Марија Оровчанец **Билјана Крстеска**
Весна Манова-Ерковиќ **Ѓорѓи Маркоски**

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА I (ПРВ ДЕЛ)

Скопје, 2015

Рецензенти
Проф. д-р Никола Пандески
Редовен професор на ПМФ, Скопје
Проф. д-р Никита Шекутковски
Редовен професор на ПМФ, Скопје

Со одлука број 07-235/7 од 30.9.2004 година, на Наставно-научниот совет на Природно-математичкиот факултет во Скопје се одобрува печатење на оваа книга како учебно помагало.

ПРЕДГОВОР

Оваа збирка задачи пред се е наменета за студентите на студиите по математика. Но, сметаме дека збиркава ќе биде интересна и за студентите од техничките факултети и сите оние кои сакаат да се запознаат со основните поими од математичката анализа.

Збиркава содржи пет глави. На почетокот на секоја од нив дадени се дефиниции и основни својства на поимите кои се разгледуваат во таа глава. Потоа следуваат формулациите и решенијата задачите. Доказите на теоремите и целата потребна теоретска подготовка може да се најдат во учебникот [1].

Сите задачи се детално решени. Пожелно е читателот да се обиде да ја реши задачата, а ако не успее, дури тогаш да го погледне решението. За да може успешно да се следи материјалот во оваа збирка, потребно е читателот да има добри предзнаења од материјалот кој се изучува во средното образование.

На крајот збиркава содржи задачи од писмените испити по математичка анализа 1 на студиите по математика на Природно-математичкиот факултет во Скопје.

Им се заблагодаруваме на рецензентите кои дадоа корисни забелешки и предлози за подобрување на оваа збирка задачи. Сите забелешки од читателите ќе бидат добродојдени за подобрување на текстот на оваа книга во иднина.

Скопје, 2004 Авторите

0. Вовед

0.1. Множества и пресликувања

Множество е основен поим во математиката и го усвојуваме без дефиниција. Објектите што го формираат множеството се нарекуваат елементи на множеството. Множествата ќе ги означуваме со големите латински букви, на пример A,B,C,X итн., а елементите со малите латински букви a,b,c,x,y итн. На пример, $A=\{a,b,c,d\}$ значи дека множеството A се состои од елементите a,b,c и d. Притоа, распоредот на елементите не го сметаме за битен и допуштаме еден ист елемент да се јавува повеќе пати. Ако a е елемент на множеството A, тогаш пишуваме $a \in A$, а ако a не е елемент на множеството A, пишуваме $a \notin A$. Елементите на некое множество можеме да ги опишеме ако користиме некое својство $P(x)$ кое што го задоволуваат тие (и само тие): $A=\{x \mid P(x)\}$. Велиме дека множеството A е подмножество од множеството B, и пишуваме $A \subseteq B$, ако секој елемент што припаѓа во множеството A припаѓа и во множеството B. За две множества A и B велиме дека се еднакви, и пишуваме $A=B$, ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Во спротивно, множествата се различни и пишуваме $A \neq B$.

Ако $A \subseteq B$ и $A \neq B$, тогаш велиме дека множеството A е вистинско подмножество од множеството B. Во тој случај пишуваме $A \subset B$.

Ако множеството A не е подмножество од множеството B, т.е. ако постои елемент од A што не припаѓа на B, тогаш пишуваме $A \not\subseteq B$.

Посебно ќе го издвоиме празното множество. Тоа е множество без елементи. Празното множество го означуваме со $\varnothing$. Ќе сметаме дека постои само едно такво множество и дека тоа е подмножество од секое множество, т.е. за секое множество A важи $\varnothing \subseteq A$.

Исто така, ако во даден проблем сите множества со кои работиме се подмножества од некое фиксно множество, тоа множество го викаме универзално множество и најчесто го означуваме со U.

Основни операции со множества се:

1. Унија на множествата A и B, означуваме $A \cup B$, е множеството што се состои од сите елементи што припаѓаат во множеството A или во множеството B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Ако $x \in A \cup B$, тоа значи дека $x \in A$ или $x \in B$; додека $x \notin A \cup B$ значи дека $x \notin A$ и $x \notin B$.

2. Пресек на множества A и B, означуваме $A \cap B$, е множеството што се состои од сите елементи што припаѓаат во множеството A и во множеството B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Ако $x \in A \cap B$, тоа значи дека $x \in A$ и $x \in B$; додека $x \notin A \cap B$ значи дека $x \notin A$ или $x \notin B$.

3. Разлика на множеството A со множеството B, означуваме $A \setminus B$, е множеството што се состои од сите елементи што припаѓаат во множеството A а не припаѓаат во множеството B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ , \ x \notin B\}$$

Ако $x \in A \setminus B$, тоа значи дека $x \in A$ и $x \notin B$; а $x \notin A \setminus B$ значи дека $x \notin A$ или $x \in B$.

4. Комплемент на множеството A (во однос на универзалното множество U), означуваме со A^c, е множеството што се состои од сите елементи од множеството U што не припаѓаат во множеството A.

$$A^c = U \setminus A = \{x \mid x \in U \ , \ x \notin A\}$$

Ако $x \in A^c$, тоа значи дека $x \notin A$; додека $x \notin A^c$ значи дека $x \in A$.

За две множества A и B велиме дека се дисјунктни ако $A \cap B = \varnothing$.

Нека A и B се две произволни множества, тогаш Декартов производ $A \times B$ е множеството што се состои од сите подредени двојки (a,b) каде што $a \in A$ и $b \in B$. Притоа, $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c, b = d$.

Дефиниција. Нека A и B се две непразни множества. Ако по некое правило на секој елемент на множеството A е придружен еднозначно определен елемент од множеството B, велиме дека е зададено пресликување од A во B. Пресликувањето го означуваме со $y=f(x)$. Инверзна слика на множеството $D\subseteq B$ со пресликувањето $f:A\to B$ е множеството $f^{-1}(D)=\{x:f(x)\in D\}$.

За пресликување $f:A\to B$ велиме дека

- сурјекција ако $f(A)=B$.
- инјекција ако $\forall b\in B$, множеството $f^{-1}(\{b\})$ има најмногу еден елемент.
- биекција ако е сурјекција и инјекција.

Задачи:

0.1. Дадени се множествата: $A=\{1,2,3,4,5\}$; $B=\{2,3,4,5,6\}$ и $C=\{3,4,5,6,7\}$. Определи ги множествата:

а) $A\cup B$, $A\cup C$; **б)** $A\cap B$, $A\cap C$; **в)** $A\setminus B$, $A\setminus C$, $B\setminus A$.

Решение. а) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

б) $A\cap B=\{2,3,4,5\}$, $A\cap C=\{3,4,5\}$.

в) $A\setminus B=\{1\}$, $A\setminus C=\{1,2\}$, $B\setminus A=\{6\}$. ●

0.2. Определи ги сите подмножества од множеството $\{a,b,c,d\}$.

Решение. $\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$ $\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}$. ●

0.3. Определи ги множествата: $A\cap\varnothing$, $A\setminus\varnothing$, $\varnothing\setminus A$, $A\cup(A\cap B)$.

Решение. $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\setminus\varnothing=A$, $\varnothing\setminus A=\varnothing$. Заради $A\cap B\subseteq A$ имаме $A\cup(A\cap B)=A$. ●

0.4. Ако $A\subseteq B$ и $B\subseteq C$, определи ги множествата $(A\cap B)\cap C$ и $(A\cap B)\cup C$.

Решение. Од $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$ следува дека $A \cap B = A$, $A \cap C = A$ и $A \cup C = C$. Така, имаме $(A \cap B) \cap C = A \cap C = A$ и $(A \cap B) \cup C = A \cup C = C$. ●

0.5. Нека A, B и C се дадени множества. Докажи дека:

а) $A \subseteq B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$; **б)** $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$;

в) $A, B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$; **г)** $A \subseteq B, A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$.

Решение. а) Нека $x \in A$. Од $A \subseteq B$ следува $x \in B$, а од $B \subset C$ следува $x \in C$. Од условот $B \subset C$ следува дека постои барем еден елемент $x \in C$ таков што $x \notin B$, а од $A \subseteq B$, следува дека $x \notin A$. Значи, $A \subset C$.

б) Нека $A \subseteq B$ и нека $x \in A$. Тогаш $x \in B$, па $x \in A \cap B$, т.е. $A \subseteq A \cap B$. Бидејќи секогаш важи $A \cap B \subseteq A$, добиваме $A \cap B = A$. Ако пак, $A \cap B = A$ и $y \in A$, ќе следува $y \in A \cap B$, т.е. $y \in B$, од каде што $A \subseteq B$.

Аналогно се докажува дека $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

в) Нека $x \in A \cup B$, тогаш $x \in A$ или $x \in B$, па од $A, B \subseteq C$ следува $x \in C$, т.е. $A \cup B \subseteq C$.

г) Аналогно како **в)**. ●

0.6. Докажи ги равенствата:

а) $A \Delta A = \varnothing$; **б)** $A \Delta \varnothing = A$; **в)** $A \Delta B = B \Delta A$.

Решение. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

а) $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$;

б) $A \Delta \varnothing = (A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A) = A \cup \varnothing = A$;

в) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$. ●

0.7. Определи го партитивното множество $\mathcal{P}(A)$, ако

а) $A = \{a, b, c\}$; **б)** $A = \{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing\}\}$; **в)** $A = \{c, \{a, d\}\}$.

Решение. $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

а) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$;

б) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{a\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\{a\}, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing\}\}\}$;

в) $\mathcal{P}(A)=\{\varnothing,\{c\},\{\{a,d\}\},\{c,\{a,d\}\}\}$. ●

0.8. Дадени се множествата: $A=\{a,c,e\}$, $B=\{1,2\}$. Најди:

а) $A\times B$; **б)** $A\times A$, $B\times B$; **в)** Δ_A, Δ_B ; **г)** $(A\times A)\cap A$.

Решение. $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,b\in B\}$.

а) $A\times B=\{(a,1),(a,2),(c,1),(c,2),(e,1),(e,2)\}$;

б) $A\times A=\{(a,a),(a,c),(a,e),(c,a),(c,c),(c,e),(e,a),(e,c),(e,e)\}$;

$B\times B=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

в) $\Delta_A=\{(a,a),(c,c),(e,e)\}$, $\Delta_B=\{(1,1),(2,2)\}$.

г) $(A\times A)\cap A=\varnothing$. ●

0.9. Определи ги множествата A и B ако $A\times B=\{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\alpha),(b,\beta),(c,\alpha),(c,\beta)\}$.

Решение. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{\alpha,\beta\}$. ●

0.10. Ако $A\subseteq B$ и $C\subseteq D$, докажи дека тогаш важи $A\times C\subseteq B\times D$.

Решение. Нека $(x,y)\in A\times C$. Тогаш $x\in A$ и $y\in C$. Следува $x\in B$ и $y\in D$ т.е. $(x,y)\in B\times D$. ●

0.11. Провери дали се точни равенствата:

а) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$;

б) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$;

в) $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$.

Решение. а) Не. На пример, ако $A=B$ и $C\neq\varnothing$ тогаш левата страна од равенството станува A , а десната страна $A\setminus C$.

б) Да. $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)\Leftrightarrow(x,y)\in A\times B$ и $(x,y)\in C\times D\Leftrightarrow$

$(x\in A,y\in B)$ и $(x\in C,y\in D)\Leftrightarrow(x\in A$ и $x\in C)$ и $(y\in B$ и $y\in D)\Leftrightarrow$

$x\in A\cap C$ и $y\in B\cap D\Leftrightarrow(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$.

в) Не. Важи само инклузијата $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$. ●

0.12. Нека се дадени множествата $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $A=\{a,b,c,d\}$ и $B=\{a,c,e,g\}$. Најди ги следните множества:

а) A^c; **б)** B^c; **в)** $A^c \cup B^c$; **г)** $A^c \cap B^c$;

д) $A^c \setminus B^c$; **ѓ)** $A \setminus B^c$; **е)** $(A \cup B)^c$; **ж)** $(A \cap B)^c$.

Решение. **а)** $A^c = \{e,f,g,h\}$; **б)** $B^c = \{b,d,f,h\}$;

в) $A^c \cup B^c = \{b,d,e,f,g,h\}$; **г)** $A^c \cap B^c = \{f,h\}$;

д) $A^c \setminus B^c = \{e,g\}$; **ѓ)** $A \setminus B^c = \{a,c\}$;

е) $(A \cap B)^c = \{b,d,e,f,g,h\}$; **ж)** $(A \cup B)^c = \{f,h\}$. ●

0.13. Нека $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $G \subseteq A \times B$ е дефинирано со:

а) $G = \{(1,a),(2,a),(3,d)\}$; **б)** $G = \{(1,c),(3,c)\}$; **в)** $G = \{(1,c),(1,a),(2,b),(3,a)\}$.

Дали со G е дефиниран графикон на некое пресликување од A во B?

Решение. $f: A \to B$ е пресликување ако $\forall x \in A, \exists! y \in B$ такво што $y = f(x)$.

$G = \{(x,f(x)) \,|\, x \in A, f(x) \in B\}$ е графикон на пресликувањето $f: A \to B$.

а) Да. $f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & d \end{pmatrix}$ т.е. $f(1) = a;\ f(2) = a$ и $f(3) = d$.

б) Не. $2 \in A$, но не постои $y \in B$ такво што $y = f(2)$.

в) Не. На елементот $1 \in A$ му се придружени два елементи, $a,c \in B$ така што $f(1) = a$ и $f(1) = c$. ●

0.14. Ако $f: E \to F$, $A \subset E,\ B \subset E$, докажи дека важи: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Решение. Нека $y \in f(A \cup B)$, тогаш $y = f(x),$ за некое $x \in A \cup B$ т.е. $y = f(x),\ x \in A$ или $x \in B$. Значи, $y \in f(A)$ или $y \in f(B)$, следува дека $y \in f(A) \cup f(B)$. Докажавме дека важи

$$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B). \tag{1}$$

За обратната инклузија, нека $y \in f(A) \cup f(B)$. Тогаш $y \in f(A)$ или $y \in f(B)$, т.е. $y = f(x),\ x \in A$ или $y = f(z),\ z \in B$. Ако $y = f(x),\ x \in A$, тогаш $y = f(x),\ x \in A \cup B$, т.е. $y \in f(A \cup B)$. Ако $y = f(z),\ z \in B$, тогаш $y = f(z),\ z \in A \cup B$, т.е. $y \in f(A \cup B)$. Значи, во секој случај

$$f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B). \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува равенството $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. ●

0.15. Ако $f:E\to F$, $A\subset E,\ B\subset E$, докажи дека важи:

а) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$; **б)** $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$.

Најди примери кога не важат равенства.

Решение. а) Нека $y\in f(A\cap B)$, тогаш $y=f(x)$, за некое $x\in A\cap B$ т.е. $y=f(x)$, $x\in A$ и $x\in B$. Значи, $y\in f(A)$ и $y\in f(B)$, од што следува дека $y\in f(A)\cap f(B)$. Докажавме: $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

Пример: Нека $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $F=\{y_1,y_2,y_3\}$, $f:E\to F$ е зададено со: $f(x_i)=y_i$, $i=1,2,3$ и $f(x_4)=y_1$. Нека $A=\{x_1,x_2\}\subset E$ и $B=\{x_2,x_4\}\subset E$. Тогаш имаме:
$f(A)=\{y_1,y_2\}$, $f(B)=\{y_1,y_2\}$ и $f(A\cap B)=\{y_2\}$. Значи, $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$, но $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$.

б) Нека $y\in f(A)\setminus f(B)$, т.е. $y\in f(A)$ и $y\notin f(B)$. Следува $y=f(x)$, за некое $x\in A$ и $y\neq f(t)$, за секој $t\in B$. Од овде $y=f(x)$, $x\in A$ и $x\notin B$, од што следува дека $y=f(x)$, $x\in A\setminus B$, т.е. $y\in f(A\setminus B)$. Докажавме: $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$.

Пример: Нека $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $F=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$, $f:E\to F$ е зададено со: $f(x_i)=y_i$, $i=1,2,3,4$ и $f(x_5)=y_3$. Нека $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\subset E$ и $B=\{x_4,x_5\}\subset E$. Тогаш имаме: $f(A)=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$, $f(B)=\{y_3,y_4\}$ и $f(A\setminus B)=\{y_1,y_2,y_3\}$.
Значи, $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$, т.е. $f(A)\setminus f(B)\neq f(A\setminus B)$. ●

0.16. Ако $f:E\to F$, $A\subset F,\ B\subset F$, докажи дека важи:

а) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$; **б)** $f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$;

в) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

Решение. $f^{-1}(A)=\{x\,|\,f(x)\in A\}$.

а) $x\in f^{-1}(A\cap B)\ \Leftrightarrow f(x)\in A\cap B\ \Leftrightarrow f(x)\in A$ и $f(x)\in B\ \Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)$ и $x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow$ $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$. Докажавме: $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

б) $x\in f^{-1}(A\setminus B)\ \Leftrightarrow f(x)\in A\setminus B\ \Leftrightarrow f(x)\in A$ и $f(x)\notin B\ \Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)$ и $x\notin f^{-1}(B)\Leftrightarrow$ $x\in f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$. Докажавме: $f(A\setminus B)=f(A)\setminus f(B)$.

в) $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A$ или $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ или $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Докажавме: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. ●

0.17. Нека $f: E \to F$ и $A, B \subset F$. Докажи дека од $A \subseteq B$ следува $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

Решение. Нека $A \subseteq B$ и $x \in f^{-1}(A)$. Тогаш $f(x) \in A \subseteq B$, па значи $x \in f^{-1}(B)$, што требаше да се докаже. ●

0.18. Докажи дека ако $f: E \to F$, $A \subset E$, $B \subset F$, тогаш важи:

а) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$,

б) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$,

в) $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$;

г) $f(A) \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$.

Решение. а) Нека $x \in A$. Тогаш $f(x) \in f(A)$ и $f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(f(A))$.

Значи $x \in f^{-1}(f(A))$. Докажавме $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

б) Нека $y \in f(f^{-1}(B))$. Тогаш постои $x \in f^{-1}(B)$ таков што $y = f(x)$. Од $x \in f^{-1}(B)$ следува дека $y = f(x) \in B$. Ја докажавме инклузијата: $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Пример: Нека $E = \{x_1, x_2, x_3\}$, $F = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $f: E \to F$ е зададено со: $f(x_i) = y_i$, $i = 1,2,3$. Нека $B = \{y_3, y_4\} \subset F$. Тогаш имаме: $f^{-1}(B) = \{x_3\}$ и $f(f^{-1}(B)) = \{y_3\} \neq B$. Значи, во општ случај, $f(f^{-1}(B)) \neq B$.

в) Бидејќи $f(A \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cap f(f^{-1}(B))$ (види ја задачата **0.15.** под **а)**) и $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ (задача **0.18.** под **б)**), имаме: $f(A \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cap B$. За обратната инклузија, нека $y \in f(A) \cap B$. Значи постои $x \in A$ така што $y = f(x)$ и $y \in B$. Од $y = f(x) \in B$ следува дека $x \in f^{-1}(B)$. Уште и $x \in A$. Според тоа од $x \in A \cap f^{-1}(B)$ и $y = f(x)$ следува $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$.

г) $f(A) \cap B = \varnothing \Leftrightarrow f(A \cap f^{-1}(B)) = \varnothing \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$. ●

0.19. Нека $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $f: \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & d & a & e & c \end{pmatrix}$. Дали f е биекција? Во потврден случај, најди го f^{-1}.

Решение. $f(A)=\{b,d,a,e,c\}=A$, значи f е сурјекција.

$$f^{-1}(\{b\})=\{a\}\,;\,f^{-1}(\{d\})=\{b\}\,;\,f^{-1}(\{a\})=\{c\}\,;\,f^{-1}(\{e\})=\{d\}\,;\,f^{-1}(\{c\})=\{e\}\,.$$

За секој $b\in B$, множеството $f^{-1}(\{b\})$ има најмногу еден елемент, па f е инјекција. Така, f е биекција. Инверзното пресликување $f^{-1}:A\to A$ е дефинирано со:

$$f^{-1}:\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}. \bullet$$

0.20. Ако $f:X\to Y$, објасни што означува секој од изразите:

а) $f(X)=Y$; **б)** $f(X)\subset Y$; **в)** $(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\ f(x)=y$.

Одговор: а) Секој елемент од Y е слика на некој елемент од X, т.е. f е сурјекција.

б) $f(X)$ е вистинско подмножество од Y, т.е. f не е сурјекција.

в) $Y\subseteq f(X)$, што заедно со $f(X)\subseteq Y$ значи $Y=f(X)$, т.е. f е сурјекција. ●

0.21. Нека $A_n, n\in\mathbb{N}$ се множества. Множеството $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ е определено со $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow x\in A_n, \forall n\in\mathbb{N}$, а множеството $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ со $x\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}, x\in A_n$ (уште се означува и $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$). Претпоставуваме дека $A_n\subseteq M$ за секој $n\in\mathbb{N}$ и комплементот на множествата го бараме во однос на M.

Докажи дека:

а) за секој $n_0\in\mathbb{N}$ важи $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\subseteq A_{n_0}\subseteq\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$;

б) $\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c$;

в) $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c$.

(равенствата **б)** и **в)** се познати како закони на Де Морган)

Решение. а) Нека $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Тогаш $x\in A_n$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Специјално за $n_0\in\mathbb{N}$ важи $x\in A_{n_0}$. Со тоа докажавме дека $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\subseteq A_{n_0}$. Сега нека $y\in A_{n_0}$. Според тоа постои природен број n (тој е n_0) така што $y\in A_n$. Од дефиницијата на $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ следува дека $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, па $A_{n_0} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

б) Нека $x \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$. Тогаш $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (односно $x \in M \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$), па постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $x \notin A_{n_0}$. Оттука $x \in (A_{n_0})^c \overset{\text{а)}}{\subseteq} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c$.

Обратно. Нека $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c$. Тогаш постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $x \in \left(A_{n_0}\right)^c$. Значи $x \notin A_{n_0}$, па $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, односно $x \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$.

в) $x \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow x \notin A_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in (A_n)^c, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c$. ●

0.22. Пресметај $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ и $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ каде што

а) $A_n = \{1,2,\dots,n\}$; **б)** $A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \le x < n\}$;

в) $A_n = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{n-1}{n} \le x < n\right\}$; **г)** $A_n = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 - \frac{1}{n} \le x \le 2 + \frac{1}{n}\right\}$.

Решение. а) Јасно е дека за секој природен број n важи $A_n \subseteq \mathbb{N}$, па и $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{N}$. Ако $k \in \mathbb{N}$, тогаш $k \in \{1,2,\dots,k\} = A_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Според тоа $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$.

Бидејќи важи $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ добиваме $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = \{1\}$.

б) Нека $i, j \in \mathbb{N}$ и $i < j$. Ако $x \in A_i$ тогаш $0 \le x < i$, односно $0 \le x < i < j$, па $x \in A_j$. Значи $A_i \subseteq A_j$ за $i < j$. Според тоа важи $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, па $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$

Нека $x \in \mathbb{R}$ и $x \ge 0$. Тогаш $0 \le x < x + 1 < [x] + 2$, па $x \in A_{[x]+2} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (со $[x]$ е означен најголемиот цел број кој не е поголем од x). Значи $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Обратната инклузија е очигледна. Според тоа $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \ge 0\}$.

в) Нека $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $\frac{n-1}{n} \le x < n$, па за $n = 1$ ќе добиеме $0 \le x < 1$. Од друга страна за секој природен број n важи и $\frac{n-1}{n} \le x$. Решавајќи ја оваа неравенка по n добиваме $n \le \frac{1}{1-x}$, и притоа последново неравенство важи за секој

$n \in \mathbb{N}$. Но тоа не е можно. На пример ако земеме $n = \left[\frac{1}{1-x}\right] + 3$ неравенството нема да важи. Според тоа $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$.

Нека y е позитивен реален број. Ако $y \geq 1$, тогаш постои природен број n_0 така што $y < n_0$. Од друга страна $\frac{n_0 - 1}{n_0} < 1 \leq y$. Значи $\frac{n_0 - 1}{n_0} \leq y < n_0$, па $y \in A_{n_0}$. Ако, пак, $y < 1$, тогаш $y \in A_1$. Значи во секој случај постои $n \in \mathbb{N}$, така што $y \in A_n$. Според тоа $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Обратната инклузија е очигледна.

Според тоа $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

г) Нека $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $2 - \frac{1}{n} \leq x \leq 2 + \frac{1}{n}$. Очигледно е дека за $x = 2$ е исполнето $2 - \frac{1}{n} \leq n \leq 2 + \frac{1}{n}$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Ќе докажеме дека за ниту еден друг реален број x не е исполнето $2 - \frac{1}{n} \leq n \leq 2 + \frac{1}{n}$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Да претпоставиме дека $x > 2$. Тогаш од неравенството $x \leq 2 + \frac{1}{n}$ добиваме $x - 2 \leq \frac{1}{n}$, односно $n \leq \frac{1}{x-2}$ за секој $n \in \mathbb{N}$, што не е можно. На сличен начин докажуваме дека не може $x < 2$ (притоа го користиме неравенството $2 - \frac{1}{n} \leq x$). Според тоа $x = 2$. Значи $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \{2\}$. Јасно, $2 \in A_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Според тоа $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{2\}$.

Бидејќи $2 + \frac{1}{n+1} < 2 + \frac{1}{n}$ и $2 - \frac{1}{n} < 2 - \frac{1}{n+1}$ добиваме дека

$$\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 - \frac{1}{n+1} \leq x \leq 2 + \frac{1}{n+1}\right\} \subseteq \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 - \frac{1}{n} \leq x \leq 2 + \frac{1}{n}\right\}$$

односно $\ldots \subseteq A_{n+1} \subseteq A_n \subseteq \ldots \subseteq A_2 \subseteq A_1$ за секој $n \in \mathbb{N}$, па $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$. ●

0.2. Релации. Подредувања

Дефиниција. Нека A е множество. Секое подмножество ρ од Декартовиот производ $A\times A$ се вика **релација** во A.

Наместо $(x,y)\in\rho$ користиме ознака $x\rho y$ и читаме „x е во релација ρ со y "

За релацијата ρ велиме дека е:

- Рефлексивна ако $\forall x\in A,\ x\rho x$
- Симетрична ако $x\rho y \Rightarrow y\rho x$
- Транзитивна ако $x\rho y$ и $y\rho z \Rightarrow x\rho z$
- Антисиметрична ако $x\rho y$ и $y\rho x \Rightarrow x=y$.

Велиме дека релацијата ρ е релација за **еквивалентност** ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Подредување на A е секоја релација што е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. Ако уште важи: $\forall x,y: x\rho y$ или $y\rho x$, тогаш подредувањето ρ велиме дека е **потполно** подредување.

Ако во едно множество A е зададено подредување ρ, тогаш за A велиме дека е **подредено множество**. Притоа, наместо $x\rho y$, ја користиме ознаката $x\leq y$.

Подредувањето $\leq$ на A е **линеарно** подредување ако за секои $a,b\in A$ е исполнет еден од следните два ускова: $a\leq b$ или $b\leq a$.

Нека $(A,\leq)$ е линеарно подредено множество и $B\subseteq A$. **Мајорант** за B е елемент a таков што за секој $b\in B$, $b\leq a$. Најмалиот мајорант за B се нарекува **супремум** на B и се означува со $\sup B$. **Минорант** за B е елемент c таков што за секој $b\in B$, $c\leq b$. Најголемиот минорант за B се нарекува **инфимум** на B и се означува со $\inf B$.

Задачи:

0.23. Испитај ги особините на релациите зададени во множеството $A=\{a,b,c,d\}$:

а) $\rho=\{(a,b),(b,c),(b.a)\}$; **б)** $\rho=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,c),(a,d),(b,d)\}$;

в) $\rho=\{(a,b),(b.a)\}$; **г)** $\rho=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$.

Решение. Релацијата ρ е:

- рефлексивна ако $\forall x \in A,\ (x,x) \in \rho$;
- нерефлексивна, ако $\forall x \in A,\ (x,x) \notin \rho$;
- симетрична ако од $(x,y) \in \rho$ следува $(y,x) \in \rho$;
- антисиметрична ако од $(x,y) \in \rho$ и $(y,x) \in \rho$ следува $x = y$;
- транзитивна ако од $(x,y) \in \rho$ и $(y,z) \in \rho$ следува $(x,z) \in \rho$;

а) Релацијата не е рефлексивна, бидејќи, на пример, $(a,a) \notin \rho$, т.е. $\Delta = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\} \not\subseteq \rho$; не е симетрична, бидејќи $(c,b) \notin \rho$; не е антисиметрична, бидејќи од $(a,b) \in \rho$ и $(b,a) \in \rho$ не следува $a = b$; и не е транзитивна, бидејќи $(a,c) \notin \rho$. Релацијата е нерефлексивна;

б) Релацијата не е рефлексивна, бидејќи, на пример, $(a,a) \in \rho$, т.е. $\Delta = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\} \not\subseteq \rho$; не е симетрична, бидејќи $(b,a),(c,b),(d,c),(c,a),(d,a),(d,b) \notin \rho$, е антисиметрична, е транзитивна. Релацијата е нерефлексивна;

в) Релацијата не е рефлексивна, е симетрична, не е антисиметрична, не е транзитивна, е нерефлексивна;

г) Релацијата е рефлексивна, е симетрична, не е антисиметрична, е транзитивна. ●

0.24. Дали релациите зададени во множеството $A = \{k,l,m\}$ се релации за еквиваленција?

а) $\rho = \{(k,k),(l,l),(m,m)\}$;

б) $\rho = \{(k,k),(k,l),(l,k),(l,l),(m,m)\}$;

в) $\rho = \{(l,l),(k,l),(l,k),(k,m),(m,k),(l,m)\}$;

г) $\rho = \{(k,k),(k,l),(l,k),(l,l),(k,m),(m,k),(m,l),(l,m),(m,m)\}$.

Решение. а) Да. Релацијата е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

б) Да. Релацијата е рефлексивна, симетрична и транзитивна .

в) Не. Релацијата не е рефлексивна, бидејќи $(k,k) \notin \rho$. Не е симетрична, бидејќи $(m,l) \notin A$ и не е транзитивна, бидејќи $(k,k) \notin \rho$.

г) Да. ●

0.25. Дали релациите зададени во множеството $A = \{p,q,r,s\}$ се релации за подредување?

а) $\rho_1 = \{(p,p),(q,q),(r,r),(s,s)\}$; **б)** $\rho_2 = \{(p,p),(q,r),(s,s),(r,r),(r,p),(q,p),(q,q)\}$;

в) $\rho_3=\{(p,p),(q,r),(r,r),(r,p),(q,p)\}$; **г)** $\rho_4=\{(p,p),(r,s),(s,s),(r,r),(p,q),(q,q)\}$.

Решение. а) Да. Релацијата е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна;

б) Да;

в) Не. Релацијата не е рефлексивна, бидејќи $(q,q),(s,s)\notin\rho$;

г) Да. ●

0.26. Во $\mathbb{N}$ се дефинирани следните релации:

а) $a\alpha b\Leftrightarrow a+b$ е парен број;

б) $a\beta b\Leftrightarrow ab=n^2$ за некој природен број n;

в) $a\gamma b\Leftrightarrow a$ и b се потполни квадрати;

г) $a\delta b\Leftrightarrow |a-b|=7k, k\in\mathbb{N}_0$;

д) $a\rho b\Leftrightarrow |a-b|\leq 3$.

Кои од горните релации се релации за еквивалентност?

Решение. а) Да. Релацијата е рефлексивна, бидејќи за секој $a\in\mathbb{N}$, $a+a=2a$ е парен број. Нека $a\alpha b$, т.е. $a+b$ е парен број. Тогаш и $b+a$ е парен број, па $b\alpha a$. Значи, релацијата е симетрична. Нека $a\alpha b$ и $b\alpha c$, т.е. $a+b=2k_1$ и $b+c=2k_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{N}$. Тогаш и $a+c=a+b+b+c-2b=2k_1+2k_2-2b=2(k_1+k_2-b)$ е парен број, па $a\alpha c$. Значи, релацијата е транзитивна.

б) Да. За секој природен број a, $a\beta a\Leftrightarrow aa=a^2$, па релацијата е рефлексивна. Ако $ab=n^2$, тогаш и $ba=n^2$, па релацијата е симетрична. Релацијата е транзитивна: нека $a\beta b$ и $b\beta c$ $\Leftrightarrow ab=n_1^2$ и $bc=n_2^2$ за некои $n_1,n_2\in\mathbb{N}$, тогаш $ac=\frac{n_1^2n_2^2}{b^2}=\left(\frac{n_1n_2}{b}\right)^2$. Остана да докажеме дека $\frac{n_1n_2}{b}\in\mathbb{N}$.

Ќе докажеме дека од $\frac{k^2}{s^2}\in\mathbb{N}$, следува дека и $\frac{k}{s}\in\mathbb{N}$ за $k,s\in\mathbb{N}$. Нека $p_1,\ldots,p_t$ се сите прости делители на k. Тогаш $k^2=p_1^{2\alpha_1}\ldots p_t^{2\alpha_t}$, каде $\alpha_i\in\mathbb{N}, i=1,\ldots,t$. Бидејќи $s^2\,|\,k^2$ следува дека $s^2=p_{i_1}^{2\beta_{i_1}}\ldots p_{i_r}^{2\beta_{i_r}}$, каде $\beta_{i_1}\leq\alpha_{i_1},\ldots,\beta_{i_r}\leq\alpha_{i_r}$ и

$$\{\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}\}\subseteq\{\alpha_1,\ldots,\alpha_t\} \text{ и } \{p_{i_1},\ldots,p_{i_r}\}\subseteq\{p_1,\ldots,p_t\}.$$

Но тогаш $s=p_{i_1}^{\beta_{i_1}}\ldots p_{i_p}^{\beta_{i_r}}$ и заради $\beta_{i_1}\leq\alpha_{i_1},\ldots,\beta_{i_r}\leq\alpha_{i_r}$ следува дека $s\,|\,k$, односно

$\frac{k}{s}\in\mathbb{N}$. Според тоа добивме $\frac{(n_1n_2)^2}{b^2}\in\mathbb{N}$, па ќе следува дека и $\frac{n_1n_2}{b}\in\mathbb{N}$.

в) Не. Релацијата не е рефлексивна, бидејќи на пример 7 не е во релација со 7.

г) Да. $\forall a\in\mathbb{R},\ |a-a|=|0|=7\cdot 0\Rightarrow a\delta a$, значи релацијата е рефлексивна.

Ако $|a-b|=7k$, тогаш и $|b-a|=7k$, па релацијата е симетрична. Нека $a\delta b$ и $b\delta c$, т.е. $|a-b|=7k_1$ и $|b-c|=7k_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$ $a-b=\pm 7k_1$ и $b-c=\pm 7k_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$ $a-c=a-b+b-c=\pm 7(k_1+k_2)=\pm 7k$ $\Rightarrow |a-c|=7k$, $k\in\mathbb{N}_0$ $\Rightarrow a\delta c$, па релацијата е транзитивна.

д) Не. Релацијата е: рефлексивна, бидејќи $\forall a\in\mathbb{N}$, $|a-a|=|0|=0<3$, симетрична, бидејќи од $|a-b|\le 3$ следува $|b-a|\le 3$, но не е транзитивна. Навистина, $1\rho 3$ и $3\rho 5$, но 1 не е во релација со 5, бидејќи $|1-5|=4>3$. ●

0.27. Класа на еквиваленција на елементот x во однос на еквиваленцијата α е множеството $x^{\alpha}=\{y\,|\,x\alpha y\}$. Ако α е еквиваленција на M, докажи дека:

а) $\forall x\in M$, $x^{\alpha}\neq\varnothing$ и $x\in x^{\alpha}$;

б) $(\forall x,y\in M)$ $x^{\alpha}\cap y^{\alpha}\neq\varnothing\Rightarrow x^{\alpha}=y^{\alpha}$;

в) $\bigcup_{x\in M}x^{\alpha}=M$.

Решение. **а)** Бидејќи α е еквиваленција, таа е и рефлексивна. Според тоа за секој $x\in M$ важи $x\alpha x$, т.е. $x\in x^{\alpha}$. Значи $x^{\alpha}\neq\varnothing$;

б) Бидејќи $x^{\alpha}\cap y^{\alpha}\neq\varnothing$ следува дека постои $z\in x^{\alpha}\cap y^{\alpha}$. Тогаш $x\alpha z$ и $y\alpha z$. Релацијата е симетрична и транзитивна, па $x\alpha y$. Сега нека $t\in x^{\alpha}$. Тогаш $x\alpha t$. Но и $x\alpha y$, па заради симетричноста и транзитивноста на α добиваме $t\alpha y$, $x^{\alpha}\subseteq y^{\alpha}$. На сличен начин $y^{\alpha}\subseteq x^{\alpha}$. Според тоа $x^{\alpha}=y^{\alpha}$;

в) За секој $x\in M$ важи $x^{\alpha}\subseteq M$, па и $\bigcup_{x\in M}x^{\alpha}\subseteq M$;

Обратно. Нека $y\in M$. Тогаш, според **а)**, $y\in y^{\alpha}\subseteq\bigcup_{x\in M}x^{\alpha}$, па $M\subseteq\bigcup_{x\in M}x^{\alpha}$.

Значи $\bigcup_{x\in M}x^{\alpha}=M$. ●

0.28. Најди ги класите на еквиваленциите во задачата **0.26.** под **а)** и **г)**.

Решение. **а)** Нека $n=2k$, $m=2s$ каде k и s се природни броеви. Тогаш $n+m=2(k+s)$ и $k+s$ е природен број. Според тоа секои два парни броеви се во релација. Ако $n=2n_1-1$, $m=2m_1-1$, тогаш $n+m=2(n_1+m_1-1)$, па и кои било два непарни броеви се во релација. За $n=2l$, $m=2t-1$ имаме $n+m=2(l+t)-1$. Според тоа ниту еден парен не е во релација со ниту еден непарен број. Значи имаме две класи на еквиваленција во однос на α и тие се $1^{\alpha}=\{2n-1\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ и $2^{\alpha}=\{2n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$. Класите на еквиваленција се дисјунктни и нивната унија е еднаква на $\mathbb{N}$.

г) Нека $n=7k+j$ и $m=7s+j$, каде $j\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ а s е природен број. Со други зборови n и m имаат ист остаток при делење со 7. Тогаш $|n-m|=7|k-s|$, па $n\delta m$. Значи кои секои два броја кои имаат ист остаток при делење со 7 се во релација. Нека, сега, $n=7k+i$ и $m=7s+j$, каде $i\neq j$ и $i,j\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Тогаш $|n-m|=|7(k-s)+i-j|$. Бројот на десната страна од последново равенство не е делив со 7 па во овој случај $n\not\delta m$. Според тоа класите на еквиваленција се $7^{\delta}=\{7k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$, $6^{\delta}=\{7k+6\,|\,k\in\mathbb{N}_0\}$, $5^{\delta}=\{7k+5\,|\,k\in\mathbb{N}_0\}$, $4^{\delta}=\{7k+4\,|\,k\in\mathbb{N}_0\}$, $3^{\delta}=\{7k+3\,|\,k\in\mathbb{N}_0\}$, $2^{\delta}=\{7k+2\,|\,k\in\mathbb{N}_0\}$ и $1^{\delta}=\{7k+1\,|\,k\in\mathbb{N}_0\}$. ●

0.29. Нека $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $f:M\to M$ пресликување. Дефинираме релација α на M со $x\alpha y\Leftrightarrow f(x)=f(y)$. Докажи дека α е еквиваленција на M. Ако $g:M\to M$ е дефинирано со
$$g:\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&1&1&2&4&5&1&3&4\end{pmatrix}.$$
Најди ги класите на еквиваленција во однос на α.

Решение. За секој $x\in M$ важи $f(x)=f(x)$, па $x\alpha x$. Значи α е рефлексивна. Нека $x\alpha y$. Следува $f(x)=f(y)$, па и $f(y)=f(x)$. Според тоа $y\alpha x$, па α е симетрична. Да претпоставиме дека $x\alpha y$ и $y\alpha z$. Тогаш $f(x)=f(y)$ и $f(y)=f(z)$. Оттука следува $f(x)=f(z)$, па $x\alpha z$. Значи α е транзитивна. Според тоа α е еквиваленција.

Бидејќи $g(1)=g(4)$ следува дека 1 и 4 се во иста класа на еквиваленција, т.е. $1^{\alpha}=\{1,4\}=4^{\alpha}$. Слично $g(2)=g(3)=g(7)$, па $2^{\alpha}=\{2,3,7\}=3^{\alpha}=7^{\alpha}$. На сличен начин ги определуваме и $5^{\alpha}=\{5,9\}=9^{\alpha}$, $6^{\alpha}=\{6\}$ и $8^{\alpha}=\{8\}$. ●

0.30. Во множеството $\mathbb{N}$ дефинирана е релација ρ со: $x\rho y\Leftrightarrow x|y$. Дали ρ е релација за подредување? Во случај на потврден одговор дали подредувањето е линеарно?

Решение. Рефлексивност: $\forall x\in\mathbb{N}$, $x|x\Rightarrow x\rho x$.

Антисиметричност: Нека $x\rho y$ и $y\rho x$. Тогаш, $y=xk_1$, $x=yk_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{N}$. Следува $x=yk_2=xk_1k_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{N}$. Значи, $k_1k_2=1$ за $k_1,k_2\in\mathbb{N}$, од каде што $k_1=k_2=1$. Така добивме дека $x=y$, што требаше да се докаже.

Транзитивност: Нека $x\rho y$ и $y\rho z$. Тогаш $y=xk_1$, $z=yk_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{N}$.

Следува $z=yk_2=xk_1k_2=xk$, $k=k_1k_2\in\mathbb{N}$, т.е. $x\rho z$.

Така, ρ е релација за подредување.

Подредувањето ρ е линеарно ако за секои $x,y\in M$ важи $x\rho y$ или $y\rho x$.

За нашево подредување имаме $2\nmid 3$ и $3\nmid 2$, па не е линеарно.

Подредувањето кое не е линеарно се нарекува делумно. ●

0.31. Нека M е непразно множество. Во $\mathcal{P}(M)$ дефинираме релација „$\leq$“ со $A\leq B\Leftrightarrow A\subseteq B$. Докажи дека „$\leq$“ е подредување.

Решение. За секое подмножество A од M важи $A\subseteq A$, па $A\leq A$. Значи релацијата е рефлексивна.

Да претпоставиме дека $A\leq B$ и $B\leq A$. Тогаш $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$, па следува $A=B$ и релацијата е антисиметрична.

Нека $A\leq B$ и $B\leq C$. Тогаш $A\subseteq B$ и $B\subseteq C$, па следува $A\subseteq C$, односно $A\leq C$.

Според тоа релацијата е транзитивна. ●

0.32. Нека M е непразно множество. Во $\mathcal{P}(M)$ дефинираме релација „$<$“ со $A<B\Leftrightarrow A\subset B$ (односно $A\subseteq B$ и $A\neq B$). Докажи дека „$<$“ е строго подредување.

Решение. Секоја нерефлексивна и транзитивна релација се нарекува строго подредување. Бидејќи за секое $A\in\mathcal{P}(M)$ важи $A\not\subset A$ следува $A\nless A$, па релацијата е антисиметрична. Транзитивноста се докажува слично како во задача **0.31.** ●

0.33. Нека „$\leq$“ е подредувањето од задача **0.31.** Ако M има барем два елементи, тогаш подредувањето е делумно. Докажи!

Решение. Нека $\{a,b\}\subseteq M$, каде $a\neq b$. Тогаш $\{a\}\nsubseteq\{b\}$ и $\{b\}\nsubseteq\{a\}$, па подредувањето е делумно. ●

I. Реални броеви

1.1 Дефиниција на множество реални броеви. Апсолутна вредност

Дефиниција. Под множество реални броеви подразбираме множество $\mathbf{R}$ во кое се дефинирани две операции: собирање "+" и множење "$\bullet$", и релација "$\leq$" (што ќе ја читаме "е помало или еднакво со") така што се исполнети следните својства:

(1) Својства на собирањето:

1.1. $(\forall x,y\in\mathbf{R})x+y=y+x$

1.2. $(\forall x,y,z\in\mathbf{R})(x+y)+z=x+(y+z)$

1.3. постои точно еден елемент $0\in\mathbf{R}$ таков Што $x+0=x,\forall x\in\mathbf{R}$

1.4. за секој елемент $x\in\mathbf{R}$ постои точно еден елемент $-x\in\mathbf{R}$,така Што $x+(-x)=0$.

(2) Својства на множењето:

2.1. $(\forall x,y\in\mathbf{R})x\bullet y=y\bullet x$

2.2. $(\forall x,y,z\in\mathbf{R})(x\bullet y)\bullet z=x\bullet(y\bullet z)$

2.3. постои точно еден елемент $1\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ таков Што $x\bullet 1=x,\forall x\in\mathbf{R}$

2.4. за секој елемент $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ постои точно еден елемент $x^{-1} \in \mathbf{R}$, така Што $x \bullet x^{-1} = 1$.

2.5. $(\forall x,y,z \in \mathbf{R})(x+y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$

(3) Својства на релацијата

3.1. $(\forall x \in \mathbf{R})\ x \leq x$

3.2. $(\forall x,y \in \mathbf{R})\ x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

3.3. $(\forall x,y,z \in \mathbf{R})\ x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

3.4. $(\forall x,y \in \mathbf{R})\ x \leq y$ или $y \leq x$

3.5. ако $x \leq y$ и z е произволен елемент во $\mathbf{R}$, тогаШ важи $x+z \leq y+z$

3.6. Ако $0 \leq x$ и $0 \leq y$, тогаш $0 \leq x \bullet y$

(4) ако A и B се непразни подмножества од $\mathbf{R}$, такви што $x \leq y$, $\forall x \in A$ и $\forall y \in B$, тогаш постои елемент $z \in \mathbf{R}$ таков Што $x \leq z \leq y$ за сите $x \in A, y \in B$.

За бројот x велиме дека е позитивен ако $x > 0$, ненегативен ако $x \geq 0$, негативен ако $x < 0$ и непозитивен ако $x \leq 0$. Исто така воведуваме поим за апсолутна вредност на реален број со: $|x| = \begin{cases} x & \text{ако } x \geq 0 \\ -x & \text{ако } x < 0 \end{cases}$.

Задачи:

1.1. Докажи ги следните неравенства:

а) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, a и b се ненегативни реални броеви.

б) $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$, a, b, c и d се ненегативни реални броеви.

в) $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$, a, b и c се ненегативни реални броеви.

