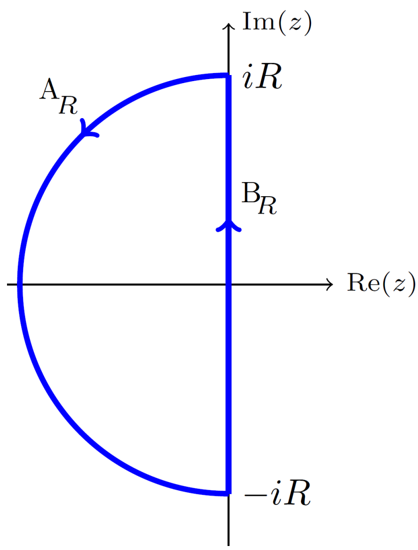
$$|f(z)|^2 = |z+\lambda|^2 = |it+\lambda|^2 = t^2 + \lambda^2 > \lambda^2 > 1,$$

од каде следува дека $|f(z)| > 1$ и

$$|g(z)| = |-e^z| = \left|e^{it}\right| = 1 < |f(z)| \, .$$

Според тоа, $|f(z)| > |g(z)|$, за секој $z \in B_R$.

Заклучуваме дека $|f(z)| > |g(z)|$, за секој $z \in \partial D_R = A_R \cup B_R$. Оттука, $f(z) = z + \lambda$ и $f(z)+g(z) = z+\lambda+e^z$ имаат ист број на нули во D_R. Јасно, $f(z) = z+\lambda$ има едно решение $z = -\lambda$ во D_R, па и $z + \lambda - e^z = 0$ има едно решение во D_R. Нека $z + \lambda - e^z = h(z) = 0$. Ќе покажеме дека решението е реален број со помош на следната теорема:



Слика 5.1. Графички приказ на областа

Теорема 5.2. *Нека $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ и $f : I \to \mathbb{R}$ е непрекината функција. Ако u е број помеѓу $f(a)$ и $f(b)$, односно*

$$\min\{f(a), f(b)\} < u < \max\{f(a), f(b)\}$$

тогаш постои $c \in (a,b)$ така што $f(c) = u$.

Сега, со примена на Теорема 5.2 на интервалот $[-1-\lambda, 0]$ добиваме

$$h(-1-\lambda) = -1-\lambda+\lambda-e^{-1-\lambda} = -1-e^{-1-\lambda} < 0 \text{ и}$$

$$h(0) = 0+\lambda-e^0 = \lambda-1 > 0,$$

односно $h(-1-\lambda) < 0 < h(0)$. Според тоа добиваме дека постои $c \in (-1-\lambda, 0)$ така што $f(c) = 0$. Значи, постои реален број во левата полурамнина којшто е решение на равенката. Но претходно покажавме дека равенката има единствено решение во левата полурамнина, па заклучуваме дека решението на равенката е реален број.

Задача 5.5. Нека $h(z)$ е холоморфна и еднолисна функција на ограничена и едносврзлива област D. Докажи дека $h'(z) \neq 0$.

Решение. За функцијата $h(z)$ велиме дека е еднолисна функција на D ако и само ако за секои $z_1, z_2 \in D$ од $h(z_1) = h(z_2)$ следува дека $z_1 = z_2$. Да претпоставиме спротивно, односно дека постои $a \in D$ така што $h'(a) = 0$. Бидејќи $h \in \mathbb{H}(D)$, за $D_R = \{z | \, |z-a| < R\} \subset D$ важи

$$h(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k = a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + ...,$$

па

$$h'(z) = a_1 + 2a_2 (z-a) + 3a_3 (z-a)^2 + ..., z \in D_R.$$

Но, од претпоставката $h'(a) = 0$, па $a_1 = 0$. Тогаш

$$h(z) = a_0 + a_2 (z-a)^2 + a_3 (z-a)^3 ...,$$

и $h(a) = a_0$. Па,

$$h(z) - h(a) = h(z) - a_0 = a_2 (z-a)^2 + a_3 (z-a)^3 ...,$$

т.е. $h(z) - h(a) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k (z-a)^k$. Барем еден од коефициентите $a_k, k \geq 2$ не е еднаков на нула, затоа што во спротивно $h(z) = h(a) = a_0$, односно добиваме дека функцијата е константна, што противречи на условот дека е еднолисна функција. Нека со m го означиме бројот $m \geq 2$, $a_m \neq 0$ и $a_2 = a_3 = a_4 = ... = a_{m-1} = 0$. Тогаш

$$h(z) - h(a) = a_m (z-a)^m + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k (z-a)^k, z \in D_R.$$

Означувајќи

$$f(z) = a_m (z-a)^m \text{ и } g(z) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k (z-a)^k,$$

добиваме $f(z) + g(z) = h(z) - h(a)$. Тогаш,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_m (z-a)^m}{\sum\limits_{k=m+1}^{+\infty} a_k (z-a)^k} = \frac{a_m (z-a)^m}{a_{m+1}(z-a)^{m+1} + a_{m+2}(z-a)^{m+2} + \dots} =$$

$$= \frac{a_m (z-a)^m}{(z-a)^m \left(a_{m+1}(z-a) + a_{m+2}(z-a)^2 + \dots\right)} =$$

$$= \frac{a_m}{a_{m+1}(z-a) + a_{m+2}(z-a)^2 + \dots},$$

па $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \infty$, односно $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{g(z)}{f(z)} = 0$. Оттука, постои $R_1 > 0$ така што $\left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, за секој $z \in D_{R_1} = \{z |\, |z-a| < R_1\}$, т.е.