г) $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2$, $a,b,c \in \mathbb{R}$.

д) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ако a и b се реални броеви со ист знак.

ѓ) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$, a , b и c се позитивни реални броеви.

Решение. а) Од $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$ следува $(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\geq 0$, односно $|a|-2\sqrt{a}\sqrt{b}+|b|\geq 0$. Бидејќи a и b се ненегативни реални броеви, имаме $|a|=a$, $|b|=b$ и $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. Според тоа $a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$ односно $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$.

б) $\sqrt[4]{abcd}=\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}\leq\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)}\leq\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}=\frac{a+b+c+d}{4}$.

в) Од $\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}\leq\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4}$ следува $4\sqrt[3]{abc}\leq a+b+c+\sqrt[3]{abc}$ од каде што произлегува неравенството.

г) Од $(a-b)^2\geq 0$, $(a-c)^2\geq 0$, $(b-c)^2\geq 0$ следува $a^2+b^2\geq 2ab$, $a^2+c^2\geq 2ac$, $b^2+c^2\geq 2bc$. Ако ги собереме последните неравенства, добиваме

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc .$$

д) Ако $a,b\in\mathbb{R}$ се со ист знак, тогаш $\frac{a}{b},\frac{b}{a}>0$. Од $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\geq 0$ следува $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

ѓ) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1=$

$$=3+\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{b^2+c^2}{bc}\geq 3+\frac{2ab}{ab}+\frac{2ac}{ac}+\frac{2bc}{bc}=9 .\bullet$$

1.2. Во множеството реални броеви реши ги равенките:

а) $|x-5|=2$; **б)** $2x+|x|=3$;

в) $|2x+1|+|x+3|=|x+6|$; **г)** $|x|-|x+2|=0$.

Решение. а) $|x-5|=\begin{cases}x-5, & x\in[5,\infty)\\ 5-x, & x\in(-\infty,5)\end{cases}$. (I) Ако $x\in(-\infty,5)$, тогаш дадената равенка има облик $5-x=2$. Решение на равенката е $x=3$ и тоа припаѓа на $(-\infty,5)$. (II) Ако $x\in[5,\infty)$, тогаш дадената равенка има облик $x-5=2$. Решение на равенката е $x=7$ и тоа припаѓа на $(5,\infty)$. Конечно, решенија на равенката се $x=3$ и $x=7$.

б) $|x|=\begin{cases} x, & x\in[0,\infty) \\ -x, & x\in(-\infty,0) \end{cases}$. (I) Ако $x\in(-\infty,0)$, тогаш дадената равенка има облик $2x-x=3$, односно $x=3$. Равенката нема решение во разгледуваниот интервал. (II) Ако $x\in[0,\infty)$, тогаш дадената равенка има облик $2x+x=3$. Решение на равенката во дадениот интервал е $x=1$. Конечно, решение на равенката е $x=1$.

в) Заради $|2x+1|=\begin{cases} 2x+1, & x\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right) \\ -2x-1, & x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$, $|x+3|=\begin{cases} x+3, & x\in[-3,\infty) \\ -x-3, & x\in(-\infty,-3) \end{cases}$ и

$|x+6|=\begin{cases} x+6, & x\in[-6,\infty) \\ -x-6, & x\in(-\infty,-6) \end{cases}$ равенката ќе ја разгледуваме на интервалите $(-\infty,-6)$, $[-6,3)$, $\left[-3,-\frac{1}{2}\right)$ и $\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$. (I) Ако $x\in(-\infty,-6)$, тогаш дадената равенка има облик $-2x-1-x-3=-x-6$, односно $x=1$. Равенката нема решение во разгледуваниот интервал. (II) Ако $x\in[-6,-3)$, тогаш дадената равенка има облик $-2x-1-x-3=x+6$, односно $x=-\frac{5}{2}$. Равенката нема решение во разгледуваниот интервал. (III) Ако $x\in\left[-3,-\frac{1}{2}\right)$, тогаш дадената равенка е еквивалентна со $-2x-1+x+3=x+6$, односно $x=-2$. Решение на равенката е $x=-2$. (IV) Ако $x\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$, тогаш дадената равенка има облик $2x+1+x+3=x+6$, односно $x=1$. Решение на равенката е $x=1$. Конечно, решенија на равенката се $x=-2$ и $x=1$.

г) $|x|=\begin{cases} x, & x\in[0,\infty) \\ -x, & x\in(-\infty,0) \end{cases}$; $|x+2|=\begin{cases} x+2, & x\in[-2,\infty) \\ -x-2, & x\in(-\infty,-2) \end{cases}$.

(I) Ако $x\in(-\infty,-2)$, тогаш дадената равенка има облик $-x+x+2=0$, а таа нема решение. (II) Ако $x\in[-2,0)$, тогаш дадената равенка има облик

$-x-x-2=0$, односно $x=-1$. Решение на равенката е $x=-1$. (III) Ако $x\in[0,\propto)$ тогаш дадената равенка има облик $x-x-2=0$, а таа нема решение. Конечно, решение на равенката е $x=-1$. ●

1.3. Реши ги следните равенки:

а) $|5x+6|=1$; **б)** $|3x+2|-|x-2|=10$;

в) $|x|-|x-1|+3|x-2|-2|x-3|=x+1$.

Решенија: а) За $5x+6\geq 0$, т.е. за $x\geq -\frac{6}{5}$, дадената равенка може да се напише како $5x+6=1$, чие решение е $x=-1$. За $x<-\frac{6}{5}$, дадената равенка може да се напише како $-5x-6=1$, чие решение е $x=-\frac{7}{5}$.

Решенија на дадената равенка се $x=-1$ и $x=-\frac{7}{5}$.

б) За $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$, важи $3x+2<0$ и $x-2<0$, па равенката може да се напише како: $-(3x+2)+(x-2)=10$, од каде $x=-7$. За $x\in\left[-\frac{2}{3},2\right)$, имаме $(3x+2)+(x-2)=10$, од каде $x=\frac{5}{2}$, но бидејḱи $\frac{5}{2}\notin\left(-\frac{2}{3},2\right)$, не е решение на равенката. За $x\in[2,\infty)$, имаме $(3x+2)-(x-2)=10$, од каде $x=3$.
Решенија на дадената равенка се $x=-7$ и $x=3$.

в) За $x\in(-\infty,0)$, имаме $-x+x-1-3(x-2)+2(x-3)=x+1$, па равенката може да се напише како: $-x-1=x+1$, од каде $x=-1$. За $x\in[0,1)$, имаме $x+x-1-3(x-2)+2(x-3)=x+1$, $x-1=x+1$ кое не е исполнето за ниту еден реален број. Значи во овој случај равенката нема решение. Аналогно се испитуваат и случаите $x\in[1,2)$, $x\in[2,3)$ и $x\in[3,\infty)$. ●

1.4. Докажи ги равенствата:

а) $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$; **б)** $\frac{x+y+|y-x|}{2}=\begin{cases}y, & x\leq y\\ x, & x>y\end{cases}$.

Решение. а) $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\frac{x^2+2x|x|+|x|^2}{4}+\frac{x^2-2x|x|+|x|^2}{4}=x^2$.

б) $\frac{x+y+|y-x|}{2}=\begin{cases}\frac{x+y+y-x}{2}, & y-x\geq 0\\ \frac{x+y-(y-x)}{2}, & y-x<0\end{cases}=\begin{cases}y, & x\leq y\\ x, & x>y\end{cases}$. ●

1.5. Во множеството реални броеви реши ги неравенките:

а) $x-5>0$; **б)** $(x-5)(x-2)>0$; **в)** $\frac{x-2}{x-6}>0$;

г) $x^2-6x+8>0$; **д)** $x^2-6x+8\leq 0$; **ѓ)** $x^2+x+1\geq 0$.

Решение. а) $x\in(5,\infty)$.

б) Производот $(x-5)(x-2)$ е позитивен ако множителите се истовремено позитивни или негативни. Значи, решенијата на дадената неравенка се реалните броеви x за кои ($x-5>0$ и $x-2>0$) или ($x-5<0$ и $x-2<0$). Следува дека множеството решенија на неравенката $(x-5)(x-2)>0$ се состои од сите $x\in(-\infty,2)\cup(5,\infty)$.

в) Решенијата на дадената неравенка се реалните броеви x за кои ($x-2>0$ и $x-6>0$) или ($x-2<0$ и $x-6<0$), односно $x\in(6,\infty)$ или $x\in(-\infty,2)$ од што следува $x\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$.

г) Корени на квадратната равенка $x^2-6x+8=0$ се $x_1=2$ и $x_2=4$, па дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x-2)(x-4)>0$.

Производот $(x-2)(x-4)$ е позитивен ако множителите се истовремено позитивни или негативни. Значи, решенијата на дадената неравенка се реалните броеви x за кои ($x-2>0$ и $x-4>0$) или ($x-2<0$ и $x-4<0$). Следува дека множеството решенија на неравенката $x^2-6x+8>0$ се состои од сите $x\in(-\infty,2)\cup(4,\infty)$.

д) Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x-2)(x-4)\leq 0$. Множеството решенија го сочинуваат сите реални броеви x за кои ($x-2\geq 0$ и $x-4\leq 0$) или ($x-2\leq 0$ и $x-4\geq 0$), односно $x\in[2,4]$ бидејќи вториот систем нема решение.

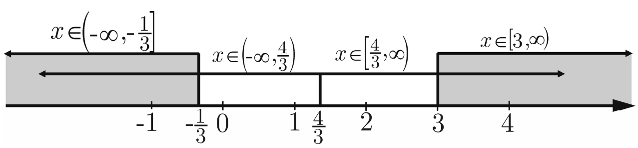
ѓ) Бидејќи равенката $x^2+x+1=0$ нема реални корени, изразот не го менува знакот, односно множеството решенија на дадената неравенка е или $\mathbb{R}$ или $\varnothing$. Бидејќи $0^2+0+1\geq 0$, заклучуваме дека секој реален број е решение на неравенката, односно $x\in(-\propto,\propto)$. ●

1.6. Во множеството реални броеви реши ги неравенките:

а) $|3x-4|\geq 5$; **б)** $|2x+1|\geq x+2$; **в)** $|x^2-4x|+3>x^2+|x-5|$.

Решение. а) $|3x-4|=\begin{cases}3x-4, & 3x-4\geq 0\\ 4-3x, & 3x-4<0\end{cases}=\begin{cases}3x-4, & x\geq 4/3\\ 4-3x, & x<4/3\end{cases}$.

(I) Ако $x\in\left(-\propto,\frac{4}{3}\right)$, тогаш дадената неравенка има облик $-3x+4\geq 5$, односно $x\leq-\frac{1}{3}$. Решение на неравенката се реалните броеви $x\in\left(-\propto,-\frac{1}{3}\right]$. (II) Ако $x\in\left[\frac{4}{3},\propto\right)$, тогаш дадената неравенка има облик $3x-4\geq 5$ односно $x\geq 3$. Решение на неравенката се реалните броеви $x\in[3,\propto)$. Конечно, решение на неравенката се реалните броеви $x\in\left(-\propto,-\frac{1}{3}\right]\cup[3,\propto)$. (види цртеж)



б) $|2x+1|=\begin{cases}2x+1, & 2x+1\geq 0\\ -2x-1, & 2x+1<0\end{cases}=\begin{cases}2x+1, & x\geq-\frac{1}{2}\\ -2x-1, & x<-\frac{1}{2}\end{cases}$.

(I)Ако $x\in\left(-\propto,-\frac{1}{2}\right)$, тогаш дадената неравенка има облик $-2x-1\geq x+2$, односно $x\leq-1$. Решение на неравенката се реалните броеви $x\in(-\propto,-1]$. (II) Ако $x\in[-1/2,\propto)$, тогаш дадената неравенка има облик $2x+1\geq x+2$ односно $x\geq 1$. Решение на неравенката се реалните броеви $x\in[1,\propto)$. Конечно, решение на неравенката се реалните броеви $x\in(-\propto,-1]\cup[1,\propto)$.

в) $$|x-5|=\begin{cases} x-5, & x-5\geq 0 \\ -(x-5), & x-5<0 \end{cases}=\begin{cases} x-5, & x\in[5,\infty) \\ -x+5, & x\in(-\infty,5) \end{cases};$$

$$|x^2-4x|=\begin{cases} x^2-4x, & x^2-4x\geq 0 \\ -x^2+4x, & x^2-4x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^2-4x, & x\in(-\infty,0]\cup[4,\infty) \\ -x^2+4x, & x\in(0,4) \end{cases}.$$

(I) Ако $x\in(-\infty,0]\cup[4,5)$, тогаш дадената неравенка има облик $x^2-4x+3>x^2-x+5$ односно $x<-\frac{2}{3}$. Решение на неравенката се сите $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$. (II) Ако $x\in(0,4)$, тогаш дадената неравенка има облик $-x^2+4x+3>x^2-x+5$, односно $(2x-1)(x-2)<0$. Решение на неравенката се реалните броеви $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$. (III) Ако $x\in[5,\infty)$, тогаш дадената неравенка има облик $x^2-4x+3>x^2+x-5$, односно $x<\frac{8}{5}$. Неравенката нема решение во разгледуваниот интервал.

Конечно, решение на неравенката се реалните броеви $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$. ●

1.7. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ и $a\in\mathbb{R}^+$, важи $\sqrt[n]{a}\leq 1+\frac{a-1}{n}$.

Решение. Нека $a\in\mathbb{R}^+$, тогаш $a-1>-1$, па применувајќи го неравенството на Бернули, ([1] стр.28) добиваме: $\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n\geq 1+n\frac{a-1}{n}=a$, т.е $1+\frac{a-1}{n}\geq\sqrt[n]{a}$. ●

1.8. За секој реален број x важи

а) $|x|=|-x|$; **б)** $x\leq|x|$; **в)** $-x\leq|x|$.

Решение. а) Ако $x=0$, тогаш $|x|=0=|-x|$. Ако $x>0$, тогаш $|x|=x$ и $|-x|=-(-x)=x$. Ако $x<0$, тогаш $-x>0$, па имаме $|-x|=-x=|x|$.

б) Ако $x=0$, тогаш $|x|=0\geq 0=x$. Ако $x>0$, тогаш $|x|=x\geq x$. Ако $x<0$, тогаш $|x|=-x>0>x$.

в) Ако $x=0$, тогаш $|x|=0\geq 0=-x$. Ако $x>0$, тогаш $|x|=x>0>-x$. Ако $x<0$, тогаш $|x|=-x\geq -x$. ●

1.11. За $\varepsilon>0$ неравенството $|x-a|<\varepsilon$ е еквивалентно со $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.

Докажи!

Решение. Од задача **1.8.** имаме $x-a\leq|x-a|<\varepsilon$ и $-(x-a)\leq|x-a|<\varepsilon$. Од овде следува $x=x+(-a+a)=(x-a)+a<\varepsilon+a=a+\varepsilon$ и, на ист начин, $a-\varepsilon<x$, што требаше да се докаже. Обратно, нека $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ т.е. $-\varepsilon<x-a<\varepsilon$. Ако $x-a\geq 0$, имаме: $|x-a|=x-a<\varepsilon$, а ако $x-a<0$, тогаш од $-\varepsilon<x-a$ имаме:

$$|x-a|=-(x-a)<\varepsilon. \bullet$$

1.10. Докажи дека за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важат следните особини на апсолутна вредност:

а) $|x+y|\leq|x|+|y|$;

б) $||x|-|y||\leq|x-y|$;

в) $|xy|=|x||y|$;

г) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|},\ y\neq 0$.

Решение. а) Бидејќи за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи $x\leq|x|$, $y\leq|y|$, $-x\leq|x|$ и $-y\leq|y|$ имаме $x+y\leq|x|+|y|$ и $-(x+y)\leq|x|+|y|$. Ако $x+y\geq 0$, тогаш имаме

$|x+y|=x+y\leq|x|+|y|$, а ако $x+y<0$, тогаш $|x+y|=-(x+y)\leq|x|+|y|$.

б) Имаме: $|x|=|(x-y)+y|\leq|x-y|+|y|$ и $|y|=|(y-x)+x|\leq|y-x|+|x|$ од што следува $|x|-|y|\leq|x-y|$ и $-(|x|-|y|)\leq|x-y|$. Како и во доказот под **а)** заклучуваме дека $||x|-|y||\leq|x-y|$.

в) Можни се следните случаи:

- $x\geq 0,\ y\geq 0$, тогаш и $xy\geq 0$ па имаме $|xy|=xy=|x||y|$;
- $x\geq 0,\ y<0$, тогаш и $xy\leq 0$ па имаме $|xy|=-xy=x(-y)=|x||y|$;
- $x<0,\ y\geq 0$, тогаш и $xy\leq 0$ па имаме $|xy|=-xy=(-x)y=|x||y|$;
- $x<0,\ y<0$, тогаш и $xy>0$ па имаме $|xy|=xy=(-x)(-y)=|x||y|$.

г) Бидејќи y и $\frac{1}{y}$ се истовремено позитивни или негативни и $\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{|y|}$, па слично како во доказот под **в)** заклучуваме дека $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$. $\bullet$

1.2. Природни броеви

Дефиниција. Подмножество $\mathbf{N}$ од множеството реални броеви $\mathbf{R}$ со следните својства:

1. $1 \in \mathbf{N}$
2. ако $x \in \mathbf{N}$, тогаш $x+1 \in \mathbf{N}$
3. ако $A \subseteq \mathbf{N}$ за кое важи: $1 \in A$ и $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$, тогаш $A = \mathbf{N}$.

го викаме множество природни броеви.

Елементите на $\mathbf{N}$ ги викаме природни броеви.

Задачи:

1.11. Ако $A = \{2k : k \in \mathbf{N}\}$ и $B = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$, определи ги множествата:

а) $\mathbb{N} \setminus A$; **б)** $\mathbb{N} \setminus B$; **в)** $A \setminus \mathbb{N}$; **г)** $(\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B)$.

Решение. а) $\mathbb{N} \setminus A = B$; **б)** $\mathbb{N} \setminus B = A$; **в)** $A \setminus \mathbb{N} = \varnothing$; **г)** $(\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B) = \mathbb{N}$. ●

1.12. Нека $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$, $B = \{x \mid x = 3\}$ и $C = \left\{x \mid x \in \mathbb{N},\ 2 < x < 5\right\}$.

Определи ги множествата: **а)** $(A \setminus C) \setminus B$; **б)** $A \setminus (C \setminus B)$.

Решение. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3\}$ и $C = \{3,4\}$.

а) $(A \setminus C) \setminus B = \{1,2\}$, **б)** $A \setminus (C \setminus B) = \{1,2,3\}$. ●

1.13. Докажи дека:

а) збирот на два парни броја е парен број,

б) збирот на два непарни броја е парен број,

в) збирот на парен со непарен број е непарен број,

г) производот на два парни броја е парен број,

д) производот на два непарни броја е непарен број,

ѓ) производот на парен со непарен број е парен број.

Решение. а) Нека m и n се два произволни парни броја. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ такви што $m = 2k_1$ и $n = 2k_2$. Тогаш $m + n = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$ е парен број, бидејќи $k_1 + k_2 \in \mathbb{N}$.

б) Нека m и n се два произволни непарни броја. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ такви што

$m = 2k_1 - 1$ и $n = 2k_2 - 1$.

Тогаш $m + n = 2k_1 - 1 + 2k_2 - 1 = 2(k_1 + k_2 - 1)$ е парен број, бидејќи $k_1 + k_2 - 1 \in \mathbb{N}$.

в) Нека m е произволен парен и n е произволен непарен број. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ такви што $m = 2k_1$ и $n = 2k_2 - 1$. Тогаш $m + n = 2k_1 + 2k_2 - 1 = 2(k_1 + k_2) - 1$ е непарен број, бидејќи $k_1 + k_2 \in \mathbb{N}$.

г) Нека m и n се два произволни парни броја. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ такви што $m = 2k_1$ и $n = 2k_2$. Тогаш $m \cdot n = 2k_1 \cdot 2k_2 = 2(2k_1 \cdot k_2)$ е парен број, бидејќи $2k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{N}$.

д) Нека m и n се два произволни непарни броја. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ такви што $m = 2k_1 - 1$ и $n = 2k_2 - 1$.

Тогаш $m \cdot n = (2k_1 - 1)(2k_2 - 1) = 2(2k_1k_2 - k_1 - k_2 + 1) - 1$ е непарен број, бидејќи $2k_1k_2 - k_1 - k_2 + 1 \in \mathbb{N}$.

ѓ) Нека m е произволен парен и n е произволен непарен број. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ такви што $m = 2k_1$ и $n = 2k_2 - 1$. Тогаш $m \cdot n = 2k_1(2k_2 - 1) =$ $= 2(k_1(2k_2 - 1))$ е парен број, бидејќи $k_1(2k_2 - 1) \in \mathbb{N}$. ●

1.14. Ако збирот на два природни броја е непарен број, тогаш нивниот производ е парен број. Докажи!

Решение. Збирот на два природни броја е непарен само ако едниот од нив е парен, а другиот непарен. (види ја задачата **1.13.**). Тогаш, повторно од задачата **1.13.** следува дека нивниот производ е парен број. ●

1.15. Ако производот на три природни броеви е непарен број, тогаш и нивниот збир е непарен број.

Решение. Производот на три природни броеви е непарен само во случај кога трите броеви се непарни (види ја задачата **1.13.**). Тогаш, повторно од задачата **1.13.** следува дека нивниот збир е непарен број. ●

1.16. Докажи дека производот на два последователни природни броеви е парен број.

Решение. Едниот од два последователни броја е парен, па од задачата **1.13.** следува дека нивниот производ е парен број. ●

1.17. Докажи дека производот на два последователни парни броеви е делив со 8.

Решение. Нека m и n се два последователни парни броја. Постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $m = 2k$ и $n = 2(k+1)$. Тогаш $m \cdot n = 2k2(k+1) = 4k(k+1) = 4 \cdot 2k_1 = 8k_1$, $k_1 \in \mathbb{N}$, заради задачата **1.16.** ●

1.18. Докажи дека збирот на три последователни природни броеви е сложен број.

Решение. Од $n+(n+1)+(n+2) = 3(n+1)$ заклучуваме дека збирот на три последователни природни броја е делив со 3. Освен тоа, $n+(n+1)+(n+2) > 3$ од што следува дека тој е сложен број. ●

1.19. Докажи дека броевите $p, p+5$ и $p+9$ се прости ако и само ако $p = 2$.

Решение. Ако $p = 2$, тогаш $p+5 = 7$ и $p+9 = 11$, т.е. броевите $p, p+5$ и $p+9$ се прости. Нека $p > 2$. Тогаш p мора да е непарен, бидејќи во спротивно би бил делив со два. Од задачата **1.13.** следува дека броевите $p+5$ и $p+9$ се парни броеви поголеми од 2, односно се сложени. ●

1.20. Докажи дека броевите n и $n+1$ се заемно прости.

Решение. Нека $d = \text{НЗД}(n, n+1)$. Бидејќи $d|n$ и $d|(n+1)$, постојат природни броеви k_1 и k_2 така што $n = k_1 d$ и $(n+1) = k_2 d$. Тогаш, $1 = (k_2 - k_1)d$. Од $n+1 > n$ имаме дека $k_2 > k_1$ односно $k_2 - k_1 \in \mathbb{N}$. Следува дека $d|1$, односно $d = 1$. ●

1.3. Преброиви и непреброиви множества

1.21. Докажи дека секое бесконечно множество содржи преброиво подмножество.

Решение. Множеството X е преброиво ако постои биекција $f:\mathbb{N}\to X$. Во тој случај X може да се запише на следниов начин $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$.

Нека A е бесконечно множество, и $x_1\in A$. Тогаш постои $x_2\in A\setminus\{x_1\}$ (во спротивно би добиле $A=\{x_1\}$ што е во контрадикција со бесконечноста на A).

Натаму, постои $x_3\in A\setminus\{x_1,x_2\}$ (во спротивно би добиле $A=\{x_1,x_2\}$ што повторно е во контрадикција со бесконечноста на A). Продолжувајќи ја овва постапка на ист начин добиваме множество $\{x_1,x_2,\dots\}$ кое е преброиво. ●

1.22. Докажи дека преброива унија од преброиви множества е преброиво множество.

Решение. Нека $A_1,A_2,A_3,\dots$ се преброиво многу преброиви множества. Тогаш за секој природен број k елементите од множеството A_k може да ги запишеме во облик $A_k=\{a_{k1},a_{k2},a_{k3},\dots\}$. Сега елементите на множеството A може да ги запишеме во една шема:

$$\begin{array}{l}
A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\dots\}\\
A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\dots\}\\
A_3=\{a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\dots\}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
A_k=\{a_{k1},\ a_{k2},\ a_{k3},\dots\}\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Шемата се формира така што во i-тата редица се запишуваат елементите на множеството A_i. Елементите од оваа шема може да ги запишеме на следниот начин:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, \ldots$$

т.е. прво го запишуваме елементот a_{11}, потоа оние елементи чиј збир на индекси е 3, па елементите чиј збир на индекси е 4 итн. На овој начин секој елемент од унијата е запишан и ако некој елемент е запишан повеќе пати неговото прво појавување во низата го задржуваме а останатите ги бришеме.

Секое од множествата A_k е подмножество од унијата, па според тоа унијата е бесконечно множество. Од тоа што елементите од унијата може да ги запишеме во обликот $\{x_1, x_2, \ldots\}$ следува дека унијата е преброиво множество. ●

1.23. Докажи дека множеството $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ е преброиво.

Решение. Го формираме множеството $A_n = \{(n,k) | k \in \mathbb{N}\}$ за секој природен број n. Ќе докажеме дека пресликувањето $g_n : A_n \to \mathbb{N}$ дефинирано со $g_n(n,k) = k$ е биекција, од каде следува дека A_n е преброиво множество.

Пресликувањето g_n е добро дефинирано затоа што од $(n,k) = (n,l)$ следува $k = l$, па $g_n(n,k) = g_n(n,l)$.

Нека $g_n(n,k) = g_n(n,l)$. Тогаш $(n,k) = (n,l)$, т.е. $k = l$, па пресликувањето g_n е инјекција.

Нека $m \in \mathbb{N}$. Тогаш $(n,m) \in A_n$ и $g_n(n,m) = m$, па пресликувањето g_n е сурјекција.

Докажавме дека пресликувањето g_n е биекција.

Ќе докажеме дека $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

За секој природен број n важи $A_n \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, па и $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Останува да се докаже дека $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Нека $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Тогаш $(n,m)\in A_n \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, па $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Значи $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Множеството $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ е преброива унија од преброиви множества, па од задача **1.22.** следува дека таа е преброиво множество, т.е. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ е преброиво множество. ●

1.24. Производ на две преброиви множества е преброиво множество. Докажи!

Решение. Нека A_1 и A_2 се преброиви множества. Треба да се докаже дека постои биекција $f: A_1\times A_2 \to \mathbb{N}$. Од тоа што A_1 и A_2 се преброиви множества постојат биекции $f_1: A_1 \to \mathbb{N}$ и $f_2: A_2 \to \mathbb{N}$. Дефинираме пресликување $\varphi: A_1\times A_2 \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ со $\varphi(x,y) = (f_1(x), f_2(y))$.

Прво да провериме дали пресликувањето φ е добро дефинирано.

Нека $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$, каде $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A_1\times A_2$. Тогаш $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Од тоа што f_1 и f_2 се добро дефинирани пресликувања следува

$$\varphi(x_1,y_1) = (f_1(x_1), f_2(y_1)) = (f_1(x_2), f_2(y_2)) = \varphi(x_2,y_2).$$

Ќе докажеме дека φ е инјекција. Нека $\varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$. Следува

$$(f_1(x_1), f_2(y_1)) = (f_1(x_2), f_2(y_2)) \Rightarrow f_1(x_1) = f_1(x_2) \text{ и } f_2(x_1) = f_2(x_2).$$

Пресликувањата f_1 и f_2 се инјекции, па важи

$$\begin{aligned} f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Значи $\varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$ па следува $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$, т.е. пресликувањето φ е инјекција.

Останува да докажеме дека пресликувањето φ е и сурјекција. Нека $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Тогаш бидејќи f_1 и f_2 се сурјекции, постојат $s\in A_1$ и $t\in A_2$ такви што $f_1(s) = x$ и $f_2(t) = y$. Значи $\varphi(s,t) = (f_1(s), f_2(t)) = (x,y)$ т.е. пресликувањето φ е сурјекција.

Докажавме дека пресликувањето φ е биекција.

Значи добивме дека постои биекција $\varphi: A_1 \times A_2 \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Во задачата **1.23.** докажавме дека $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ е пребroиво, па постои биекција $h:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Конечно, бараната биекција е $f = h\circ\varphi: A_1\times A_2 \to \mathbb{N}$. ●

1.25. Докажи дека сликата на пребroиво множество при произволно пресликување е конечно или пребroиво множество.

Решение: Нека $f: X\to Y$ е произволно пресликување и нека множеството X е пребroиво. За секој елемент $y\in f(X)$ фиксираме еден елемент $x_y \in f^{-1}(\{y\})$. Дефинираме пресликување $\varphi: f(X)\to X$ со $\varphi(y) = x_y$. Ќе докажеме дека φ е добро дефинирано.

Нека $y_1, y_2 \in f(X)$ и $y_1 = y_2$. Тогаш $x_{y_1} = x_{y_2}$, па φ е добро дефинирано.

Ќе докажеме дека φ е биекција од $f(X)$ на $\varphi(f(X))$. Јасно е дека φ е сурјекција. Останува да се докаже дека φ е инјекција. Нека $y_1 \neq y_2$. Тогаш $f^{-1}(\{y_1\})\cap f^{-1}(\{y_2\}) = f^{-1}(\{y_1\}\cap\{y_2\}) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. Според тоа $x_{y_1}\neq x_{y_2}$, односно $\varphi(y_1)\neq\varphi(y_2)$, па φ е инјекција. Значи φ е биекција.

Според тоа, $f(X)$ е пребroиво ако и само ако $\varphi(f(X))$ е пребroиво. Бидејќи $\varphi(f(X))\subseteq X$ и X е пребroиво следува дека $\varphi(f(X))$ е конечно или пребroиво, па и $f(X)$ е конечно или пребroиво. ●

1.4. Принцип на математичка индукција (ПМИ)

Нека $I(n)$ е некое својство на природните броеви или со него се формулира некоја математичка вистина која зависи од природните броеви. Вистинитоста на такви тврдења се покажува со помоШ на принципот на математичка индукција.
Да го формулираме принципот на математичка индукција:

1) Тврдењето $I(n)$ е точно за $n = p$ каде Што p е фиксен природен број.
2) Ако тврдењето $I(n)$ важи за природен број $n = k \geq p$, тогаШ важи и за $n = k+1$.
3) Заклучок: Тврдењето $I(n)$ е вистинито за секој природен број $n \geq p$.

Да забележиме дека за да важи заклучокот 3) потребно е да бидат исполнети условите 1) и 2).

Задачи:

Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека следниве тврдења се точни за секој $n \in \mathbb{N}$. (задачи **1.26.- 1.39.**)

1.26. $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n = k \geq 1$ односно

$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

3) Тогаш за $n = k+1$ добиваме

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

1.27. $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1 = 1^2$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n = k \geq 1$ односно

$$1+3+\cdots+(2k-1) = k^2.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

од каде што според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

1.28. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1^2=\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ т.е.

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

од каде што според ПМИ заклучуваме дека тврдењето е точно за секој природен број n. ●

1.29. $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1\cdot 2=\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ т.е,

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$1\cdot 2+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

1.30. $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)=\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1\cdot 1=\dfrac{1(1+1)(4\cdot 1-1)}{6}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ односно

$$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+k(2k-1)=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+k(2k-1)+(k+1)(2(k+1)-1)=$$

$$=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}+(k+1)(2k+1)=\frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{6}=\frac{(k+1)((k+1)+1)(4(k+1)-1)}{6}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n . ●

1.31. $2\cdot 4+4\cdot 6+6\cdot 8+\cdots+2n(2n+2)=\frac{4n(n+1)(n+2)}{3}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи

$$2\cdot 1\cdot(2\cdot 1+2)=\frac{4\cdot 1(1+1)(1+2)}{3}.$$

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ односно

$$2\cdot 4+4\cdot 6+\cdots+2k(2k+2)=\frac{4k(k+1)(k+2)}{3}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$2\cdot 4+4\cdot 6+\cdots+2k(2k+2)+(2k+2)(2k+4)=\frac{4k(k+1)(k+2)}{3}+(2k+2)(2k+4)=$$

$$=\frac{4(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n . ●

1.32. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1\cdot 2\cdot 3=\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ односно

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$1\cdot 2\cdot 3+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n . ●

1.33. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

1.34. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1(1+1)}{2(2+1)}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ односно

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

1.35. $\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $\frac{1}{3}=\frac{3}{4}-\frac{2+3}{4\cdot 3}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ односно

$$\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4\cdot 3^k}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{k}{3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4\cdot 3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2(k+1)+3}{4\cdot 3^{k+1}}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n . ●

1.36. $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1^3=\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ односно

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n . ●

1.37. $1^4+2^4+\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ односно

$$1^4+2^4+\cdots+k^4=\frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$1^4+2^4+\cdots+k^4+(k+1)^4=\frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}+(k+1)^4=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)(3(k+1)^2+3(k+1)-1)}{30}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n . ●

1.38. $1^5+2^5+\cdots+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1^5=\dfrac{1^2(1+1)^2(2+2-1)}{12}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ односно

$$1^5+2^5+\cdots+k^5=\frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$1^5+2^5+\cdots+k^5+(k+1)^5=\frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12}+(k+1)^5=$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2(2(k+1)^2+2(k+1)-1)}{12}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

1.39. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1-\frac{1}{4}=\frac{1+2}{2+2}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ односно

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2k+2}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+2}{2k+2}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{(k+2)^2-1}{(2k+2)(k+2)}=$$

$$=\frac{(k+3)(k+1)}{(2k+2)(k+2)}=\frac{k+3}{2k+4}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

Со помош на математичка индукција докажи ги идентитетите (**1.40.-1.43.**):

1.40. $x+x^2+x^3+\cdots+x^n=x\frac{x^n-1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $x=x\frac{x^1-1}{x-1}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$x+x^2+x^3+\cdots+x^k=x\frac{x^k-1}{x-1}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$x+x^2+x^3+\cdots+x^k+x^{k+1}=x\frac{x^k-1}{x-1}+x^{k+1}=x\frac{x^{k+1}-1}{x-1}.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број $n\in\mathbb{N}$. ●

1.41. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^n}=\frac{x^n-1}{x^n(x-1)}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $\frac{1}{x}=\frac{x^1-1}{x(x-1)}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^k}=\frac{x^k-1}{x^k(x-1)}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+1}}=\frac{x^k-1}{x^k(x-1)}+\frac{1}{x^{k+1}}=\frac{x^{k+1}-1}{x^{k+1}(x-1)}.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

1.42. $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{2^2}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{x^2+2x+3}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{-(x-1)(x^2+2x+3)}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=$$

$$=\frac{-(1+x)(1+x^2)+4}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^2}{1-x^{2^2}}$$

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{2^2}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}.$$

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{2^2}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}+2^{k+1}}{\left(1-x^{2^{k+1}}\right)\left(1+x^{2^{k+1}}\right)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

1.43. Со математичка индукција докажи дека неравенството $(n+2)!>3^n$ е точно за секој природен број n.

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $(1+2)!>3^1$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно $(k+2)!>3^k$.

3) Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$((k+1)+2)! = (k+3)! = (k+3)(k+2)! > (k+3)3^k = k3^k + 3\cdot 3^k > 3^{k+1}.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

1.44. Докажи ја Биномната формула

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,\ a,b\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}. \quad (*)$$

Решение. Биномниот коефициент $\binom{n}{k}$, $n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}_0$, $0\le k\le n$, се дефинира со

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

и по дефиниција се смета $0! = 1$.

Со проверка се докажува дека за биномните коефициенти важи следната релација

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},\ n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}_0,\ 0\le k\le n-1.$$

1) За $n=1$ формулата (*) е точна:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^{1-0}b^0 + \binom{1}{1}a^{1-1}b^1 = a+b.$$

2) Претпоставуваме точност на формулата за $n=m\ge 1$, т.е.

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k.$$

3) Тогаш за $n=m+1$ добиваме $(a+b)^{m+1} = (a+b)^m(a+b) =$

$$= \left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k\right)(a+b) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^{k+1} =$$

$$= \binom{m}{0}a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right)a^{m-k+1}b^k + \binom{m}{m}b^{m+1} =$$

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}a^{m-k+1}b^k + b^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^{m+1-k}b^k.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на формулата (*) за секој природен број n. ●

Докажи ги следните неравенства: (задача **1.45.** - **1.47.**)

1.45. $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \ge 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,\ x_k > -1,\ k=1,2,\cdots n$ и сите x_k се со ист знак. (Обопштено Бернулиево неравенство).

Решение. 1) За $n=1$ имаме $(1+x_1)\geq 1+x_1$.

2)Претпоставуваме точност на неравенството за $n=k$, т.е.

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,\ x_k>-1,\ k=1,2,\cdots n.$$

3) За $n=k+1$ и $x_{k+1}>-1$, бидејќи $x_i x_j>0$, имаме

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geq(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})=$$

$$=1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)x_{k+1}\geq$$
$$\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}.$$ ●

1.46. $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n>1$.

Решение. 1) За $n=2$ имаме $2!<\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2<\frac{9}{4}$, што е точно.

2) Претпоставуваме точност на неравенството за $n=k$.

3) За $n=k+1$ имаме

$$(k+1)!=(k+1)k!<(k+1)\left(\frac{k+1}{2}\right)^k=2\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}}\leq 2\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}\frac{1}{2}=\left(\frac{(k+1)+1}{2}\right)^{k+1}.$$

Притоа, го искористивме Бернулиевото неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\geq 1+(k+1)\frac{1}{k+1}=2.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на неравенството за секој природен број n. ●

1.47. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, $n>1$.

Решение. 1) За $n=2$ имаме $\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$, што е точно.

2) Претпоставуваме точност на неравенството за $n=k$.

3) За $n=k+1$ имаме

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+1}>$$

$$>\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{13}{24}+\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}>\frac{13}{24}.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на неравенството за секој природен број n. ●

1.5. Неравенства во $\mathbb{R}$

1.48. Докажи дека за секои $a,b,c \in \mathbb{R}$ важи $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \le |b-c|$.

Решение: $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}\right)=$

$=|a^2+b^2-(a^2+c^2)|=|b^2-c^2|=|b-c||b+c|\le|b-c|(|b|+|c|)$. Значи,

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \le |b-c|\frac{|b|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}} \qquad (1)$$

Од друга страна,

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2} \ge \sqrt{b^2}+\sqrt{c^2}=|b|+|c|. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува: $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \le |b-c|\frac{|b|+|c|}{|b|+|c|}=|b-c|$. ●

1.49. Нека $a_1,a_2,\cdots,a_n$ и $b_1,b_2,\cdots,b_n$ се произволно избрани реални броеви. Докажи дека $\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2$. Притоа равенство важи ако и само ако $\lambda a_k=\mu b_k$, $1\le k\le n$, каде што $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ се такви што $|\lambda|+|\mu|\ne 0$.

Решение. Ќе докажеме дека, ако $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ и $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ се реални броеви такви што $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2=1$ и $\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2=1$, тогаш $\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right|\le 1$.

Навистина, нека $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ и $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in\mathbb{R}$ се такви што $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2=1$ и $\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2=1$.

Тогаш,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k\beta_k|=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k||\beta_k|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\alpha_k^2+\beta_k^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2=\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1=1.$$

Нека, сега, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ и $b_1,b_2,\cdots,b_n$ се произволно избрани реални броеви. Дефинираме $\alpha_k = \dfrac{a_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}}$, $\beta_k = \dfrac{b_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}}$, $1 \le k \le n$. Тогаш, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k^2 = 1$, па заради

првиот дел од доказот имаме дека $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right| \le 1$, т.е. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}} \dfrac{b_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}}\right| \le 1$, т.е.

$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}$. Оттука следува $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$.

С лучајот на равенство се остава на читателот. ●

1.50. Докажи дека за n позитивни реални броеви $a_1, a_2, \cdots, a_n$ такви што $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \le 1$, важи $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k} \ge n^2$.

Решение. Нека $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \le 1$. Ако за $\alpha_k = \sqrt{a_k}$, $\beta_k = \dfrac{1}{\sqrt{a_k}}$, го

примениме неравенството $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right)^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k^2$, од задачата **1.49.** добиваме

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{a_k})^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \Leftrightarrow n^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

Од последното и од условот $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \le 1$, добиваме $n^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}$, што требаше да се докаже. ●

1.51. (*неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина*)

Докажи дека за n произволни позитивни реални броеви $a_1, a_2, \cdots, a_n$ важи

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}. \tag{*}$$

Притоа, равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Решение. Без да се ограничиме од општоста, можеме да сметаме дека $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, $a_1 < a_n$. Нека $A_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Лесно се проверува дека:

(1) $a_1 < A_n < a_n$ и (2) $A_n(a_1 + a_n - A_n) - a_1 a_n = (a_1 - A_n)(A_n - a_n) > 0$.

Неравенството (*) ќе го докажеме со принципот на математичка индукција по n.

За $n=2$ имаме $\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\ge 0$.

Нека (*) важи за било кои $(n-1)$ позитивни броеви. Ќе докажеме дека важи и за n позитивни реални броеви.

Ако го примениме (*) на броевите $a_1+a_n-A_n, a_2, \cdots, a_{n-1}$, добиваме

$$\frac{a_1+a_n-A_n+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\ge \sqrt[n-1]{(a_1+a_n-A_n)a_2a_3\cdots a_{n-1}}=$$

$$=\sqrt[n-1]{\frac{a_1a_n+(a_1-A_n)(A_n-a_n)}{A_n}a_2a_3\cdots a_{n-1}}=$$

$$=\sqrt[n-1]{\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}{A_n}+\frac{(a_1-A_n)(A_n-a_n)}{A_n}a_2a_3\cdots a_{n-1}}\ge \sqrt[n-1]{\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}{A_n}}.$$

Докажавме:

$$\frac{nA_n-A_n}{n-1}\ge \sqrt[n-1]{\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}{A_n}} \Leftrightarrow \frac{(n-1)A_n}{n-1}\ge \frac{\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}}{\sqrt[n-1]{A_n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_nA_n^{\frac{1}{n-1}}\ge (a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)^{\frac{1}{n-1}} \Leftrightarrow A_n^{\frac{n-1+1}{n-1}}\ge (a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)^{\frac{1}{n-1}} \Leftrightarrow A_n^n\ge a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n,$$

т.е. $A_n\ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$, што требаше да се докаже.

Случајот на равенство се остава на читателот. ●

1.52. (*неравенство меѓу хармониската и геометриската средина*)

Докажи дека за било кои n позитивни реални броеви $a_1, a_2, \cdots, a_n$ важи

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\le \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}.$$

Решение. Ставајќи $\alpha_k=\frac{1}{a_k}$, $1\le k\le n$ и применувајќи ја задачата **1.51.** добиваме

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\alpha_k} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\ge \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\le \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k} \Leftrightarrow \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\le \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}. \; ●$$

1.53. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ се позитивни реални броеви такви што

$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$. Докажи дека важи неравенството $\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i} \geq 1$.

Решение: I *начин*: Од неравенството $(b_i - a_i)^2 \geq 0$ следува $b_i^{\,2} \geq 2b_i a_i - a_i^{\,2}$,

$i = 1,2,...,n$. Оттука $\frac{b_i^{\,2}}{a_i} \geq 2b_i - a_i$. Собирајќи ги овие n неравенства добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^{\,2}}{a_i} \geq 2\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = 2 \cdot 1 - 1 = 1 .$$

II *начин*: Неравенството ќе го докажеме со математичка индукција. За $n = 1$ имаме

$a_1 = b_1 = 1$, па $\frac{b_1^{\,2}}{a_1} = 1$. Да претпоставиме дека неравенството е точно за секои

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ такви што $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1$.

Сега да разгледаме за $n+1$. Нека $a_n' = a_n + a_{n+1}$ и $b_n' = b_n + b_{n+1}$. Тогаш важи

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n' = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n' = 1$$

и за овие броеви важи индуктивната претпоставка, т.е.

$$\frac{b_1^{\,2}}{a_1} + \frac{b_2^{\,2}}{a_2} + \ldots + \frac{b_n'^{\,2}}{a_n'} \geq 1 .$$

Нека $A = \frac{b_1^{\,2}}{a_1} + \frac{b_2^{\,2}}{a_2} + \ldots + \frac{b_{n-1}^{\,2}}{a_{n-1}}$.

Тогаш

$$A + \frac{b_n^{\,2}}{a_n^{\,2}} + \frac{b_{n+1}^{\,2}}{a_{n+1}^{\,2}} = A + \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}\left(\frac{b_n^{\,2}}{a_n^{\,2}} + \frac{b_{n+1}^{\,2}}{a_{n+1}^{\,2}}\right) = A + \frac{b_n^{\,2} + \left(\frac{a_{n+1}b_n^{\,2}}{a_n} + \frac{a_n b_{n+1}^{\,2}}{a_{n+1}}\right) + b_{n+1}^{\,2}}{a_n + a_{n+1}} \geq$$

$$\geq A + \frac{b_n^{\,2} + 2\sqrt{\frac{a_{n+1}b_n^{\,2}}{a_n} \cdot \frac{a_n b_{n+1}^{\,2}}{a_{n+1}}} + b_{n+1}^{\,2}}{a_n + a_{n+1}} = A + \frac{b_n^{\,2} + 2b_n^{\,2} b_{n+1}^{\,2} + b_{n+1}^{\,2}}{a_n + a_{n+1}} = A + \frac{(b_n + b_{n+1})^2}{a_n + a_{n+1}} =$$

$$= \frac{b_1^{\,2}}{a_1} + \frac{b_2^{\,2}}{a_2} + \ldots + \frac{b_n'^{\,2}}{a_n'} \geq 1$$

Значи неравенството важи и за $n+1$, па важи и за секој природен број n. ●

1.54. Докажи дека, ако $x \geq y > 0$ и $x^5 + y^5 = x - y$, тогаш $x^4 + y^4 < 1$.

Решение. Ако $x=y$, тогаш од $x^5+y^5=x-y=0$ добиваме $x=y=0$, па неравенството важи. Нека $x>y>0$. Тогаш $0<x^5-y^5<x^5+y^5=x-y$. Значи $x^5-y^5<x-y$. Од $x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)<x-y$ и $x\neq y$ и $x-y>0$ добиваме $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4<1$.

Значи

$$1>x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4>x^4+y^4. \bullet$$

1.55. Докажи дека за позитивните реални броеви a,b и c важи неравенството

$$\left(\frac{4a}{b+c}+1\right)\left(\frac{4b}{c+a}+1\right)\left(\frac{4c}{a+b}+1\right)>25.$$

Решение. Двете страни на неравенството ќе ги помножиме со $(a+b)(b+c)(c+a)$ (притоа заради $(a+b)(b+c)(c+a)>0$ знакот на неравенство нема да се смени), а потоа со средување на добиениот израз го добиваме следново неравенство еквивалентно со даденото:

$$a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2-b^2c-bc^2+7abc>0. \qquad (1)$$

Да претпоставиме прво дека $a=b$. Тогаш неравенството (1) го добива обликот $c(c^2-2ac+5a^2)>0$, односно $c\big((c-a)^2+4a^2\big)>0$. Последното неравенство е точно за секои $a,c>0$. По аналогија се докажуваат и случаите $a=c$ и $b=c$.

Затоа да претпоставиме дека $a<b<c$ (не се губи од општоста бидејќи a,b,c се рамноправни во почетното неравенство). Тогаш неравенството (1) е еквивалентно со

$$(a^3-a^2b-a^2c+abc)+(b^3-b^2a-b^2c+abc)+(c^3-c^2a-c^2b+abc)+4abc>0,$$

односно со

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)+4abc>0. \qquad (2)$$

Заради претпоставката $a<b<c$ имаме $a(a-b)(a-c)>0$ и $b(b-a)<c(c-a)$. Ако последното неравенство го помножиме со $b-c$, кој е негативен број, добиваме

$$b(b-a)(b-c)>c(c-a)(b-c)=-c(c-a)(c-b)\ ,$$

односно $b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)>0$. Заради последното и $a(a-b)(a-c)>0$ и $4abc>0$ следува точноста на (2). Бидејќи (2) е еквивалентно неравенство на почетното, добиваме точност на тврдењето од задачата. ●

1.56. Докажи го неравенството $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$, ако $4a+1$, $4b+1$ и $4c+1$ се ненегативни реални броеви и $a+b+c=1$

Решение. Од $a+b+c=1$ следува дека барем еден од броевите $a,\ b\ ,c$ е позитивен (во спротивно, ако $a\le 0, b\le 0,\ c\le 0$ би следувало дека $a+b+c\le 0$ што е во спротивност со претпоставката $a+b+c=1$). Не се губи од општоста ако претпоставиме дека $a>0$. Тогаш имаме $1+4a<1+4a+4a^2=(1+2a)^2$, односно $\sqrt{1+4a}<|1+2a|=1+2a$ (заради $a>0$). На сличен начин од $1+4b\le 1+4b+4b^2$ и $1+4c\le 1+4c+4c^2$ следува $\sqrt{1+4b}\le|1+2b|$ и $\sqrt{1+4c}\le|1+2c|$. Од претпоставката дека $1+4b\ge 0$ и $1+4c\ge 0$ добиваме дека $b\ge -\frac{1}{4}$ и $c\ge -\frac{1}{4}$. Користејќи ги тие неравенства добиваме $1+2b\ge 1-2\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$ и $1+2c=\frac{1}{2}>0$, од каде следува дека

$$\sqrt{1+4a}<1+2a\quad,\quad \sqrt{1+4b}\le 1+2b \text{ и } \sqrt{1+4c}\le 1+2c\ .$$

Конечно имаме,

$$\sqrt{1+4a}+\sqrt{1+4b}+\sqrt{1+4c}<1+2a+1+2b+1+2c=2(a+b+c)+3=2\cdot 1+3=5\ .$$ ●

1.57. Нека $x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_n$ се реални броеви такви што $x_1\le x_2\le\dots\le x_n$ и $y_1\le y_2\le\dots\le y_n$.

Докажи дека

$$x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n\ge\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)(y_1+y_2+\dots+y_n)\ . \qquad (1)$$

Решение. Ако (1) го помножиме со n, и ги измножиме изразите на десната страна од (1) добиваме дека неравенството (1) е еквивалентно со

$$(n-1)x_1y_1+(n-1)x_2y_2+\ldots+(n-1)x_ny_n-x_1y_2-x_1y_3-\ldots-x_1y_n-$$
$$-x_2y_1-x_2y_3-\ldots-x_2y_n-\ldots-x_ny_1-x_ny_2-\ldots-x_ny_{n-1}\geq 0$$

Натаму, трансформирајќи ја левата страна од последното неравенство имаме

$$x_1(y_1-y_2)+x_1(y_1-y_3)+\ldots+x_1(y_1-y_n)+x_2(y_2-y_1)+x_2(y_2-y_3)+\ldots+x_2(y_2-y_n)+\ldots+$$
$$+x_{n-1}(y_{n-1}-y_1)+x_{n-1}(y_{n-1}-y_2)+\ldots+x_{n-1}(y_{n-1}-y_{n-2})+x_{n-1}(y_{n-1}-y_n)+$$
$$+x_n(y_n-y_1)+x_n(y_n-y_2)+\ldots+x_n(y_n-y_{n-1})\geq 0$$

од каде што добиваме

$$(y_2-y_1)(x_2-x_1)+(y_3-y_1)(x_3-x_1)+(y_3-y_2)(x_3-x_2)+\ldots+(y_n-y_{n-1})(x_n-x_{n-1})\geq 0 \quad (2)$$

Притоа, во збирот од левата страна од (2) присутни се сите собироци од видот $(y_i-y_j)(x_i-x_j)$ каде $i>j$ и $i,j=1,2,\ldots,n$. Неравенството (2) е точно бидејќи $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ и $y_1\leq y_2\leq\ldots\leq y_n$. Заради еквивалентноста на (1) и (2) следува дека и (1) е точно. ●

1.58. Нека a,b,c се страни во триаголник а α, β, γ соодветните агли (изразени во радијани). Докажи дека $\frac{\pi}{3}\leq\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$.

Решение. I *начин*: Да претпоставиме дека во триаголникот аглите α, β, γ лежат спроти страните a, b, c соодветно. Бидејќи во триаголник спроти поголем агол лежи поголема страна и обратно, т.е. неравенството $a\geq b$ е еквивалентно со неравенството $\alpha\geq\beta$, добиваме дека $a-b$ и $\alpha-\beta$ се истовремено негативни или ненегативни па $(a-b)(\alpha-\beta)\geq 0$. На сличен начин добиваме дека $(b-c)(\beta-\gamma)\geq 0$ и $(c-a)(\gamma-\alpha)\geq 0$. Според тоа

$$(a-b)(\alpha-\beta)+(b-c)(\beta-\gamma)+(c-a)(\gamma-\alpha)\geq 0\,. \quad (*)$$

Последното неравенство го трансформираме и добиваме

$$a(\alpha-\beta-\gamma+\alpha)+b(-\alpha+\beta+\beta-\gamma)+c(-\beta+\gamma+\gamma-\alpha)\geq 0\text{, т.е.}$$

$$a(2\alpha-\beta-\gamma)+b(-\alpha+2\beta-\gamma)+c(-\alpha-\beta+2\gamma)\geq 0\,.$$

Заменувајќи во последново неравенство $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ добиваме

$$a(3\alpha-\pi)+b(3\beta-\pi)+c(3\gamma-\pi)\geq 0\,,$$

односно $3(a\alpha+b\beta+c\gamma)-\pi(a+b+c)\geq 0$ и оттука $\frac{\pi}{3}\leq\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}$. Да забележиме дека еднаквост важи само во случајот $a=b=c$.

Останува уште да се докаже дека $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$. Бидејќи збирот на две страни од триаголникот е поголем од третата имаме $(b+c-a)\alpha+(c+a-b)\beta+(a+b-c)\gamma>0$. Со трансформирање на ова неравенство добиваме

$$a(-\alpha+\beta+\gamma)+b(\alpha-\beta+\gamma)+c(\alpha+\beta-\gamma)>0 .$$

Заменувајќи $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ добиваме $a(-2\alpha+\pi)+b(-2\beta+\pi)+c(-2\gamma+\pi)>0$, т.е. $-2(a\alpha+b\beta+c\gamma)+\pi(a+b+c)>0$ кое е еквивалентно со неравенството $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$.

II *начин*: Сега да претпоставиме дека $a\le b\le c$ (не се губи од општоста). Бидејќи спроти поголема страна во триаголник лежи поголем агол добиваме $\alpha\le\beta\le\gamma$. При таа претпоставка применувајќи ја задача **1.57.** за $n=3$ и броевите $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ и имајќи предвид дека $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, добиваме

$$a\alpha+b\beta+c\gamma\ge\frac{1}{3}(a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1}{3}(a+b+c)\pi$$

од каде што следува $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\ge\frac{\pi}{3}$. Со тоа едното неравенство од задачата е докажано.

Натаму, во триаголник збирот на две страни е поголем од третата, па имаме

$$a+b+c>2a,\ a+b+c>2b \text{ и } a+b+c>2c .$$

Оттука имаме $\frac{a}{a+b+c}<\frac{1}{2}$, $\frac{b}{a+b+c}<\frac{1}{2}$ и $\frac{c}{a+b+c}<\frac{1}{2}$. Користејќи го ова добиваме

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c}\alpha+\frac{b}{a+b+c}\beta+\frac{c}{a+b+c}\gamma<\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\pi}{2}. \quad \bullet$$

1.6. Супремум и инфимум

1.59. Докажи дека множеството од сите броеви од облик $\frac{m}{n}$, $m,n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$, нема најмал и најголем елемент. Најди инфимум и супремум на тоа множество.

Решение. Нека $M = \left\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{N},\ 0 < m < n\right\}$ и нека $\frac{p}{q}$ е најголем елемент во M. Од $\frac{p}{q} \in M$ имаме дека $p,q \in \mathbb{N}$ и $p < q$. Тогаш и $p+1 < q+1$, што значи дека $\frac{p+1}{q+1} \in M$. Заради максималноста на $\frac{p}{q}$ во M, имаме $\frac{p+1}{q+1} \leq \frac{p}{q}$ што е еквивалентно со $pq + q \leq pq + p$ т.е. $q \leq p$. Контрадикција. Значи, не постои најголем елемент во M.

Нека сега $\frac{r}{s}$ е најмал елемент во M. Тогаш, од $r < s < s+1$, имаме $\frac{r}{s+1} \in M$.

Исто така, $\frac{r}{s+1} < \frac{r}{s}$ што е во контрадикција со минималноста на $\frac{r}{s}$. Заклучуваме дека не постои најмал елемент во M.

Тврдиме дека $\sup M = 1$. Навистина, 1 е мајорант за M, бидејќи $\frac{m}{n} < 1,\ \forall \frac{m}{n} \in M$. Остана да докажеме дека 1 е најмал мајорант. Да го претпоставиме спротивното: дека постои реален број $a < 1$ така што $0 < \frac{m}{n} \leq a$, $\forall \frac{m}{n} \in M$. Тогаш, постои $r \in \mathbb{Q}$, така што $1 > r > a$ ([1],теорема 3, стр.26). Нека $r = \frac{m_0}{n_0},\ m_0 \in \mathbb{Z},\ n_0 \in \mathbb{N}$. Од $a > 0$, следува $r > 0$ т.е. $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$. Од $r = \frac{m_0}{n_0} < 1$, следува $m_0 < n_0$. Докажавме дека $r \in M$, а тоа е во контрадикција со претпоставката за a. Значи, 1 е најмал мајорант за M, т.е. $\sup M = 1$.

Слично како во првиот дел од доказот, ќе докажеме дека $\inf M = 0$. Јасно е дека 0 е минорант за M. Нека претпоставиме дека постои минорант за M поголем од 0, нека е тоа b. Тогаш, постои $r \in \mathbb{Q}$, така што $b > r > 0$. Нека $r = \frac{m_0}{n_0}$, $m_0 \in \mathbb{Z}, n_0 \in \mathbb{N}$. Од $r > 0$, следува $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$. Бидејќи b е минорант за M, имаме $r = \frac{m_0}{n_0} < b < 1$, па следува $m_0 < n_0$. Докажавме дека $r \in M$, а тоа е во контрадикција со претпоставката за b. Значи, 0 е најголем минорант за M, т.е. $\inf M = 0$. ●

1.60. Нека A, B се ограничени подмножества од $\mathbb{R}$ и $A + B = \left\{a + b \mid a \in A, b \in B\right\}$. Докажи дека:

а) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

б) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

Решение. а) Нека $u = \sup A$ и $v = \sup B$. Тогаш, $u + v$ е мајорант на $A + B$, бидејќи $a + b \le u + v$, за секои $a \in A$ и $b \in B$. Ќе докажеме дека $u + v$ е најмал мајорант. Ако $z \in \mathbb{R}$ е мајорант за $A + B$ таков што $z < u + v$, т.е. важи $z - u < v$, тогаш, бидејќи $v = \sup B$, постои $b' \in B$ таков што $z - u < b' \le v$, т.е $z - b' < u$. Од $u = \sup A$, следува дека постои $a' \in A$ таков што $z - b' < a' \le u$. Значи, $z < a' + b'$ за некои $a' \in A$ и $b' \in B$, т.е. z не е мајорант на $A + B$.

Добивме: $\sup(A+B) = u + v = \sup A + \sup B$.

б) Нека $s = \inf A$ и $t = \inf B$. Тогаш, $s + t$ е минорант на $A + B$, бидејќи $s + t \le a + b$, за секои $a \in A$ и $b \in B$. Ќе докажеме дека $s + t$ е најголем минорант. Нека $z \in \mathbb{R}$ е минорант за $A + B$ поголем од $s + t$, т.е. важи $z - s > t$. Бидејќи $t = \inf B$, постои $b' \in B$ таков што $z - s > b' \ge t$, т.е $z - b' > s$. Од $s = \inf A$, следува дека постои $a' \in A$ таков што $z - b' > a' \ge s$. Значи, $z > a' + b'$ за некои $a' \in A$ и $b' \in B$, т.е. z не е минорант на $A + B$. Добивме: $\inf(A+B) = s + t = \inf A + \inf B$. ●

1.61. Нека A,B се ограничени подмножества од $\mathbb{R}^+$ и $A\cdot B=\{a\cdot b\,|\,a\in B,a\in B\}$. Докажи дека:

а) $\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$;

б) $\inf(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B$.

Решение. а) Нека $u=\sup A$ и $v=\sup B$. Ако $u=0$ (или $v=0$), тогаш $A=\{0\}$ (или $B=\{0\}$), па тврдењето е тривијално. Затоа ќе претпоставиме дека $uv>0$. Тогаш, uv е мајорант на $A\cdot B$, бидејќи $ab\le uv$, за секои $a\in A$ и $b\in B$. Ќе докажеме дека uv е најмал мајорант. Нека $z\in\mathbb{R}$ е таков што $z<uv$, т.е. важи $\frac{z}{u}<v$ (да се потсетиме дека $u>0$). Бидејќи $v=\sup B$, постои $b'\in B$ таков што $\frac{z}{u}<b'\le v$, т.е $\frac{z}{b'}<u$. Од $u=\sup A$, следува дека постои $a'\in A$ таков што $\frac{z}{b'}<a'\le u$. Значи, $z<a'b'$ за некои $a'\in A$ и $b'\in B$, т.е. z не е мајорант на $A\cdot B$.

Добивме: $\sup(A\cdot B)=u\cdot v=\sup A\cdot\sup B$.

б) Нека $s=\inf A$ и $t=\inf B$. Тогаш, st е минорант за $A\cdot B$, бидејќи $st\le ab$, за секои $a\in A$ и $b\in B$. Ќе докажеме дека st е најголем минорант. Ако $s=0$ и $t=0$, тогаш за секое $z>0$, постои $a'\in A$ и $b'\in B$ така што $\sqrt{z}>a'\ge 0$ и $\sqrt{z}>b'\ge 0$, т.е $z>a'b'\ge 0$. Значи, во тој случај, $\inf(A\cdot B)=0$, и равенството е докажано. Затоа, ќе претпоставиме дека, на пример, $s>0$. Нека претпоставиме дека постои $z\in\mathbb{R}^+$ минорант за $A\cdot B$ таков што $z>st$, т.е $\frac{z}{s}>t$. Од $t=\inf B$, следува дека постои $b'\in B$ таков што $\frac{z}{s}>b'\ge t$, т.е. $\frac{z}{b'}>s$. Од $s=\inf A$, следува дека постои $a'\in A$ таков што $\frac{z}{b'}>a'\ge s$. Значи, $z>a'b'$ за некои $a'\in A$ и $b'\in B$, т.е. z не е минорант на $A\cdot B$. Добивме дека st е најголем минорант за $A\cdot B$, т.е. го докажавме равенството: $\inf(A\cdot B)=st=\inf A\cdot\inf B$. ●

1.62. Нека A е ограничено подмножество од $\mathbb{R}$ и нека $c>0$. Докажи дека за множеството $cA=\{cx\,|\,x\in A\}$ важи:

а) $\sup(cA) = c\sup A$;

б) $\inf(cA) = c\inf A$.

Решение. а) Нека $u = \sup A$. Тогаш , cu е мајорант за cA, бидејќи $cx \le cu$, за секој $x \in A$. Ќе докажеме дека cu е најмал мајорант. Нека $z \in \mathbb{R}$ е таков што $z < cu$, т.е. важи $\frac{z}{c} < u$. Заради $u = \sup A$, постои $x' \in A$ таков што $\frac{z}{c} < x' \le u$. Значи, $z < cx'$ за некој $x' \in A$ т.е. z не е мајорант за cA. Добивме: $\sup(cA) = cu = c\sup A$.

б) Нека $s = \inf A$. Тогаш, бидејќи $cs \le cx$, за секој $x \in A$, следува дека cs е минорант за cA. Ќе докажеме дека cs е најголем минорант. Нека $z \in \mathbf{R}^+$ е минорант за cA таков што $z > cs$, т.е $\frac{z}{c} > s$. Од $s = \inf A$, следува дека постои $x' \in A$ таков што $\frac{z}{c} > x' \ge s$. Значи, $z > cx'$ за некој $x' \in A$, т.е. z не е минорант за cA. Добивме дека cs е најголем минорант за cA, т.е. го докажавме равенството: $\inf(cA) = cs = c\inf A$. ●

1.63. Ако A е ограничено од горе множество позитивни реални броеви, докажи дека $\sup A^n = (\sup A)^n$, каде што $A^n = \{a^n \mid a \in A\}$.

Решение. Нека $u = \sup A$. Тогаш , u^n е мајорант за A^n, бидејќи $a^n \le u^n$, за

секој $a \in A$. Ќе докажеме дека u^n е најмал мајорант. Нека $z \in \mathbb{R}^+$ е мајорант за A^n таков што $z < u^n$, т.е. важи $\sqrt[n]{z} < u$. Заради $u = \sup A$, постои $a' \in A$ таков што $\sqrt[n]{z} < a' \le u$. Значи, $z < a'^n$ за некој $a' \in A$ т.е. z не е мајорант за A^n. Добивме: $\sup A^n = u^n = (\sup A)^n$. ●

1.64. Нека A е подмножество од $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Го дефинираме множеството $A^{-1} = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in A\right\}$. Докажи дека ако множествата A и A^{-1} се ограничени, тогаш важи:

а) $\sup(A^{-1}) = \dfrac{1}{\inf A}$;

б) $\inf(A^{-1}) = \dfrac{1}{\sup A}$.

Решение. а) Нека $u = \inf A$. Ја отфрламе можноста $u = 0$. Во спротивно, ако $u = 0$, тогаш A^{-1} не е ограничено. Навистина, нека M е произволен позитивен реален број. Тогаш $\dfrac{1}{M} > 0$ и заради $\inf A = 0$, постои $x' \in A$ таков што $\dfrac{1}{M} > x' > 0$. Следува постои $\dfrac{1}{x'} \in A^{-1}$ таков што $\dfrac{1}{x'} > M$. Значи, $u > 0$.

Ќе докажеме дека $\dfrac{1}{u} = \sup(A^{-1})$. Од $u = \inf A$ имаме дека за секој $x \in A$, $x \geq u$, т.е. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{u}$, па следува $\dfrac{1}{u}$ е мајорант за A^{-1}. Ќе докажеме дека $\dfrac{1}{u}$ е најмал мајорант за A^{-1}. Нека $\dfrac{1}{u}$ не е најмал мајорант, т.е. постои мајорант $z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ за A^{-1} таков што $z < \dfrac{1}{u}$, т.е. важи $u < \dfrac{1}{z}$. Заради $u = \inf A$, постои $x' \in A$ таков што $u \leq x' < \dfrac{1}{z}$. Значи, $z < \dfrac{1}{x'} \leq \dfrac{1}{u}$ за некој $\dfrac{1}{x'} \in A^{-1}$ т.е. z не е мајорант за A^{-1}. Добивме: $\sup(A^{-1}) = \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{\inf A}$.

б) Бидејќи $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, користејќи го равенството под **а)** добиваме:

$$\inf(A^{-1}) = \frac{1}{\sup\left(A^{-1}\right)^{-1}} = \frac{1}{\sup A}. \bullet$$

1.65. Нека $A \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $B \subset \mathbb{R}^+$. Дефинираме множество $\dfrac{B}{A} = \left\{\dfrac{b}{a} \mid a \in A, b \in B\right\}$. Ако A и B се ограничени множества, докажи дека:

а) $\inf\left(\dfrac{B}{A}\right) = \dfrac{\inf B}{\sup A}$;

б) $\sup\left(\dfrac{B}{A}\right) = \dfrac{\sup B}{\inf A}$.

Решение. а) Нека $u=\sup A$ и $v=\inf B$. Бидејќи $A\subset\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$, $u>0$. Од u е мајорант за A и v е минорант за B, имаме дека $a\leq u,\ \forall a\in A$ и $v\leq b,\ \forall b\in B$.. Од овде следува дека $\frac{b}{a}\geq\frac{v}{u},\ \forall a\in A,\ \forall b\in B$ т.е. $\frac{v}{u}$ е минорант за $\frac{B}{A}$. Ќе докажеме дека $\frac{v}{u}$ е најголем минорант за $\frac{B}{A}$. Нека претпоставиме дека постои $z\in\mathbb{R}^+$, z е минорант за $\frac{B}{A}$ и $z>\frac{v}{u}$, т.е. $zu>v$. Бидејќи $v=\inf B$, постои $b'\in B$ таков што $zu>b'\geq v$ т.е. $u>\frac{b'}{z}$. Бидејќи $u=\sup A$ и $\frac{b'}{z}<u$, постои $a'\in A$, $\frac{b'}{z}<a'\leq u$, т.е. $z>\frac{b'}{a'}$, за $a'\in A$ и $b'\in B$. Последното е во контрадикција со z е минорант за $\frac{B}{A}$.

Значи, $\inf\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{v}{u}=\frac{\inf B}{\sup A}$.

б) $\sup\left(\frac{B}{A}\right)=\sup(BA^{-1})\overset{\mathbf{1.61.}}{=}\sup B\sup(A^{-1})\overset{\mathbf{1.64.}}{=}\sup B\frac{1}{\inf A}=\frac{\sup B}{\inf A}$. ●

1.66. Нека A е множество броеви кои се спротивни по знак од броевите во множеството B. Докажи дека:

а) $\inf A=-\sup B$;

б) $\sup A=-\inf B$.

Решение. а) Нека $s=\inf A$. Тогаш, бидејќи $-s\geq -x$, за секој $-x\in -A=B$, следува дека $-s$ е мајорант за B. Ќе докажеме дека $-s$ е најмал мајорант за B. Нека $z\in\mathbb{R}$ е мајорант за B таков што $z<-s$, т.е $-z>s$. Од $s=\inf A$, следува дека постои $a'\in A$ таков што $-z>a'\geq s$. Значи, $z<-a'\leq -s$ за некој $-a'\in -A=B$, т.е. z не е мајорант за B. Добивме дека $-s$ е најмал мајорант за B, т.е. го докажавме равенството: $\inf A=s=-(-s)=-\sup B$.

б) Бидејќи $-B=A$, користејќи го равенството под **а)** добиваме:

$$-\inf B=-(-\sup A)=\sup A.\ \bullet$$

1.67. Определи $\sup M$ и $\inf M$ за $M=\left\{r\mid r\in\mathbb{Q},r^2<2\right\}$.

Решение. Од $r^2 < 2,\ \forall r \in M$, т.е. $|r| < \sqrt{2}$ следува дека $\sqrt{2}$ е мајорант, а $-\sqrt{2}$ е минорант за M. Тврдиме дека $\sup M = \sqrt{2}$. Остана да докажеме дека $\sqrt{2}$ е најмал мајорант. Да го претпоставиме спротивното: дека постои реален број $a < \sqrt{2}$ кој е мајорант за M. Тогаш, постои $r' \in \mathbb{Q}$, така што $\sqrt{2} > r' > a$ ([1],теорема 3, стр.26), т.е. $r'^2 < 2$. Значи, најдовме $r' \in M$ таков што $r' > a$, што е во контрадикција со a е мајорант на M. Докажавме дека $\sqrt{2}$ е најмал мајорант, т.е. $\sup M = \sqrt{2}$.

Ќе докажеме дека $\inf M = -\sqrt{2}$. Нека $a > -\sqrt{2}$. Тогаш, постои $r' \in \mathbb{Q}$, така што $a > r' > -\sqrt{2}$ ([1],теорема 3, стр.26), т.е. $r'^2 < 2$. Значи, ако $a > -\sqrt{2}$, тогаш a не е минорант за M. Добивме $-\sqrt{2}$ е најголем минорант за M, т.е. $\inf M = -\sqrt{2}$. ●

1.68. Најди супремум, инфимум, максимум, минимум на множествата:

$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$,

$A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le 1\}$ и $A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$.

Решение. $\sup A_1 = \sup A_2 = \sup A_3 = \sup A_4 = 1$; $\max A_3 = \max A_4 = 1$;

$\inf A_1 = \inf A_2 = \inf A_3 = \inf A_4 = 0$; $\min A_2 = \min A_4 = 0$. ●

1.69. Нека $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ се непразни, X е ограничено множество од десно и $Y \subseteq X$. Докажи дека Y е ограничено множество од десно и $\sup Y \le \sup X$.

Решение. Нека $u = \sup X$, тогаш за секој $y \in Y \subseteq X$ имаме $y \le u$. Значи, u е мајорант на Y. Бидејќи $\sup Y$ е најмалиот мајорант за Y, следува дека
$\sup Y \le u = \sup X$. ●

1.70. Нека $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ се непразни, Y е ограничено множество од лево и $X \subseteq Y$. Докажи дека X е ограничено множество од лево и $\inf Y \le \inf X$.

Решение. Нека $v = \inf Y$. Тогаш за секој $x \in X \subseteq Y$ имаме $v \le x$. Значи, v е минорант на X. Бидејќи $\inf X$ е најголемиот минорант за X, следува дека $\inf Y = v \le \inf X$. ●

1.71. Нека $R \supset X \neq \varnothing$ и $R \supset Y \neq \varnothing$. Ако за секој $x \in X$, постои $y \in Y$ таков што $x \leq y$, докажи дека тогаш $\sup X \leq \sup Y$.

Решение. Нека $x \in X$ е произволно избран. Од условот имаме дека постои $y \in Y$ таков што $x \leq y$, а бидејќи $y \leq \sup Y$, имаме дека $x \leq \sup Y,\ \forall x \in X$. Така, $\sup Y$ е мајорант за X. Бидејќи $\sup X$ е најмалиот мајорант за X, заклучуваме дека $\sup X \leq \sup Y$. ●

1.72. Нека $\mathbb{R} \supset X \neq \varnothing$ и $\mathbb{R} \supset Y \neq \varnothing$. Ако за секој $x \in X$ и за секој $y \in Y$ важи $x \leq y$, докажи дека $\sup X \leq \inf Y$.

Решение. Нека $x \in X$. Од $x \leq y$ за секој $y \in Y$, следува дека x е минорант за Y. Бидејќи $\inf Y$ е најголемиот минорант за Y, имаме $x \leq \inf Y$. Од произволноста на $x \in X$ следува дека $\inf Y$ е мајорант за X. Бидејќи $\sup X$ е најмалиот мајорант за X, следува $\sup X \leq \inf Y$. ●

1.73. За даден реален број x, нека $A_x = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \leq x\}$, $B_x = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq x\}$. Докажи дека $\sup A_x = \inf B_x = x$.

Решение. Од $x \leq y$ за секој $y \in B_x$, следува дека x е минорант за B_x. Ќе докажеме дека x е најголем минорант. Ако $x < z$, тогаш, постои $r \in \mathbb{Q}$, така што $z > r > x$ ([1],теорема 3, стр.26), па значи z не е минорант за B_x. Добивме $\inf B_x = x$. Слично се докажува дека $\sup A_x = x$. ●

1.74. Нека A и B се ограничени непразни подмножества од $\mathbb{R}$. Докажи дека:

а) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$,

б) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Решение. а) Нека $u = \sup A$ и $v = \sup B$. Нека $x \in A \cup B$ е произволно избран. Тогаш, $x \in A$ или $x \in B$. Ако $x \in A$, тогаш $x \leq u \leq \max\{u,v\}$. Ако $x \in B$, тогаш $x \leq v \leq \max\{u,v\}$. Во секој случај, за произволно $x \in A \cup B$, $x \leq \max\{u,v\}$, т.е. $\max\{u,v\}$ е мајорант за $A \cup B$. Ќе докажеме дека $\max\{u,v\}$ е најмал мајорант за

$A\cup B$. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека постои z мајорант за $A\cup B$ и $z<\max\{u,v\}$. Тогаш, $z<u$ или $z<v$. Ако $z<u$, од $u=\sup A$, имаме дека постои $a\in A\subset A\cup B$ таков што $z<a\leq u$, па добиваме контрадикција со z е мајорант за $A\cup B$. Ако $z<v$, од $v=\sup B$, имаме дека постои $b\in B\subset A\cup B$ таков што $z<b\leq v$, па повторно добивме контрадикција со z е мајорант за $A\cup B$. Заклучуваме дека $\max\{u,v\}$ е најмал мајорант за $A\cup B$, т.е.

$$\sup(A\cup B)=\max\{u,v\}=\max\{\sup A,\sup B\}.$$

б) Слично како под **а)**. ●

1.75. Нека $A=\left\{\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$. Докажи дека $\inf A=0$ и $\sup A=1$.

Решение. За $n\in\mathbb{N}$ имаме $\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}\geq\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2(2n+1)}>0$. Значи, 0 е минорант за A. Ќе докажеме дека 0 е најголем минорант. Нека $z\in\mathbb{R}$ е таков што $z>0$. Ќе докажеме дека z не е минорант за A. Треба да најдеме елемент од A што е помал од z, т.е. за некој природен број n да важи $z>\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}\Leftrightarrow n>\frac{1}{4z}-\frac{1}{2}$. Нека $n_0=\left[\frac{1}{4z}-\frac{1}{2}\right]+1$, тогаш за $n>n_0$ имаме $z>\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}>0$. Значи, z не е минорант за A. Добивме дека 0 е најголем минорант за A, $\inf A=0$.

Ќе докажеме дека $\sup A=1$. За секој $n\in\mathbb{N}$ имаме $1-\left(\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}\right)\geq\frac{1}{2(2n+1)}>0$ т.е. $1>\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}$, значи, 1 е мајорант за A. Ќе докажеме дека е најмал мајорант. Нека $t\in\mathbb{R}^+$ е таков што $t<1$. Нека $n_0=\left[\frac{1-2t}{4(t-1)}\right]\leq\frac{1-2t}{4(t-1)}$, тогаш за $n>n_0$ имаме

$1>\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}>\frac{1}{2}+\frac{n_0}{2n_0+1}\geq t$. Значи, t не е мајорант за A. Добивме дека 1 е најмал мајорант за A, $\sup A=1$. ●

Определи инфимум и супремум (ако постојат) на следните множества и провери дали се тие минимум и максимум. (задача **1.76.-1.79.**).

1.76. $A=\left\{\frac{3n-1}{5n+2}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

Решение. За секој $n\in\mathbb{N}$ имаме $\frac{3n-1}{5n+2}\geq\frac{2}{7}$. Бидејќи $\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 1-1}{5\cdot 1+2}\in A$, значи дека $\frac{2}{7}$ е најмал елемент во A, т.е. $\min A=\frac{2}{7}$. Следува дека $\inf A=\frac{2}{7}$. Ќе докажеме дека $\sup A=\frac{3}{5}$. За секој $n\in\mathbb{N}$ имаме $\frac{3}{5}-\frac{3n-1}{5n+2}=\frac{11}{5(5n+2)}>0$ т.е. $\frac{3}{5}>\frac{3n-1}{5n+2}$, значи, $\frac{3}{5}$ е мајорант за A. Ќе докажеме дека е најмал мајорант. Нека $t\in\mathbb{R}^{+}$ е таков што $t<\frac{3}{5}$. Нека $n_0=\left[\frac{1+2t}{3-5t}\right]+1>\frac{1+2t}{3-5t}$, тогаш за $n>n_0$ имаме $\frac{3n-1}{5n+2}>t$. Значи, t не е мајорант за A. Добивме дека $\frac{3}{5}$ е најмал мајорант за A, $\sup A=\frac{3}{5}$. За секој природен број n, $\frac{3n-1}{5n+2}\neq\frac{3}{5}$, значи $\frac{3}{5}\notin A$. Така, множеството A нема најголем елемент. ●

1.77. $A=\left\{\frac{1}{n}\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

Решение. За секој $n\in\mathbb{N}$ имаме $\frac{1}{n}>0$. Значи, 0 е минорант за A. Ќе докажеме дека е најголем минорант. Нека $z\in\mathbb{N}$ е таков што $z>0$. Според Архимедовото својство, постои природен број n, таков што $nz>1$, т.е. $z>\frac{1}{n}>0$. Значи, z не е минорант за A. Добивме дека 0 е најголем минорант за A, $\inf A=0$. За секој природен број n, $\frac{1}{n}\neq 0$, значи $0\notin A$. Така, множеството A нема најмал елемент.

Ќе докажеме дека $\sup A=1$. За секој $n\in\mathbb{N}$ имаме $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}\geq 0$ т.е. $1\geq\frac{1}{n}$, значи, 1 е мајорант за A. Бидејќи $1=\frac{1}{1}\in A$, значи дека 1 е најголем елемент во A, т.е. $\max A=1$, па $\sup A=1$. ●

1.78. $A=\left\{1+\frac{3(-1)^n}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}.$

Решение. За $n\in\mathbb{N}$ имаме $1+\frac{3(-1)^n}{n}\geq 1-\frac{3}{n}=\frac{n-3}{n}\geq -2$. Значи, -2 е минорант за A. Ќе докажеме дека е најголем минорант. Нека $z\in\mathbb{R}$ е таков што $z>-2$. За $n_0=1$ имаме $z>1-\frac{3}{n_0}=-2$. Значи, z не е минорант за A. Добивме дека -2 е најголем минорант за A, $\inf A=-2$. Исто така, $\min A=-2$.

Ќе докажеме дека $\sup A=\frac{5}{2}$. За секој $n\in\mathbb{N}$ имаме

$$\frac{5}{2}-1-\frac{3(-1)^n}{n}=\frac{5n-2n-6(-1)^n}{2n}=\frac{3n-6(-1)^n}{2n}\geq 0\text{, т.е. }\frac{5}{2}\geq 1+\frac{3(-1)^n}{n},$$

значи, $\frac{5}{2}$ е мајорант за A. Ќе докажеме дека е најмал мајорант. Нека $t\in\mathbb{R}^+$ е таков што $t<\frac{5}{2}$. За $n_0=2$, имаме $1+\frac{3(-1)^{n_0}}{n_0}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}>t$. Значи, t не е мајорант за A. Добивме дека $\frac{5}{2}$ е најмал мајорант за A т.е. $\sup A=\frac{5}{2}$. Исто така, $\max A=\frac{5}{2}$. ●

1.79. $A=\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\mid n\in\mathbb{N}\right\}.$

Решение. За секој $n\in\mathbb{N}$ имаме $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}-\frac{1}{3}\geq 0$ т.е. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\geq\frac{1}{3}$, значи, $\frac{1}{3}$ е минорант за A. Ќе докажеме дека е најголем минорант. Нека $z\in\mathbb{R}$ е таков што $z>\frac{1}{3}$. За $n_0=1$ имаме $z>\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3}$. Значи, z не е минорант за A. Добивме дека $\frac{1}{3}$ е најголем минорант за A, т.е. $\inf A=\min A=\frac{1}{3}$.

Ќе докажеме дека $\sup A=\frac{1}{2}$. Навистина, за секој природен број n имаме $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3}\frac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{2}<\frac{1}{2}$. Значи, $\frac{1}{2}$ е мајорант за A. Да претпоставиме дека постои реален број $0 < a < \frac{1}{2}$ така што $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n-1}}}{2} < a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ако избереме

$n_0 = \left[\log_3 \frac{3}{1-2a}\right] + 1$, за $n > n_0$ имаме $n > n_0 = \left[\log_3 \frac{3}{1-2a}\right] + 1 > \log_3 \frac{3}{1-2a}$ $\Rightarrow$

$n - 1 > -\log_3(1-2a)$ $\Rightarrow 3^{n-1} > \frac{1}{1-2a}$ $\Rightarrow \frac{1-2a}{2} > \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$ $\Rightarrow$ $a = \frac{1}{2} - \frac{1-2a}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$.

Контрадикција. Значи, $\frac{1}{2}$ е најмал мајорант за A т.е. $\sup A = \frac{1}{2}$. ●

1.80. Нека A е ограничено подмножество од $\mathbb{R}$. Докажи дека:

а) $\sup A = M \Leftrightarrow M$ е мајорант за A и ($\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A$ таков што $M - \varepsilon < x \leq M$).

б) $\inf A = m \Leftrightarrow m$ е минорант за A и ($\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A$ таков што $m \leq x < m + \varepsilon$).

Решение. а) Нека $\sup A = M$, т.е M е најмал мајорант за множеството A. Ако го претпоставиме спротивното, т.е. $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in A$ да важи $x \leq M - \varepsilon$, добиваме мајорант за A што е помал од M. Контрадикција. Значи, имаме $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A$ таков што $M - \varepsilon < x \leq M$.

За обратното, нека M е мајорант за множеството A и нека важи: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A$ таков што $M - \varepsilon < x \leq M$. Тврдиме дека M е најмал мајорант за A. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постои помал мајорант за A и нека е тоа z. Тогаш за $\varepsilon = M - z > 0$, постои $x \in A$ таков што $z = M - (M - z) < x \leq M$.

Контрадикција. Значи, $\sup A = M$.

б) Нека $\inf A = m$, т.е m е најголем минорант за множеството A. Ако претпоставиме дека $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in A$ важи $m + \varepsilon \leq x$, добиваме минорант за A што е поголем од m. Добивме контрадикција. Значи, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ таков што $m \leq x < m + \varepsilon$.

За обратното, нека m е минорант за множеството A и нека важи:

$\forall\varepsilon>0,\ \exists x\in A$ таков што $m\le x<m+\varepsilon$. Тврдиме дека m е најголем минорант за A. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постои поголем минорант z за A. Тогаш за $\varepsilon=z-m>0$, постои $x\in A$ таков што $m\le x<m+\varepsilon=m+z-m=z$. Контрадикција. Значи, $\inf A=m$. ●

1.81. Дадено е множество $A=\left\{\frac{1}{3}\pm\frac{n}{3n+1}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$. Определи $\sup A$ и $\inf A$.

Решение. За секој $n\in\mathbb{N}$ важи $\frac{1}{3}-\frac{n}{3n+1}<\frac{1}{3}+\frac{n}{3n+1}$. Затоа $\inf A=\inf A_1$ и $\sup A=\sup A_2$, каде $A_1=\left\{\frac{1}{3}-\frac{n}{3n+1}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$ и $A_2=\left\{\frac{1}{3}+\frac{n}{3n+1}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

Бидејќи за секој природен број n, $\frac{1}{3}-\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3(3n+1)}>0$, следува дека 0 е минорант за множеството A_1. Тврдиме дека $0=\inf A_1$. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $n_0=\left[\frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right]+1>\frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}$. Тогаш $x=\frac{1}{3}-\frac{n_0}{3n_0+1}\in A$ и важи $0<x<\varepsilon$.

Од $\frac{1}{3}+\frac{n}{3n+1}<\frac{1}{3}+\frac{n}{3n}=\frac{2}{3}$ следува дека $\frac{2}{3}$ е мајорант за множеството A_2. Тврдиме дека $\frac{2}{3}=\sup A_2$. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $n_0=\left[\frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right]+1>\frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}$. Тогаш $x=\frac{1}{3}+\frac{n_0}{3n_0+1}\in A_2$ и важи $\frac{2}{3}-\varepsilon<x$. Следува дека $\frac{2}{3}=\sup A_2$. Конечно, имаме $\inf A=0$ и $\sup A=\frac{2}{3}$. ●

1.82. Определи $\sup A$ и $\inf A$ ако $A=\left\{\frac{2}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

Решение. За $n\ge1$ имаме $\frac{2}{n}\le\frac{2}{1}=2$. Значи, 2 е мајорант за A. Бидејќи $2=\frac{2}{1}\in A$, следува дека $2=\sup A$. Ќе докажеме дека $\inf A=0$. Јасно е дека 0 е минорант за A. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $n_0=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1>\frac{2}{\varepsilon}$. Тогаш, $x=\frac{2}{n_0}\in A$ и важи $0<x<0+\varepsilon$. Значи, $\inf A=0$. ●

1.83. Нека $A \subset [0,\infty)$ и нека $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in A)$ такво што $x_n \leq \frac{1}{n}$. Докажи дека $\inf A = 0$.

Решение. Бидејќи $A \subset [0,\infty)$, следува дека за секој $x \in A$, $x \geq 0$, т.е. 0 е минорант за A. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран број. Ќе докажеме дека постои $x_\varepsilon \in A$ таков што $x_\varepsilon < 0 + \varepsilon = \varepsilon$. Од Архимедовото својство имаме дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што $n_0\varepsilon > 1$ т.е. $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Од условот на задачата, за секое n, па и за ова n_0, постои $x_{n_0} \in A$ такво што $x_{n_0} \leq \frac{1}{n_0}$. Но, $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ па добивме дека постои $x_\varepsilon = x_{n_0} \in A$ такво што $x_\varepsilon = x_{n_0} < \varepsilon$. Значи, $\inf A = 0$. ●

1.84. Нека $A \subset [1,\infty)$ и нека $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\exists r_n \in A \cap \mathbb{Q})$ такво што $2r_n - r_n^2 > 1 - \frac{1}{n^2}$. Докажи дека $\inf A = 1$.

Решение. Бидејќи $A \subset [1,\infty)$, следува дека за секој $x \in A$, $x \geq 1$, т.е. 1 е минорант за A. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран број. Ќе докажеме дека постои $x_\varepsilon \in A$ таков што $x_\varepsilon < 1 + \varepsilon$. Од Архимедовото својство имаме дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што $n_0\varepsilon > 1$ т.е. $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Од условот на задачата, за секое n, па и за ова n_0, постои $r_{n_0} \in A \cap \mathbb{Q}$ такво што $2r_{n_0} - r_{n_0}^2 > 1 - \frac{1}{{n_0}^2}$. Последното е еквивалентно со

$$\frac{1}{n_0^2} > (r_{n_0} - 1)^2, \text{ т.е. } r_{n_0} - 1 < \frac{1}{n_0}.$$

Бидејќи $r_{n_0} \in A$, имаме дека $r_{n_0} \geq 1$. Од $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ добивме дека постои $x_\varepsilon = r_{n_0} \in A$ такво што $1 \leq x_\varepsilon = r_{n_0} < 1 + \frac{1}{n_0} < 1 + \varepsilon$. Значи, $\inf A = 1$. ●

1.85. Најди: **а)** $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{m}{m+n}$; **б)** $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{m}{m+n}$;

в) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{m-n}{m+n}$; **г)** $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \frac{m-n}{m+n}$.

Решение. а) $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}\frac{m}{m+n}=\sup\left\{\frac{m}{m+n}\,|\,m\in\mathbb{N}\right\}=1$ (види ја задачата **1.59.**), па имаме $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}\frac{m}{m+n}=1$.

б) За секој $m\in\mathbb{N}$ имаме

$\frac{m}{m+n}<\frac{m+1}{m+1+n}\Leftrightarrow m^2+m+mn<m^2+m+mn+n\Leftrightarrow 0<n$. Последново неравенство е точно, па најмалиот елемент на множеството $\left\{\frac{m}{m+n}\middle|m\in\mathbb{N}\right\}$ се добива за $m=1$, т.е. $\inf\limits_{m\in\mathbb{N}}\frac{m}{m+n}=\frac{1}{1+n}$. Натаму, $\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+1+1}$, па следува

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{m\in\mathbb{N}}\frac{m}{m+n}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

в) $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}\frac{m-n}{m+n}=\sup\left\{\frac{m-n}{m+n}\middle|m\in\mathbb{N}\right\}=\sup\left\{\frac{m}{m+n}-\frac{n}{m+n}\,|\,m\in\mathbb{N}\right\}=$

$=\sup\left\{\frac{m}{m+n}\,|\,m\in\mathbb{N}\right\}-\inf\left\{\frac{n}{m+n}\middle|m\in\mathbb{N}\right\}=1-n\inf\left\{\frac{1}{m+n}\middle|m\in\mathbb{N}\right\}=$

$=1-n\cdot 0=1$, па имаме $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}\frac{m-n}{m+n}=1$.

г) $\inf\limits_{m\in\mathbb{N}}\frac{m-n}{m+n}=\inf\left\{\frac{m-n}{m+n}\middle|m\in\mathbb{N}\right\}=\inf\left\{\frac{m}{m+n}-\frac{n}{m+n}\,|\,m\in\mathbb{N}\right\}=$

$=\inf\left\{\frac{m}{m+n}\,|\,m\in\mathbb{N}\right\}-\sup\left\{\frac{n}{m+n}\,|\,m\in\mathbb{N}\right\}=0-n\sup\left\{\frac{1}{m+n}\,|\,m\in\mathbb{N}\right\}=$

$=0-n\cdot 1=-n$, па имаме $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\inf\limits_{m\in\mathbb{N}}\frac{m-n}{m+n}=\sup\,\{-n\,|\,n\in\mathbb{N}\}=$

$=-\inf\{n\,|\,n\in\mathbb{N}\}=-1$ (види ги задачите **1.60.**, **1.61.** и **1.65.**). ●

1.7. Биномна формула

За $a,b \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$ важи формулата: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

При тоа $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, (k = 0,1,2,\cdots n)$, каде што $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$) за $k \in \mathbf{N}$ и $0! = 1$.

Коефициентот $\binom{n}{k}$ го викаме биномен коефициент.