$$|g(z)| < |f(z)|, \text{ за секој } z \in D_{R_1} = \{z |\, |z-a| < R_1\},$$

па тогаш и

$$|g(z)| < |f(z)|, \text{ за секој } z \in \overline{D}_{\frac{R_1}{2}} = \left\{z |\, |z-a| \leq \frac{R_1}{2}\right\}.$$

Ставајќи $D_1 = D_R \cap D_{\frac{R_1}{2}} \subset D$, за $z \in \partial D$ важи $|f(z)| > |g(z)|$, па од Теоремата на Руше, следува дека

$$f(z) = a_m (z-a)^m \text{ и } f(z) + g(z) = h(z) - h(a)$$

имаат ист број на нули во $D_1 \subset D$. Но,

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow a_m (z-a)^m = 0, a_m \neq 0,$$

има m нули ($z = a$ со ред m), $m \geq 2$, па и $h(z) - h(a) = 0$ има m нули во $D, m \geq 2$. Според тоа $h(z) = h(a)$ важи за $z_1, z_2, \dots, z_m$, $z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_m, m \geq 2$, што противречи на условот дека h е еднолисна функција. Заклучуваме дека $h'(z) \neq 0$ за секоја холоморфна и еднолисна функција на ограничена и едносврзлива област D.

Задача 5.6. Докажи дека полиномот

$$P_n(z) = 2 - 2 \cdot 3z + 3 \cdot 4z^2 + \dots + (-1)^n (n+1)(n+2) z^n$$

нема нули во $D_r = \{z |\, |z| < r, r < 1\}$.

Решение. Го разгледуваме степенскиот ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) z^n$.

За радиусот на конверенцицијa на овој степенски ред имаме дека

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{(-1)^{n+1}(n+2)(n+3)}\right| = 1.$$

Од теоремите за степенски редови имаме дека P_n рамномерно конвергира кон збирот на редот, $S(z)$ на D_r, каде $0 < r < R$ и

$$\int S(z)\,dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\int (-1)^n (n+1)(n+2) z^n dz = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n (n+2) z^{n+1} dz,$$

$$\begin{aligned}\int\left(\int S(z)\,dz\right)dz &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int (-1)^n (n+2) z^{n+1} dz = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{n+2}\\ &= z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + z^8 - z^9 + \ldots =\\ &= z^2 + z^4 + z^6 + \ldots - \left(z^3 + z^5 + z^7 + \ldots\right) =\\ &= z^2\left(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots\right) - z^3\left(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots\right) =\\ &= \left(z^2 - z^3\right)\left(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots\right) = z^2(1-z)\frac{1}{1-z^2} = \frac{z^2}{1+z},\end{aligned}$$

па $\displaystyle\int S(z)\,dz = \left(\frac{z^2}{1+z}\right)' = \frac{2z(1+z) - z^2}{(1+z)^2} = \frac{2z+z^2}{(1+z)^2}$, т.е.

$$S(z) = \left(\frac{2z+z^2}{(1+z)^2}\right)' = \frac{(2+2z)(1+z)^2 - 2\left(2z+z^2\right)(1+z)}{(1+z)^4} = \frac{2}{(1+z)^3}.$$

Ако $|z| = r$, тогаш

$$|S(z)| = \frac{2}{|1+z|^3} \geq \frac{2}{(1+|z|)^3} = \frac{2}{(1+r)^3}.$$

Значи, $\min\limits_{|z|=r}|S(z)| \geq \varepsilon > 0$ за некој $\varepsilon > 0$.
Бидејќи $P_n(z)$ рамномерно конвергира кон $S(z)$, за $\varepsilon > 0$ постои природен број $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\max\limits_{|z|=r}|P_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ за секој $n \geq n_0$.

Сега, нека $f(z) = S(z)$ и $g(z) = P_n(z) - S(z)$. За $z \in \partial D_r$, $n \geq n_0$ имаме

$$\begin{aligned}|f(z)| = |S(z)| \geq \min_{|z|=r}|S(z)| > \varepsilon >\\ > \max_{|z|=r}|P_n(z) - S(z)| > |P_n(z) - S(z)| = |g(z)|.\end{aligned}$$

Според тоа, $|f(z)| > |g(z)|$, за секој $n \geq n_0$ и за секој $z \in \partial D_r$. Од Теоремата на Руше $f(z) = S(z) = \dfrac{2}{(1+z)^3}$ и $f(z) + g(z) = P_n(z)$ имаат ист број на нули во D_r, а како $S(z)$ нема нули во D_r, следува дека и $P_n(z)$ нема нули во D_r, за доволно големо n, $n \geq n_0$.

Литература

[1] N. H. Asmar, L. Grafakos, *Complex Analysis with Applications*, Springer, 2018.

[2] Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович, *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*, Четврто издание, 2004.

[3] N. Elezović, D. Petrizio, *Funkcije kompleksne varijable (zbirka zadataka)*, 1994.

[4] Н. Ивановски, *Реална анализа*, Просветно дело, 1997.

[5] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Springer, 1978.

[6] D.S.Mitrinović, *Kompleksna analiza*, 1973.

[7] D.S.Mitrinović, *Zbornik zadataka i problema*, Cetvrto izdanje, 1989.

[8] A. Odžak, L. Smajlovic, *Kompleksna analiza*, 2013.

[9] Ж.Томовски, *Збирка решени задачи по редови и аналитички функции*, 2003.

[10] Б. Трпеновски, Н. Целакоски. Ѓ. Чупона, *Виша математика*, Книга IV, Просветно дело, 1994.

[11] Н. Шектуковски, *Редови и аналитички функции*, 2002.

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на било кој начин без претходна писмена согласност на авторот

Е-издание: https://www.ukim.edu.mk/e-izdanija/PMF/Zbirka_resheni_zadachi_po_kompleksna_analiza.pdf