Задачи

1.86. Развиј го биномот според биномната формула.

1) $(3+2x)^5$; **2)** $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{y}\right)^4$; **3)** $(x^2+x-3)^4$.

Решение:

а) $(3+2x)^5 = \binom{5}{0}3^5(2x)^0 + \binom{5}{1}3^4(2x)^1 + \binom{5}{2}3^3(2x)^2 + \binom{5}{3}3^2(2x)^3 + \binom{5}{4}3^1(2x)^4 + \binom{5}{5}3^0(2x)^5 =$

$= 243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5$.

б) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{y}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{3}{y}\right)^0 + \binom{4}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^3\left(\frac{3}{y}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{3}{y}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^1\left(\frac{3}{y}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^0\left(\frac{3}{y}\right)^4 =$

$= \frac{x^4}{16} + \frac{3x^3}{2y} + \frac{27x^2}{2y^2} + \frac{54x}{y^3} + \frac{81}{y^4}$.

в) $(x^2+x-3)^4 = (x^2+(x-3))^4 = \binom{4}{0}(x^2)^4(x-3)^0 + \binom{4}{1}(x^2)^3(x-3)^1 +$

$+\binom{4}{2}(x^2)^2(x-3)^2 + \binom{4}{3}(x^2)^1(x-3)^3 + \binom{4}{4}(x^2)^0(x-3)^4 =$

$= x^8 + 4x^7 - 6x^6 - 32x^5 + 19x^4 + 96x^3 - 54x^2 - 108x + 81$. ●

1.87. Со примена на биномната формула пресметај:

а) 1.03^{10} точно на четири децимални места.

б) 0.98^{6} точно на пет децимални места.

Решение. а) $1.03^{10}=(1+0.03)^{10}=\binom{10}{0}0.03^0+\binom{10}{1}0.03^1+\binom{10}{2}0.03^2+\binom{10}{3}0.03^3+$

$+\binom{10}{4}0.03^4+\binom{10}{5}0.03^5+\binom{10}{6}0.03^6+\binom{10}{7}0.03^7+\binom{10}{8}0.03^8+\binom{10}{9}0.03^9+\binom{10}{10}0.03^{10}=1.3439$

б) $0.98^6=(1-0.02)^6=\binom{6}{0}0.02^0-\binom{6}{1}0.02^1+\binom{6}{2}0.02^2-\binom{6}{3}0.02^3+\binom{6}{4}0.02^4-$

$-\binom{6}{5}0.02^5+\binom{6}{6}0.02^6=0.88584$. ●

1.88. Определи го седмиот член од развојот на биномот

а) $(x-a)^{12}$; **б)** $\left(\frac{a\sqrt{3}}{b}+2\sqrt{b}\right)^8$

Решение. а) $T_{6+1}=\binom{12}{6}x^{12-6}(-a)^6=924x^6a^6$.

б) $T_{6+1}=\binom{8}{6}\left(\frac{a\sqrt{3}}{b}\right)^{8-6}\left(2\sqrt{b}\right)^6=5376a^2b$. ●

1.89. Најди го оној член од развојот на биномот:

а) $\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}\right)^{11}$ што го содржи x^5;

б) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$ што не го содржи x.

Решение. а) $T_{k+1}=\binom{11}{k}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{11-k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^k=\binom{11}{k}x^{\frac{22+k}{6}}$. Од $\frac{22+k}{6}=5$ следува дека $k=8$, од каде што заклучуваме дека деветтиот член од развојот не го содржи x^5, односно $T_{8+1}=165x^5$.

б) $T_{k+1}=\binom{9}{k}(x^2)^{9-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=\binom{9}{k}(-1)^k x^{18-2k-k}$. Од $18-3k=0$ следува дека $k=6$, од каде што заклучуваме дека седмиот член од развојот го содржи x, односно $T_{6+1}=84$. ●

1.90. Определи го тринаесетиот член од развојот на биномот $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$ ако биномниот коефициент на третиот член од развојот е 105.

Решение. Од $\frac{n(n+1)}{2}=105$ следува дека $n_1=15,\ n_2=-14$. Бидејќи n е природен број, се земаат предвид само позитивните решенија на равенката.

Тогаш, $T_{12+1}=\binom{15}{12}(9x)^{15-12}\left(-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12}=455x^{-3}$. ●

1.91. Во развиениот облик на биномот $\left(a\sqrt{a}-\sqrt[3]{\frac{2}{a^2}}\right)^n$ збирот на биномните коефициенти на вториот и третиот член изнесува 45. Определи го членот што го содржи a^7.

Решение. Од $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=45$ следува дека $n_1=9$ и $n_2=-10$. Бидејќи n е природен број, се земаат во предвид само позитивните решенија на равенката.

Тогаш,

$$T_{k+1}=\binom{9}{k}(a\sqrt{a})^{9-k}\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{a^2}}\right)^k=\binom{9}{k}(-1)^k\left(\sqrt[3]{2}\right)^k a^{9-k+\frac{9-k}{2}-\frac{2k}{3}}.$$

Од $9-k+\frac{9-k}{2}-\frac{2k}{3}=7$ следува дека $k=3$, односно четвртиот член од развојот $T_{3+1}=-168a^7$ го содржи a^7. ●

1.92. Биномните коефициенти на четвртиот и шестиот член од развојот на биномот $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^n$ се однесуваат како $5:18$. Определи го членот што не зависи од x.

Решение. Од $\binom{n}{3}:\binom{n}{5}=5:18$ следува дека $n_1=12$ и $n_2=-5$. Бидејќи n е природен број, се земаат предвид само позитивните решенија на равенката, односно $n=12$. Тогаш, $T_{k+1}=\binom{12}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{12-k}(\sqrt{x})^k=\binom{12}{k}x^{-12+k+\frac{k}{2}}$.

Од $-12+k+\frac{k}{2}=0$ следува дека $k=8$, односно деветтиот член од развојот $T_{8+1}=495$ не зависи од x. ●

1.93. Определи го x во изразот $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}+a\cdot\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^8$ ако четвртиот член од развојот е еднаков на $56a^{\frac{11}{2}}$.

Решение. Од $T_{3+1}=T_4=56a^{11/2}$ следува дека

$$\binom{8}{3}\left(\sqrt[5]{a^4}\Big/\sqrt[x]{a^{x-1}}\right)^{8-3}\left(a\cdot\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^3=56a^{11/2},$$

односно $56a^{\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}}=56a^{\frac{11}{2}}$. Според тоа $\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}=\frac{11}{2}$, од каде што добиваме $x_1=2;\ x_2=-5$. ●

1.94. Определи за кои вредности на x во развојот на биномот $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$ збирот на третиот и петтиот член е еднаков на 135 и збирот на биномните коефициенти пред првите три члена е еднаков на 22.

Решение. Од $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=22$ следува дека $n_1=6$ и $n_2=-7$. Бидејќи n е природен број, се земаат предвид само позитивните решенија на равенката. За третиот и петтиот член имаме

$$T_{2+1}=\binom{6}{2}\left(\sqrt{2^x}\right)^{6-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^2=15\cdot 2^x;\qquad T_{4+1}=\binom{6}{4}\left(\sqrt{2^x}\right)^{6-4}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^4=15\cdot 2^{2-x}.$$

Од условот на задачата $T_3+T_5=135$ следува $15\cdot 2^{x+1}+15\cdot 2^{2-x}=135$, односно $x_1=2,\ x_2=-1$. ●

1.8. Комплексни броеви

1.95. Најди ги реалните броеви x и y од равенката:

$$(7+2i)x-(5-4i)y=-1-i\,.$$

Решение. $7x+2xi-5y+4yi=-1-i \Leftrightarrow 7x-5y+(2x+4y)i=-1-i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x-5y=-1 \\ 2x+4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{9}{38},\ y=-\frac{5}{38}\,. \bullet$$

1.96. Определи го $z\in\mathbb{C}$ за кое важи $\frac{z}{\overline{z}}=i$, $\left|\frac{z}{z+1}\right|=1$.

Решение. Нека $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$. Тогаш $\overline{z}=x-iy$, па имаме:

$$\frac{z}{\overline{z}}=i \Leftrightarrow z=\overline{z}i \Leftrightarrow x+iy=y+ix \Leftrightarrow x=y\,.$$

Тогаш $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2x^2}$ и $|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{1+2x+2x^2}$, па од $\left|\frac{z}{z+1}\right|=1$ следува дека $\sqrt{2x^2}=\sqrt{1+2x+2x^2}$ т.е. $x=-\frac{1}{2}$. Бараниот број е $z=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}$. ●

1.97. Ако $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ се такви што $|z_1|=1$, $|z_2|=1$ и $z_1z_2\neq-1$, тогаш $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}$.

Решение. Доволно е да докажеме дека $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}$.

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)} \Leftrightarrow \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{1+z_1z_2}} \Leftrightarrow \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_2}{1+\overline{z_1z_2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_2}{1+\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2} \Leftrightarrow (z_1+z_2)(1+\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2)=(\overline{z}_1+\overline{z}_2)(1+z_1z_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}_1+\overline{z}_1z_1z_2+\overline{z}_2+z_1z_2\overline{z}_2=z_1+z_1\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2+z_2+z_2\overline{z}_2\cdot\overline{z}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}_1+|z_1|^2z_2+\overline{z}_2+z_1|z_1|^2=z_1+|z_1|^2\overline{z}_2+z_2+|z_1|^2\overline{z}_1\,.$$

Заради условот, последното равенство е точно, па следува $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}$. ●

1.98. Докажи дека за секои $z,w\in\mathbb{C}$ важи:

$$|1-\overline{z}w|^2-|z-w|^2=(1+|zw|)^2-(|z|+|w|)^2\,.$$

Решение. $|1-\overline{z}w|^2-|z-w|^2=(1-\overline{z}w)\overline{(1-\overline{z}w)}-(z-w)\overline{(z-w)}=$

$$=(1-\overline{z}w)(1-z\overline{w})-(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=1+|z|^2|w|^2-|z|^2-|w|^2=$$

$$=1+2|zw|+|zw|^2-|z|^2-2|zw|-|w|^2=(1+|zw|)^2-(|z|+|w|)^2\,. \bullet$$

1.99. Пресметај $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, каде што $n \in \mathbb{N}$.

Решение. $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = \dfrac{(1+i)^{n-2}}{(1-i)^{n-2}}(1+i)^2 = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{n-2}(1+i)^2 == \left(\dfrac{1+i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}\right)^{n-2}(1+i)^2 =$

$$= \left(\frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}\right)^{n-2}(1+i)^2 = \left(\frac{2i}{2}\right)^{n-2} 2i = 2i^{n-1} = \begin{cases} -2i, & n=4k \\ 2, & n=4k+1 \\ 2i, & n=4k+2 \\ -2, & n=4k+3 \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}. \ \bullet$$

1.100. Нека $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Што претставува во комплексната рамнина множеството:

а) $\{z | z \in \mathbb{C}, |z-a| = b\}$; **б)** $\{z | z \in \mathbb{C}, |z-a| \le b\}$?

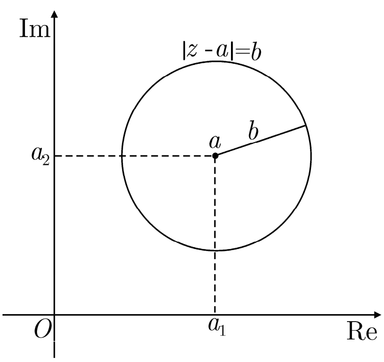
Решение. а) Ако $b=0$ добиваме $|z-a|=0$ и оттука $z=a$, па во овој случај бараното множество е $\{a\}$.

Сега да претпоставиме дека $b>0$. Нека $z = z_1 + iz_2, a = a_1 + ia_2$. Тогаш

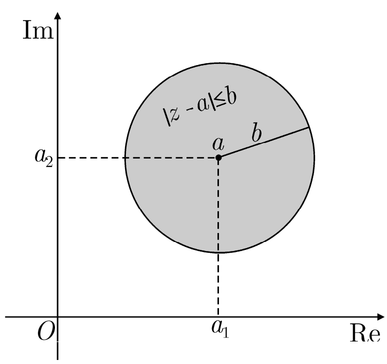
$$|z-a| = |z_1 + iz_2 - a_1 - ia_2| = |z_1 - a_1 + i(z_2 - a_2)| = \sqrt{(z_1-a_1)^2 + (z_2-a_2)^2},$$

па добиваме $\sqrt{(z_1-a_1)^2 + (z_2-a_2)^2} = b$, односно $(z_1-a_1)^2 + (z_2-a_2)^2 = b^2$. Значи во овој случај бараното множество е кружница со центар во точката $a = a_1 + ia_2$ и радиус b. (Црт. 1)

б) За $b>0$ слично како во **а)** добиваме $(z_1-a_1)^2 + (z_2-a_2)^2 \le b^2$, па бараното множество е кругот со центар во точката $a = a_1 + ia_2$ и радиус b (заедно со кружницата $(z_1-a_1)^2 + (z_2-a_2)^2 = b^2$). (Црт. 2) $\bullet$



Црт.1



Црт.2

1.101. Нека $z,t,w\in\mathbb{C}$. Докажи дека $|z-w|=|z-t|$ ако и само ако растојанието меѓу z и w е еднакво со растојанието меѓу z и t.

Решение. Нека $z=z_1+iz_2, t=t_1+it_2, w=w_1+iw_2$. Тогаш

$$|z-w|=|z-t| \Leftrightarrow \sqrt{(z_1-w_1)^2+(z_2-w_2)^2}=\sqrt{(z_1-t_1)^2+(z_2-t_2)^2}$$

па растојанието меѓу точките (z_1,z_2) и (w_1,w_2) е еднакво на растојанието меѓу точките (z_1,z_2) и (t_1,t_2), што требаше да се докаже. ●

1.102. Ако трите точки z_1,z_2,z_3 од комплексната рамнина лежат на единичната кружница $|z|=1$ и $z_1+z_2+z_3=0$, докажи дека тогаш тие се темиња на рамностран триаголник.

Решение. Според задача **1.101.** Треба да докажеме дека

$$|z_2-z_1|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|.$$

Бидејќи z_1,z_2,z_3 лежат на единичната кружница, имаме дека $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Должините на страните на триаголникот се $|z_2-z_1|$, $|z_2-z_3|$ и $|z_3-z_1|$. Лесно се проверува дека $|z_2-z_3|^2=5+2(z_2\overline{z}_3+\overline{z}_2z_3)$. Од условот $z_1+z_2+z_3=0$ имаме дека:

$$|z_2-z_1|^2=|z_2+z_2+z_3|^2=|2z_2+z_3|^2=4|z_2|^2+2z_2\overline{z}_3+2\overline{z}_2z_3+|z_3|^2=5+2(z_2\overline{z}_3+\overline{z}_2z_3).$$

Слично, $|z_3-z_1|^2=|z_3+z_2+z_3|^2=5+2(z_2\overline{z}_3+\overline{z}_2z_3)$.

Заклучуваме дека $|z_2-z_1|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$, т.е. триаголникот е рамностран. ●

1.103. Пресметај: **а)** $(1+i\sqrt{3})^{30}$; **б)** $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{20}$.

Решение. Тригонометрискиот облик на комплексниот број $z=x+iy$ е

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \text{ каде што: } \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \text{ а } \varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geq 0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0\end{cases}.$$

а) $\rho=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\dfrac{\pi}{3}$, $1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Од Моавровата формула имаме:

$$(1+i\sqrt{3})^{30}=2^{30}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{30}=2^{30}\left(\cos\frac{30\pi}{3}+i\sin\frac{30\pi}{3}\right)=2^{30}.$$

б) $\rho=2$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$, $\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

Заради Моавровата формула, добиваме:

$$\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{20}=2^{20}\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{20\pi}{4}\right)\right)=-2^{20}\,.\ \bullet$$

1.104. Докажи дека за секои $n\in\mathbb{N}$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ важи:

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

Решение. $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}+i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n=$

$$=\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n=$$
$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right),$$

што требаше да се докаже. Притоа, ги користевме идентитетите:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1;\quad \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\quad \text{и}\quad \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,.\bullet$$

1.105. Пресметај: **а)** $\sqrt[3]{1}$; **б)** $\sqrt[4]{1}$; **в)** $\sqrt[n]{1}$.

Решение. Нека $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $w^n=z$. Тогаш,

$$w=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right),\ k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}\,.$$

Од $1=1(\cos 0+i\sin 0)$ имаме дека за $z=1$, $\rho=1$ и $\varphi=0$. Значи:

а) $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3};\ k=0,1,2$;

б) $\sqrt[4]{1}=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2};\ k=0,1,2,3$;

в) $\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n};\ k=0,1,\cdots,n-1$. $\bullet$

1.106. Пресметај $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

Решение. а) $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, бидејќи $\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ и

$\varphi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{1}\right)=-\frac{\pi}{4}$. Слично, $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Конечно,

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}}=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\sqrt[6]{\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\sqrt[6]{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{6}+i\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\sqrt[6]{\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\sqrt[6]{\cos\left(-\frac{10\pi}{24}\right)+i\sin\left(-\frac{10\pi}{24}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\sqrt[6]{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{72}+\frac{2k\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{72}+\frac{2k\pi}{6}\right)\right).\ \bullet$$

1.107. Реши ја во $\mathbb{C}$ равенката: $x^4+5x^2+9=0$.

Решение. Со смената $x^2=t$, равенката го добива обликот $t^2+5t+9=0$, чии решенија се $t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-36}}{2}=\frac{-5\pm i\sqrt{11}}{2}$. Значи, $x^2=\frac{-5\pm i\sqrt{11}}{2}$.

Нека $x=a+ib\sqrt{11},\ a,b\in\mathbb{R}$. Тогаш, $a^2+2iab\sqrt{11}-11b^2=\frac{-5\pm i\sqrt{11}}{2}$, од каде што го добиваме системот: $\begin{cases}a^2-11b^2=-\frac{5}{2}\\ 2ab\sqrt{11}=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}\end{cases}$ чии што решенија се $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=-\frac{1}{2}$, $b=\pm\frac{1}{4a}=\pm\frac{1}{2}$. Бараните решенија се:

$$x_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2},\quad x_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2},\quad x_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}\ \text{ и }\ x_4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2}.\ \bullet$$

1.108. Определи ги сите решенија на равенката $(z+a)^n=z^n,\ n\in\mathbb{N}$.

Решение. $(z+a)^n=z^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+a}{z}\right)^n=1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{a}{z}\right)^n=1 \Leftrightarrow 1+\frac{a}{z}=\sqrt[n]{1}$. За решенијата на равенката имаме

$$-\frac{a}{z_k}=1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}=$$

$$=2\sin^2\frac{k\pi}{n}-i2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}=2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)=$$

$$=2\sin\frac{k\pi}{n}(-i)\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

Следува

$$z_k=\frac{a}{2i\sin\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)}=\frac{a}{2}\frac{\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}}{i\sin\frac{k\pi}{n}}=-\frac{a}{2}\left(1+i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right),k=0,1,\cdots,n-1.\ \bullet$$

II. Низи од реални броеви

2.1. Дефиниција на низа. Монотоност и ограниченост на низи

Дефиниција. Секое пресликување $a:n\mapsto a_n$ од множеството природни броеви во множество реални броеви ја викаме низа од реални броеви.

Вообичаено е низите да ги означуваме пократко со $(a_n), n\in\mathbb{N}$, само (a_n) или пак $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. Членот a_n се вика $n-$ти член или општ член на низата, додека n е индекс на членот a_n.

Дефиниција. За низа (a_n) велиме дека монотоно расте ако $\forall n\in\mathbf{N}$, $a_{n+1}\geq a_n$.

Низата (a_n) строго монотоно расте ако $\forall n\in\mathbf{N}$, $a_{n+1}>a_n$.

За низа (a_n) велиме дека монотоно опаѓа ако $\forall n\in\mathbf{N}$, $a_{n+1}\leq a_n$. Низата (a_n) строго монотоно опаѓа ако $\forall n\in\mathbf{N}$, $a_{n+1}<a_n$.

Низите што растат или опаѓаат се викаат монотони низи.

Дефиниција. Низа (a_n) е ограничена од горе ако постои реален број M таков што $a_n\leq M$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Ако постои реален број m таков што $a_n\geq m$, $\forall n\in\mathbf{N}$, тогаш велиме дека низата (a_n) е ограничена од долу.

Накусо велиме дека низата е ограничена ако е ограничена и од горе и од долу, т.е. постојат реални броеви m и M такви што $m\leq a_n\leq M$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Задачи.

2.1. Определи ги првите пет члена на следните низи зададени со нивниот општ член: **а)** $a_n=\dfrac{2n-1}{2n+1}$; **б)** $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; **в)** $a_n=\begin{cases} n, & n \text{ е парен број} \\ \dfrac{1}{n+1}, & n \text{ е непарен број}\end{cases}$;

г) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$; **д)** $a_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$; **ѓ)** $a_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)(n+2)}$.

Решение. а) $a_1 = \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2+1} = \frac{3}{5},\ a_3 = \frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3+1} = \frac{5}{7},\ a_4 = \frac{7}{9},\ a_5 = \frac{9}{11}$.

б) $a_1 = 2,\ a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2,\ a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3,\ a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4,\ a_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5$.

в) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = 2,\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = 4,\ a_5 = \frac{1}{6}$.

г) $a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{3!},\ a_3 = \frac{1}{5!},\ a_4 = -\frac{1}{7!},\ a_5 = \frac{1}{9!}$.

д) $a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{3},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{5}$.

ѓ) $a_1 = \frac{1}{6},\ a_2 = -\frac{1}{6},\ a_3 = \frac{3}{20},\ a_4 = -\frac{2}{15},\ a_5 = \frac{5}{42}$. ●

2.2. Определи го општиот член на следниве низи:

а) $1,3,5,7,9,\cdots$; **б)** $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\cdots$;

в) $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\cdots$; **г)** $\frac{3}{2},\frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\cdots$;

д) $4,\frac{7}{2},\frac{10}{3},\frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\cdots$; **ѓ)** $\frac{1}{2},-\frac{4}{9},\frac{9}{28},\ -\frac{16}{65},\cdots$;

е) $1,-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$.

Решение. а) $a_n = 2n-1$; **б)** $a_n = \frac{1}{2n-1}$; **в)** $a_n = \frac{1}{n^2}$; **г)** $a_n = \frac{n+1}{n}$;

д) $a_n = \frac{3n+1}{n}$; **ѓ)** $a_n = \frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+1}$; **е)** $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; . ●

2.3. Докажи дека следните низи се монотоно растечки:

а) $a_n = \frac{n}{n+1}$; **б)** $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$;

в) $a_n = \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$; **г)** $a_n = n-\sqrt{n}$.

Решение. а) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$

следува дека $a_n < a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

б) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $a_n - a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n+3}{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$ следува

дека $a_n < a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

в) За секој $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2} = \frac{6n^2+2}{4n} = \frac{3n^2+1}{2n}$.

Од $a_n - a_{n+1} = \frac{3n^2+1}{2n} - \frac{3n^2+6n+4}{2n+2} = \frac{-3n^2-3n+1}{2n(n+1)} \le 0$ следува дека $a_n < a_{n+1}$ од

каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

г) За секој $n \in \mathbb{N}$, $a_n - a_{n+1} = (n - \sqrt{n}) - \left(n+1-\sqrt{n+1}\right) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1 < 0$

бидејќи $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1$.

Според тоа, $a_n < a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно расте. ●

2.4. Докажи дека следните низи се монотоно опаѓачки:

а) $a_n = \frac{1}{n}$; **б)** $a_n = \frac{1}{n^2}$;

в) $a_n = \frac{3n+5}{6n-5}$; **г)** $a_n = \frac{3n+4}{n+1}$.

Решение. а) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ следува дека

$a_n > a_{n+1}$ од каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа.

б) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0$ следува дека

$a_n > a_{n+1}$ од каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа.

в) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $a_n - a_{n+1} = \frac{3n+5}{6n-5} - \frac{3n+8}{6n+1} = \frac{45}{(6n-5)(6n+1)} > 0$ следува

дека $a_n > a_{n+1}$ од каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа.

г) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $a_n - a_{n+1} = \frac{3n+4}{n+1} - \frac{3n+7}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ следува

дека $a_n > a_{n+1}$ од каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа. ●

2.5. Докажи дека следните низи се монотони.:

а) $a_n = 1+3+5+\dots+(2n-1)$;

б) $a_n = 2+4+6+\cdots+2n$;

в) $a_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$;

г) $a_n = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+2)}$;

д) $a_n = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\cdots\cdot(5n-4)}$;

ѓ) $a_n = \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n-3)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\cdots\cdot(4n-2)}$;

е) $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{3^n n!}$;

ж) $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Решение. а) За секој $n\in\mathbb{N}$, од $a_n - a_{n+1} = (1+3+5+\cdots+(2n-1))-$

$-(1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)) = -(2n+1) < 0$ следува дека $a_n < a_{n+1}$ од каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

б) За секој $n\in\mathbb{N}$, од $a_n - a_{n+1} = (2+4+6+\cdots+2n)-(2+4+6+\cdots+(2n+2)) =$ $= -(2n+2) < 0$ следува дека $a_n < a_{n+1}$ од каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

в) За секој $n\in\mathbb{N}$, од $a_n - a_{n+1} = \left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)-$

$$-\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}\right) = -\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} < 0$$

следува дека $a_n < a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

г) За секој $n\in\mathbb{N}$, од

$$a_n - a_{n+1} = \left(\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\right)-\left(\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\right) =$$

$= -\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} < 0$ следува дека $a_n < a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

д) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\dots\cdot(5n-4)}}{\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)(3n+2)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\dots\cdot(5n-4)(5n+1)}} = \frac{5n+1}{3n+2} \geq 1$ следува дека

$a_n \geq a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа.

ѓ) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\dots\cdot(4n-3)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\dots\cdot(4n-2)}}{\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\dots\cdot(4n-3)(4n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\dots\cdot(4n-2)(4n+2)}} = \frac{4n+2}{4n+1} \geq 1$ следува дека

$a_n \geq a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа.

е) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{3^n n!}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!}} = \frac{3n+3}{2n+1} \geq 1$ следува дека

$a_n \geq a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа.

ж) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{n+1}{2} \geq 1$ следува дека $a_n \geq a_{n+1}$, од

каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа. ●

2.6. Испитај дали се монотони следниве низи:

а) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; **б)** $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$;

в) $a_n = 2^n$; **г)** $a_n = \sqrt[n]{5}$;

д) $a_n = \frac{n^3}{3^n}$; **ѓ)** $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$;

е) $a_n = (-1)^n$; **ж)** $a_n = \cos(n\pi)$.

Решение. а) За секој $n \in \mathbb{N}$, од

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)} \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} \frac{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq 1$$ (бидејќи $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n}$),

следува дека $a_n \geq a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа.

б) За секој $n \in \mathbb{N}$, од

$$a_n - a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)-\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\cdots+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)= -\frac{1}{3^{n+1}}<0$$

следува дека $a_n < a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

в) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \le 1$, следува дека $a_n \le a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

г) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt[n]{5}}{\sqrt[n+1]{5}} = \sqrt[n(n+1)]{5} \ge 1$, следува дека $a_n \ge a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа.

д) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n^3}{3^n}}{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}} = \frac{3n^3}{(n+1)^3} = 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3 \ge 1$, па за $n \ge 3$ следува дека $a_n \ge a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно опаѓа почнувајќи од третиот член.

ѓ) За секој $n \in \mathbb{N}$, од $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{3^n n!}{n^n}}{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \frac{e}{3} < 1$, следува дека $a_n \le a_{n+1}$, од каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

е) Општиот член на низата е $a_n = \begin{cases} 1, n \text{ е парен број} \\ -1, n \text{ е непарен број} \end{cases}$. Тогаш разликата $a_n - a_{n-1} = \begin{cases} 2, \ n \text{ е парен број} \\ -2, \ n \text{ е непарен број} \end{cases}$ алтернативно го менува знакот од каде заклучуваме дека низата не е монотона.

ж) Општиот член на низата е $a_n = \begin{cases} 1, n \text{ е парен број} \\ -1, n \text{ е непарен број} \end{cases}$. Тогаш разликата $a_n - a_{n-1} = \begin{cases} 2, \ n \text{ е парен број} \\ -2, \ n \text{ е непарен број} \end{cases}$ алтернативно го менува знакот од каде заклучуваме дека низата не е монотона. ●

2.7. Испитај дали се монотони следниве низи:

а) $a_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!}$; **б)** $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; **в)** $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Решение. а) Ќе докажеме дека за секој $n \in \mathbb{N}$, количникот $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ е помал од 1.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!(2n+1)!!}{(2n+3)!!n!} = \dfrac{n+1}{2n+3} < \dfrac{2n+1}{2n+3} < 1$. Значи, $a_{n+1} < a_n$, т.е. низата монотоно опаѓа.

б) $$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^n \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n} \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

Од Бернулиевото неравенство: $(1+h)^n \geq 1+nh,\ h > -1$ и од $-\dfrac{1}{(n+1)^2} > -1$

добиваме $\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1-\dfrac{n}{(n+1)^2}$.

Така, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leq \dfrac{1}{1-\dfrac{n}{(n+1)^2}} \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+3n^2+3n+2} < 1$, од каде заклучуваме дека низата монотоно расте.

в) Користејќи го Бернулиевото неравенство, имаме

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} >$$

$$> \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

Значи, $a_n > a_{n+1}$, па низата монотоно опаѓа. ●

2.8. Испитај ја монотоноста на следните низи зададени со рекурентните формули:

а) $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c+a_n}$, $c > 0$;

б) $a_1 = \dfrac{a}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{a+a_n^2}{2}$, $0 < a \leq 1$;

в) $a_1 \neq 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \dfrac{b}{a_n}}{2}$, $b \geq 0$.

Решение. а) $a_n = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots \sqrt{c}}}}$. Со принципот на математичка индукција ќе докажеме дека низата е монотоно растечка. Јасно е дека $a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}} > a_1$. Под претпоставка дека $a_n > a_{n-1}$, имаме $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} > \sqrt{c + a_{n-1}} = a_n$.

б) Со принципот на математичка индукција ќе докажеме дека низата е монотоно растечка. За $n = 2$ имаме $a_2 = \dfrac{a}{2} + \dfrac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}{2} > \dfrac{a}{2} = a_1$. Под претпоставка дека $a_n > a_{n-1}$, бидејќи $a_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, имаме

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a + a_n^2 - a - a_{n-1}^2}{2} = \frac{(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})}{2} > 0.$$

Значи, $a_{n+1} > a_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$, па низата монотоно расте.

в) Ќе разгледуваме три случаи во зависност од b и a_1.

(i) Ако $b = 0$, тогаш $a_n = \dfrac{a_1}{2^{n-1}}$. Бидејќи $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{\frac{a_1}{2^{n-1}}}{\frac{a_1}{2^n}} = 2 > 1$, следува дека во овој случај низата монотоно опаѓа.

(ii) (*ii*) Ако $b > 0$ и $a_1 > 0$, тогаш јасно е дека и $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

За $n > 1$ имаме

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + \dfrac{b}{a_n} - 2a_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a_n} - a_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b - a_n^2}{a_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2a_n}\left(\sqrt{b} + a_n\right)\left(\sqrt{b} - a_n\right) = \frac{1}{4a_n}\left(\sqrt{b} + a_n\right)\left(2\sqrt{b} - 2a_n\right) =$$

$$= \frac{1}{4a_n}\left(\sqrt{b} + a_n\right)\left(2\sqrt{b} - a_{n-1} - \frac{b}{a_{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{-1}{4a_n a_{n-1}}\left(\sqrt{b} + a_n\right)\left(a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}\sqrt{b} + b\right) = \frac{-1}{4a_n a_{n-1}}\left(\sqrt{b} + a_n\right)\left(a_{n-1} - \sqrt{b}\right)^2 \leq 0.$$

Значи, почнувајќи од вториот член низата монотоно опаѓа.

(iii) Ако $b > 0$ и $a_1 < 0$, тогаш јасно е дека и $a_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. За $n > 1$ имаме

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+\frac{b}{a_n}-2a_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a_n}-a_n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b-a_n^2}{a_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a_n}\left(\sqrt{b}-a_n\right)\left(\sqrt{b}+a_n\right)=\frac{1}{4a_n}\left(\sqrt{b}-a_n\right)\left(2\sqrt{b}+2a_n\right)=$$

$$=\frac{1}{4a_n}\left(\sqrt{b}-a_n\right)\left(2\sqrt{b}+a_{n-1}+\frac{b}{a_{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4a_na_{n-1}}\left(\sqrt{b}-a_n\right)\left(a_{n-1}^2+2a_{n-1}\sqrt{b}+b\right)=$$

$$=\frac{1}{4a_na_{n-1}}\left(\sqrt{b}-a_n\right)\left(a_{n-1}+\sqrt{b}\right)^2\geq 0\,.$$

Значи, почнувајќи од вториот член низата монотоно расте. ●

2.9. Докажи дека следните низи се ограничени:

а) $a_n=\frac{1}{n}$; **б)** $a_n=(-1)^n$;

в) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$; **г)** $a_n=\frac{1}{n^2}$;

д) $a_n=\frac{n-1}{n}$; **ѓ)** $a_n=\frac{2n+1}{2n+2}$;

е) $a_n=\frac{3n-1}{4n+1}$; **ж)** $a_n=\frac{2n^2+1}{2+n^2}$.

Решение. а) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\frac{1}{n}\leq 1$, од каде што следува дека низата е ограничена.

б) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\left|(-1)^n\right|=1$, па низата е ограничена.

в) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}\leq 1$, од каде што следува дека низата е ограничена.

г) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\frac{1}{n^2}\leq 1$, од каде што следува дека низата е ограничена.

д) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\left|\frac{n-1}{n}\right|=1-\frac{1}{n}<1$, па следува ограниченост на низата.

ѓ) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\left|\frac{2n+1}{2n+2}\right|=1-\frac{1}{2n+2}<1$, од каде што следува дека низата е ограничена.

е) За секој $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = \left|\frac{3n-1}{4n+1}\right| = \left|1 - \frac{n+2}{4n+1}\right| < 1$, бидејќи $\frac{n+2}{4n+1} < 1$, од каде што следува дека низата е ограничена.

ж) За секој $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = \left|1 + \frac{n^2-1}{n^2+2}\right| \leq 1 + \frac{n^2-1}{n^2+2} \leq 2$, од каде што следува дека низата е ограничена. ●

2.10. Докажи дека следните низи се неограничени:

а) $a_n = (-1)^n n$; **б)** $a_n = n^2 - n$.

Решение. а) За произволен реален број $M > 0$ имаме

$$|a_{[M]+1}| = \left|(-1)^{[M]+1}([M]+1)\right| = [M]+1 > M ,$$

од каде што следува дека низата е неограничена.

б) За произволен реален број $M > 0$ имаме

$$|a_{[M]+1}| = \left|([M]+1)^2 - ([M]+1)\right| \geq [M]^2 + 3[M] + 2 > M ,$$

од каде што следува дека низата е неограничена. ●

2.11. Испитај која од следните низи е ограничена, а која е неограничена:

а) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$; **б)** $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$; **в)** $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+4n+8}$;

г) $a_n = \sqrt[n]{3}$; **д)** $a_n = \sqrt{n}$; **ѓ)** $a_n = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$;

е) $a_n = \frac{\sin n}{n}$; **ж)** $a_n = \frac{n}{n+\sin n}$; **з)** $a_n = \frac{2^n}{2^n+1}$.

Решение. а) За секој $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right| < 1$, од каде што следува дека низата е ограничена.

б) За секој $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = \left|\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}\right| < 1$, од што следува дека низата е ограничена.

в) За секој $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = \left|\frac{(n+1)^2}{n^2+4n+8}\right| < 1$, од што следува дека низата е ограничена.

г) За секој $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = |\sqrt[n]{3}| \leq 3$, од каде што следува дека низата е ограничена.

д) За произволен реален број $M > 0$, $\left|a_{([M]+1)^2}\right| = \left|\sqrt{([M]+1)^2}\right| = [M]+1 > M$, од каде следува дека низата е неограничена.

ѓ) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\left|\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\right|\leq 1$, од каде што следува дека низата е ограничена.

е) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leq\frac{1}{n}\leq 1$, од што следува дека низата е ограничена.

ж) За $n=1$, $a_1=\frac{1}{1+\sin 1}<1$, а за секој $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$

$$|a_n|=\left|\frac{n}{n+\sin n}\right|=\frac{n}{n+\sin n}\leq\frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n-1}\leq 2\,,$$

од каде што следува дека низата е ограничена.

з) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\left|\frac{2^n}{2^n+1}\right|=\left|\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}\right|\leq 1$, од каде што следува дека низата е ограничена. ●

2.12. Испитај која од следните низи е ограничена, а која е неограничена:

а) $0.1,\ 0.11,\ 0.111,\ \cdots;$ **б)** $0.4,\ 0.41,\ 0.411,\ 0.4111,\ \cdots;$

в) $a_n=\sqrt{n(n+1)}$, **г)** $a_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Решение: а) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\left|\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right|=\frac{1-\frac{1}{10^n}}{9}<\frac{1}{9}$, од каде што следува дека низата е ограничена.

б) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\left|\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right|=\frac{4}{10}+\frac{1}{10}\frac{1-\frac{1}{10^{n-2}}}{9}<\frac{37}{90}$, од каде што следува дека низата е ограничена.

в) Нека $M>0$, е произволен реален број. Тогаш

$$|a_{[M]+1}|=\left|\sqrt{([M]+1)([M]+1+1)}\right|>M\,,$$

од каде што следува дека низата е неограничена.

г) За секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\left|\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right|=\left|\frac{n}{2n+1}\right|\leq 1$,

од каде што следува дека низата е ограничена. ●

2.2. Гранична вредност на низа. Особини на конвергентните низи

Дефиниција: Велиме дека бројот a_0 е *гранична вредност (лимес) на низата* $\left(a_n\right)$ *кога* n *тежи кон бесконечност* ако на секој произволно мал позитивен број ε можеме да му придружиме природен број n_0 таков што сите членови на низата со индекс поголем или еднаков на n_0, припаѓаат во интервалот $(a_0-\varepsilon, a_0+\varepsilon)$, т.е.

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \left|a_n-a_0\right|<\varepsilon .$$

Користиме ознака: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a_0$.

Ако низата нема определена гранична вредност, тогаш велиме дека таа е *дивергентна.*

Ако низите $\left(a_n\right)$ и $\left(b_n\right)$ конвергираат кон реални броеви, тогаш важи

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_nb_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(ca_n\right)=c\lim_{n\to\infty}a_n,\ c\in\mathbb{R};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n},\ b_n\neq 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}b_n\neq 0.$$

Задачи:

2.13. Докажи дека следните низи имаат граница еднаква на нула:

а) $a_n=\dfrac{1}{n}$; **б)** $a_n=\dfrac{1}{n^k},\ k>0$;

в) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$; **г)** $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n^k}$;

д) $a_n=\dfrac{1}{2n+1}$; **ѓ)** $a_n=\dfrac{1}{2^n}$;

е) $a_n=\dfrac{\cos n}{n}$; **ж)** $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$.

Решение. а) Нека $\varepsilon>0$ е произволен. Тогаш имаме $|a_n-a|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$. Бројот n_0 го избираме како најмал природен број кој е решение на неравенката $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Оттука имаме $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Според тоа најмалиот природен број кој е решение на последната неравенка е $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Значи за $n\ge n_0$ ќе важи $\frac{1}{n}\le\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. Според тоа, за произволен $\varepsilon>0$ постои $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\in\mathbb{N}$ така што за секој $n\ge n_0$ важи $|a_n-a|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}\le\frac{1}{n_0}<\varepsilon$, па низата конвергира кон нула.

б) Нека $\varepsilon>0$ е произволен. Имаме $|a_n-a|=\left|\frac{1}{n^k}-0\right|=\frac{1}{n^k}$. Од неравенката

$\frac{1}{n^k}<\varepsilon$ добиваме $n^k>\frac{1}{\varepsilon}$. Оттука $n>\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}$ па, најмалиот природен број кој е решение на последната неравенка е $n_0=\left[\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1$. Тогаш за секој $n\ge n_0$ важи

$$n^k\ge n_0^k\ge\left(\left[\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1\right)^k>\left(\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^k=\frac{1}{\varepsilon},$$

па $\frac{1}{n^k}\le\frac{1}{n_0^k}<\varepsilon$. Значи избираме $n_0=\left[\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1$. Според тоа за произволен $\varepsilon>0$ постои $n_0=\left[\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1\in\mathbb{N}$ така што за секој $n\ge n_0$ важи

$$|a_n-a|=\left|\frac{1}{n^k}-0\right|=\frac{1}{n^k}\le\frac{1}{n_0^k}<\varepsilon,$$

па низата конвергира кон нула.

в) Нека $\varepsilon>0$ е произволен. Избираме $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Тогаш за секој $n\ge n_0$,

$$|a_n-a|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

г) За произволен $\varepsilon>0$ избираме $n_0=\left[\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1$. Тогаш за секој $n\ge n_0$,

$$|a_n-a|=\left|\frac{(-1)^k}{n^k}-0\right|=\frac{1}{n^k}<\varepsilon.$$

д) За произволен $\varepsilon>0$ имаме $|a_n-a|=\left|\frac{1}{2n+1}-0\right|=\frac{1}{2n+1}$. Решавајќи ја неравенката $\frac{1}{2n+1}<\varepsilon$ добиваме $n>\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$, па $n_0=\max\left\{\left[\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right]+1,1\right\}$ (ако $\varepsilon>1$ тогаш

$\left[\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right]+1$ не е природен број) . За секој $n \geq n_0$ ќе важи $n \geq n_0 > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$, односно $\frac{1}{2n+1} < \varepsilon$, заради претходната дискусија.

Како и претходно, за произволен $\varepsilon > 0$ постои $n_0 = \max\left\{\left[\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right]+1, 1\right\} \in \mathbb{N}$ така што за секој $n \geq n_0$ важи $|a_n - a| = \left|\frac{1}{2n+1} - 0\right| \leq \frac{1}{2n_0+1} < \varepsilon$, па низата конвергира кон нула.

ѓ) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Решавајќи ја неравенката $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ добиваме дека $n > -\log_2 \varepsilon$, па избираме $n_0 = \max\left\{\left[-\log_2 \varepsilon\right]+1, 1\right\}$. Тогаш за секој $n \geq n_0$, ќе важи $2^n \geq 2^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Значи, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 = \max\left\{\left[-\log_2 \varepsilon\right]+1, 1\right\}$ така што за секој $n \geq n_0$ важи $|a_n - a| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$, па низата конвергира кон нула.

е) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Тогаш за секој $n \geq n_0$,

$$|a_n - a| = \left|\frac{\cos n}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

ж) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \max\left\{\left[\frac{1-3\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\right]+1, 1\right\}$. Тогаш за секој $n \geq n_0$,

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+3}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n+3}} < \varepsilon . \ \bullet$$

2.14. Докажи дека низата :

а) $a_n = \frac{n}{n+1}$ конвергира кон бројот 1;

б) $a_n = \frac{3n+1}{n}$ конвергира кон бројот 3;

в) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ конвергира кон бројот 2;

г) $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ конвергира кон бројот 1.

Решение. а) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \max\left\{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]+1, 1\right\}$. Тогаш за секој $n \geq n_0$, $|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

б) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогаш за секој $n \geq n_0$,

$|a_n - a| = \left|\frac{3n+1}{n} - 3\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

в) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогаш за секој $n \geq n_0$,

$$|a_n - a| = \left|2 - \frac{1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

г) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \max\left\{[-\lg\varepsilon] + 1, 1\right\}$.

Тогаш за секој $n \geq n_0$, $|a_n - a| = \left|1 - \frac{1}{10^n} - 1\right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$.

2.15. Докажи дека

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+3}{6n+5} = \frac{2}{3}$.

Решение. а) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \max\left\{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1, 1\right\}$. Тогаш за секој $n \geq n_0$, $|a_n - a| = \left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

б) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \max\left\{\left[\frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}\right] + 1, 1\right\}$. Тогаш за секој $n \geq n_0$, $|a_n - a| = \left|\frac{2n-1}{2n+1} - 1\right| = \frac{2}{2n+1} < \varepsilon$.

в) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \left[\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$.

Тогаш за секој $n \geq n_0$, $|a_n - a| = \left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon$.

г) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \max\left\{\left[\frac{1-5\varepsilon}{6\varepsilon}\right] + 1, 1\right\}$.

Тогаш за секој $n \geq n_0$, $|a_n - a| = \left|\frac{4n+3}{6n+5} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{6n+5} < \varepsilon$. ●

2.16. Докажи дека следните низи се дивергентни:

а) $a_n = (-1)^n$; **б)** $a_n = (-1)^n n$;

в) $a_n = 1^n + (-1)^n$; **г)** $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Решение. а) $a_n = \begin{cases} 1, n \text{ е парен број} \\ -1, n \text{ е непарен број} \end{cases}$. Нека a е произволен реален број и

$\varepsilon = \frac{1}{2}$. За произволен природен број n_0, ако избереме $n = n_0$ или $n = n_0 + 1$ следува $|a_n - a| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$.

б) Бидејќи $a_n = \begin{cases} n\,, n \text{ е парен број} \\ -n\,, n \text{ е непарен број} \end{cases}$, за произволен реален број a и $\varepsilon = \frac{1}{2}$ постојат бесконечно многу членови на низата надвор од интервалот $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$. Тоа значи дека за произволен природен број n_0, ако избереме $n = n_0$ или $n = n_0 + 1$ следува $|a_n - a| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$.

в) Бидејќи $a_n = \begin{cases} 2\,, n \text{ е парен број} \\ 0\,, n \text{ е непарен број} \end{cases}$ за произволен реален број a и $\varepsilon = \frac{1}{2}$ постојат бесконечно многу членови на низата надвор од интервалот $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$. Тоа значи дека за произволен природен број n_0, ако избереме $n = n_0$ или $n = n_0 + 1$ следува $|a_n - a| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$.

г) Ако n е парен број, тогаш $a_n = 1 + \frac{1}{n} > 1$. Ако n е непарен број, тогаш $a_n = -1 + \frac{1}{n} < 0$. Според тоа, за произволен реален број a и $\varepsilon = \frac{1}{2}$ постојат бесконечно многу членови на низата надвор од интервалот $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$. Тоа значи дека за произволен природен број n_0, ако избереме $n = n_0$ или $n = n_0 + 1$ следува $|a_n - a| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$. ●

2.17. Дадена е низтата $a_n = \frac{n+1}{n+3}$. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, а потоа определи го n_0 ако:

а) $\varepsilon = 0{,}1$; **б)** $\varepsilon = 0{,}01$; **в)** $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \max\left\{\left[\frac{2-3\varepsilon}{\varepsilon}\right], 1\right\}$. Тогаш за секој $n \geq n_0$, $|a_n - a| = \left|\frac{n+1}{n+3} - 1\right| = \frac{2}{n+3} < \varepsilon$.

а) Од претходното следува дека n_0 ќе биде најмалиот природен број кој е решение на неравенката $\frac{2}{n+3}<\varepsilon$. Земајќи $\varepsilon=0{,}1$ последната неравенка е еквивалентна со неравенката $20<n+3$, т.е. $n>17$, па $n_0=18$.

б) Слично како во **а)** од $\frac{2}{n+3}<\frac{1}{100}$ добиваме $200<n+3$, односно $n_0=198$;

в) $n_0=1998$. ●

2.18. Определи го општиот член a_n на низата $0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\cdots$. Докажи дека $\lim_{n\to\infty} a_n=1$. Почнувајќи од кое n е исполнето $|a_n-1|<0{,}0001$?

Решение. Имаме $a_1=\frac{9}{10}=1-\frac{1}{10}$, $a_2=\frac{99}{100}=1-\frac{1}{10^2}$, $a_3=1-\frac{1}{10^3}$, итн. Значи $a_n=1-\frac{1}{10^n}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n=1$ (Види ја задачата **2.14.** под **г)**). Сега ја решаваме неравенката $\left|1-\frac{1}{10^n}-1\right|<\varepsilon=\frac{1}{10^4}$, односно $10^n>10^4$ од каде што добиваме $n_0=5$. ●

2.19. Дадена е низата $a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$.

а) Докажи дека $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$;

б) Почнувајќи од кое n е исполнето $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<0{,}001$?

Решение. а) Нека ε е произволен позитивен реален број. Имаме $a_n=\frac{n(n+1)}{2n^2}$. Избираме $n_0=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$. Тогаш за секој $n\ge n_0$, $|a_n-a|=\left|\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}<\varepsilon$.

б) $n_0=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1=\left[\frac{1}{2\cdot 10^{-3}}\right]+1=500+1=501$. ●

2.20. Дадена е низата $a_n=\frac{n+1}{3n+4}$.

а) Докажи дека $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{3}$.

б) Почнувајќи од кое n бесконечно многу членови на низата се наоѓаат во интервалот $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{100},\frac{1}{3}+\frac{1}{100}\right)$?

Решение. а) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \max\left\{\left[\frac{1}{9\varepsilon} - \frac{4}{3}\right] + 1, 1\right\}$.

Тогаш за секој $n \geq n_0$, $|a_n - a| = \left|\frac{n+1}{3n+4} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3(3n+4)} < \varepsilon$.

б) Слично како во задачата **2.19.** под **б)** добиваме дека $n_0 = 10$. ●

2.21. Дадена е низата $a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$.

а) Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$.

б) Почнувајќи од кое n бесконечно многу членови на низата се наоѓаат во интервалот $\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{100}, \frac{4}{3} + \frac{1}{100}\right)$.

Решение. а) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $n_0 = \left[\sqrt{\left|\frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon}\right|}\right] + 1$. Тогаш за секој $n \geq n_0$, $|a_n - a| = \frac{5}{3(3n^2+2)} < \varepsilon$.

б) $n_0 = 6$. ●

2.22. Докажи дека:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$, $a > 0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^a}{n!} = 0$, $a \in \mathbb{R}$;

ѓ) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $|q| < 1$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} n^b q^n = 0$, $|q| < 1, b \in \mathbb{R}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a \in \mathbb{R}$.

ѕ) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^a$.

и) 1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$, за $a_n > 0$ и $a > 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = -\infty$, за $a_n > 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \infty$, за $a_n > 0$;

ј) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$, за $a_n > 0$ и $a > 0$.

Решение. а) I *начин*: Прво ќе докажеме дека за $n>2$ важи $n!>2^{n-1}$. Навистина, за $n=3$ имаме $3!=6>2^{3-1}=4$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за природниот број n. Тогаш за $n+1$ имаме

$$(n+1)!=n!(n+1)\overset{\text{и.п.}}{>}2^{n-1}(n+1)>2^{n-1}\cdot 2=2^{(n+1)-1},$$

па тврдењето важи за секој природен број n.

Сега, нека $\varepsilon>0$ е произволен. Имаме $\left|\frac{1}{n!}-0\right|=\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$. Да ја решиме неравенката $\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$. Таа е еквивалентна со $2^{n-1}>\frac{1}{\varepsilon}$, односно $(n-1)>-\log_2\varepsilon$, т.е. $n>1-\log_2\varepsilon$. Сега да избереме $n_0=\max\{[1-\log_2\varepsilon]+1,1\}$. За $n\geq n_0$ ќе важи

$$\frac{1}{2^{n-1}}\leq\frac{1}{2^{n_0-1}}<\varepsilon .$$

Значи, за произволен $\varepsilon>0$ постои $n_0=\max\{[1-\log_2\varepsilon]+1,1\}\in\mathbb{N}$ така што за секој $n\geq n_0$ важи $\left|\frac{1}{n!}-0\right|=\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$, па следува $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$.

II *начин*: Важи неравенството $n!\geq n$ за секој природен број n. За $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. Сега нека $n\geq n_0$. Тогаш $\left|\frac{1}{n!}-0\right|=\frac{1}{n!}<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon$, па $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$.

б) Нека $\varepsilon>0$ е произволен. Тогаш $\left|\frac{1}{n^a}-0\right|=\frac{1}{n^a}$.

Имаме $\frac{1}{n^a}<\varepsilon\Leftrightarrow n^a>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}$. Нека $n_0=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}\right]+1$. Тогаш за $n\geq n_0$ имаме $\left|\frac{1}{n^a}-0\right|=\frac{1}{n^a}\leq\frac{1}{n_0^a}<\varepsilon$, па следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$.

в) 1) $a>1$. Да означиме $b=a-1>0$. Ја формираме низата $c_n=\sqrt[n]{1+b}-1$. Бидејќи $1+b>1$ добиваме дека $c_n>0$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Од неравенството на Бернули имаме $1+b=(1+c_n)^n>1+nc_n$, односно $c_n<\frac{b}{n}$.

Сега нека $\varepsilon>0$ е произволен. Постои природен број n_0 таков што $\frac{b}{n_0}<\varepsilon$. За $n\geq n_0$ добиваме $|\sqrt[n]{a}-1|\overset{a>1}{=}\sqrt[n]{a}-1=\sqrt[n]{1+b}-1=1+c_n-1=c_n<\frac{b}{n}\leq\frac{b}{n_0}<\varepsilon$, па $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ за $a>1$.

2) $a<1$. Тогаш $\frac{1}{a}>1$, па од претходното следува

$$1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}}\text{, т.е. }\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,.$$

3) $a=1$. Тогаш $\sqrt[n]{a}=1$, па тврдењето е тривијално.

г) За природниот број $n>1$ важи $\sqrt[n]{n}>1$. Ја формираме низата $d_n=\sqrt[n]{n}-1\geq 0$. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$. За $n>1$ важи

$$\sqrt[n]{n}=1+d_n\Leftrightarrow n=(1+d_n)^n=1+\binom{n}{1}d_n+\binom{n}{2}d_n^2+\binom{n}{2}d_n^3+\ldots>\binom{n}{2}d_n^2=\frac{n(n+1)}{2}d_n^2\,.$$

Значи $d_n<\sqrt{\dfrac{2}{n+1}}$.

Нека $\varepsilon>0$. Да ја решиме неравенката $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$.

Имаме $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon\Leftrightarrow\dfrac{2}{n-1}<\varepsilon^2\Leftrightarrow(n-1)\varepsilon^2>2\Leftrightarrow n>\dfrac{2+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$. Заради $2+\varepsilon^2>\varepsilon^2$ добиваме $\dfrac{2+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}>1$. Да избереме $n_0=\left[\dfrac{2+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\right]+1>1$. Тогаш за $n\geq n_0$ важи

$$|d_n-0|=d_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\sqrt{\frac{2}{n_0-1}}<\varepsilon\text{, па }\lim_{n\to\infty}d_n=0\,.$$

Конечно $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}((\sqrt[n]{n}-1)+1)=\lim\limits_{n\to\infty}(d_n+1)=1+\lim\limits_{n\to\infty}d_n=1$.

д) Ако $a<0$ тогаш $-a>0$ и $0\leq\dfrac{n^a}{n!}\leq n^a=\dfrac{1}{n^{-a}}$. Од **б)** важи $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{-a}}=0$, па следува $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n!}=0$.

Нека $a>0$ и $\varepsilon>0$ е произволен. Тогаш постои природен број $k>a$. Нека $n_0=2k+1$ и нека $n\geq n_0$. Тогаш $n\geq n_0=2k+1>2k$, па $k<\dfrac{n}{2}$. За секој $i\in\{1,\ldots,k\}$ важи $n-k+i>n-\dfrac{n}{2}+i=\dfrac{n}{2}+i>\dfrac{n}{2}$. Користејќи го претходното добиваме

$$\left|\frac{n^a}{n!}-0\right|=\frac{n^a}{n!}<\frac{n^k}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}=\frac{n^k}{(n-k)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}<$$
$$<\frac{n^k}{(n-k)!\left(\frac{n}{2}\right)^k}=\frac{2^k}{(n-k)!}$$

Користејќи го **а)** и ставајќи $m=n-k$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^k}{(n-k)!}=2^k\cdot\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{m!}=0$, па постои $n_1\in\mathbb{N}$, така што за $n\geq n_1$ важи $\dfrac{2^k}{(n-k)!}<\varepsilon$. Сега за $n_2=\max\{n_0,n_1\}$ и $n\geq n_2$ ќе важи $\left|\dfrac{n^a}{n!}-0\right|=\dfrac{n^a}{n!}<\dfrac{2^k}{(n-k)!}<\varepsilon$, па следува $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n!}=0$ за $a>0$.

За $a=0$ задачата се сведува на **а)**.

ѓ) Ако $q=0$ тврдењето е тривијално. Затоа да претпоставиме дека $q\neq 0$. Нека $\varepsilon>0$ е произволен. Имаме $|q|^n<\varepsilon \Leftrightarrow n\ln|q|<\ln\varepsilon \overset{\ln|q|<0}{\Leftrightarrow} n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. Да избереме $n_0=\max\left\{\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1,1\right\}$ и нека $n\geq n_0$. Тогаш $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, па од претходното следува

$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$, односно $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

е) Нека $b<0$. Тогаш $-b>0$, па од **б)** следува $\lim\limits_{n\to\infty} n^b=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{-b}}=0$. Исто така од **ѓ)** имаме $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ за $|q|<1$, па и нивниот производ ќе има лимес 0.

Нека $b>0$ и $\varepsilon>0$ е произволен. Тогаш постои природен број $k>b$ и нека $n_0=2k+1$. За $n\geq n_0$ важи $n\geq n_0=2k+1>2k$, т.е. $k<\dfrac{n}{2}$. Бидејќи $|q|<1$ постои $h>0$ така што $|q|=\dfrac{1}{1+h}$. Сега имаме

$$\begin{aligned}
&(1+h)^n=1+\binom{n}{1}h+\binom{n}{2}h^2+...+\binom{n}{k}h^k+...+h^n>\binom{n}{k}h^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}h^k=\\
&=\frac{(n-k+1)(n-k+2)...(n-k+k)}{k!}h^k>\frac{\left(n-\frac{n}{2}+1\right)\left(n-\frac{n}{2}+2\right)...\left(n-\frac{n}{2}+k\right)}{k!}h^k=\\
&=\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)...\left(\frac{n}{2}+k\right)}{k!}h^k>\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!}h^k.
\end{aligned}$$

Конечно $|n^bq^n-0|=n^b|q|^n=\dfrac{n^b}{(1+h)^n}<\dfrac{n^b}{\left(\frac{n}{2}\right)^k\frac{h^k}{k!}}=\dfrac{n^{b-k}2^kk!}{h^k}$. Заради $b-k<0$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} n^{b-k}=0$ и уште h и k се константи, па и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{b-k}2^kk!}{h^k}=0$. Значи за $\varepsilon>0$ постои $n_1\in\mathbb{N}$ така што за $n\geq n_1$ важи $0<\dfrac{n^{b-k}2^kk!}{h^k}<\varepsilon$. Нека $n_2=\max\{n_0,n_1\}$ и $n\geq n_2$. Тогаш за n важат сите претходни оцени па добиваме

$$|n^bq^n-0|=n^b|q|^n<\frac{n^{b-k}2^kk!}{h^k}<\varepsilon.$$

ж) Прво ќе докажеме со помош на ПМИ дека за секој природен број n важи неравенството $n!>\left(\dfrac{n}{3}\right)^n$. За $n=1$ имаме $1>\left(\dfrac{1}{3}\right)^1=\dfrac{1}{3}$, па неравенството е точно. Да претпоставиме дека неравенството важи за природниот број n, т.е. $n!>\left(\dfrac{n}{3}\right)^n$.

Тогаш

$$(n+1)!=n!(n+1)>\left(\frac{n}{3}\right)^n(n+1)=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}\frac{n^n}{3^n}(n+1)=$$

$$=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}3\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

Во последниот чекор искористивме дека низата $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е монотоно растечка и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, па за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e<3$. Значи тврдењето важи за секој природен број.

Сега, $0\le\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}}=\frac{3}{n}$ и заради $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$, добиваме дека и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

з) Постои $n_0\in\mathbb{N}$, така што $n_0>2|a|$. Тогаш $\frac{|a|}{n_0}<\frac{1}{2}$, и за секој $k\ge n_0$ важи $\frac{|a|}{k}\le\frac{|a|}{n_0}<\frac{1}{2}$. Сега, нека $\varepsilon>0$ и n_0 е избран така што $n_0>2|a|$. За $n\ge n_0$ ќе важи $\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{|a|^{n-n_0}}{(n_0+1)(n_0+2)\dots n}=\frac{|a|^{n_0}}{n_0!}\underbrace{\left(\frac{|a|}{n_0+1}\right)\left(\frac{|a|}{n_0+2}\right)\dots\left(\frac{|a|}{n}\right)}_{n-n_0\text{ пати}}\overset{n_0+i>n_0}{<}$

$$<\frac{|a|^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}=\frac{|a|^{n_0}2^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{1}{2^n}\qquad(1)$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a|^{n_0}2^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{1}{2^n}=0$, за даденото ε постои $n_1\in\mathbb{N}$, така што за $n\ge n_1$ важи

$$\frac{|a|^{n_0}2^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{1}{2^n}<\varepsilon.\qquad(2)$$

Сега, нека $n_2=\max\{n_0,n_1\}$. За $n\ge n_2$ важат и (1) и (2) па добиваме

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\frac{|a|^{n_0}2^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{1}{2^n}<\varepsilon,\text{ т.е. }\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

ѕ) Важи $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}=1$. Заради $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ следува дека за секој $k\in\mathbb{N}$ постои $n_0=n_0(k)\in\mathbb{N}$ така што за секој $n\ge n_0$ важи $\left|a_n-a\right|<\frac{1}{k}$, т.е. $-\frac{1}{k}<a_n-a<\frac{1}{k}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Заради $\lim\limits_{k\to\infty} e^{\frac{1}{k}} = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} e^{-\frac{1}{k}} = 1$ следува дека постојат $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ така што за секој $k \geq k_1$ важи $\left|e^{\frac{1}{k}} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{e^a}$ и за секој $k \geq k_2$ важи $\left|e^{-\frac{1}{k}} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{e^a}$.

Нека $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ и нека $k \geq k_0$.

Тогаш важи $\left|e^{\frac{1}{k}} - 1\right| <$, $\left|e^{-\frac{1}{k}} - 1\right| <$ и постои $n_0 = n_0(k) \in \mathbb{N}$ така што за секој $n \geq n_0$ важи $|a_n - a| < \frac{1}{k}$, т.е. $-\frac{1}{k} < a_n - a < \frac{1}{k}$.

Нека $n \geq n_0$. Имаме $e^{a_n} - e^a = e^a\left(e^{a_n - a} - 1\right)$ и $e^{-\frac{1}{k}} - 1 < e^{a_n - a} - 1 < e^{\frac{1}{k}} - 1$, т.е. $e^a\left(e^{-\frac{1}{k}} - 1\right) < e^a\left(e^{a_n - a} - 1\right) < e^a\left(e^{\frac{1}{k}} - 1\right)$.

Значи, ако $a_n - a < 0$, важи $e^a\left(e^{-\frac{1}{k}} - 1\right) < e^a\left(e^{a_n - a} - 1\right) < 0$, а ако $a_n - a > 0$ важи $0 < e^a\left(e^{a_n - a} - 1\right) < e^a\left(e^{\frac{1}{k}} - 1\right)$. Според тоа

$$\left|e^a\left(e^{a_n - a} - 1\right)\right| < \max\left\{e^a\left|e^{\frac{1}{k}} - 1\right|, e^a\left|e^{-\frac{1}{k}} - 1\right|\right\} < e^a \frac{\varepsilon}{e^a} = \varepsilon.$$

Следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^a$.

и) 1) Прво ќе го докажеме тврдењето за $a = 1$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $e^{\varepsilon} > 1$ и $e^{-\varepsilon} < 1$ следува дека

постои $n_1 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n \geq n_1$ важи $a_n < e^{\varepsilon}$ и

постои $n_2 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n \geq n_2$ важи $a_n > e^{-\varepsilon}$.

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и нека $n \geq n_0$. Тогаш важи $a_n > e^{-\varepsilon}$ и $a_n > e^{-\varepsilon}$, т.е. $\ln a_n > -\varepsilon$ и $\ln a_n < \varepsilon$. Следува дека $-\varepsilon < \ln a_n < \varepsilon$, т.е. $|\ln a_n| < \varepsilon$.

Значи, $|\ln a_n - \ln a| = |\ln a_n - \ln 1| = |\ln a_n| < \varepsilon$, за секој $n \geq n_0$, па следува тврдењето.

Сега, нека $a \neq 1$. Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a} = 1$, па од претходното следува дека

$$0=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{a_n}{a}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln a_n-\ln a\right),$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$.

2) Нека $M<0$ е произволен. Тогаш заради $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ и $a_n>0$ следува дека постои

$n_0\in\mathbb{N}$ така што за секој $n\geq n_0$ важи $0<a_n<e^M$.

Така, за $n_0\in\mathbb{N}$ имаме $\ln a_n<\ln e^M=M$, па следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty$

3) Слично како 2)

j) $\lim\limits_{n\to\infty}{a_n}^{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln {a_n}^{b_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{b_n\ln a_n}\overset{\text{s)}}{=}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n\ln a_n\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n}\overset{\text{и)}}{=}e^{b\ln a}=a^b$. ●

Определи ги следните граници: **(2.23. - 2.62.)**

2.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n-1}{5n^2+n-1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n-1}{5n^2+n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(5+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{3}{5}$. ●

2.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+4}{n^2+2}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+4}{n^2+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=3$. ●

2.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3+1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=0\cdot\dfrac{3}{1}=0$. ●

2.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(4-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(2+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}=0$ ●

2.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+4n-1}{7n^3+3n^2-4n+2}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+4n-1}{7n^3+3n^2-4n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(5-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(7+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}=\dfrac{5}{7}$. ●

2.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}\right)^3=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$.

Притоа искористивме дека

$$\lim_{n\to\infty}a_n^3=\lim_{n\to\infty}(a_na_na_n)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^3$$

при услов низата a_n да конвергира. ●

2.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2++3n+4}\right)^{10}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2++3n+4}\right)^{10}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2++3n+4}\right)^{10}=\dfrac{1}{2^{10}}$. ●

2.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(3n+2)(5n-7)}{n^3}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(3n+2)(5n-7)}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(5-\frac{7}{n}\right)}{n^3}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{7}{n}\right)=1\cdot3\cdot5=15\,. \; ●$$

2.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+2}-\dfrac{n^2}{n-1}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+2}-\dfrac{n^2}{n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3(n-1)-n^2(n^2+2)}{(n^2+2)(n-1)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3-2n^2}{n^3-n^2+2n-2}=-1\,. \; ●$$

2.32. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n^2}{3n-5}-2n\right)$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n^2}{3n-5}-2n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-6n^2+10n}{3n-5}=\dfrac{10}{3}$. ●

2.33. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+2)^2-(n-2)^2}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+2)^2-(n-2)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{8n}=\frac{1}{2}$. ●

2.34. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!(1+n+1)}{n!(n+2)(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. ●

2.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$.

Заради $1+\frac{1}{n}>1$ добиваме $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$. Од $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ следува дека и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$, па $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$. ●

2.36. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{n\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}}$.

Сега, од $1<\sqrt{1+\frac{4}{n}}<1+\frac{4}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)=1$ добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{4}{n}}=1$. Аналогно, $0<1-\frac{3}{n}<1$ за $n\geq 4$, па $1-\frac{3}{n}<\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}<1$. Од $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)=1$ следува $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}=1$. Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=1$. ●

2.37. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0. \bullet$$

2.38. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}\right)\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}=$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3-(2n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}=0. \bullet$$

2.39. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+n\right)}{\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)-n^2}{\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}+1\right)}=$$

$$=\frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\sqrt{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right)}+1}=\frac{3}{2}\,.\ \bullet$$

2.40. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+3n-1)-(n^2+n+1)}{\left(\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2+n+1}\right)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2+n+1}}=\frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}}=1\,.\ \bullet$$

2.41. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=1\,.\ \bullet$

2.42. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}\,\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+1}=0\,.\ \bullet$$

2.43. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1}=\frac{1}{3}\,.\ \bullet$$

2.44. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{1+2^n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{1+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{2^n}+1}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}+1}=1$. ●

2.45. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3^{n+1}}{2+3^n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3^{n+1}}{2+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3^n}-3}{\dfrac{2}{3^n}+1}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}-3}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{3^n}+1}=-3$. ●

2.46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-4}{1+2^n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-4}{1+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{4}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}+1}=\dfrac{2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}+1}=2$. ●

2.47. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1}{2\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+5}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1}{2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+5}=\dfrac{1}{5}$. ●

2.48. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+7^{n+2}}{5^n+7^{n+1}}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+7^{n+2}}{5^n+7^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+7^2}{\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+7}=\dfrac{5\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+7^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+7}=7$. ●

2.49. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{4}\dfrac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}}=\dfrac{3}{4}$. ●

2.50. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$. ●

2.51. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\dfrac{1}{3}$. ●

2.52. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}}{\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(2-\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{2n^3(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}=\frac{\left(2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}{2\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}=1\,.\bullet$$

2.53. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}{n\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=$

$$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^4(1+\frac{1}{n})^2}{n^4(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}=\frac{3}{2}\frac{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{4}\ \bullet$$

2.54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(2-1)}\,\cancel{(2+1)}}{2^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{(3-1)}\,\cancel{(3+1)}}{\cancel{3^2}}\cdot\frac{\cancel{(4-1)}\,\cancel{(4+1)}}{\cancel{4^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{(n-1)}\,\cancel{(n+1)}}{\cancel{n^2}}\cdot\frac{\cancel{n}\,(n+2)}{(n+1)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+2}=\frac{1}{2}\,.\bullet$$

2.55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2=e^2\,.\bullet$

2.56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)=e^2.\bullet$

2.57. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}}=\frac{e}{1}=e\ \bullet$$

2.58. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n}, k\in\mathbb{N}$.

Решение. Бидејќи низата $b_n=\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}$ е добиена од низата $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ со изоставување на првите k членови следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$, па имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k-k}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{k}}=\frac{e}{1^k}=e\,.\ \bullet$$

2.59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{2}}\overset{\text{задача 2.22 j)}}{=}e^{\frac{1}{2}}.\ \bullet$

(2.60-2.62) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, каде

2.60. а) $a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$;

б) $a_n=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$;

Решение. а) За секој природен број k важи $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, па

$$a_n=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+...+\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Значи $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1$.

б) Од

$$a_n=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+...+n(n+1)}{n^3}=\frac{1(1+1)+2(2+1)+...+n(n+1)}{n^3}=$$
$$=\frac{(1^1+2^2+...+n^2)+(1+2+...+n)}{n^3}=\frac{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^3}=$$
$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}+\frac{n(n+1)}{2n^3}$$

добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$. ●

2.61. $a_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$;

Решение. За секој природен број k важи

$$1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{k(k+1)-2}{k(k+1)}=\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}=\frac{(k^2-1)+(k-1)}{k(k+1)}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)},$$

па имаме $a_n=\frac{1\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot 3}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{6}}{\cancel{4}\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{7}}{\cancel{5}\cdot\cancel{6}}\cdot...\cdot\frac{(\cancel{n-2})(\cancel{n+1})}{(\cancel{n-1})\cancel{n}}\cdot\frac{(\cancel{n-1})(n+2)}{n(\cancel{n+1})}=\frac{n+2}{3n}$. Според

тоа $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$. ●

2.62. $a_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}$

Решение.

$$\frac{1}{2}a_n=a_n-\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}-\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2^3}-\frac{5}{2^4}-\ldots-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=$$
$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+\ldots+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n+1}}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Од задача **2.22.** под **ѓ)** следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$, а од задача **2.22.**

под **е)** дека $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$. Според тоа $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}a_n=\frac{3}{2}$, па $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$. ●

2.63. Определи ги границите на низите:

а) $0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ \cdots,$

б) $0{,}4;\ 0{,}43;\ 0{,}433;\ 0{,}4333;\ \cdots,$

в) $0{,}5;\ 0{,}51;\ 0{,}511;\ 0{,}5111;\ \cdots,$

г) $0{,}31;\ 0{,}312;\ 0{,}3122;\ 0{,}31222;\ \cdots.$

Решение. а) Од $a_n=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots\frac{3}{10^n}=\frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{10^{n-1}}\right)=\frac{3}{10}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$

следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{10}\frac{10}{9}=\frac{1}{3}.$

б) Од $a_n=\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots\frac{3}{10^n}=\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{10^{n-2}}\right)=\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{10}}$

следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{13}{30}.$

в)Од $a_n=\frac{5}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\frac{1}{10^n}=\frac{5}{10}+\frac{1}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{10^{n-2}}\right)=\frac{5}{10}+\frac{1}{10^2}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{10}}$

следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{10}+\frac{1}{10^2}\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{46}{90}.$

г) Од

$$a_n=\frac{31}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\cdots\frac{2}{10^n}=\frac{31}{10^2}+\frac{2}{10^3}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{10^{n-3}}\right)=\frac{31}{10^2}+\frac{2}{10^3}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-3}}{1-\frac{1}{10}}$$

следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{31}{10^2}+\frac{2}{10^3}\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{281}{900}.$ ●

2.64. Дали се конвергентни низите:

а) $a_n=\frac{1}{n};$

б) $a_n=\frac{n}{n+5};$

в) $a_n=\frac{2n-1}{3n+1};$

г) $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n};$

д) $a_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}$;

ѓ) $a_n = \frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$;

е) $0{,}3;\ 0{,}31;\ 0{,}311;\ 0{,}3111;\ \cdots;$

ж) $0{,}42;\ 0{,}423;\ 0{,}4233;\ 0{,}42333;\ \cdots.$

Решение. а) Од $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>0$ следува дека низата е монотона. Освен тоа, од $|a_n|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}\le 1,\ \forall n\in\mathbb{N}$ следува дека низата е ограничена. Според тоа, низата е конвергентна.

б) Од $a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+5}-\frac{n+1}{n+6}=\frac{-5}{(n+5)(n+6)}<0$ следува дека низата е монотона. Освен тоа, од $|a_n|=\left|\frac{n}{n+5}\right|=\frac{n}{n+5}<1,\ \forall n\in\mathbb{N}$ следува дека низата е ограничена. Според тоа, низата е конвергентна.

в) Од $a_n - a_{n+1} = \frac{2n-1}{3n+1}-\frac{2n+1}{3n+4}=\frac{-5}{(3n+1)(3n+4)}<0$ следува дека низата е монотона. Освен тоа, од $|a_n|=\left|\frac{2n-1}{3n+1}\right|=1-\frac{n+2}{3n+1}<1,\ \forall n\in\mathbb{N}$ следува дека низата е ограничена. Според тоа, таа е конвергентна.

г) Од $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}<0$ следува дека низата е монотона. Освен тоа, од

$$|a_n|=\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right|\le\frac{n}{n+1}<1,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

следува дека низата е ограничена. Според тоа, таа е конвергентна.

д) Од $a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{3^{n+1}}<0$ следува дека низата е монотона. Освен тоа, од $|a_n|=\left|1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right|=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\le\frac{3}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$ следува дека низата е ограничена. Според тоа, таа е конвергентна.

ѓ) Од $a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{3^{n+1}+1}<0$ следува дека низата е монотона. Освен тоа, од $|a_n|=\left|\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}\right|\le 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{1-\frac{1}{3}}\le\frac{3}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, следува дека низата е ограничена. Според тоа, таа е конвергентна

е) $a_n=\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}\frac{1-\frac{1}{10^{n-1}}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}+\frac{1-\frac{1}{10^{n-1}}}{90}$.

Од $a_n-a_{n+1}=\frac{3}{10}+\frac{1-\frac{1}{10^{n-1}}}{90}-\frac{3}{10}-\frac{1-\frac{1}{10^n}}{90}=-\frac{1}{10^{n+1}}<0$ следува дека низата е монотона. Освен тоа, од $|a_n|=\frac{3}{10}+\frac{1-\frac{1}{10^{n-1}}}{90}\leq\frac{28}{9}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ следува дека низата е ограничена. Според тоа, таа е конвергентна.

ж) $a_n=\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}=\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}\frac{1-\frac{1}{10^{n-2}}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{1-\frac{1}{10^{n-2}}}{300}$.

Од $a_n-a_{n+1}=\frac{1-\frac{1}{10^{n-2}}}{300}-\frac{1-\frac{1}{10^{n-1}}}{300}=-\frac{3}{10^{n+1}}<0$ следува дека низата е монотона. Освен тоа, од $|a_n|=\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{1-\frac{1}{10^{n-2}}}{300}\leq\frac{127}{300}$ следува дека низата е ограничена. Според тоа, таа е конвергентна. ●

2.65. Докажи дека следните низи се конвергентни и определи ги нивните граници:

а) $a_n=\frac{n!}{(2n+1)!!}$; **б)** $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Решение. а) Низата монотоно опаѓа (задача **2.7.** под **а)**) и е ограничена од долу со 0, па според тоа таа е конвергентна. Нека $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Бидејќи $a_{n+1}=\frac{n+1}{2n+3}a_n$, имаме $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}a$, што значи дека $a=0$.

б) Во задачата **2.7.** докажавме дека низата монотоно опаѓа. Таа е ограничена од долу, на пример, со 0, па следува дека е конвергентна.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e\,. \text{ ●}$$

2.66. Испитај ја конвергенцијата на следните низи зададени со рекурентните формули:

а) $a_1=\sqrt{2}$; $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$;

б) $a_1=\frac{1}{2}$; $a_{n+1}=\frac{1+a_n^2}{2}$;

в) $a_1 = 1\,; a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+1}{2a_n}$.

Решение. а) Со принципот на математичката индукција ќе докажеме дека низата е монотоно растечка и е ограничена од горе. Јасно е дека $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$. Под претпоставка дека $a_n > a_{n-1}$, имаме

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > \sqrt{2+a_{n-1}} = a_n.$$

Значи, низата е монотоно растечка. Таа е ограничена од горе со $\sqrt{2}+1$. Навистина, јасно е дека $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2}+1$. Под претпоставка дека $a_n < \sqrt{2}+1$, имаме:

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+\sqrt{2}+1} < \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = \sqrt{2}+1$. Значи, низата е конвергентна, т.е. постои реален број a таков, што $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$. Границата a ја определуваме од релацијата $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$. Тогаш, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 2 + \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$, т.е. $a^2 = 2 + a$. Решенијата на последната равенка се $a = -1$ и $a = 2$. Членовите на низата се позитивни броеви, па граничната вредност не може да биде негативен број. Значи, $a = 2$ е граничната вредност на дадената низа.

б) Со принципот на математичка индукција ќе докажеме дека низата е монотоно растечка и ограничена од горе. За $n=1$ имаме $a_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} > \dfrac{1}{2} = a_1$. Под претпоставка дека $a_n > a_{n-1}$ и користејќи дека $a_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, имаме

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1 + a_n^2 - 1 - a_{n-1}^2}{2} = \frac{(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})}{2} > 0.$$

Значи, $a_{n+1} > a_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$, па низата монотоно расте. Низата е ограничена од горе со на пример 1. Навистина, $a_1 = \dfrac{1}{2} < 1$. Ако $a_n < 1$, тогаш

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Според тоа, низата конвергира, па постои $a \in \mathbb{R}$ таков што $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и исто така $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$. Од условот, имаме $a = \dfrac{1+a^2}{2}$. Значи, бараната гранична вредност е $a = 1$.

в) Јасно е дека $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, т.е. низата е ограничена од долу. За $n > 1$ имаме

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 1 - 2a_n^2}{2a_n} = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} = \frac{1}{2a_n}(1+a_n)(1-a_n) = \frac{1}{4a_n}(1+a_n)(2-2a_n) =$$

$$=\frac{1}{4a_n}(1+a_n)\left(2-\frac{a_{n-1}^2+1}{a_{n-1}}\right)=\frac{-1}{4a_na_{n-1}}(1+a_n)(a_{n-1}^2-2a_{n-1}+1)=$$

$$=\frac{-1}{4a_na_{n-1}}(1+a_n)(a_{n-1}-1)^2\le 0\,.$$

Значи, почнувајќи од вториот член низата монотоно опаѓа. Низата е конвергентна, па постои $a\in\mathbb{R}$ таков што $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ и $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$. Бројот a може да се добие од рекурентната врска. Така добиваме $a=1$.●

2.67. Докажи дека следните низи се конвергентни и определи ги нивните граници:

а) $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$; **б)** $a_n=a+\frac{(-1)^n}{n}$;

в) $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$; **г)** $a_n=\frac{n\sin n!}{n^2+1}$,

Решение. а) Од $0\le\frac{1+(-1)^n}{n}\le\frac{2}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$ следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=0$.

б) Од $a-\frac{1}{n}\le a+\frac{(-1)^n}{n}\le a+\frac{1}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a-\frac{1}{n}\right)=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)=a$ следува дека

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{(-1)^n}{n}\right)=a\,.$$

в) Од $-\frac{1}{n+1}\le\frac{(-1)^n}{n+1}\le\frac{1}{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, следува дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0\,.$$

г) Од $-\frac{n}{n^2+1}\le\frac{n\sin n!}{n^2+1}\le\frac{n}{n^2+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$, следува дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}=0\,.\ \bullet$$

2.68. Ако низата (a_n) конвергира кон a, докажи дека и низата од нејзините аритметички средини $(\sigma_n)=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)$ исто така конвергира кон a.

Решение. Нека $\varepsilon>0$ е произволен. Од условот $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, следува дека постои природен број n_1, таков што за секој $n\ge n_1$ важи $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. Од друга страна,

постои $n_2\in\mathbb{N}$, таков што за секој $n\ge n_2$ важи $\frac{\sum_{i=1}^{n_1}|a_i-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$.

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш за $n \ge n_0$ имаме:

$$|\sigma_n - a| = \left|\frac{a_1 + \cdots + a_{n_1} + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{a_1 - a + \cdots + a_{n_1} - a + \cdots + a_n - a}{n}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n}\left(|a_1 - a| + \cdots + |a_{n_1} - a|\right) + \frac{1}{n}\left(|a_{n_1+1} - a| + \cdots + |a_n - a|\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = a$, што требаше да се докаже.

Спротивното тврдење не мора да биде секогаш точно. На пример, низата $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, не конвергира, а низата од нејзините аритметички средини (σ_n), $n \in \mathbb{N}$ конвергира кон 0. ●

2.69. Докажи дека ако за низата (a_n) важи $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = a$.

Решение. Да означиме со $b_1 = a_1$, $b_{n+1} = a_{n+1} - a_n$. Од условот на задачата имаме $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Тогаш, според задачата **2.68.** и низата од аритметичките средини на низата (b_n), т.е низата

$$\sigma_n = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 - a_1 + \cdots + a_n - a_{n-1}}{n} = \frac{a_n}{n}$$

конвергира кон a. ●

2.70. Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, каде

а) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; **б)** $a_n = \left(3 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{(-1)^n}{n}}$

Решение. а) Важат неравенствата

$$\sqrt{n^2+1} \le \sqrt{n^2+1}, \sqrt{n^2+1} \le \sqrt{n^2+2}, \sqrt{n^2+1} \le \sqrt{n^2+3}, \ldots, \sqrt{n^2+1} \le \sqrt{n^2+n},$$

односно $$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

па со собирање на овие n неравенства добиваме

$$n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = a_n .$$

Од друга страна

$$\sqrt{n^2+1} \le \sqrt{n^2+n}, \sqrt{n^2+2} \le \sqrt{n^2+n}, \sqrt{n^2+3} \le \sqrt{n^2+n}, \ldots, \sqrt{n^2+n} \le \sqrt{n^2+n},$$

односно $\quad \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}, ..., \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Ако ги собереме и овие n неравенства добиваме $a_n \geq n\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Значи, имаме

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ следува дека и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

б) Општиот член на низата го запишуваме во обликот

$a_n = \begin{cases} \left(3-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{n}}, n \text{ е непарен} \\ \left(3-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, n \text{ е парен} \end{cases}$. Тогаш важи $\sqrt[n]{3-\dfrac{1}{n}} > 1$ и $\dfrac{1}{\sqrt[n]{3-\dfrac{1}{n}}} < 1$ од каде што

следува $\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{n}} < 1 < \left(3-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Натаму $2 \leq 3-\dfrac{1}{n} < 3$, па

$\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < 3^{\frac{1}{n}}$ и $\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{n}} > 3^{-\frac{1}{n}}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Конечно $3^{-\frac{1}{n}} < \left(3-\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{n}} < \left(3-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < 3^{\frac{1}{n}}$, односно $3^{-\frac{1}{n}} < a_n < 3^{\frac{1}{n}}$.

Користејќи дека $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{3}} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ (задача **2.22.** под **в)**), па $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. ●

2.71. Докажи дека низата

$$a_n = \underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+...+\sqrt{c}}}}}_{n-\text{пати } c}, \; c > 0$$

конвергира и најди ја нејзината граница.

Решение. Од задача **2.8.** под **а)** следува дека низата монотоно расте. Со ПМИ ќе докажеме дека низата е ограничена од горе со $\sqrt{c}+1$. За $n=1$, $a_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c}+1$, па тврдењето е точно. Да претпоставиме дека тврдењето важи за природниот број n, т.е. важи $a_n < \sqrt{c}+1$. Тогаш за $n+1$ имаме

$$a_{n+1} = \sqrt{c+\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+...+\sqrt{c}}}}_{a_n}} \overset{\text{и.п.}}{<} \sqrt{c+\sqrt{c}+1} < \sqrt{c+2\sqrt{c}+1} = \sqrt{(\sqrt{c}+1)^2} = \sqrt{c}+1.$$

Значи низата е ограничена. Според тоа (a_n) конвергира, односно постои $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогаш и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

За низата важи $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$, односно $a_{n+1}^2-a_n-c=0$. Оттука $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^2-a_n-c\right)=0$, т.е. $a^2-a-c=0$. Решенијата на последната равенка се

$$a_1=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} \text{ и } a_2=\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}.$$

Но $\sqrt{1+4c}>1$, па $a_2<0$. Заради $\sqrt{c}>0$ добиваме $a_n>0$ за секој $n\in\mathbb{N}$, па и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geq 0$. Значи a_2 не е границата на низата. Останува $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

2.72. Докажи дека низите

а) $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{b}{a_n}\right)$, $a_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b\geq 0$;

б) $a_{n+1}=\frac{1}{m}\left((m-1)a_n+\frac{b}{a_n^{m-1}}\right), a_1>0, b>0, m\in\mathbb{N}\setminus\{2\}$

конвергираат и најди ги нивните граници.

Решение. а) Нека $a_1>0$. Заради $b\geq 0$ следува дека сите членови на низата се позитивни. Натаму од неравенството $\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{\frac{b}{a_n}}\right)^2\geq 0$ добиваме $a_n-2\sqrt{b}+\frac{b}{a_n}\geq 0$, односно $\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{b}{a_n}\right)\geq\sqrt{b}$. Значи $a_n\geq\sqrt{b},\forall n\in\mathbb{N}$, па низата е ограничена од долу.

Бидејќи $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{b}{a_n}\right)-a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{b-a_n^2}{a_n}\overset{a_n\geq\sqrt{b}}{\leq}0$ низата монотоно опаѓа. Според тоа таа е конвергентна, т.е. постои $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$. Од рекурентната формула добиваме $2a_na_{n+1}=a_n^2+b$, односно $a_n^2-2a_na_{n+1}+b=0$. Оттука $a^2-2a^2+b=0$, односно $a=\sqrt{b}$ или $a=-\sqrt{b}$. Но граница на низа со позитивни членови не може да биде негативен број, па $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{b}$.

Случајот $a_1<0$ се разгледува аналогно. Во тој случај добиваме дека сите членови на низата се негативни, низата е монотоно растечка, ограничена од горе со $-\sqrt{b}$ и на крајот $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\sqrt{b}$.

б) Бидејќи $a_1>0$ следува дека сите членови од низата се позитивни. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина (задача **1.51.**) добиваме

$$a_{n+1}=\frac{\overbrace{a_n+a_n+\ldots+a_n}^{(m-1)\text{ пати}}+\frac{b}{a_n^{m-1}}}{m}\geq\sqrt[m]{a_n^{m-1}\frac{b}{a_n^{m-1}}}=\sqrt[m]{b}\text{, за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Значи низата (a_n) е ограничена од долу. Користејќи го претходното добиваме

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{m}\left((m-1)a_n+\frac{b}{a_n^{m-1}}\right)-a_n=\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a_n^{m-1}}-a_n\right)=\frac{b-a_n^m}{ma_n^{m-1}}\leq 0$ па низата е и монотоно опаѓачка. Според тоа постои $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

Од $a_{n+1}=\frac{1}{m}\left((m-1)a_n+\frac{b}{a_n^{m-1}}\right)$ добиваме дека $a=\frac{1}{m}\left((m-1)a+\frac{b}{a^{m-1}}\right)$, т.е. $a^{m-1}=b$.

Бидејќи членовите на низата се позитивни следува $a=\sqrt[m]{b}$. ●

2.73. Докажи дека ако постои $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ тогаш постои и $\lim_{n\to\infty}|a_n|$ и $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

а) Обратното тврдење не мора да важи;

б) Ако $a=0$ тогаш важи и обратното тврдење.

Решение. Прво ќе го докажеме неравенството

$$||a_n|-|a||\leq|a_n-a|\text{, за секој } n\in\mathbb{N} \qquad (1)$$

Навистина, $|a_n|=|a_n-a+a|\leq|a_n-a|+|a|$, односно

$$|a_n|-|a|\leq|a_n-a|. \qquad (2)$$

Од друга страна, $|a|=|a-a_n+a_n|\leq|a-a_n|+|a_n|$, односно

$$|a|-|a_n|\leq|a-a_n|. \qquad (3)$$

Од (2) и (3) следува $-|a_n-a|\leq|a_n|-|a|\leq|a_n-a|$ со што (1) е докажано.

Сега нека $\varepsilon>0$. Заради $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ постои $n_0\in\mathbb{N}$ така што за секој $n\geq n_0$ важи $|a_n-a|<\varepsilon$. Сега имаме $||a_n|-|a||\stackrel{(1)}{\leq}|a_n-a|<\varepsilon$, па $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

б) За низата $a_n=(-1)^n$ важи $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}1=1$, но низата (a_n) дивергира.

в) Нека $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ и $\varepsilon>0$ е произволно. Постои $n_0\in\mathbb{N}$ така што за $n\geq n_0$ важи $||a_n|-0|<\varepsilon$.

Тогаш за $n\geq n_0$, важи $|a_n-0|=|a_n|=||a_n||=||a_n|-0|<\varepsilon$, па $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. ●

2.74. Нека низите (a_n) и (b_n) се дефинирани на следниов начин:

а) $a_1=a, b_1=b, a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}, b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ и $a,b>0$;

б) $a_1=a, b_1=b, a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ и $a,b>0$.

Докажи дека $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

Решение. а) Заради $a,b>0$ следува дека $a_n>0$ и $b_n>0$ за секој $n\in\mathbb{N}$. За позитивните реални броеви x и y важи

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\ge 0 \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2},$$

па за секој $n>1$ ќе важи $a_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\le\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}=b_n$. Користејќи го последно во неравенство добиваме $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\ge\sqrt{a_na_n}=a_n$ и $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\le\frac{b_n+b_n}{2}=b_n$. Значи низата (a_n) е монотоно растечка а низата (b_n) е монотоно опаѓачка. Оттука $a_1\le a_n\le b_n\le b_1$, па низите се ограничени. Значи постојат $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$. Од равенството $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ добиваме $B=\frac{A+B}{2}$, односно $A=B$.

б) Од $a,b>0$ следува дека $a_n,b_n>0$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

Натаму, од задачите **1.52.** и **1.51.** добиваме дека

$$b_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}\overset{\mathbf{1.52.}}{\le}\sqrt{a_nb_n}\overset{\mathbf{1.51.}}{\le}\frac{a_n+b_n}{2}=a_{n+1} \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Од $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n=\frac{b_n-a_n}{2}\le 0$ за $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ следува дека низата (a_n) е монотоно опаѓачка.

Од $b_n\le a_n$ за $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ следува дека $a_n+b_n\le 2a_n$, па $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2a_n}{a_n+b_n}\ge\frac{2a_n}{2a_n}=1$, па низата (b_n) е монотоно растечка.

Ottuka $b_2\le b_n\le a_n\le a_2$ za sekoj $n\ge 2$, pa nizite se ograni~eni. Zna~i postojat $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$. Od ravenstvoto $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ dobivame deka $A=\frac{A+B}{2}$, t.e. $A=B$.

Користејќи ја дефиницијата на низите добиваме

$$a_{n+1}b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\cdot\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=a_nb_n=\ldots=a_3b_3=a_2b_2=\frac{a_1+b_1}{2}\cdot\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=a_1b_1=ab,$$

па од $A=B$ следува $A^2=ab$, т.е. $A=B=\sqrt{ab}$. ●

2.75. Нека низата (a_n) е дефинирана на следниов начин:

$$a_1=a, a_2=b, a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} \text{ за } n>2.$$

Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Решение. За секој $k\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ важи

$$a_k-a_{k-1}=\frac{a_{k-1}+a_{k-2}}{2}-a_{k-1}=\frac{a_{k-2}-a_{k-1}}{2}=-\frac{a_{k-1}-a_{k-2}}{2}.$$

Значи, $a_2-a_1=b-a$, $a_3-a_2=-\dfrac{a_2-a_1}{2}=(-1)^3\dfrac{b-a}{2^{3-2}}$,

$$a_4-a_3=-\frac{a_3-a_2}{2}=(-1)(-1)^3\frac{\frac{b-a}{2^{3-2}}}{2}=(-1)^4\frac{b-a}{2^{4-2}},$$

$$a_5-a_4=-\frac{a_4-a_3}{2}=(-1)(-1)^4\frac{\frac{b-a}{2^{4-2}}}{2}=(-1)^5\frac{b-a}{2^{5-2}}.$$

Да претпоставиме дека $a_n-a_{n-1}=(-1)^n\dfrac{b-a}{2^{n-2}}$.

Тогаш $a_{n+1}-a_n=-\dfrac{a_n-a_{n-1}}{2}=(-1)(-1)^n\dfrac{\frac{b-a}{2^{n-2}}}{2}=(-1)^{n+1}\dfrac{b-a}{2^{(n+1)-2}}$. Значи за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $a_n-a_{n-1}=(-1)^n\dfrac{b-a}{2^{n-2}}$.

Натаму

$$\begin{aligned}
a_n&=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)\ldots+(a_n-a_{n-1})=\\
&=a+(b-a)-\frac{b-a}{2}+\frac{b-a}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{b-a}{2^{n-2}}=\\
&=a+(b-a)\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^{n-2}}\right)=\\
&=a+(b-a)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

па $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a+\dfrac{2}{3}(b-a)=\dfrac{2b+a}{3}$. ●

2.76. Нека (a_n) е конвергентна низа од позитивни реални броеви и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=a$.

Решение. Нека $a\neq 0$. Од задачите **1.51.** и **1.52.** добиваме

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\overset{\mathbf{1.52.}}{\le}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\overset{\mathbf{1.51.}}{\le}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Нека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Тогаш и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}$ ($a\neq 0$). Од задача **2.68.** важи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}}\overset{\mathbf{2.68.}}{=}\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\overset{\mathbf{2.68.}}{=}a$.

Значи, и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=a$.

Ако $a=0$, тогаш и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\overset{\mathbf{2.68.}}{=}0$. Од задачата **1.51.** добиваме

$0\le\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\overset{\mathbf{1.51.}}{\le}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, па следува $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=0$. ●

2.77. Нека (a_n) е низа од позитивни реални броеви и нека постои $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=a$.

Тогаш и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. Докажи!

Решение. Точно е $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\dfrac{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}{a_1a_2\ldots a_{n-1}}}=\sqrt[n]{a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$. Натаму низата

$b_1=a_1,b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ за $n>1$, според претпоставката е конвергентна па следува

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ (види ја задачата **2.76.**). ●

2.78. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

Решение. Точно е $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}$. Да означиме $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$.

Тогаш $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{\dfrac{n^n}{n!}}{\dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}}=\dfrac{n^n}{n(n-1)^{n-1}}=\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}=\left(\dfrac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}$,

па $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=e$. Значи исполнети се условите од задачата **2.77.** па

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=e\,. \quad ●$$

2.79. Докажи дека

а) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$, каде $a_n=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{i!}=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$;

б) $0\le e-\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{1}{i!}\le\dfrac{1}{k\cdot k!}$, за секој $k\in\mathbb{N}$;

в) бројот e е ирационален.

Решение. Користејќи ја биномната формула добиваме

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dbinom{n}{0}+\dbinom{n}{1}\dfrac{1}{n}+\dbinom{n}{2}\dfrac{1}{n^2}+\dbinom{n}{3}\dfrac{1}{n^3}+\ldots+\dbinom{n}{n}\dfrac{1}{n^n}=$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+...+\frac{n(n-1)(n-2)\ ...\ 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=2+\frac{1}{2!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}+\frac{1}{3!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{<1}+\ldots+\frac{1}{n!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{<1}\ldots\underbrace{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}_{<1}<$$

$$<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}=a_n$$

Сега, нека k е произволен фиксен природен број и нека $n\in\mathbb{N}$ е таков што $k<n$. Тогаш

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\geq$$

$$\geq\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=$$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}=$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Оттука следува дека и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

односно $e\geq 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{k!}$, за секој природен број k.

Значи добивме $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<a_n\leq e$ и имајќи предвид дека $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$.

б) Нека $k\in\mathbb{N}$ и $n>k$. Од биномната формула добиваме

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}+\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\tag{1}$$

Натаму имаме

$$\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}=\sum_{i=k+1}^{n}\frac{n!}{(n-i)!\,i!}\cdot\frac{1}{n^i}=\sum_{i=k+1}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(i-1))}{i!}\cdot\frac{1}{n^i}=$$

$$=\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{k!(k+1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)+$$

$$+\frac{1}{k!(k+1)(k+2)}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)+$$

$$\ldots+\frac{1}{k!(k+1)(k+2)(k+3)}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k+2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{k!(k+1)\ldots(k+(n-k))}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{<1}\left[\frac{1}{\underbrace{k+1}_{\geq k+1}}\underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)}_{<1}+\frac{1}{\underbrace{(k+1)(k+2)}_{\geq (k+1)^2}}\underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}_{<1}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{\underbrace{(k+1)(k+2)\ldots n}_{\geq (k+1)^{n-k}}}\underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}_{<1}\right]<\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^{n-k}}\right)=$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{n-k}}{1-\frac{1}{k+1}}<\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k+1}}=\frac{1}{k\cdot k!} \tag{2}$$

Исто така $\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}=\frac{(n-(i-1))(n-(i-2))\ldots n}{i!}\cdot\frac{1}{n^i}=\frac{1}{i!}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\left(1-\frac{i-2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$ за секој $0\leq i\leq k$, па и $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}=\frac{1}{i!}$.

Оттука следува $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}. \tag{3}$$

Уште $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}=\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}>0 \tag{4}$$

Конечно, имаме $$0\overset{(4)}{<}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}=\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\overset{(2)}{<}\frac{1}{k\cdot k!} \tag{5}$$

па $0\leq\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\leq\frac{1}{k\cdot k!}$. Користејќи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ и (3) добиваме $$0\leq e-\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\leq\frac{1}{k\cdot k!} \tag{6}$$

в) Да претпоставиме спротивно, т.е. $e\in\mathbb{Q}$. Нека $e=\frac{p}{q}$, каде $p,q\in\mathbb{N}$ и $q>1$. Прво во (6) од **б)** да ставиме $k=q$, па ќе добиеме $0\leq e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right)\leq\frac{1}{q\cdot q!}$. Оттука, множејќи со $q\cdot q!$ добиваме $0\leq e\cdot q\cdot q!-q\left(q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{q!}\right)\leq 1$. Имајќи предвид дека $e=\frac{p}{q}$, имаме $0\leq p\cdot q!-q\left(q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{q!}\right)\leq 1$, односно

$$0\leq q\left(p\cdot(q-1)!-\left(q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{q!}\right)\right)\leq 1 \tag{7}$$

Сега $p\cdot(q-1)!\in\mathbb{N}$ и $1+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{q!}\in\mathbb{N}$ па $p\cdot(q-1)!-\left(1+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{q!}\right)\in\mathbb{Z}$. Но

заради $q>1$ од (7) следува дека $p\cdot(q-1)!-\left(q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{q!}\right)=0$. Оттука

$$0=p\cdot(q-1)!-\left(q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{q!}\right)=(q-1)!\left(p-q\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right)\right),$$

па $p-q\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right)=0$, односно $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}=\frac{p}{q}$.

Значи добивме дека постои $s\in\mathbb{N}$, така што $a_s=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{s!}=e$.

Низата (a_n), каде $a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ е строго растечка и од **а)** имаме $\lim_{n\to\infty}a_n=e$. Ќе докажеме дека $a_n\neq e$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Навистина, нека постои $t\in\mathbb{N}$ така што $a_t=e$. Тогаш

$$\varepsilon=a_{t+1}-e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{t!}+\frac{1}{(t+1)!}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{t!}\right)=\frac{1}{(t+1)!}>0.$$

Нека $n_0\in\mathbb{N}$ е произволен. Тогаш за $n=\max\{n_0,t\}+1$ важи $n\geq n_0$ и

$$\begin{aligned}|a_n-e|&=\left|1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{t!}+\frac{1}{(t+1)!}+\ldots+\frac{1}{n!}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{t!}\right)\right|=\\&=\frac{1}{(t+1)!}+\ldots+\frac{1}{n!}\geq\frac{1}{(t+1)!}=\varepsilon\end{aligned}$$

Добивме контрадикција со $\lim_{n\to\infty}a_n=e$. Значи не може да се случи

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}=\frac{p}{q},$$

па претпоставката $e\in\mathbb{Q}$ не е добра. Значи $e\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Забелешка 1: Заклучокот $a_n\neq e$ за секој $n\in\mathbb{N}$ може да се изведе и од тоа што $a_n<e$ за секој $n\in\mathbb{N}$ (види **а)**) и множеството $\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ нема најголем елемент.

Забелешка 2: Заради **в)** во **б)** не важи равенство, т.е. $0<e-\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}<\frac{1}{k\cdot k!}$, за секој $k\in\mathbb{N}$. ●

2.80. Најди $\lim_{n\to\infty}a_n$ ако $a_n=q+2q^2+3q^3+\ldots+nq^n$ и $|q|<1$.

Решение. Од $a_n-qa_n=q+2q^2+3q^3+\ldots+nq^n-q(q+2q^2+3q^3+\ldots+nq^n)=$

$$=q+q^2+q^3+\ldots+q^n-nq^{n+1}=q\frac{1-q^n}{1-q}-nq^{n+1}=\frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{1-q}$$

имаме $a_n=\dfrac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}$. Заради задачата **2.22.** под **е)** следува дека

$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)q^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}nq^{n+2}=0$. Значи постои $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ и уште $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{q}{(1-q)^2}$. ●

2.81. Нека $p_1,p_2,\ldots,p_k,a_1,a_2,\ldots,a_k$ се позитивни реални броеви и

$$a_n=\sqrt[n]{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\ldots+p_ka_k^n}\,.$$

Дали постои $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ и ако постои најди го.

Решение. Нека $a_s=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$.

Тогаш $p_1a_1^n+p_2a_2^n+\ldots+p_ka_k^n\le p_1a_s^n+p_2a_s^n+\ldots+p_ka_s^n=(p_1+p_2+\ldots+p_k)a_s^n$

и $p_1a_1^n+p_2a_2^n+\ldots+p_ka_k^n\ge p_sa_s^n$.

Значи, $p_sa_s^n\le p_1a_1^n+p_2a_2^n+\ldots+p_ka_k^n\le(p_1+p_2+\ldots+p_k)a_s^n$, па и

$$a_s\sqrt[n]{p_s}\le\sqrt[n]{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\ldots+p_ka_k^n}\le a_s\sqrt[n]{p_1+p_2+\ldots+p_k}\,.$$

Од задача **2.22.** под **в)** следува $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_s}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_1+p_2+\ldots+p_k}=1$. Добивме дека $a_s\sqrt[n]{p_s}\le a_n\le a_s\sqrt[n]{p_1+p_2+\ldots+p_k}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_s\sqrt[n]{p_s}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_s\sqrt[n]{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right)=a_s$,

па постои $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_s=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$. ●

2.82. Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, каде

а) $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}\dfrac{j}{n^3}$; **б)** $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k^2}{n^3}}-1\right)$.

Реш: а) $a_n=\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}(1+2+\ldots+i)=$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{2}+\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{2n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i\right)=$$

$$\overset{\substack{\mathbf{1.26.}\\ \mathbf{1.28.}}}{=}\frac{1}{2n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Оттука следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{6}$

б) За секој k, $1\le k\le n$ важи

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1&=\frac{\sqrt[3]{n^3+k^2}}{n}-1=\frac{\sqrt[3]{n^3+k^2}-n}{n}=\frac{\sqrt[3]{n^3+k^2}-\sqrt[3]{n^3}}{n}=\\
&=\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+k^2}-\sqrt[3]{n^3}\right)\left(\sqrt[3]{(n^3+k^2)^2}+\sqrt[3]{n^3(n^3+k^2)}+\sqrt[3]{(n^3)^2}\right)}{n\left(\sqrt[3]{(n^3+k^2)^2}+\sqrt[3]{n^3(n^3+k^2)}+\sqrt[3]{(n^3)^2}\right)}=\\
&=\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+k^2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n^3}\right)^3}{n\left(\sqrt[3]{(n^3+k^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+k^2}+n^2\right)}=\\
&=\frac{k^2}{n\left(\sqrt[3]{(n^3+k^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+k^2}+n^2\right)}.
\end{aligned}$$

Сега, користејќи дека $k>0$ добиваме

$$\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1=\frac{k^2}{n\left(\sqrt[3]{(n^3+k^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+k^2}+n^2\right)}<\frac{k^2}{n\left(\sqrt[3]{(n^3)^2}+n\sqrt[3]{n^3}+n^2\right)}=\frac{k^2}{3n^3}.$$

Заради $k\le n$ важи

$$\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1=\frac{k^2}{n\left(\sqrt[3]{(n^3+k^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+k^2}+n^2\right)}\ge\frac{k^2}{n\left(\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2\right)}.$$

Значи $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n\left(\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2\right)}\le a_n\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3}=c_n$.

Користејќи ја задачата **1.28.** имаме

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3}=\frac{1}{3n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3}\quad\text{и}$$

$$\begin{aligned}
b_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n\left(\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2\right)}=\frac{1}{n\left(\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2\right)}\sum_{k=1}^{n}k^2=\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n\left(\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2\right)}
\end{aligned}$$

Оттука, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{9}$ и

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6\left(\sqrt[3]{\frac{n^6+2n^5+n^4}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{n^3+n^2}{n^3}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{2}{6\cdot 3}=\frac{1}{9}$$

Конечно, добивме $b_n\le a_n\le c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{9}$, од каде што следува дека и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{9}$. ●

2.83. Нека $a_n\ne 1$ за секој $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, каде

$$b_n=\frac{a_n+a_n^2+\ldots+a_n^k-k}{a_n-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Решение.

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{(a_n-1)+(a_n^2-1)+(a_n^3-1)+\ldots+(a_n^k-1)}{a_n-1}= \\
&= \frac{(a_n-1)\big(1+(a_n+1)+(a_n^2+a_n+1)+\ldots+(a_n^{k-1}+a_n^{k-2}+\ldots+1)\big)}{a_n-1}= \\
&= 1+(a_n+1)+(a_n^2+a_n+1)+\ldots+(a_n^{k-1}+a_n^{k-2}+\ldots+1)
\end{aligned}
$$

Заради $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ следува дека и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^3 = \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{k-1} = 1$, па

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}\,. \bullet$$

2.84. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\big((n+1)^p - n^p\big) = 0$, за $p<1$.

Решение. Користиме дека

$$0<(n+1)^p - n^p = n^p\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right) \overset{p<1}{<} n^p\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right) = n^{p-1}\,.$$

Од $p-1<0$ и задача **2.22.** под **б)** следува $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-1} = 0$, па и

$$\lim_{n\to\infty}\big((n+1)^p - n^p\big) = 0\,. \bullet$$

2.85. За x-даден реален број, пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, каде $a_n = \dfrac{[x]+[2^2x]+\ldots+[n^2x]}{n^3}$.

($[x]$ означува цел дел од x)

Решение. Користејќи дека важи $k^2x-1 \le [k^2x] \le k^2x,\ \forall k\in\mathbb{N}$, добиваме

$$x-1+2^2x-1+\ldots+n^2x-1 \le [x]+[2^2x]+\ldots+[n^2x] \le x+2^2x+\ldots+n^2x \quad \text{, т.е.}$$

$$(1+2^2+\ldots+n^2)x-n \le n^3a_n \le (1+2^2+\ldots+n^2)x\,.$$

Користејќи дека $1+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \forall n\in\mathbb{N}$, добиваме дека

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}x - \frac{1}{n^2} \le a_n \le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}x\,.$$

Заради тоа што $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}x - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{3}x$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \dfrac{1}{3}x$, добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}x\,. \bullet$

2.3. Фундаментални низи

2.86. Докажи дека низата со општ член $a_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n}$ е конвергентна.

Решение. Ќе докажеме дека низата е фундаментална низа, од каде следува дека е конвергентна.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Бидејќи $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што важи $\left|\frac{1}{3^n} - 0\right| = \frac{1}{3^n} < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$.

Нека $n, p \in \mathbb{N}$ и $n \geq n_0$.

Тогаш

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n} + \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} - \frac{\cos 1}{3} - \frac{\cos 2}{3^2} - \ldots - \frac{\cos n}{3^n}\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\right| \leq \left|\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}}\right| + \ldots + \left|\frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\right| \leq \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}}\left(1 + \ldots + \frac{1}{3^{p-1}}\right) = \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{\frac{2}{3}} \overset{p\geq 1}{<} \frac{1}{2\cdot 3^n} < \frac{1}{3^n} < \varepsilon .$$

Докажавме дека: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}$ важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, т.е. низата е фундаментална. ●

2.87. Докажи дека низата со општ член $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot(n+1)}$ е конвергентна.

Решение. Ќе докажеме дека низата е фундаментална низа, од каде следува дека е конвергентна.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Избираме природен број $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. (изборот на n_0 е јасен по направената оценка на изразот $|a_{n+p} - a_n|$)

Нека $n, p \in \mathbb{N}$ и $n \geq n_0$. Тогаш

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n+p)(n+p+1)} - \frac{1}{1\cdot 2} - \ldots - \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\right| =$$

$$= \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n+p)(n+p+1)}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right| + \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)(n+3)}\right| + \ldots + \left|\frac{(-1)^{n+p-1}}{(n+p)(n+p+1)}\right| =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon .$$

Докажавме дека: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}$ важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, т.е. низата е фундаментална. ●

2.88. Докажи дека низата со општ член

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{[1+3(n-1)]\cdot(1+3n)}$$

е конвергентна!

Решение. Ќе докажеме дека низата е фундаментална, од каде следува дека е конвергентна.

При решавање на задачата ќе го користиме равенството

$\frac{1}{[1+3(n-1)]\cdot(1+3n)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+3(n-1)} - \frac{1}{1+3n}\right]$, кое е точно за сите $n \in \mathbb{N}$ (проверката на равенството се остава на читателот).

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно дадено. Избираме природен број $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Нека $n, p \in \mathbb{N}$ и $n \geq n_0$. Тогаш

$|a_{n+p} - a_n| =$

$$= \left|\frac{1}{(1+3n)\cdot[1+3(n+1)]} + \frac{1}{[1+3(n+1)]\cdot[1+3(n+2)]} + \ldots + \frac{1}{[1+3(n+p-1)]\cdot[1+3(n+p)]}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\left|\frac{1}{1+3n} - \frac{1}{1+3(n+1)} + \frac{1}{1+3(n+1)} - \frac{1}{1+3(n+2)} + \ldots + \frac{1}{1+3(n+p-1)} - \frac{1}{1+3(n+p)}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\left|\frac{1}{1+3n} - \frac{1}{1+3(n+p)}\right| = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+3n} - \frac{1}{1+3(n+p)}\right] \leq 1 \cdot \frac{1}{1+3n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon .$$

Докажавме дека: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}$ важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, т.е. низата е фундаментална. ●

2.89. Докажи дека низата со општ член $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ не е конвергентна!

Решение. Ќе докажеме дека низата не е фундаментална низа, од каде следува дека не е конвергентна. Значи, треба да најдеме реален број $\varepsilon > 0$, така да за секој природен број n_0 постојат природни броеви n, p $(n \geq n_0)$ такви да $|a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon$.

Изборот на ε, n, p станува јасен, откако ќе направиме оценка на изразот $|a_{n+p} - a_n|$.

За $n, p \in \mathbb{N}$, имаме

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} >$$

$$> \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} .$$

За секој природен број n_0, ставајќи $p = n = n_0$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}$, добиваме дека $|a_{n+p} - a_n| > \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$, што требаше и да се докаже. ●

2.90. Докажи дека низата (a_n), каде, $a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}$, не е конвергентна!

Решение. Ќе докажеме дека низата не е фундаментална низа, од каде следува дека не е конвергентна.

Да направиме оценка на изразот $|a_{n+p}-a_n|$.

За $n,p\in\mathbb{N}$, имаме

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{n+1}{(n+2)^2}+\frac{n+2}{(n+3)^2}+\ldots+\frac{n+p}{(n+p+1)^2}\right|=\frac{n+1}{(n+2)^2}+\frac{n+2}{(n+3)^2}+\ldots+\frac{n+p}{(n+p+1)^2}>$$

$$>\frac{n+1}{(n+p+1)^2}+\frac{n+2}{(n+p+1)^2}+\ldots+\frac{n+p}{(n+p+1)^2}=\frac{1}{(n+p+1)^2}[(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+p)]>$$

$$>\frac{1}{(n+p+1)^2}[(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)]=\frac{p(n+1)}{(n+p+1)^2}.$$

За секој природен број n_0, ставајќи $p=n=n_0$ и $\varepsilon=\frac{1}{5}$, добиваме дека $\left|a_{n+p}-a_n\right|>\frac{n_0(n_0+1)}{(n_0+n_0+1)^2}=\frac{n_0{}^2+n_0}{4n_0{}^2+4n_0+1}>\frac{n_0{}^2+n_0}{5n_0{}^2+5n_0}>\frac{1}{5}=\varepsilon$, што требаше и да се докаже. ●

2.4. Поднизи. Лимес супериор и лимес инфериор

2.91. Ако низата (a_n) е разложена на конечно многу поднизи (секој член на низата (a_n) е член на една и само една подниза) кои конвергираат кон ист број, докажи дека во тој случај низата конвергира.

Решение: Нека низата (a_n) е разложена на поднизите $(b_k^1)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k^2)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (b_k^m)_{k\in\mathbb{N}}$ кои конвергираат кон бројот a. Низата (a_n) е ограничена. Ако таа не конвергира, тогаш постои уште една точка на натрупување на низата, нека е тоа точката b ($b \neq a$). Тоа значи дека постои подниза $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ на низата (a_n) која конвергира кон бројот b. Барем една од поднизите $(b_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$, $i \in \{1,2,\cdots,m\}$ содржи бесконечно многу членови од низата $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, т.е. содржи подниза која конвергира кон b. Тоа е невозможно, бидејќи секоја подниза на низата $(b_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ конвергира кон бројот a. ●

2.92. Докажи дека ако поднизите $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ и $(a_{7k})_{k\in\mathbb{N}}$ на низата (a_n) конвергираат, тогаш и низата (a_n) конвергира.

Решение: Прво ќе докажеме дека поднизите $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ и $(a_{7k})_{k\in\mathbb{N}}$ конвергираат кон ист број. Навистина, нека низата $(a_{7k})_{k\in\mathbb{N}}$ конвергира кон бројот a. Тогаш и поднизите $(a_{14k})_{k\in\mathbb{N}}$ и $(a_{7(2k-1)})_{k\in\mathbb{N}}$, што се поднизи и на низите $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ и $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ соодветно, конвергираат кон a. Значи, и низите $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ и $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ конвергираат кон бројот a.

Бидејќи низата (a_n) е разложена на поднизите $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ и $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ кои конвергираат кон ист број , од задачата **2.91.** следува дека низата (a_n) конвергира. ●

2.93. Докажи дека ако поднизите $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ и $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ на низата (a_n) конвергираат, тогаш и низата (a_n) конвергира.

Решение: Исто како задача **2.92.** ●

2.94. Ако $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ е подниза на низата (a_n), докажи дека важи

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{k\to\infty} a_{n_k} \le \limsup_{k\to\infty} a_{n_k} \le \limsup_{n\to\infty} a_n .$$

Решение. Директно од дефиницијата. ●

2.95. Низата (a_n) конвергира ако и само ако

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Решение. Низата (a_n) конвергира, ако и само ако секоја нејзина подниза конвергира кон иста гранична вредност. ●

2.96. Нека (a_n) е низа во $\mathbb{R}$. Докажи дека ако $a_0 = \liminf_{n\to\infty} a_n$, тогаш важи :

(i) $\forall a < a_0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ таков што за $n > n_0$ имаме $a_n > a$ и

(ii) $\forall a' > a_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n' > n$ така што $a_{n'} < a'$.

Обратно, ако за некој $a_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ важат (i) и (ii), тогаш $a_0 = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Решение. Нека $a_0 = \liminf_{n\to\infty} a_n$ и (i) не е исполнето. Тогаш, за некое $a < a_0$ ќе постои подниза (a_{n_k}) во $[-\infty, a]$, па ќе добиеме:

$a_0 = \liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} a_{n_k} \le a$. Контрадикција со $a < a_0$.

Нека (ii) не е исполнето. Тогаш за некое $a' > a_0$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што за секој $n' > n_0$, $a_{n'} \geq a' > a_0$ Тоа значи дека најмногу конечно многу членови од низата (евентуално $a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}$) се во интервалот $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ за $\varepsilon = \frac{a' + a_0}{2}$ т.е. не постои подниза која конвергира кон a_0. Контрадикција.

За обратното, нека за $a_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ важат (i) и (ii). Ќе докажеме дека тогаш $a_0 = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Прво ќе докажеме дека постои подниза на низата (a_n) која конвергира кон a_0. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од (ii) имаме дека за секој природен број k , постои $n_k > k$ таков што $a_{n_k} < a_0 + \varepsilon$. Заради (i), постои $k_0 \in \mathbb{N}$ таков што за $n_k > k_0$, имаме $a_{n_k} > a_0 - \varepsilon$.

Значи, $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall n_k > k_0$ имаме $a_0 - \varepsilon < a_{n_k} < a_0 + \varepsilon$, т.е. $a_0 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Нека претпоставиме сега дека постојат $b_0 < a_0$ и подниза $\left(a'_{n_k}\right)$ од низата (a_n) такви што $b_0 = \lim\limits_{k\to\infty} a'_{n_k}$. Да избереме $\varepsilon = \frac{a_0 - b_0}{2}$. Тогаш заради (i), постои $k_0 \in \mathbb{N}$ таков што за $n_k > k_0$ ќе важи $a'_{n_k} > a_0 - \frac{a_0 - b_0}{2} = \frac{a_0 + b_0}{2} > b_0$, што му противречи на $b_0 = \lim\limits_{k\to\infty} a'_{n_k}$. Значи, ако b_0 е гранична вредност на подниза од низата (a_n), тогаш $b_0 \geq a_0$. Така добивме дека $a_0 = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. ●

2.97. Нека (a_n) е низа во $\mathbb{R}$. Докажи дека ако $a_0 = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, тогаш важи :

(i) $\forall a > a_0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ таков што за $n > n_0$ имаме $a_n < a$ и

(ii) $\forall a' < a_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n' > n$ така што $a_{n'} > a'$.

Обратно, ако за некое $a_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ важат (i) и (ii), тогаш $a_0 = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решение: Слично како на задачата **2.96.** ●

2.98. Докажи дека од $a_n \leq b_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$, следува

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n \text{ и } \limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Решение. Нека $a_0 = \liminf_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ и $b_0 = \liminf_{n\to\infty} b_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

Нека $\left(b_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ е подниза на низата (b_n) која конвергира кон b_0 и $\left(a_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ е соодветната подниза на низата (a_n)(ги задржува индексите). Нека $\left(a'_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ е конвергентна подниза на низата $\left(a_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$, $\lim_{k\to\infty} a'_{n_k} = a'$ и $\left(b'_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ е соодветната подниза на $\left(b_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$. Тогаш, имаме:

$$a_0 \le a' = \lim_{k\to\infty} a'_{n_k} \le \lim_{k\to\infty} b'_{n_k} = \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = b_0.$$

Слично се докажува и второто неравенство. ●

2.99. Докажи дека важат следните формули:

а) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup\{\inf\{a_k \mid k \ge n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

б) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf\{\sup\{a_k \mid k \ge n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Решение. На секоја низа (a_n) во $\mathbb{R}$ придружуваме низа од множества $A_n = \{a_k \mid k \ge n\} \subseteq \mathbb{R}$. Дефинираме $b_n = \inf A_n$ и $c_n = \sup A_n$. Низата (A_n) монотоно опаѓа, т.е $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$, па заради тоа, низата (b_n) монотоно расте, додека низата (c_n) монотоно опаѓа.

а) Јасно е дека $b_n \le a_n$, па и $\liminf_{n\to\infty} b_n \le \liminf_{n\to\infty} a_n$. Бидејќи низата (b_n) монотоно расте, таа е конвергентна, па $\liminf_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \le \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Го добивме неравенството: $\sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \le \liminf_{n\to\infty} a_n$. Од друга страна, за секој $a < \liminf_{n\to\infty} a_n$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што за $n > n_0$ имаме $b_n = \inf A_n \ge a$.

Од $\sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \ge b_{n_0} \ge a$, го добиваме и обратното неравенство:

$$\sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \ge \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Докажавме дека $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{\inf\{a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

б) Бидејќи низата (c_n) монотоно опаѓа (па е конвергентна), и $a_n \leq c_n$, добиваме $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \inf\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Го добивме неравенството: $\inf\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \geq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Од друга страна, за секој $a > \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што за $n > n_0$ имаме $c_n = \sup A_n \leq a$.

Од $\inf\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq c_{n_0} \leq a$, го добиваме и обратното неравенство:

$$\inf\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n .$$

Докажавме: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{\sup\{a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$. ●

2.100. Ако (a_n) е низа од реални броеви, докажи дека

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty}(-a_n).$$

Решение. I *начин*: Од равенствата $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{\sup\{a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$,

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{\inf\{a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\sup A = -\inf(-A)$ добиваме:

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{\sup\{a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf\{-\inf\{-a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\} =$

$= -\sup\{\inf\{-a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\} = -\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

II *начин*: Нека $b = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $b \in \mathbb{R}$. Тогаш според задачата **2.97.** важи:

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0$, $a_n < b + \varepsilon$ и

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n' > n$, $a_{n'} > b - \varepsilon$.

Од овде следува дека:

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0$, $-a_n > -b - \varepsilon$ и

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists n' > n$, $-a_{n'} < -b + \varepsilon$.

Значи исполнети се уловите на задачата **2.96**, па следува дека $-b=\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n)$,

што требаше да се докаже. ●

2.101. Ако (a_n) е низа од реални броеви, докажи дека $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}a_n}$.

Решение. Слично како на задачата **2.100.** ●

2.102. Одреди $\liminf\limits_{n\to\infty}a_n$ и $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n$ на следните низи:

а) $a_n=(-1)^n$;

б) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}n$;

в) $a_n=\frac{n}{n+1}\sin\frac{2\pi n}{3}$.

Решение. а) Низата (a_n) е разложена на две поднизи:

$$a_{2k}=1,\ k\in\mathbb{N} \text{ и } a_{2k-1}=-1,\ k\in\mathbb{N}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=1$ и $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=-1$, добиваме дека

$$\liminf_{n\to\infty}a_n=-1 \quad \text{и} \quad \limsup_{n\to\infty}a_n=1.$$

б) Низата (a_n) е разложена на две поднизи:

$$a_{2k}=\frac{1}{2k}+2k,\ k\in\mathbb{N} \text{ и } a_{2k-1}=-\frac{1}{2k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=+\infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=0$, добиваме дека

$$\liminf_{n\to\infty}a_n=0 \text{ и } \limsup_{n\to\infty}a_n=+\infty.$$

в) Низата (a_n) е разложена на три поднизи:

$$a_{3k}=\frac{3k}{3k+1}\sin 2k\pi=0,$$

$$a_{3k-1}=\frac{3k-1}{3k}\sin(2k\pi-\frac{2\pi}{3})=-\frac{3k-1}{3k}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и}$$

$$a_{3k-2}=\frac{3k-2}{3k-1}\sin(2k\pi-\frac{4\pi}{3})=\frac{3k-2}{3k-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k}=0$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k-1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k-2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, добиваме дека

$$\liminf_{n\to\infty} a_n=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}. \bullet$$

2.103. Нека (a_n) е низата чии членови се сите рационални броеви од $[0,1]$. Одреди $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решение. $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=\frac{1}{2}$, $a_4=\frac{1}{3}$, $a_5=\frac{2}{3}$, $a_6=\frac{1}{4}$, $a_7=\frac{3}{4}$, $a_8=\frac{1}{5}$, $a_9=\frac{2}{5}$,

$a_{10}=\frac{3}{5}$, $a_{11}=\frac{4}{5}$, $a_{12}=\frac{1}{6}$, $a_{13}=\frac{5}{6}$, ...

Нека x е произволен реален број од сегментот $[0,1]$. Бидејќи множеството рационални броеви е секаде густо во множеството реални броеви ([1] стр. 37), постои низа рационални броеви (подниза од (a_n)) која конвергира кон x. Ако $x\notin[0,1]$, тогаш постои околина на x која не содржи ниту еден член од низата (a_n). Така, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n=\inf[0,1]=0$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n=\sup[0,1]=1$. $\bullet$

2.104. Нека (a_n) и (b_n) се низи од реални броеви.

а) Докажи дека $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n+\liminf\limits_{n\to\infty} b_n\le\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\le\liminf\limits_{n\to\infty} a_n+\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$;

б) Најди пример кога во **а)** не важат равенства.

Решение. Нека $\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ е подниза од (a_n+b_n) таква што

$$\lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)=\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)$$

и нека $\left(a_{n_{k_m}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ е подниза од $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ таква што

$$\lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}}=\liminf_{k\to\infty} a_{n_k}.$$

Тогаш

$$\liminf_{n\to\infty} a_n+\liminf_{n\to\infty} b_n \overset{\textbf{2.94.}}{\le} \liminf_{k\to\infty} a_{n_k}+\liminf_{k\to\infty} b_{n_k}=\lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}}+\liminf_{k\to\infty} b_{n_k} \overset{\textbf{2.94.}}{\le}$$
$$\le\lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}}+\liminf_{m\to\infty} b_{n_{k_m}}$$

Низата $\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ е конвергентна, а $\left(a_{n_{k_m}}+b_{n_{k_m}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ е нејзина подниза, па и таа конвергира. Бидејќи $\left(a_{n_{k_m}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ конвергира, следува дека и $\left(b_{n_{k_m}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ конвергира.

Според тоа

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty} a_n+\liminf_{n\to\infty} b_n \le \lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}}+\liminf_{m\to\infty} b_{n_{k_m}}=\lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}}+\lim_{m\to\infty} b_{n_{k_m}}=\\&=\lim_{m\to\infty}\left(a_{n_{k_m}}+b_{n_{k_m}}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)=\liminf_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)\end{aligned}$$

и со тоа е докажано неравенството

$$\liminf_{n\to\infty} a_n+\liminf_{n\to\infty} b_n\le\liminf_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right). \tag{1}$$

Заради $\liminf\limits_{n\to\infty}\left(-b_n\right)=-\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ (види задача **2.100.**) имаме

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)-\limsup_{n\to\infty} b_n=\liminf_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)+\liminf_{n\to\infty}\left(-b_n\right)\overset{(1)}{\le}\\&\le\liminf_{n\to\infty}\left(a_n+b_n-b_n\right)=\liminf_{n\to\infty} a_n\end{aligned}$$

односно $\liminf\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)\le\liminf\limits_{n\to\infty} a_n+\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$, со што и второто неравенство е докажано.

б) Да ги разгледаме низите $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\sin^2\frac{n\pi}{2}$ и $b_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\cos^2\frac{n\pi}{2}$.

Имаме $\quad a_n+b_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n=\limsup\limits_{n\to\infty} a_n=\limsup\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=1$,

$$\liminf_{n\to\infty} b_n=\liminf_{n\to\infty} a_n=\liminf_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=-1,$$

па $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n+\liminf\limits_{n\to\infty} b_n=-2<-1=\liminf\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)<0=\liminf\limits_{n\to\infty} a_n+\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

односно не важат равенства во **а)**. ●

2.105. Ако постои $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, тогаш за секоја низа $\left(b_n\right)$ важи

$$\liminf_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=\liminf_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n.$$

Решение. Од задача **2.104.** имаме

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) \leq$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

па секаде важи равенство. Значи $\liminf_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \liminf_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$. ●

2.106. Нека (a_n) и (b_n) се низи од реални броеви такви што $a_n, b_n \geq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека $\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}\left(a_n b_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Решение. Го докажуваме првото неравенство. Ако $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ тогаш важи равенство. Затоа нека $\liminf_{n\to\infty} a_n > 0$. Тогаш постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $a_n > 0$ за секој $n \geq n_0$. Затоа не се губи од општоста ако претпоставиме дека $a_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ (првите $n_0 - 1$ членови не влијаат на лимесите). Нека $\left(a_{n_k} b_{n_k}\right)$ е подниза од $\left(a_n b_n\right)$ таква што $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \liminf_{n\to\infty} a_n b_n$ и $\left(a_{n_{k_m}}\right)$ е подниза од $\left(a_{n_k}\right)$ таква што $\lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}} = \liminf_{k\to\infty} a_{n_k}$. Тогаш

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{k\to\infty} a_{n_k} \liminf_{k\to\infty} b_{n_k} = \lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}} \liminf_{k\to\infty} b_{n_k} \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}} \liminf_{m\to\infty} b_{n_{k_m}}.$$

Низата $\left(a_{n_{k_m}} b_{n_{k_m}}\right)$ е подниза од конвергентната низа $\left(a_{n_k} b_{n_k}\right)$, па и таа конвергира. Исто така и $\left(a_{n_{k_m}}\right)$ конвергира, па и $\left(b_{n_{k_m}}\right) = \left(a_{n_{k_m}} b_{n_{k_m}} \dfrac{1}{a_{n_{k_m}}}\right)$ конвергира како производ на две конвергентни низи. Од сето ова добиваме

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}} \cdot \liminf_{m\to\infty} b_{n_{k_m}} = \lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}} \cdot \lim_{m\to\infty} b_{n_{k_m}} = \\ &= \lim_{m\to\infty} a_{n_{k_m}} \cdot b_{n_{k_m}} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \cdot b_{n_k} = \liminf_{n\to\infty} a_n \cdot b_n\end{aligned} \tag{1}$$

со што е докажано првото неравенство.

Сега, ако $\limsup_{n\to\infty} b_n = 0$ заради $b_n \geq 0$ ќе следува дека и $\liminf_{n\to\infty} b_n = 0$ па ќе важи равенство во второто неравенство. Затоа нека $\limsup_{n\to\infty} b_n > 0$. Нека $\left(b_{n_k}\right)$ е подниза од (b_n) таква што $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{k\to\infty} b_{n_k}$. Слично како погоре можеме да сметаме дека $b_{n_k} > 0$ за секој $k \in \mathbb{N}$. Заради конвергенцијата на $\left(b_{n_k}\right)$ следува дека и $\left(\frac{1}{b_{n_k}}\right)$ конвергира. Од задача **2.101.** важи $\liminf\limits_{k\to\infty} \frac{1}{b_{n_k}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} b_{n_k}}$.

Тогаш
$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} b_n} \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) \le \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} b_{n_k}} \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) =$$
$$= \liminf\limits_{k\to\infty} \frac{1}{b_{n_k}} \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{b_{n_k}} \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) =$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k}} \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} b_n} \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) =$$
$$= \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) \overset{(1)}{\le} \liminf\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n} a_n b_n\right) = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$$

и со тоа е докажано и второто неравенство. ●

2.107. Ако $a_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и

$$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 1, \tag{1}$$

тогаш $\left(a_n\right)$ конвергира.

Решение. Од задача **2.101.** важи $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} a_n}$.

Оттука следува $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \overset{(1)}{=} \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} a_n}} = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, па $\left(a_n\right)$ конвергира. ●

III. Функции од една променлива

3.1. Дефиниција на функција и некои важни поими

Дефиниција. Нека E и F се две непразни подмножества од множеството реални броеви. Секое пресликување $f : E \to F$ се нарекува реална функција од една реална променлива.

Велиме дека $f(x)$ е вредност на функцијата f во точката x. Елементот $x \in E$ го нарекуваме независно променлива вредност или аргумент за функцијата f, а $f(x)$ зависно променлива.

Велиме дека E е домен или дефинициона област (означуваме и со D_f), а F е кодомен на функцијата $f : E \to F$.

Подмножеството $\{f(x) : x \in E\}$ од множеството F е кодомен или множество вредности на f и го означуваме со R_f.

Велиме дека функцијата е зададена ако се дадени: дефиниционата област D_f, сликата на функцијата R_f и правилото со кое за дадени вредности на x се добиваат вредностите $f(x)$.

Ако функцијата f е зададена со формула и дефиниционата област не е специфицирана, тогаш сметаме дека дефиниционата област D_f се состои од сите реални броеви $x \in \mathbf{R}$ за кои формулата има смисол. Исто така, земаме $F = R_f$.

Ако функцијата f е зададена со формула, тогаш најпрво ја одредуваме дефиниционата област.

За функциите f и g велиме дека се еднакви, и пишуваме $f = g$, ако и само ако се исполнети следните услови: а) f и g се дефинирани на исто множество E, т.е. имаат исти домени ; б) f и g имаат исти кодомени; в) $f(x) = g(x)$ за секое $x \in E$. Ако барем еден од условите а),б),в) не е исполнет, тогаш функциите f и g не се еднакви и пишуваме $f \neq g$.

Дефиниција. График на функција е множеството од подредени двојки $G_f = \{(x,f(x)) : x \in D_f\}$. Точката $M(x,f(x))$ е елемент на графикот на функцијата, x е прва координата, а $f(x)$ втора координата на графикот на функцијата.

Значи, графикот на функцијата е подмножество од $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ и се состои од сите точки со координати $(x,f(x))$, $x \in D_f$.

Дефиниција. Нека функцијата $f : E \to F$ е инјекција. Тогаш за секој елемент од множеството вредности на функцијата $y \in R_f$ постои единствен $x \in E$ таков што $f(x) = y$. Дефинираме функција $f^{-1} : R_f \to D_f$ така што на елементот y му го придружуваме единствениот елемент $x \in D_f = E$ кој со f оди во y, т.е. $x = f^{-1}(y)$. Овака дефинирана функција $f^{-1} : R_f \to D_f = E$ се вика инверзна на функцијата f ..

Дефиниција. Велиме дека функцијата $f : E \to F$ е парна ако

1) $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ и

2) $f(-x) = f(x),\ \forall x \in D_f$

Дефиниција. Велиме дека функцијата $f : E \to F$ е непарна ако

1) $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ и

2) $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D_f$

Дефиниција. За функцијата $f : E \to F$ велиме дека е периодична ако постои реален број $\omega \neq 0$ таков што да важи: $\forall x \in D_f,\ x+\omega \in D_f$ и $f(x+\omega) = f(x)$. Најмалиот позитивен број (ако постои) ω со ова својство се вика период на функцијата.

Дефиниција. За реалниот број a велиме дека е нула на функцијата $f : E \to F$ ако е исполнето $f(a) = 0$.

Нека E_1 е подмножество од доменот на функцијата $f : E \to F$.

Дефиниција. Велиме дека функцијата $f : E \to F$ монотоно расте на множеството E_1 ако $\forall x_1,x_2 \in E_1 :\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2)$

Строго монотоно расте на множеството E_1 ако

$$\forall x_1,x_2 \in E_1 :\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$$

функцијата $f : E \to F$ монотоно опаѓа на множеството E_1 ако

$$\forall x_1,x_2 \in E_1 :\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)$$

и строго монотоно опаѓа ако $\forall x_1, x_2 \in E_1$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Дефиниција. Велиме дека функцијата f е ограничена од горе ако постои реален број M таков што $f(x) \le M, \forall x \in D_f$.

Ако постои реален број m таков што $f(x) \ge m, \forall x \in D_f$, тогаш велиме дека функцијата f е ограничена од долу.

Накусо велиме дека функцијата е ограничена ако е ограничена и од горе и од долу, т.е. ако постојат реални броеви m и M такви што $m \le f(x) \le M, \forall x \in D_f$.

Функцијата е неограничена ако не е ограничена т.е ако за секој позитивен реален број a постои $x \in D_f$ таков што $|f(x)| > a$.

Дефиниција. За две функции $f: E \to F$ и $g: F \to G$, функцијата $g \circ f: E \to G$ зададена со: $(g \circ f)(x) \overset{\text{деф.}}{=} g(f(x))$, $x \in E$ ја викаме сложена функција или композиција на функциите f и g.

Задачи:

3.1. Дали се еднакви функциите $f: E \to F$ и $g: G \to H$ ако:

а) $f(x) = \sqrt{x^2},\ E = F = [0, \infty)$, $g(x) = x,\ G = H = [0, \infty)$;

б) $f(x) = \sqrt{x^2},\ E = F = \mathbb{R}$, $g(x) = x,\ G = H = \mathbb{R}$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2},\ E = F = \mathbb{R}$, $g(x) = |x|,\ G = \mathbb{R},\ H = [0, \infty)$;

г) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x,\ E = F = \mathbb{R}$, $g(x) = \cos(2x),\ G = H = \mathbb{R}$.

Решение. **а)** Да, заради $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = x$ за $x \ge 0$; **б)** Не, бидејќи имаат различно правило; **в)** Не, бидејќи имаат различни кодомени; **г)** Да. ●

Определи ги дефиниционите области на следните функции: (задачи **3.2.-3.9.**)

3.2. **а)** $f(x) = x^2 + x + 1$; **б)** $f(x) = |x^2 - 1|$;

в) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 8}$; **г)** $f(x) = \dfrac{x^2}{2|x| - 3}$.

Решение. а) Аналитичкиот израз има смисла за секој реален број. Според тоа $D_f = \mathbb{R}$;

б) $D_f = \mathbb{R}$;

в) Аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $x^2 - 6x + 8 \neq 0$. Од $x^2 - 6x + 8 = 0$ ако и само ако $x = 2$ или $x = 4$, следува дека $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, \infty)$;

г) Аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $2|x| - 3 \neq 0$. Од $2|x| - 3 = 0$ ако и само ако $x = -\frac{3}{2}$ или $x = \frac{3}{2}$, следува дека

$D_f = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. ●

3.3. а) $f(x) = \sqrt{x+1}$; **б)** $f(x) = \sqrt{-x^2}$;

в) $f(x) = \sqrt[4]{2-x}$; **г)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. а) Изразот има смисла за сите реални броеви за кои важи $x + 1 \geq 0$. Ова може да се запише во обликот $D_f = \{x \mid x + 1 \geq 0\}$, т.е. $D_f = [-1, \infty)$;

б) Аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $-x^2 \geq 0$. Според тоа $D_f = \{x \mid x^2 \leq 0\} = \{0\}$;

в) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - x \geq 0\} = (-\infty, 2]$;

г) $D_f = \{x \mid 1 - x^2 > 0\} = (-1, 1)$. ●

3.4. а) $f(x) = 2^{x-1}$; **б)** $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$;

в) $f(x) = \frac{x-2}{e^{\frac{1}{x}}}$; **г)** $f(x) = \sqrt{2 - 2^x}$.

Решение. а) $D_f = \mathbb{R}$;

б) Од $3^{x+1} > 0$ за секој реален број x, следува дека аналитичкиот израз има смисла за секој реален број. Според тоа, $D_f = \mathbb{R}$.

в) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

г) Аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $2 - 2^x \geq 0$, односно $x \leq 1$. Според тоа, $D_f = (-\infty, 1]$. ●

3.5. **а)** $f(x)=\lg x^2$; **б)** $f(x)=\lg(3x+4)$;

в) $f(x)=\lg|x+1|$; **г)** $f(x)=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$.

Решение. **а)** Аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $x^2>0$. Според тоа $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

б) $D_f=\{x\,|\,3x+4>0\}=\left(-\frac{4}{3},\infty\right)$;

в) $D_f=\{x\,|\,|x+1|>0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

г) Аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)\geq 0$, односно $\frac{5x-x^2}{4}\geq 1$. Според тоа $D_f=[1,4]$. ●

3.6. **а)** $f(x)=\sqrt[4]{3-x}+\sqrt{x+1}$; **б)** $f(x)=\lg(16-x^2)+\frac{1}{1-\sin x}$.

Решение. **а)** Аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $3-x\geq 0$ и $x+1\geq 0$. Според тоа $D_f=[-1,3]$.

б) $D_f=\{x\,|\,16-x^2>0 \text{ и } \sin x\neq 1\}$. Според тоа $D_f=\left(-4,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},4\right)$. ●

3.7. $f(x)=\lg\left[\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-x-6}\right]-\sqrt{2x^2-3x+10}$.

Решение. Изразот има смисла за сите реални броеви за кои важи $x^2-x-6\neq 0$, $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-x-6}>0$ и $2x^2-3x+10\geq 0$. Бидејќи дискриминантата на равенката $2x^2-3x+10=0$ е $D=9-80=-71<0$ и коефициентот пред x^2 е $2>0$, следува дека $2x^2-3x+10\geq 0$, за сите реални броеви x. Од друга страна $x^2-x-6=(x+2)(x-3)\neq 0$, за $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$ и за $x\neq 3$, $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-x-6}=\frac{x-2}{x+2}$, од каде следува $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-x-6}>0$ ако и само ако $(x-2)(x+2)>0$, т.е. $x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$. Конечно, $D_f=(-\infty,-2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$. ●

3.8. $f(x)=\sqrt{\sin^2 x+\sin x-2}+\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

Решение. Изразот има смисла за сите реални броеви за кои важи $\sin^2 x+\sin x-2\geq 0$ и $\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\leq 1$. Бидејќи решенија на равенката $t^2+t-2=0$ се 1 и

-2, следува дека $\sin^2 x+\sin x-2\geq 0$ е еквивалентно со $\sin x\in(-\infty,-2]\cup[1,\infty)$.Но, како $|\sin x|\leq 1$, мора $\sin x=1$, па $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.Од друга страна

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq\frac{x^2-1}{x^2+1}\leq 1\Leftrightarrow -x^2-1\leq x^2-1\leq x^2+1\Leftrightarrow\left(-x^2\leq x^2,\ 0\cdot x^2-1\leq 1\right),$$

од каде следува дека $\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\leq 1$е исполнето за сите реални броеви. Конечно, $D_f=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.●

3.9. $f(x)=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

Решение. Изразот има смисла за сите реални броеви за кои важи $-1\leq\lg\frac{x}{10}\leq 1$, од каде се добива дека $10^{-1}\leq\frac{x}{10}\leq 10^1$ т.е. $D_f=[1,100]$.●

Определи го множеството вредности на следните функции: (задачи **3.10.-3.13.**)

3.10. а) $f(x)=3x-2$; **б)** $f(x)=x^2+x-1$.

Решение. а) Множеството вредности на функцијата ќе го најдеме на тој начин што равенката $f(x)=3x-2$ ќе ја решиме по x. Така добиваме дека $x=\frac{f(x)+2}{3}$, од каде заклучуваме дека $V_f=\mathbb{R}$.

б) Решавајќи ја равенката $f(x)=x^2+x-1$ по x ја добиваме квадратната равенка $x^2+x-(1+f(x))=0$ која има реални решенија ако дискриминантата е ненегативна, односно $5+4f(x)\geq 0$. Според тоа $f(x)\geq -\frac{5}{4}$, од каде заклучуваме дека $V_f=\left[-\frac{5}{4},\infty\right)$. ●

3.11. а) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; **б)** $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

Решение. а) Решавајќи ја равенката $f(x)=x+\frac{1}{x}$ по x ја добиваме квадратната равенка $x^2-xf(x)+1=0$ која има реални решенија ако дискриминантата е ненегативна, односно $f^2(x)-4\geq 0$. Според тоа $V_f=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$.

б) Решавајќи ја равенката $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ по x ја добиваме квадратната равенка

$x^2(1-f(x))-f(x)=0$ која има реални решенија ако дискриминантата е ненегативна, односно $f(x)(1-f(x))\geq 0$. Според тоа $V_f=[0,1]$. ●

3.12. **а)** $f(x)=\sqrt{1-x}$; **б)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Решение. а) Имајќи предвид дека квадратен корен од реален број е секогаш ненегативен број следува дека $f(x)\geq 0$. Следува $V_f=[0,\infty)$.

б) Решавајќи ја равенката $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ по x добиваме $x=\sqrt{1-f^2(x)}$. Таа има реални решенија ако $1-f^2(x)\geq 0$. Имајќи предвид дека $f(x)\geq 0$ следува дека $V_f=[0,1]$. ●

3.13. **а)** $f(x)=e^{x+2}$. **б)** $f(x)=\dfrac{1}{1-2^{-x}}$.

Решение. а) Решавајќи ја по x равенката $f(x)=e^{x+2}$ добиваме $x=\ln(f(x))-2$. Таа има реални решенија ако $f(x)>0$. Според тоа, $V_f=(0,\infty)$.

б) Решавајќи ја по x равенката $f(x)=\dfrac{1}{1-2^{-x}}$ добиваме $x=\log_2\left(\dfrac{f(x)}{f(x)-1}\right)$. Таа има реални решенија ако $f(x)>1$ или $f(x)<0$. Според тоа, $V_f=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$. ●

3.14. Дадена е функцијата $f(x)=x^4-2x+4$. Определи :

а) $f(-1)$; **б)** $f(0)$; **в)** $f(2)$.

Решение. а) $f(-1)=(-1)^4-2(-1)+4=7$;

б) $f(0)=0^4-2\cdot 0+4=4$; **в)** $f(2)=2^4-4+4=16$. ●

3.15. Дадена е функцијата $f(x)=\begin{cases}3^{-x}-1, & -1\leq x<0\\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, & 0\leq x<\pi\\ \dfrac{x}{x^2-2}, & \pi\leq x\leq 6\end{cases}$.

Определи : **а)** $f(-1)$; **б)** $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; **в)** $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$; **г)** $f(4)$.

Решение. а) Точката $x=-1$ припаѓа на интервалот $[-1,0)$, па според тоа $f(-1)=3^{-(-1)}-1=2$;

б) Точката $x=\dfrac{\pi}{2}$ припаѓа на интервалот $[0,\pi)$, па според тоа

$f(\frac{\pi}{2})=tg\frac{\pi}{4}=1$;

в) Точката $x=\frac{2\pi}{3}$ припаѓа на интервалот $[0,\pi)$, па според тоа

$f(\frac{2\pi}{3})=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$;

г) $f(4)=\frac{2}{7}$. ●

3.16. Дадена е функцијата $f(x)=\sqrt{x^2+4ab}$. Определи $f(a-b)$.

Решение. $f(a-b)=\sqrt{(a-b)^2+4ab}=\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|$. ●

3.17. Ако $f(x)=\frac{1}{x}$, докажи дека $f(a)f(b)=f(ab)$.

Решение. $f(a)f(b)=\frac{1}{a}\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}=f(ab)$. ●

3.18. Ако $f(x)=e^x$, докажи дека $f(a)f(b)=f(a+b)$.

Решение: $f(a)f(b)=e^a e^b=e^{a+b}=f(a+b)$. ●

3.19. Ако $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$, докажи дека $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

Решение.

$$f(a)+f(b)=\lg\frac{1+a}{1-a}+\lg\frac{1+b}{1-b}=\lg(1+a)-\lg(1-a)+\lg(1+b)-\lg(1-b)=$$
$$=\lg((1+a)(1+b))-\lg((1-a)(1-b))=\lg(1+a+b+ab)-\lg(1-a-b-ab)=$$
$$=\lg\left(\frac{1+a+b+ab}{1-a-b+ab}\right)=\lg\left(\frac{\frac{1+a+b+ab}{1+ab}}{\frac{1-a-b+ab}{1+ab}}\right)=\lg\left(\frac{1+\frac{a+b}{1+ab}}{1-\frac{a+b}{1+ab}}\right)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$ ●

3.20. Најди функција од облик $f(x)=ax+b$ ако $f(0)=-2,\ f(1)=0$.

Решение. Од $f(0)=-2,\ f(1)=0$, го добиваме системот $\begin{cases} a\cdot 0+b=-2 \\ a+b=0 \end{cases}$ чие решение е $a=2, b=-2$. Според тоа, бараната функција е $f(x)=2x-2$.●

3.21. Најди функција од облик $f(x)=a+bc^x$, $c>0$, ако $f(0)=15,\ f(2)=30,\ f(4)=90$.

Решение. Од условот на задачата $f(0)=15,\ f(2)=30,\ f(4)=90$, го добиваме системот $\begin{cases} a+bc^0=15 \\ a+bc^2=30 \\ a+bc^4=90 \end{cases}$ чие решение е $a=10, b=5, c=2$. Според тоа бараната функција е $f(x)=10+5\cdot 2^x$.●

3.22. Пресметај ја вредноста на функцијата $f(x)=\dfrac{49}{x^2}+x^2$ во сите точки x за кои $x-\dfrac{4}{x}=3$.

Решение. Од равенството $x-\dfrac{4}{x}=3$ добиваме дека бараните точки се $x=7$, $x=2$. Според тоа, $f(7)=\dfrac{49}{7^2}+7^2=50$ и $f(2)=\dfrac{49}{4}+4=\dfrac{65}{4}$. ●

3.23. Докажи дека следните функции монотоно растат:

а) $f(x)=x+3$; **б)** $f(x)=x^3-1$;

в) $f(x)=\ln(x-1)$; **г)** $f(x)=e^{x+1}$.

Решение. а) За секои $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$ од $x_1<x_2$ следува $x_1-x_2<0$. Тогаш: $f(x_1)-f(x_2)=x_1+3-x_2-3=x_1-x_2<0$ односно $f(x_1)<f(x_2)$;

б) За секои $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$ од $x_1<x_2$ следува $x_1-x_2<0$. Тогаш

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-1-x_2^3+1=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)\le$$

$$\le(x_1-x_2)\left(\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}\right)<0 \text{ односно } f(x_1)<f(x_2).$$

в) За секои $x_1,x_2\in D_f=(1,\infty)$, од $x_1<x_2$ имаме

$$f(x_1)-f(x_2)=\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)=\ln\left(\frac{x_1-1}{x_2-1}\right)=\ln\left(1+\frac{x_1-x_2}{x_2-1}\right)\le 0,$$ бидејќи $0<1+\dfrac{x_1-x_2}{x_2-1}\le 1$. Според тоа, $f(x_1)\le f(x_2)$.

г) Нека $x_1,x_2\in D_f$ се такви што $x_1<x_2$ т.е. $x_1-x_2<0$. Тогаш, од $e^{x_1-x_2}<1$, следува $f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1+1}-e^{x_2+1}=e^{x_2+1}\left(\dfrac{e^{x_1+1}}{e^{x_2+1}}-1\right)=e^{x_2+1}(e^{x_1-x_2}-1)<0$.

Според тоа, $f(x_1)<f(x_2)$. ●

3.24. Докажи дека следните функции монотоно опаѓаат:

а) $f(x)=1-2x$; **б)** $f(x)=1-x^3$;

в) $f(x)=-\ln(x+3)$; **г)** $f(x)=3^{-x}$.

Решение. а) Нека $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$. За $x_1<x_2$ имаме

$$f(x_1)-f(x_2)=1-2x_1-(1-2x_2)=2(x_2-x_1)>0 \text{ односно } f(x_1)>f(x_2).$$

б) Нека $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$. За $x_1<x_2$ имаме:

$$f(x_1)-f(x_2)=1-x_1^3-(1-x_2^3)=-x_1^3+x_2^3=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=$$

$$=(x_2-x_1)\left(\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}\right)>0, \text{ односно } f(x_1)>f(x_2).$$

в) Нека $x_1,x_2\in D_f=(-3,\infty)$, $x_1<x_2$. Тогаш

$$f(x_1)-f(x_2)=-\ln(x_1+3)-(-\ln(x_2+3))=\ln\left(\frac{x_2+3}{x_1+3}\right)=\ln\left(1+\frac{x_2-x_1}{x_1+3}\right)\geq 0$$

бидејќи $1+\frac{x_2-x_1}{x_1+3}\geq 1$. Според тоа, $f(x_1)\geq f(x_2)$.

г) Нека $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$. За $x_1<x_2$ имаме:

$$f(x_1)-f(x_2)=3^{-x_1}-3^{-x_2}=3^{-x_1}\left(1-\frac{3^{-x_2}}{3^{-x_1}}\right)=3^{-x_1}(1-3^{-x_2+x_1})\geq 0,$$

бидејќи $3^{x_1-x_2}\leq 1$. Според тоа, $f(x_1)\geq f(x_2)$. ●

3.25. Испитај ја монотоноста на следните функции:

а) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2},\ x\in[1,\infty)$; **б)** $f(x)=x+\lg x$.

Решение. а) За $x_1,x_2\in D_f=[1,\infty)$ од $x_1<x_2$ имаме:

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1}{1+x_1^2}-\frac{2x_2}{1+x_2^2}=\frac{2(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\geq 0,$$

т.е. $f(x_1)\geq f(x_2)$, што значи дека функцијата опаѓа.

б) Нека $x_1,x_2\in D_f=(0,\infty)$. Ако $x_1<x_2$, тогаш, бидејќи $\frac{x_1}{x_2}\leq 1$, имаме

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\lg x_1-x_2-\lg x_2=x_1-x_2+\lg\frac{x_1}{x_2}\leq 0.$$

Според тоа , функцијата расте. ●

3.26. Определи ги интервалите на монотоност на следните функции:

а) $f(x)=|x-2|$; **б)** $f(x)=\frac{1}{|x|}$.

Решение. а) Нека $x_1,x_2\in(2,\infty)$. За $x_1<x_2$ имаме:

$f(x_1)-f(x_2)=x_1-2-(x_2-2)=x_1-x_2\leq 0$, односно $f(x_1)\leq f(x_2)$ што значи дека функцијата расте на интервалот $(2,\infty)$. Ако $x_1,x_2\in(-\infty,2)$, за $x_1<x_2$ имаме:

$f(x_1)-f(x_2)=-x_1+2-(-x_2+2)=-x_1+x_2\geq 0$. Значи дека функцијата опаѓа на интервалот $(-\infty,2)$.

б) Нека $x_1,x_2\in(0,\infty)$. За $x_1<x_2$ имаме $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0$, што значи дека функцијата опаѓа на интервалот $(0,\infty)$. Нека $x_1,x_2\in(-\infty,0)$. За $x_1<x_2$ имаме $f(x_1)-f(x_2)=-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$, што значи дека функцијата расте на интервалот $(-\infty,0)$.

3.27. Докажи дека следните функции се ограничени:

а) $f(x)=2x+3,\ x\in[-1,2]$; **б)** $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

в) $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{1+x^2}\right)$; **г)** $f(x)=10^{x+1}, x\in[0,1]$; **д)** $f(x)=3\sin^2\dfrac{x}{2}$.

Решение. а) Од $-1\leq x\leq 2$ следува $|f(x)|=|2x+3|\leq 2|x|+3\leq 2\cdot 2+3=7$.

б) Од $x^2\geq 0,\ \forall x\in D_f=\mathbb{R}$, следува $1+x^2\geq 1$, односно $\dfrac{1}{1+x^2}\leq 1$. Исто така $\dfrac{1}{1+x^2}>0$, од што следува $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{1+x^2}\right|\leq 1$.

в) Од $0<\dfrac{1}{1+x^2}\leq 1$, следува $1<1+\dfrac{1}{1+x^2}\leq 2$. Тогаш: $\ln 1<\ln\left(1+\dfrac{1}{1+x^2}\right)\leq \ln 2$.

г) За секое $x\in[0,1]$, $|f(x)|=|10^{x+1}|=10\cdot 10^x\leq 10^2$.

д) За секое $x\in D_f=\mathbb{R}$, $|f(x)|=\left|3\sin^2\dfrac{x}{2}\right|=\left|\dfrac{3(1-\cos x)}{2}\right|\leq\dfrac{3}{2}+\dfrac{3|\cos x|}{2}\leq 3$.●

3.28. Докажи дека следните функции се неограничени:

а) $f(x)=|x+2|$; **б)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$;

в) $f(x)=x\ln(3+x)$; **г)** $f(x)=2^{x+1}$;

д) $f(x)=x+\sin x$; **ѓ)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Решение. а) Нека M е произволен позитивен број. За $x=M$ имаме

$$|f(x)|=|f(M)|=|M+2|=M+2>M.$$

б) Нека M е произволен позитивен број. За $x=\dfrac{1}{M+1}$ имаме

$$|f(x)|=\left|f\left(\frac{1}{M+1}\right)\right|=|M+1|=M+1>M.$$

в) Нека M е произволен позитивен број. За $x=M$ имаме

$$|f(x)|=|f(M)|=|M\ln(3+M)|=M|\ln(3+M)|>M,$$

бидејќи од $3+M>e$ следува $\ln(3+M)>\ln e=1$.

г) Нека M е произволен позитивен број. За $x=\log_2 M$ имаме

$$|f(x)|=|f(\log_2 M)|=|2^{\log_2 M+1}|=2M>M.$$

д) Нека M е произволен позитивен број. За $x=M+2$ имаме

$$|f(x)|=|f(M+2)|=|M+2+\sin(M+2)|\geq M+1>M$$

бидејќи од $-1\leq\sin(M+2)$ следува $0<M+2-1\leq M+2+\sin(M+2)$.

ѓ) Нека M е произволен позитивен број. За $x=M$ имаме

$$|f(x)|=|f(M)|=\sqrt{M^2+1}>M.$$

Значи, во сите случаи функциите се неограничени. ●

3.29. Определи ги екстремите на следните функции:

а) $f(x)=|x-2|$; **б)** $f(x)=-x^2+x-4$;

в) $f(x)=|\ln x|$; **г)** $f(x)=3^{(x^2-2)^3+8}$.

Решение. а) Од $|x-2|\geq 0$ и $|x-2|=0$ ако и само ако $x=2$, следува дека функцијата има минимум во точката $x_0=2$.

б) Од $f(x)=-x^2+x-4=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{15}{4}$ следува дека функцијата има максимум во точката $x_0=\frac{1}{2}$.

в) Од $|\ln x|\geq 0$ следува дека функцијата има минимум во точката $x_0=1$.

г) Да го означиме степенскиот показател со $g(x)$, односно $g(x)=(x^2-2)^3+8$. Функцијата $f(x)$ прима најмала вредност во оние точки во кои функцијата $g(x)$ прима најмала вредност.

Од $g(x)=(x^2-2)^3+8=x^6-6x^4+12x^2=x^2\left((x^2-3)^2+3\right)$ следува дека функцијата $g(x)$ има минимум во точката $x_0=0$. ●

3.30. Определи ги сложените функции $f\circ g$ и $g\circ f$ ако:

а) $f(x)=x^3,\ g(x)=\sqrt[3]{x}$; **б)** $f(x)=10^x,\ g(x)=\lg x$.

Решение. а) За секој $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt[3]{x})=(\sqrt[3]{x})^3=x$. За секој

$x \in \mathbb{R}$ имаме $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$.

б) За секој $x > 0$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\lg x) = 10^{\lg x} = x$. За секој $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = \lg(10^x) = x$. ●

3.31. Докажи дека за секое $x \in D_f$, $f \circ f = 1_{D_f}$ ако

а) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; **б)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Решение. а) За секој $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(f \circ f)(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$ од каде што следува дека $f \circ f = 1_{D_f}$.

б) За секој $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $(f \circ f)(x) = f\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right) = \dfrac{2\frac{2x+1}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2} = \dfrac{\frac{5x}{x-2}}{\frac{5}{x-2}} = x$ од каде што следува дека $f \circ f = 1_{D_f}$. ●

3.32. Докажи дека $f \circ g = 1_{D_g}$ ако $f(x) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ и $g(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$.

Решение. За секој $x \in D_g = \mathbb{R}$,

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right) = \log_a\left(\frac{a^x - a^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 + 1}\right) =$$

$$= \log_a\left(\frac{a^x - a^{-x}}{2} + \frac{a^x + a^{-x}}{2}\right) = \log_a(a^x) = x \text{ . ●}$$

3.33. Испитај ја парноста на функциите:

а) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

б) $f(x) = x^m |x^n|, m, n \in \mathbb{N}$;

в) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Решение. а) $f(-x) = \ln\dfrac{1+(-x)}{1-(-x)} = \ln\dfrac{1-x}{1+x} = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\ln\dfrac{1+x}{1-x} = -f(x)$

Значи $f(-x) = -f(x)$, па функцијата е непарна.

б) $f(-x) = (-x)^m |(-x)^n| = (-1)^m x^m |x^n| = (-1)^m f(x) = \begin{cases} f(x), \text{ако } m \text{ е парен} \\ -f(x), \text{ако } m \text{ е непарен} \end{cases}$

Според тоа f е парна ако m е парен, а е непарна ако m е непарен природен број.

в) $f(x)+f(-x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left((-x)+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=$

$=\ln\left(\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right)=\ln(1+x^2-x^2)=\ln 1=0$

Според тоа, за секој $x\in D_f$ важи $f(x)+f(-x)=0$, т.е. $f(-x)=-f(x)$, па функцијата е непарна. ●

3.34. Докажи дека ако функцијата f е периодична со период T, тогаш функцијата F дефинирана со $F(x)=f(ax+b)$, $a>0$ е периодична со период $\frac{T}{a}$.

Решение. За f важи

$$f(x+T)=f(x)\text{, за секој } x\in D_f \qquad (1)$$

Тогаш $F\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f(ax+T+b)=f((ax+b)+T)\overset{(1)}{=}f(ax+b)=F(x)$, па F е периодична со период $\frac{T}{a}$. ●

3.35. Најди го периодот на функцијата $f(x)=\cos^2 x$.

Решение. Имаме $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$. Функцијата $\cos x$ е периодична со период 2π, па од задача **3.34.** следува дека $\cos 2x$ е периодична со период $\frac{2\pi}{2}=\pi$ (за $a=2$ и $b=0$). Според тоа и функцијата $\cos^2 x$ има период π.

3.36. Докажи дека функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не е периодична.

Решение. Да претпоставиме дека f е периодична со период T. Тогаш за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{kT\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ важи $\sin\frac{1}{x+T}=\sin\frac{1}{x}$, од каде што следува $\frac{1}{x+T}=\frac{1}{x}+2s\pi$ за $s\in\mathbb{Z}$. Оттука добиваме $x=x+T+(x^2+xT)2s\pi$, односно $2s\pi x^2+2s\pi Tx+T=0$. Последново равенство важи за секој $s\in\mathbb{Z}$, па и за $s=0$. Но, тогаш добиваме дека и $T=0$. Според тоа f не е периодична. ●

3.37. Дадена е функцијата $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\0, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ (функција на Дирихле).

Докажи дека

а) секој рационален број е период на f;

б) Ниту еден ирационален број не е период на f.

Решение. а) Нека T е произволен рационален број.

- Ако $x \in \mathbb{Q}$ тогаш и $x+T \in \mathbb{Q}$, па $f(x+T)=1=f(x)$;

- Ако $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ тогаш и $x+T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (во спротивно $x=(x+T)-T \in \mathbb{Q}$, што не е можно), па $f(x+T)=0=f(x)$.

Значи, во секој случај $f(x+T)=f(x)$ за секој $x \in \mathbb{R}$;

б) Нека, сега, T е произволен ирационален број. Тогаш и $0+T$ е ирационален па важи $f(0+T)=0$. Но, $f(0)=1$. Според тоа $f(0+T)=0 \neq 1=f(0)$, па T не е период на f.●

3.38. Нека за функцијата f важи $f(x+c)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, каде што $c \in \mathbb{R}$. Докажи дека f е периодична.

Решение. Имаме $f(x+c+c)=\frac{1-f(x+c)}{1+f(x+c)}=\frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}=f(x)$, па f е периодична со период $2c$.●

3.39. Најди го периодот на функцијата $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

Решение. Нека T е периодот на дадената функција. Тогаш од $f(x+T)=f(x)$ за секој $x \in \mathbb{R}$ добиваме

$$\sin(x+T)+\frac{1}{2}\sin(2x+2T)+\frac{1}{3}\sin(3x+3T)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x,$$

односно $(\sin(x+T)-\sin x)+\frac{1}{2}(\sin(2x+2T)-\sin 2x)+\frac{1}{3}(\sin(3x+3T)-\sin 3x)=0$.

Последново равенство важи за секој $x \in \mathbb{R}$, па важи и за $x=0$. Заменувајќи, добиваме $\sin T+\frac{1}{2}\sin 2T+\frac{1}{3}\sin 3T=0$. Натаму,

$$\begin{aligned}
&\sin T+\frac{1}{2}\sin 2T+\frac{1}{3}\sin 3T=0 \Leftrightarrow \sin T+\frac{1}{2}2\sin T\cos T+\frac{1}{3}\sin(2T+T)=0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sin T+\sin T\cos T+\frac{1}{3}\sin 2T\cos T+\frac{1}{3}\cos 2T\sin T=0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sin T+\sin T\cos T+\frac{1}{3}2\sin T\cos^2 T+\frac{1}{3}\sin T\cos^2 T-\frac{1}{3}\sin^3 T=0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sin T\left(1+\cos T+\frac{2}{3}\cos^2 T+\frac{1}{3}\cos^2 T-\frac{1}{3}\sin^2 T\right)=0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sin T\left(\frac{2}{3}+\cos T+\frac{4}{3}\cos^2 T\right)=0
\end{aligned}$$

па добиваме $\sin T=0$ или $\frac{2}{3}+\cos T+\frac{4}{3}\cos^2 T=0$. Последната равенка нема реални решенија, па останува $T=2\pi$.●

3.40. Дадена е функцијата $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ дефинирана со $f(x)=x^2+3$.

Дали функцијата:

а) f;

б) $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ дефинирана со $g(x)=f(x)$ за секој $x\in(0,\infty)$;

в) $h:(0,\infty)\to(3,\infty)$ дефинирана со $h(x)=f(x)$ за секој $x\in(0,\infty)$;

има инверзна? Во случај на потврден одговор, најди ја инверзната функција.

Решение. а) Заради $-1\neq 1$ но $f(-1)=(-1)^2+3=4=1^2+3=f(1)$, па f не е инјекција на $\mathbb{R}$. Според тоа f нема инверзна на $\mathbb{R}$;

б) Нека $x_1,x_2\in(0,\infty)$ и $g(x_1)=g(x_2)$. Тогаш $x_1^2+3=x_2^2+3$, односно $x_1^2=x_2^2$. Но, од $x_1,x_2\in(0,\infty)$ следува $x_1=x_2$, па g е инјекција.

Ќе докажеме дека $1\in(0,\infty)$ не е слика на ниту еден елемент од $(0,\infty)$. Навистина, ако постои $x_0\in(0,\infty)$ така што $g(x_0)=1$ добиваме $x_0^2+3=1$, односно $x_0^2=-2$ што е невозможно. Значи g не е сурјекција на даденото множество, па

нема инверзна.

в) Нека $x_1,x_2\in(0,\infty)$ и $h(x_1)=h(x_2)$. Тогаш $x_1^2+3=x_2^2+3$, односно $x_1^2=x_2^2$. Но, од $x_1,x_2>0$ следува $x_1=x_2$, па h е инјекција.

Нека, сега $y\in(3,\infty)$ е произволен. Ќе се обидеме да најдеме $x\in(0,\infty)$ така што $h(x)=y$. Значи, $x^2+3=y$, па $x^2=y-3$. Заради $y>3$ добиваме $x=\sqrt{y-3}$. Притоа $\sqrt{y-3}\in(0,\infty)$. Според тоа $h(\sqrt{y-3})=(\sqrt{y-3})^2+3=y$, па h е сурјекција.

Значи h е биекција на даденото множество, па има инверзна функција f^{-1}.

Сега, да ја најдеме h^{-1}. За секој $x\in(0,\infty)$ имаме $h^{-1}(h(x))=x$, односно $h^{-1}(x^2+3)=x$. Ставајќи $t=x^2+3$, добиваме $t>3$ и $x=\sqrt{t-3}$, па $h^{-1}(t)=\sqrt{t-3}$.

Значи, $h(h^{-1}(x))=h(\sqrt{x-3})=(\sqrt{x-3})^2+3=x=1_{(3,\infty)}(x)$ за секој $x\in(3,\infty)$ и

$$h^{-1}(h(x))=h^{-1}(x^2+3)=\sqrt{x^2+3-3}=x=1_{(0,\infty)}(x) \text{ за секој } x\in(0,\infty).$$

Според тоа, функцијата $h^{-1}(x)=\sqrt{x-3}$ е инверзна на h.●

3.41. Дадена е функцијата $f:(0,\infty)\to(0,1)$ дефинирана со $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$.

а) Докажи дека f е биекција од $(0,\infty)$ во $(0,1)$;

б) Најди ја инверзната функција на f на $(0,\infty)$.

Решение. а) Нека $x_1,x_2\in(0,\infty)$ и $f(x_1)=f(x_2)$. Тогаш $\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{1+x_2}$, односно $x_1(1+x_2)=x_2(1+x_1)$. Оттука добиваме $x_1=x_2$, па f е инјекција.

Сега, нека $y\in(0,1)$ е произволен. Бараме $x\in(0,\infty)$ таков што $f(x)=y$, т.е. $\frac{x}{1+x}=y$. Оттука $x=y(1+x)$ (бидејќи $1+x\neq 0$) па $x(1-y)=y$. Заради $y<1$ добиваме $1-y>0$, па $x=\frac{y}{1-y}\in(0,\infty)$. Значи, $f\left(\frac{y}{1-y}\right)=\frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}}=y$. Докажавме дека за секој $y\in(0,1)$ постои $x=\frac{y}{1-y}\in(0,\infty)$ така што $f(x)=y$. Значи f е и сурјекција.

Според тоа f е биекција.

б) Од **а)** следува дека f има инверзна функција f^{-1} на $(0,\infty)$. За неа важи $f^{-1}(f(x))=x$ за секој $x\in(0,\infty)$. Оттука добиваме $f^{-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)=x$. Ставајќи $t=\frac{x}{1+x}$ добиваме $t\in(0,1)$ и $x=\frac{t}{1-t}$. Значи $f^{-1}(t)=\frac{t}{1-t}$.

Да провериме дали

$f(f^{-1}(x))=x=1_{(0,1)}(x)$, за секој $x\in(0,1)$ и

$f^{-1}(f(x))=x=1_{(0,\infty)}(x)$, за секој $x\in(0,\infty)$

За $x\in(0,1)$ имаме $f(f^{-1}(x))=f\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{\frac{x}{1-x}}{1+\frac{x}{1-x}}=x=1_{(0,1)}(x)$, а за $x\in(0,\infty)$ имаме

$$f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)=\frac{\frac{x}{1+x}}{1-\frac{x}{1+x}}=x=1_{(0,\infty)}(x).$$

Значи функцијата $f^{-1}:(0,1)\to(0,\infty)$ дефинирана со $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$ е инверзна на функцијата f.●

3.42. Најди ја инверзната на функцијата $f(x)=e^{x+3}$.

Решение. Ќе докажеме дека дадената функција е биекција од $\mathbb{R}$ во $(0,\infty)$.

Навистина, нека $x_1,x_2\in(0,\infty)$ и $f(x_1)=f(x_2)$. Значи $e^{x_1+3}=e^{x_2+3}$. Оттука добиваме $e^3e^{x_1}=e^3e^{x_2}$, т.е. $e^{x_1}=e^{x_2}$, па и $x_1=x_2$. Значи f е инјекција.

Нека, сега, $y\in(0,\infty)$ е произволен. Да ја решиме по x равенката $e^{x+3}=y$. Добиваме $e^x=\frac{y}{e^3}$, односно $x=\ln\frac{y}{e^3}$. Значи $f\left(\ln\frac{y}{e^3}\right)=y$, па f е сурјекција.

Значи f е биекција, па има инверзна функција f^{-1}.

Инверзната функција ќе ја определиме од равенството $f^{-1}(f(x))=x$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Добиваме $f^{-1}(e^{x+3})=x$. Да ставиме $t=e^{x+3}$ и оттука $x=\ln\frac{t}{e^3}$. Значи инверзната функција е $f^{-1}(t)=\ln\frac{t}{e^3}=\ln t-3$ и е дефинирана за секој $t\in(0,\infty)$.

Да провериме уште дали важи $ff^{-1}=1_{(0,\infty)}$. За секој $x\in(0,\infty)$ имаме

$$f(f^{-1}(x))=f\left(\ln\frac{x}{e^3}\right)=e^{\ln\frac{x}{e^3}+3}=e^{\ln x-3+3}=e^{\ln x}=x=1_{(0,\infty)}(x)\ \bullet$$

3.43. Најди ја инверзната на функцијата $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(2,4)$ дефинирана со $f(x)=\sin x+3$.

Решение. Прво да докажеме дека f е биекција. Нека $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и $f(x_1)=f(x_2)$. Значи, $\sin x_1+3=\sin x_2+3$, т.е. $\sin x_1=\sin x_2$.

Оттука $\sin x_1-\sin x_2=0$, т.е. $2\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}=0$. Оттука $x_1=x_2+2k\pi$ или $x_1=-x_2+\pi+2s\pi$, каде k и s се произволни цели броеви. Но $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, па $k=0$. Второто равенство не важи за никои $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и $s\in\mathbb{N}$. Значи $x_1=x_2$, па f е инјекција.

Нека $y\in(2,4)$ е произволен. Да најдеме решение x на равенката $\sin x+3=y$ што припаѓа на $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Имаме $\sin x=y-3$ и бидејќи $y-3\in(-1,1)$ следува дека $x=\arcsin(y-3)$. Според тоа $f(\arcsin(y-3))=\sin(\arcsin(y-3))+3=y-3+3=y$. Значи f е и сурјекција, па е биекција. Според тоа постои инверзна функција $f^{-1}:(2,4)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Сега, да ја најдеме инверзната функција на f. Од $f^{-1}(f(x))=x$ добиваме

$f^{-1}(\sin x+3)=x$. Да ставиме $t=\sin x+3$, т.е. $\sin x=t-3$. Тогаш $t\in(2,4)$, па $t-3\in(-1,1)$. Значи $x=\arcsin(t-3)$. Според тоа инверзната функција е $f^{-1}(x)=\arcsin(x-3)$.●

3.44. Најди ја инверзната на функцијата $f:(3\infty)\to(0,\infty)$ дефинирана со $f(x)=x^2-4x+3$.

Решение. Нека $x_1,x_1\in(3,\infty)$ и $f(x_1)=f(x_2)$. Значи $x_1^2-4x_1+3=x_2^2-4x_2+3$, т.е. $(x_1-x_2)(x_1+x_2)-4(x_1-x_2)=0$. Оттука добиваме $(x_1-x_2)(x_1+x_2-4)=0$. Од $x_1,x_1>3$ следува дека $x_1+x_2>6>4$, па $x_1+x_2-4>0$. Значи мора $x_1=x_2$. Според тоа f е инјекција.

Нека $y\in(0,\infty)$ е произволен. Да најдеме $x\in(3,\infty)$ таков што $f(x)=y$, т.е. $x^2-4x+3=y$. Решавајќи ја по x равенката $x^2-4x+3-y=0$ добиваме

$$x=\frac{4+\sqrt{16-4(3-y)}}{2}=\frac{4+2\sqrt{1+y}}{2}=2+\sqrt{1+y} \text{ или } x=2-\sqrt{1+y}.$$

Но $2+\sqrt{1+y}\in(3,\infty)$ и $2-\sqrt{1+y}\notin(3,\infty)$, па следува $x=2+\sqrt{1+y}$.
Значи $f(2+\sqrt{1+y})=y$, па f е сурјекција.

Од сето ова следува дека f е биекција па постои $f^{-1}:(0,\infty)\to(3,\infty)$.

Инверната функција f^{-1} ќе ја најдеме од равенството $f^{-1}(f(x))=x$, т.е. од $f^{-1}(x^2-4x+3)=x$. Да ставиме $t=x^2-4x+3$. Како во случајот на сурјекција добиваме $t=2+\sqrt{1+x}$, па $f^{-1}(t)=2+\sqrt{1+t}$.

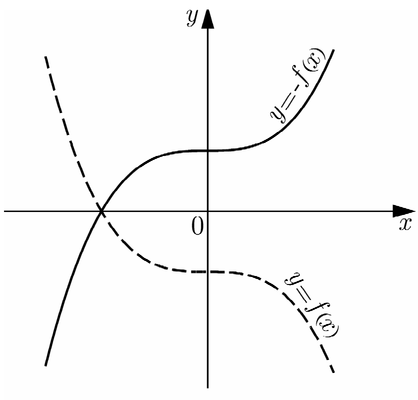
Значи, инверзната функција на f е f^{-1} дефинирана со $f^{-1}(t)=2+\sqrt{1+t}$.●

3.2. Посредна конструкција на графици

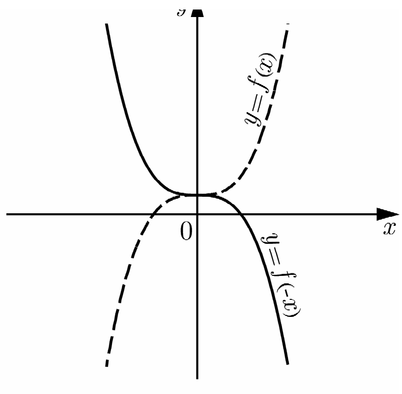
Методот за индиректна конструкција на график на функција $y = f(x)$, се состои во изнаоѓање на врска на дадената функција и функција чијшто график ни е веќе познат. Ќе сметаме дека ни се познати графиците на елементарните функции: $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \log x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$,

$$y = \mathrm{tg}\,x,\ y = \mathrm{ctg}\,x,\ y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \mathrm{arctg}\,x,\ y = arc\mathrm{ctg}\,x\ .$$

1) Графикот на функцијата $y = -f(x)$, ако ни е познат графикот на функцијата $y = f(x)$, го добиваме ако го промениме знакот на втората координата на графикот на функцијата $y = f(x)$. Тоа значи конструкција на симетрична крива во однос на $x-$оската на позната крива определена со функцијата $y = f(x)$ (Црт.1).

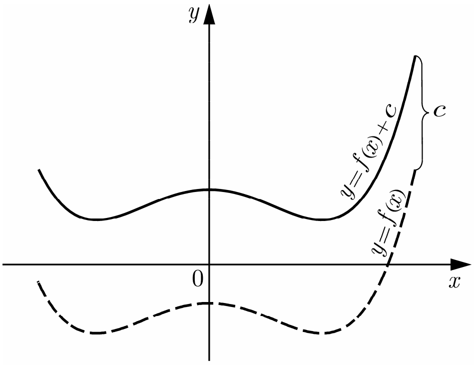


Црт.1

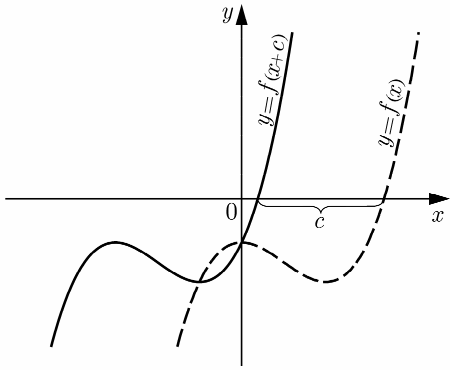


Црт.2

2) Графикот на функцијата $y = f(-x)$, ако ни е познат графикот на функцијата $y = f(x)$, го добиваме ако го промениме знакот на првата координата на графикот на функцијата $y=f(x)$. Тоа значи конструкција на симетрична крива во однос на $y-$оската на позната крива определена со функцијата $y=f(x)$ (Црт.2).



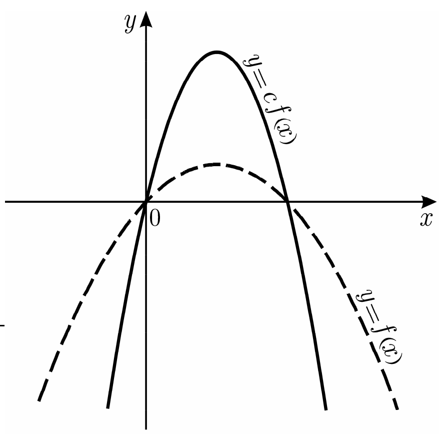
Црт.3



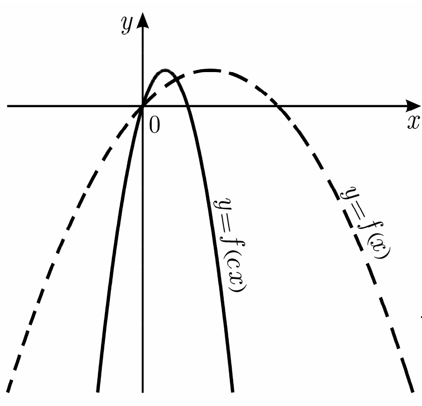
Црт.4

3) Графикот на функцијата $y=f(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$, ако ни е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, го добиваме ако ја наголемиме за c втората координата на графикот на функцијата $y=f(x)$. Тоа значи конструкција на крива поместена за c во правец на $y-$оската на позната крива определена со функцијата $y=f(x)$. При тоа, ако $c>0$ поместувањето е во позитивна насока на $y-$оската, а ако $c<0$ поместувањето е во негативната насока на $y-$оската (Црт. 3).

4) Графикот на функцијата $y=f(x+c), c\in\mathbb{R}$, ако ни е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, го добиваме ако ја наголемиме за c првата координата на графикот на функцијата $y=f(x)$. Тоа значи конструкција на крива поместена за c во правец на $x-$оската на позната крива определена со функцијата $y=f(x)$.



Црт.5



Црт.6

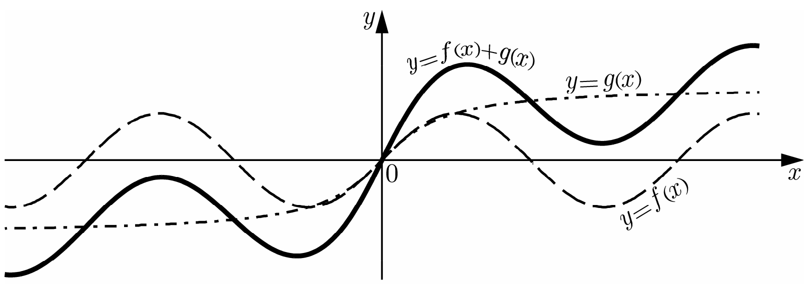
При тоа, ако $c>0$ поместувањето е во негативната насока на $x-$ оската, а ако $c<0$ поместувањето е во позитивната насока на $x-$ оската (Црт. 4).

5) Графикот на функцијата $y=cf(x), c>0$, ако ни е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, го добиваме ако ја помножиме со c втората координата на графикот

на функцијата $y=f(x)$. Тоа значи „растегнување" или „стегање" на кривата определена со дадената функција во правец на $y-$ оската во зависност дали $c>1$ или $0<c<1$ (Црт. 5). При тоа, да напоменеме дека нулите на двете функции се еднакви.

6) Графикот на функцијата $y=f(cx), c>0$, ако ни е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, го добиваме ако ја помножиме со c првата координата на графикот на функцијата $y=f(x)$. Тоа значи „растегнување" или „стегање" на кривата определена со дадената функција во правец на $x-$ оската во зависност дали $c>1$ или $0<c<1$ (Црт.6).

7) Графикот на функцијата $y=f(x)+g(x)$, ако ни се познати графиците на

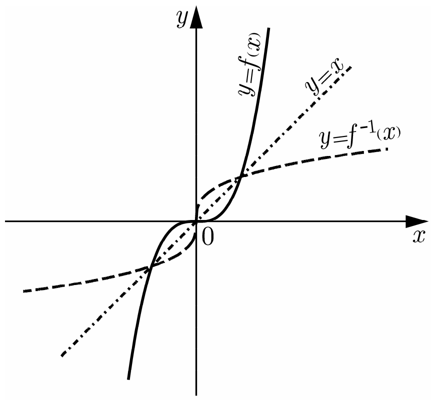


Црт. 7

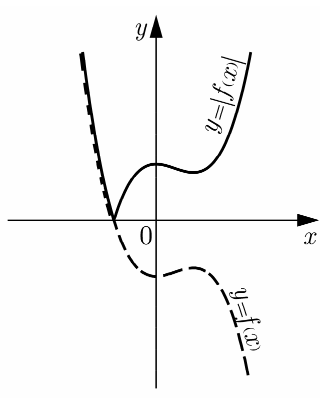
функциите $y=f(x)$ и $y=g(x)$, го добиваме ако ги собереме вторите компоненти на графиците на функциите $y=f(x)$ и $y=g(x)$ (Црт.7).

8) Графикот на функцијата $f^{-1}(x)$ (на подмножеството од дефиниционата област на кое постои f^{-1}) ако ни е познат графикот на f, го добиваме како симетрична (т.е. осносиметрична) крива на $f(x)$ во однос на правата $y=x$ (Црт.8).

9) Графикот на функцијата $y=|f(x)|$ го добиваме ако точките од графикот на $f(x)$ кои имаат негативна втора координата ги пресликаме симетрично во однос на $x-$оската. (Црт.9)



Црт.8

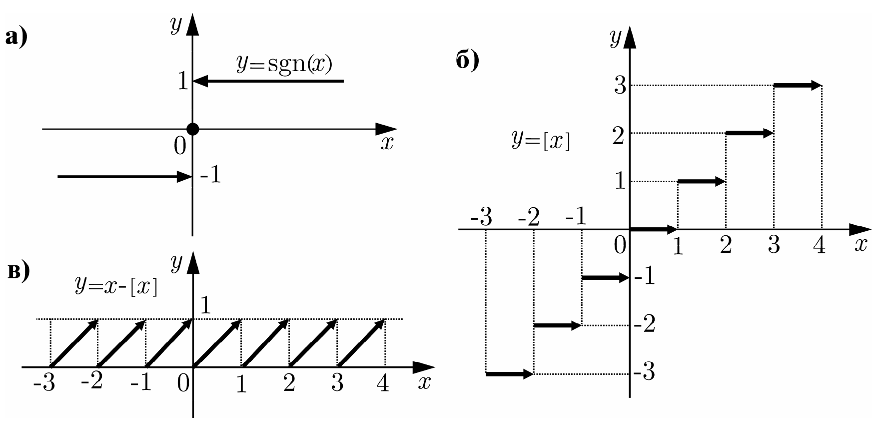


Црт.9

Скицирај ги графиците на следните функции: (**3.45.** - **3.57.**)

3.45. а) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$; **б)** $f(x)=[x]$; **в)** $f(x)=x-[x]$.

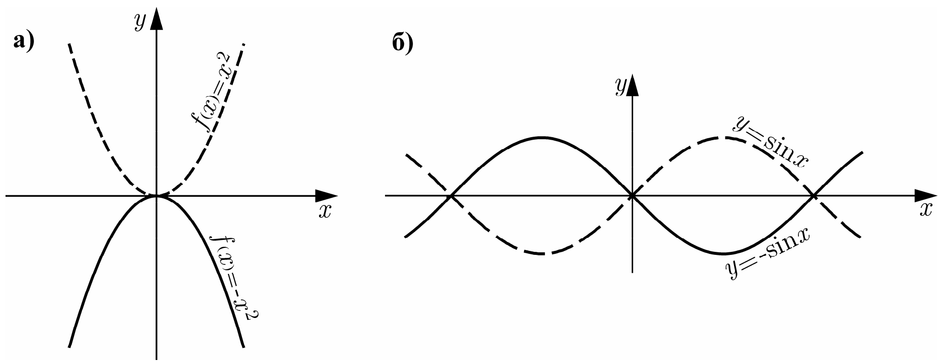
Решение.

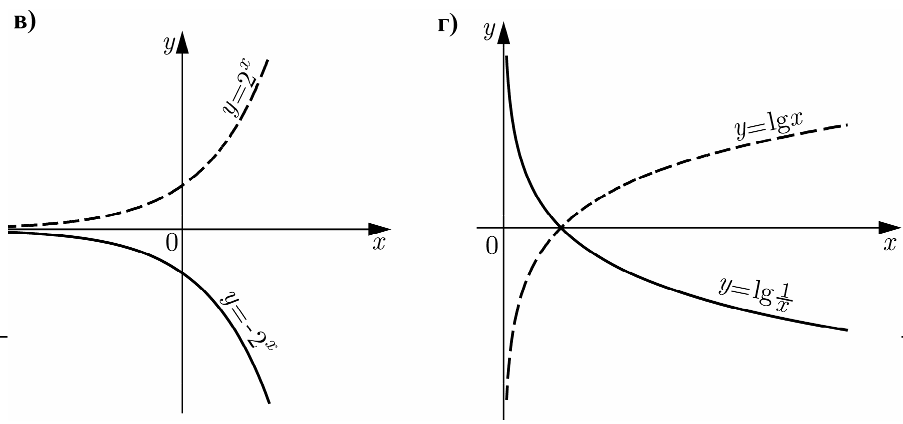


3.46. **а)** $f(x)=-x^2$; **б)** $f(x)=-\sin x$;

в) $f(x)=-2^x$; **г)** $f(x)=\lg\dfrac{1}{x}$.

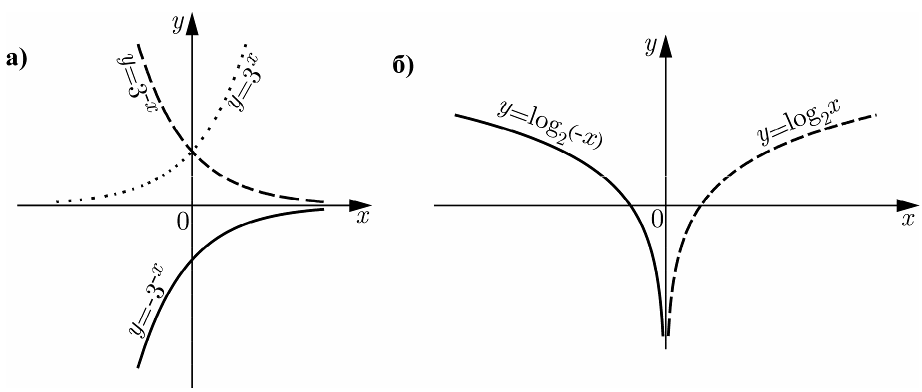
Решение.





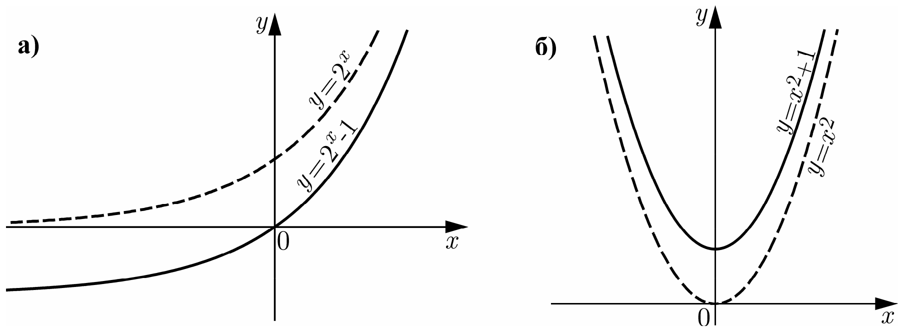
3.47. **а)** $f(x)=-3^{-x}$; **б)** $f(x)=\log_2(-x)$.

Решение.



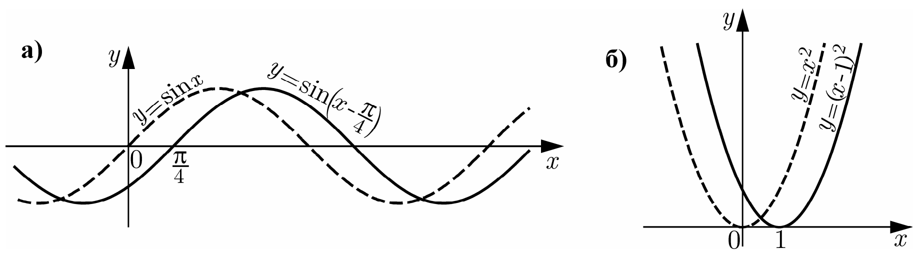
3.48. **а)** $f(x)=2^x-1$; **б)** $f(x)=x^2+1$;

Решение.



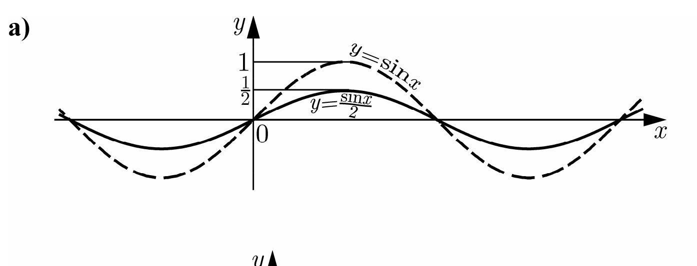
3.49. **а)** $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; **б)** $f(x)=(x-1)^2$.

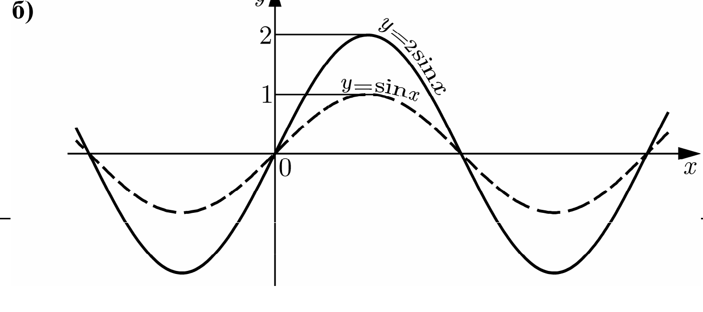
Решение.



3.50. **а)** $f(x)=\frac{\sin x}{2}$; **б)** $f(x)=2\sin x$.

Решение.

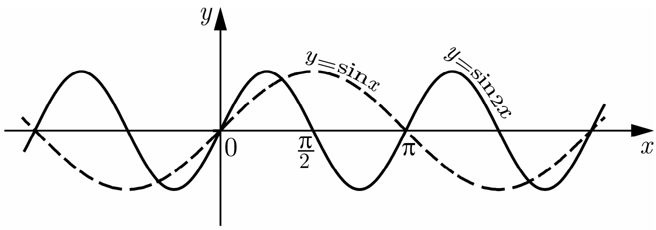




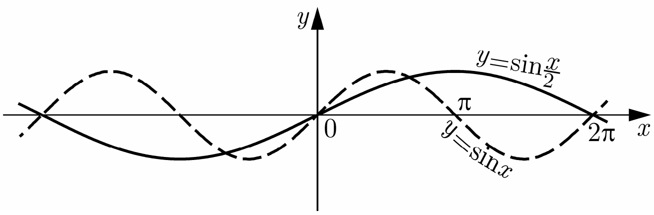
3.51. **а)** $f(x)=\sin 2x$; **б)** $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$.

Решение.

а)

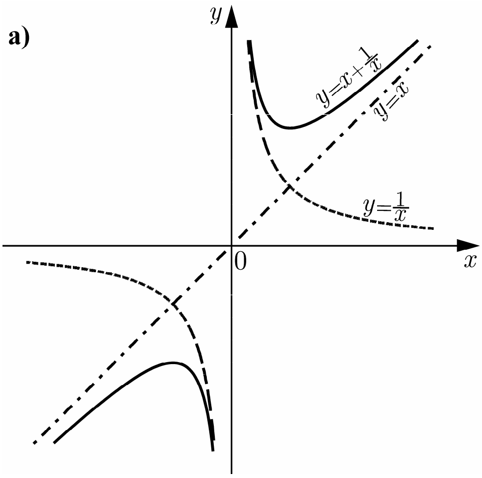


б)

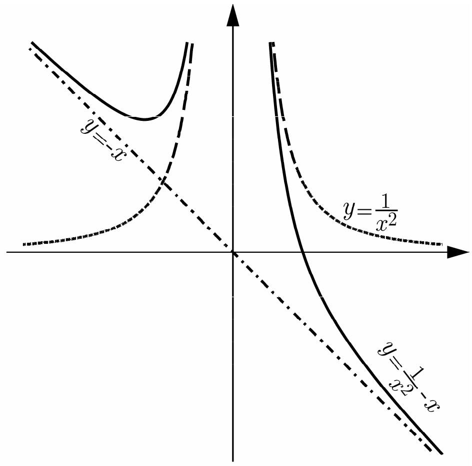


3.52. **а)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$; **б)** $f(x)=\dfrac{1-x^3}{x^2}$.

а)



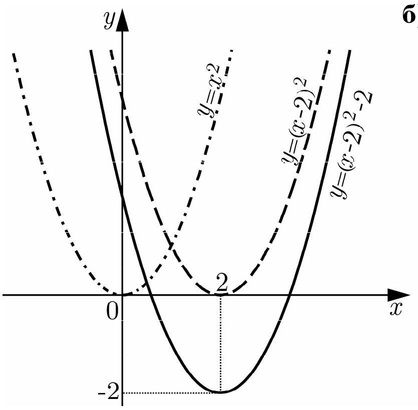
б)



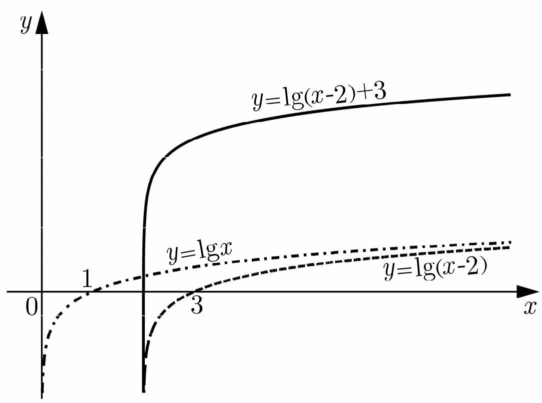
Решение.

3.53. **а)** $f(x)=x^2-4x+2$; **б)** $f(x)=\lg(x-2)+3$

Решение. а) $f(x)=x^2-4x+2=(x-2)^2+2$



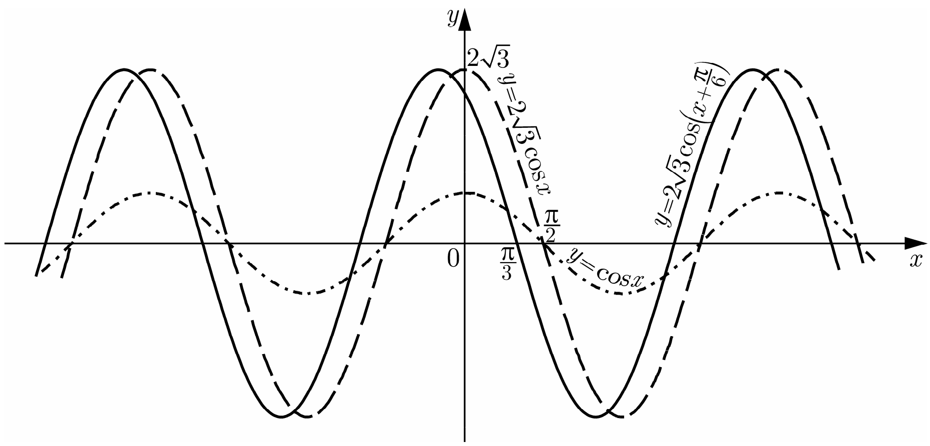
б)



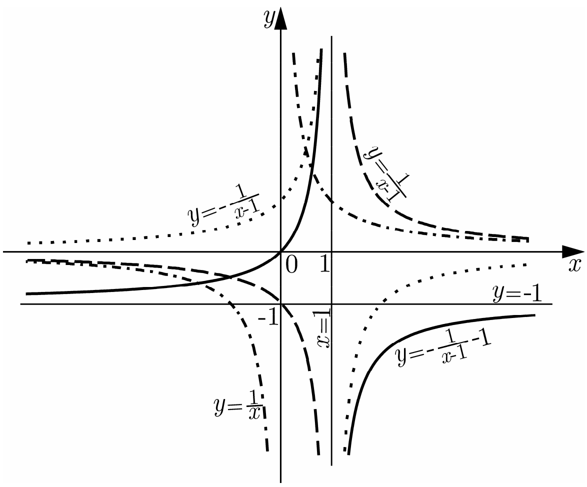
3.54. $f(x)=3\cos x-\sqrt{3}\sin x$

Решение.

$$f(x)=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$



3.55. $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$.



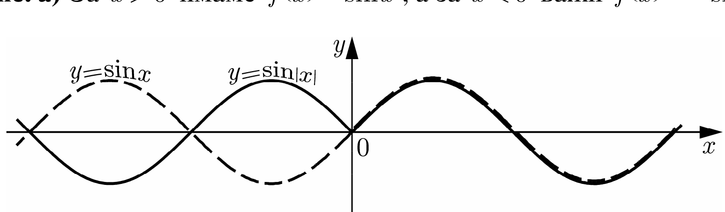
Решение. Да означиме $g(x)=\dfrac{1}{x}$. Тогаш

$$f(x)=-\frac{x}{x-1}=-\frac{x-1+1}{x-1}=$$
$$=-1-\frac{1}{x-1}=-g(x-1)-1.$$

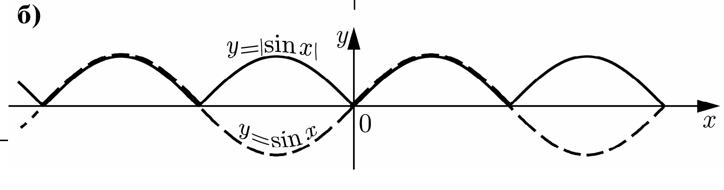
3.56. а) $f(x)=\sin|x|$;

б) $f(x)=|\sin x|$.

Решение. а) За $x>0$ имаме $f(x)=\sin x$, а за $x<0$ важи $f(x)=-\sin x$.

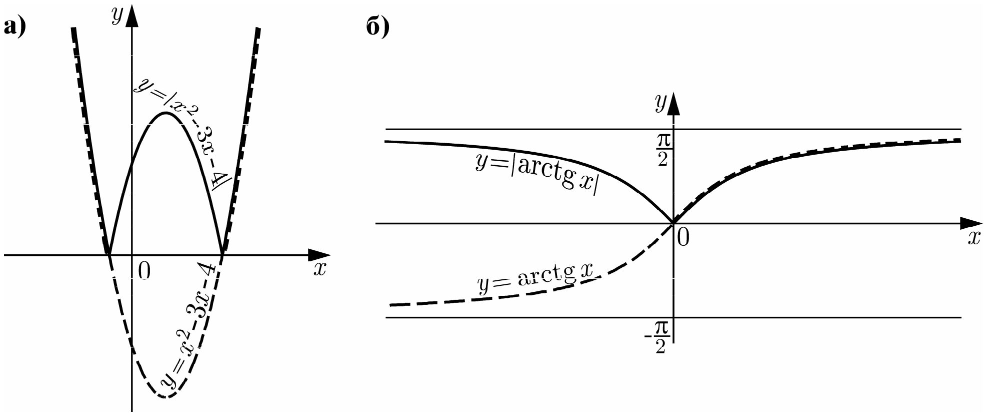


б)



3.57. а) $f(x)=|x^2-3x-4|$; **б)** $f(x)=|\operatorname{arctg}x|$.

Решение.



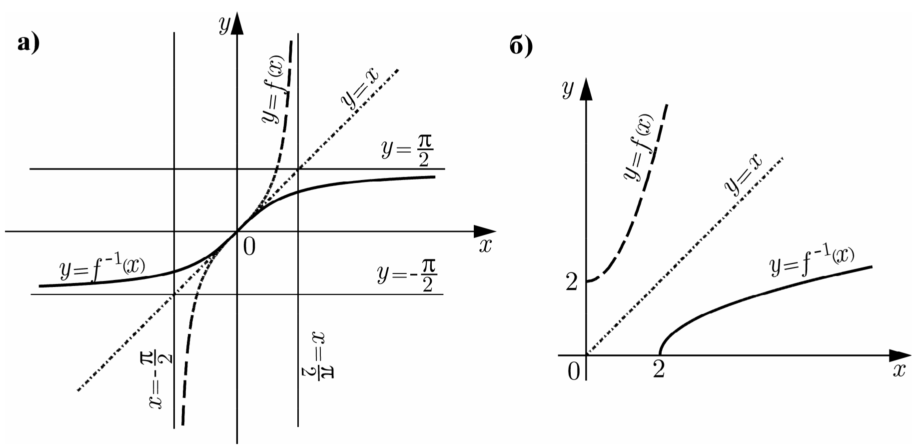
3.58. Скицирај ги графиците на инверзните функции на функциите:

а) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$; **б)** $f(x)=x^2+2$, $f:[0,\infty)\to[2,\infty)$;

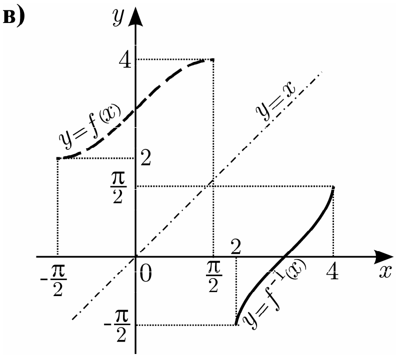
в) $f(x)=\sin x+3$, $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(2,4)$; **г)** $f(x)=\frac{x}{1+x}$; $f:(0,\infty)\to(0,1)$;

д) $f(x)=e^{x+1}$, $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$; **ѓ)** $f(x)=x^2-4x+3$, $f:(3\infty)\to(0,\infty)$.

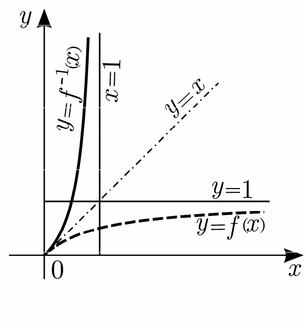
Решение. Дадените функции имаат инверзни (види ги задачите **3.40.** - **3.44.**)



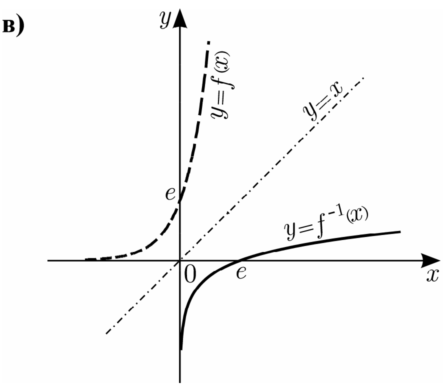
в)


y
4
y=f(x)
y=x
2
π/2
-π/2
0
π/2
2
4
x
y=f⁻¹(x)
-π/2

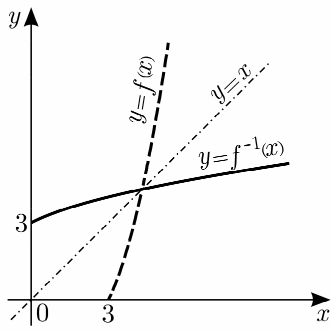
г)


y
y=f⁻¹(x)
x=1
y=x
y=1
y=f(x)
0
x

в)


y
y=f(x)
y=x
e
y=f⁻¹(x)
0
e
x

г)


y
y=f(x)
y=x
y=f⁻¹(x)
3
0
3
x

3.3. Функционални равенки

3.59. Одреди го $f(0)$ ако $3f(x)+f(3x)=x+4$.

Решение. За $x=0$ се добива $3f(0)+f(0)=4$, т.е. $f(0)=1$. ●

3.60. Одреди го $f(2)$, ако $\frac{1}{2}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$.

Решение. За $x=2$ се добива $\frac{1}{2}f(2)+2f\left(\frac{1}{2}\right)=2$, а за $x=\frac{1}{2}$ се добива $\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(2)=\frac{1}{2}$. Со одземање на овие две равенки се добива $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, $f(2)=0$. ●

3.61. Одреди го $f(2)$, ако за секој реален број $x\neq 0$ важи $f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$.

Решение. За $x=2$, $f(2)+3f\left(\frac{1}{2}\right)=4$, а за $x=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)+3f(2)=\frac{1}{4}$, па со решавање на овој систем се добива $f(2)=-\frac{13}{32}$. ●

3.62. Одреди ја функцијата $f(x)$ ако $f(x+3)=2x-5$.

Решение. Ставаме $t=x+3$. Тогаш $x=t-3$, па $f(t)=2(t-3)-5=2t-11$ т.е. $f(x)=2x-11$. ●

3.63. Одреди ја функцијата $f(x)$, ако $g(x)=3x+2$ и $g\left(x^2+xf(x)\right)=3x^2+6x+5$.

Решение. Од $g(x)=3x+2$ се добива

$g\left(x^2+xf(x)\right)=3\left(x^2+xf(x)\right)+2=3x^2+3xf(x)+2$. Значи

$3xf(x)=6x+3$, т.е. $f(x)=\frac{2x+1}{x}$. ●

3.64. Одреди го $f(x)$ ако $f(x+1)=x^2+3x+3$.

Решение. Ако ставиме смена $t=x+1$, тогаш $x=t-1$, па $f(t)=(t-1)^2+3(t-1)+3=t^2+t+1$, т.е. $f(x)=x^2+x+1$. ●

3.65. Одреди го $f(x+1)$ ако $f(x-1)=2x^2-7x+10$.

Решение. Ставаме смена $t=x-1$, па $x=t+1$ и

$f(t)=2(t+1)^2-7(t+1)+10=2t^2-3t+5$, т.е. $f(x)=2x^2-3x+5$.

Според тоа $f(x+1)=2(x+1)^2-3(x+1)+5=2x^2+x+4$. ●

3.66. Одреди ја функцијата $f(x)$ ако $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$.

Решение. Ставаме смена $y=1-x$, тогаш $\frac{x+1}{x-2}=\frac{y-2}{y+1}$, па

$$f\left(\frac{y-2}{y+1}\right)+2f\left(\frac{y+1}{y-2}\right)=1-y .$$

Во равенството $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$, ставаме $x=y$, па добиваме

$$f\left(\frac{y+1}{y-2}\right)+2f\left(\frac{y-2}{y+1}\right)=y .$$

Сега го разгледуваме системот равенки $\begin{cases} f\left(\frac{y+1}{y-2}\right)+2f\left(\frac{y-2}{y+1}\right)=y \\ f\left(\frac{y-2}{y+1}\right)+2f\left(\frac{y+1}{y-2}\right)=1-y. \end{cases}$

Негово решение е $f\left(\frac{y+1}{y-2}\right)=\frac{2}{3}-y$ и $f\left(\frac{y-2}{y+1}\right)=y-\frac{1}{3}$. Ако ставиме замена $x=\frac{y-2}{y+1}$ се добива $y=\frac{x+2}{1-x}$, па $f(x)=\frac{4x+5}{3(1-x)}$.●

3.67. Ако $f(2x)=4-4x$, тогаш колку е $f(2003)$?

Решение. Ако ставиме $x=\frac{y}{2}$ се добива $f(2x)=f\left(2\frac{y}{2}\right)=4-4\frac{y}{2}$ т.е. $f(y)=4-2y$, па според тоа $f(2003)=4-2\cdot 2003=-4002$.●

3.68. Ако $f(2x-3)=4x+2$, тогаш колку е $f(997)$?

Решение. Ако ставиме $t=2x-3$, тогаш $x=\frac{t+3}{2}$ па $f(t)=4\frac{t+3}{2}+2=2t+8$. Значи $f(997)=2002$.●

3.69. Одреди го збирот $f(2)+g(3)$ ако $f(x)+g(x)=3x+1$ и $f(x)-g(x)=x-1$.

Решение. Со собирање на равенствата се добива $2f(x)=4x$, т.е. $f(x)=2x$ и $g(x)=x+1$. Според тоа $f(2)+g(3)=4+4=8$.●

3.70. Дадена е функцијата $f(x)=x^2-3x+4$. Одреди го збирот

$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ ако $x_1=f(1)$, $x_2=f(2)$ и $x_3=f(3)$.

Решение. $x_1=f(1)=2, x_2=f(2)=2$ и $x_3=f(3)=4$, па според тоа

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=f(2)+f(2)+f(4)=2+2+8=12 .●$$

3.71. Нека $f(x)=ax^2+bx+c$.

а) Одреди ја разликата $f(x+1)-f(x)$;

б) Одреди ги a и b ако $f(x+1)-f(x)=x$

Решение. а) $f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2ax+a+b$

б) Од $2ax+a+b=x$ следува дека $2a=1$ и $a+b=0$, т.е. $a=\frac{1}{2}$ и $b=-\frac{1}{2}$.●

3.72. За кои вредности $a,b,c\in\mathbb{R}$ функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ го исполнува условот $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ за секои x и y.

Решение. Условот може да се напише во облик

$$a(x+y)^2+b(x+y)+c=ax^2+bx+c+ay^2+by+c+xy,$$

од каде се добива дека

$$2axy=xy+c \tag{1}$$

Ако во (1) ставиме $x=0$ и $x=y=1$ се добива дека $c=0$ и $a=\frac{1}{2}$.●

3.73. Дадена е функцијата $f(x)=2x-1$. Одреди ги реалните броеви a и b така што $f(f(a))=0$ и $f(f(b))=b$.

Решение. $f(f(x))=2(2x-1)-1=4x-3$, па $f(f(a))=4a-3=0$, т.е. $a=\frac{3}{4}$ и $f(f(b))=4b-3=b$, т.е. $b=1$.●

3.74. Докажи дека: ако $f(x)=ax^2+bx+c$, тогаш

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0.$$

Решение. $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=$

$$=a(x+3)^2+b(x+3)+c-3\big(a(x+2)^2+b(x+2)+c\big)+3\big(a(x+1)^2+b(x+1)+c\big)-$$
$$-ax^2-bx-c=0.$$●

3.75. Дадена е функцијата $f(x)=2x-1$. Одреди ја функцијата $g(x)$ ако

$$f(g(x))=6x+3.$$

Решение. $f(g(x))=2g(x)-1$, па $2g(x)-1=6x+3$ т.е. $g(x)=3x+2$.●

3.76. Дадени се функциите $f(x)=2x-1$ и $g(x)=x+3$. Одреди ги:

а) $f\left(\frac{x}{2}\right)$; **б)** $g(x-1)$; **в)** $f(g(x))$;

г) $g(f(x))$; **д)** $f(f(x))$; **ѓ)** $g(f(g(x)))$.

Решение. а) $f\left(\frac{x}{2}\right)=2\frac{x}{2}-1=x-1$;

б) $g(x-1)=x-1+3=x+2$;

в) $f(g(x))=2(x+3)-1=2x+5$;

г) $g(f(x))=2x-1+3=2x+2$;

д) $f(f(x))=2(2x-1)-1=4x-3$;

ѓ) $g(f(g(x)))=g(2x+5)=2x+5+3=2x+8$.●

3.77. Дадени се функциите:

а) $f(x)=x+3$;

б) $f(x)=3-2x$;

в) $f(x)=\frac{1}{3}x$.

Одреди функција $g(x)$, за која важи $f(g(x))=x$.

Решение. а) $f(g(x))=g(x)+3=x$, па $g(x)=x-3$;

б) $f(g(x))=3-2g(x)=x$, па $g(x)=\frac{3-x}{2}$;

в) $f(g(x))=\frac{1}{3}g(x)=x$, па $g(x)=3x$.●

3.78. Одреди ги функциите $f(x)$ и $g(x)$ ако $f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2x+1)=2x$ и $f\left(\frac{x}{x-1}\right)-g(2x+1)=x$, за $x\neq 1$.

Решение. Со собирање на двете равенства се добива $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{3x}{2}$, а со одземање $g(2x+1)=-\frac{x}{2}$. Ако ставиме $\frac{x}{x-1}=t$, тогаш $x=\frac{t}{t-1}$, па $f(t)=\frac{3t}{2(t-1)}$, а ако $2x+1=s$, тогаш $x=\frac{s-1}{2}$, па $g(s)=\frac{1-s}{4}$. Значи $f(x)=\frac{3x}{2(x-1)}$ и $g(x)=\frac{1-x}{4}$.●

3.79. Дадена е функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$, $a>0$. Докажи дека за сите $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ важи $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Решение. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+c=$

$$=a\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}+b\frac{x_1+x_2}{2}+c=a\frac{2x_1^2+2x_2^2-(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)}{4}+b\frac{x_1+x_2}{2}+c=$$

$$=a\frac{2x_1^2+2x_2^2-(x_1-x_2)^2}{4}+b\frac{x_1+x_2}{2}+c\leq a\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+b\frac{x_1+x_2}{2}+c=$$

$$=\frac{(ax_1^2+bx_1+c)+(ax_2^2+bx_2+c)}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\,.\bullet$$

3.80. Одреди ги сите реални функции f кои се определени за секој реален број x, такви што $f(x)+xf(1-x)=x^2-1$.

Решение. Ставаме смена $t=1-x$. Тогаш $x=1-t$, па $f(1-t)+(1-t)f(t)=(1-t)^2-1$, т.е. $f(1-t)+(1-t)f(t)=t^2-2t$. Ако оваа равенка се помножи со t се добива равенката $tf(1-t)+(t-t^2)f(t)=t^3-2t^2$ и заедно со равенката $f(t)+tf(1-t)=t^2-1$. Со одземање на овие равенки се добива $(t-t^2-1)f(t)=t^3-3t^2+1$, т.е. $f(t)=\frac{t^3-3t^2+1}{t-t^2-1}$.●

3.81. Нека $f(n)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$. Одреди го збирот $f(2000)+f(2004)$.

Решение. Бидејќи $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$ и $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$ се добива

$$f(2000)+f(2004)=\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1000}+\left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1000}+\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1002}+\left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1002}=$$

$$=i^{1000}+(-i)^{1000}+i^{1002}+(-i)^{1002}=1+1-1-1=0\,.\bullet$$

3.82. Ако $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x$, одреди ја $f(x)$.

Решение. Ставаме смена $t=\frac{x+1}{x-1}$. Тогаш $x=\frac{t+1}{t-1}$, па

$$f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{t+1}{t-1} \qquad (1)$$

Ако ставиме смена $t=\frac{x-1}{x+1}$, тогаш $x=\frac{1+t}{1-t}$, па

$$2f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1+t}{1-t} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) се добива $f(t)=\frac{1+t}{1-t}$, па $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.●

3.83. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи

$f(xy)=xf(y)+f(x)$, за сите $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека за функцијата f важи $f(xy)=xf(y)+f(x)$, за сите $x,y\in\mathbb{R}$. За $y=0$ се добива $f(0)=xf(0)+f(x)$, т.е. $f(x)=f(0)-xf(0)$. Ако во ова равенство ставиме $a=f(0)$, тогаш добиваме $f(x)=a-ax$.

Обратно, за функцијата $f(x)=a-ax$, $a\in\mathbb{R}$ со проверка се утврдува дека важи $f(xy)=xf(y)+f(x)$, за сите $x,y\in\mathbb{R}$.

Според тоа функцијата $f(x)=a-ax$, $a\in\mathbb{R}$ е единствена која што ги исполнува условите на задачата. ●

3.84. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи

$$(f(x))^2+f(x)f(y)=x^2+xy, \text{ за сите } x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Со замена $x=y=1$ во равенството се добива $2(f(1))^2=2$, од каде следува дека $f(1)=1$ или $f(1)=-1$.

Ако во равенството ставиме $x=1$, тогаш имаме

$$(f(1))^2+f(1)f(y)=1+y.$$

Ако $f(1)=1$, тогаш $f(y)=y$, а ако, пак, $f(1)=-1$, тогаш $f(y)=-y$, за секое $y\in\mathbb{R}$.

Значи бараните функции се $f(x)=x$ или $f(x)=-x$.●

3.85. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи

$$f(x)f(y)-f(xy)=x+y, \text{ за сите } x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Нека $y=0$. Тогаш со замена во равенството се добива

$$f(x)f(0)-f(0)=x \text{ т.е. } f(0)(f(x)-1)=x.$$

Значи $f(0)\neq 0$ и $f(x)=\frac{x}{f(0)}+1$.

За $x=0$ се добива $f(0)=1$, па $f(x)=x+1$.

Според тоа $f(x)=x+1$ е единствена функција која го исполнува условот на задачата. ●

3.86. Одреди ја функцијата $f(x)$ ако важи

$$f(x+y)+2f(x-y)+f(x)+2f(y)=4x+y, \text{ за сите } x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Нека $y=0$. Тогаш имаме

$$f(x)+2f(x)+f(x)+2f(0)=4x, \text{ т.е. } 4f(x)+2f(0)=4x.$$

Ако ставиме $f(0)=a$, тогаш од последното равенство се добива $f(x)=x-\frac{a}{2}$.

Ако ова равенство го замениме во равенката се добива

$$x+y-\frac{a}{2}+2\left(x-y-\frac{a}{2}\right)+x-\frac{a}{2}+2\left(y-\frac{a}{2}\right)=4x+y \text{, т.е. } -\frac{5a}{2}=0 .$$

Оттука каде следува дека $a=0$. Значи $f(x)=x$.●

3.87. Нека е дадена функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ со особините:

1) за секои $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ важи $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;

2) $f(1)=1$;

3) за секое $x\neq 0$ важи $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}f(x)$.

Докажи дека $f(2003)=2003$.

Решение. За $x_2=0$ од 1) имаме $f(x_1)=f(x_1)+f(0)$ т.е. $f(0)=0$. Значи важи $f(x)+f(-x)=f(x+(-x))=f(0)=0$, т.е. $f(x)=-f(-x)$.

Од друга страна имаме $f(x_1-x_2)=f(x_1+(-x_2))=f(x_1)+f(-x_2)=f(x_1)-f(x_2)$.

За $x\neq 0$ и $x\neq 1$ од 3) се добива

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}f(1-x)=\frac{1-f(x)}{(1-x)^2} \tag{1}$$

а од друга страна

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{1-x}\right)&=f\left(1+\frac{x}{1-x}\right)=1+f\left(\frac{x}{1-x}\right)=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 f\left(\frac{1-x}{x}\right)=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=\\&=1-\frac{x^2}{(1-x)^2}+\frac{f(x)}{(1-x)^2}=\frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Од (1) и претходното равенство добиваме дека $f(x)=x$, па $f(2003)=2003$.●

3.88. Нека $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ е функција таква што за секој $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ важи

$$2f(\sin x)+3f(\cos x)=\sin x \tag{1}$$

а) Одреди го $f(0)$;

б) Одреди ја функцијата $f(x)$.

Решение. а) Ако во (1) ставиме $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$ се добива системот линеарни равенки $\begin{cases}2f(0)+3f(1)=0\\2f(1)+3f(0)=1\end{cases}$, чие решение е $f(0)=\frac{3}{5}$ и $f(1)=-\frac{2}{5}$.

б) Ако во (1) ставиме смена $t=\frac{\pi}{2}-x$, тогаш $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, па важи

$$2f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)+3f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right),$$

односно

$$2f(\cos t)+3f(\sin t)=\cos t\,.$$

Значи за секој $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ важи

$$2f(\cos x)+3f(\sin x)=\cos x \tag{2}$$

Ако равенствата (1) и (2) ги разгледаме како систем равенки, т.е.

$$\begin{cases}2f(\sin x)+3f(\cos x)=\sin x\\ 2f(\cos x)+3f(\sin x)=\cos x\end{cases}$$

се добива решението $f(\sin x)=\frac{3\cos x-2\sin x}{5}$ и $f(\cos x)=\frac{3\sin x-2\cos x}{5}$. Ставајќи смена $y=\sin x$, за $y\in[0,1]$, важи $f(y)=\frac{3}{5}\sqrt{1-y^2}-\frac{2}{5}y$.

Значи бараната функција е $f(x)=\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{5}x$. ●

3.89. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$xf(y)-yf(x)=(x-y)f(xy)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека f е функција која ги исполнува условите од задачата. За $x\in\mathbb{R}$ и $y=1$, од условот добиваме $xf(1)=xf(x)$, од каде $f(x)=f(1)$, за $x\neq 0$. Ставајќи $f(1)=a\in\mathbb{R}$ и $f(0)=b\in\mathbb{R}$ се добива

$$f(x)=\begin{cases}a, x\neq 0\\ b, x=0\end{cases} \tag{1}$$

Од друга страна секоја функција од облик (1) каде a и b се реални броеви ги исполнува условите на задачата. ●

3.90. Функцијата f е дефинирана за сите реални броеви x и за неа важат равенствата:

$f(0)=0$, $f(2+x)=f(2-x)$ и $f(7+x)=f(7-x)$, за секое $x\in\mathbb{R}$.

Докажи дека равенката $f(x)=0$ има барем 401 решение во интервалот $[-1000,1000]$. ●

Решение. Едно решение на дадената равенка е $x=0$. Натаму,

$f(x)=f(2+(x-2))=f(2-(x-2))=f(4-x)=f(7-(x+3))=f(7+(x+3))=f(x+10)$.

Аналогно, се докажува дека

$$f(x+10)=f(x+20)\,,\; f(x+20)=f(x+30)\,,\;...\,,\; f(x+10n)=f(x+10(n+1))\,,\;...$$

На сличен начин се докажува дека $f(x)=f(x-10)=f(x-20)$ итн.

Бидејќи $f(0)=0$, тогаш $f(\pm 10)=f(\pm 20)=...=f(\pm 1000)=0$ дава 200 решенија на равенката $f(x)=0$ на интервалот $[-1000,1000]$.

Заради $f(x)=f(4-x)$, за $x=0$ се добива дека $f(0)=f(4)$, а секако важи

$$f(4)=f(14)=f(24)=...=f(994)=0\,.$$

Слично $f(0)=f(-6)=f(-16)=...=f(-996)=0$.

Овие равенства даваат уште 200 решенија на равенката $f(x)=0$.

Значи равенката $f(x)=0$ има барем 401 решение на интервалот $[-1000,1000]$. ●

3.91. Нека $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Пресметај го збирот $f(0)+f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+...+f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$, каде n е природен број.

Решение. Бидејќи

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2\cdot 4^x}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=1\,,$$

ако за x ги замениме вредностите $0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},...,\dfrac{n-1}{n},\dfrac{n}{n}$ и добиените равенства ги собереме се добива збирот

$$f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+...+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f(1)+f(0)=n+1\,.$$

Значи бараниот збир е $f(0)+f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+...+f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}(n+1)$.●

3.92. Функциите f и g ги имаат својствата:

1) $f(x)=f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)g\left(\dfrac{x-y}{2}\right)+f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)g\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$;

2) $f(-x)=-f(x)\,,\; g(-x)=g(x)$.

Докажи дека $(f(x))^2-(g(x))^2=f(x+y)f(x-y)$.

Решение. Во 1) ги заменуваме местата на x и y, па добиваме

$$f(y)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{y-x}{2}\right)+f\left(\frac{y-x}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Од 2) следува $f\left(\frac{y-x}{2}\right)=-f\left(\frac{x-y}{2}\right)$, $g\left(\frac{y-x}{2}\right)=g\left(\frac{x-y}{2}\right)$, па со замена во претходното равенство се добива

$$f(y)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right)-f\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Од последното равенство и 1) се добива:

$$(f(x))^2-(g(x))^2=4f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{1}$$

Ако во 1) ставиме $y=0$ се добива $f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right)$, а од ова равенство се добива

$$f(x\pm y)=2f\left(\frac{x\pm y}{2}\right)g\left(\frac{x\pm y}{2}\right) \tag{2}$$

Од (1) и (2) се добива $(f(x))^2-(g(x))^2=f(x+y)f(x-y)$.●

3.93. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за сите $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x-f(y))=1-x-y .$$

Решение. Нека f е функција која ги исполнува условите на задачата. За $x=0$ и $y=1$ важи $f(-f(1))=0$. За $x\in\mathbb{R}$ и $y=-f(1)$ важи $f(x)=1+f(1)-x$.

Нека $f(1)=a\in\mathbb{R}$. Тогаш имаме

$$f(x)=1+a-x\text{, за } x\in\mathbb{R} . \tag{1}$$

Од условот на задачата за $y=1$ се добива

$$f(x-a)=-x\text{, за } x\in\mathbb{R} . \tag{2}$$

Од (1) за $x=a$ се добива $f(a)=1$, а од (2) за $x=2a$ се добива $f(a)=-2a$. Од тука јасно е дека $1=-2a$, па значи $a=-\frac{1}{2}$. Од (1) се добива

$$f(x)=\frac{1}{2}-x\text{, за } x\in\mathbb{R} . \tag{3}$$

Со проверка може да се утврди дека функцијата дадена со (3) ги исполнува барањата на задачата. ●

3.94. Одреди ги сите функции f за кои важи

$$x^{f(y)}=y^{f(x)}\text{, за } x,y>0 .$$

Решение. Ако во равенството ставиме $y=2$, тогаш имаме

$$f(x)=\log_2 x^{f(2)}=f(2)\log_2 x\,.$$

Ќе докажеме дека за функцијата $f(x)=a\log_2 x$, за $a\in\mathbb{R}$, важи бараното равенство.

Бидејќи $x,y>0$, постои $a\in\mathbb{R}$ таков што $y=x^a$. Според тоа

$$x^{f(y)}=x^{a\log_2 y}=x^{a\log_2 x^a}=x^{a\cdot a\log_2 x}=(x^a)^{a\log_2 x}=y^{f(x)}\,.$$

Ако ставиме $y=2$, $f(2)=a$, тогаш ќе го добиеме бараниот облик на функцијата. Ако ставиме $y=b>0$, $b\neq 1$ ќе добиеме функција

$$f(x)=a\log_b x=a\frac{\log_2 x}{\log_2 b}=\frac{a}{\log_2 b}\log_2 x=A\log_2 x\,.\text{ каде } A\in\mathbb{R}\,.\bullet$$

3.95. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секое $x\in\mathbb{R}$ да важи:

$$f(-x)=-f(x)\,,\ f(x+1)=f(x)\ \text{ и }\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}f(x)\,,\text{ за } x\neq 0\,.$$

Решение. За $x=0$ од првиот и вториот услов се добива $f(-0)=-f(0)$, т.е. $f(0)=0$ и $f(1)=f(0)+1=1$. За $x=1$ од вториот услов се добива дека $f(2)=f(1)+1=1+1=2$, итн.

Да ја разгледаме функцијата $g(x)=f(x)-x$. За неа добиваме:

$$g(-x)=f(-x)-(-x)=-f(x)+x=-g(x)\ ,$$

$$g(x+1)=f(x+1)-(x+1)=f(x)+1-x-1=g(x)\ \text{ и}$$

$$g\left(\frac{1}{x}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}f(x)-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}(g(x)+x)-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}g(x)\,.$$

Значи, $g(x)=g(x+1)=(x+1)^2 g\left(\frac{1}{x+1}\right)=-(x+1)^2 g\left(-\frac{1}{x+1}\right)=$

$$=-(x+1)^2 g\left(-\frac{1}{x+1}+1\right)=-(x+1)^2 g\left(\frac{x}{x+1}\right)=$$

$$=-(x+1)^2\frac{x^2}{(x+1)^2}g\left(1+\frac{1}{x}\right)=-x^2 g\left(1+\frac{1}{x}\right)=-x^2 g\left(\frac{1}{x}\right)=-g(x)\,.$$

Според тоа $g(x)=0$, па $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbb{R}$.●

3.96. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ такви што $3f(x)-2f(f(x))=x$.

Решение. Функцијата $f(x)=x$ ги исполнува условите на задачата.

Нека f е функција која ги испонува условите на задачата и нека $g(x)=f(x)-x$. Тогаш имаме $2f(f(x))-2f(x)=f(x)-x=g(x)$. Ова равенство е еквивалентно со $g(x)=2g(f(x))$.

Значи $g(x)=2g(f(x))=2^2g(f(f(x)))=2^3g(f(f(f(x))))=\dots$.

Бидејќи броевите $g(f(\dots f(x)\dots.))$ се цели, следува дека $g(x)$ е делив со 2^n, за сите $x\in\mathbb{Z}$ и $n\in\mathbb{N}$. Тоа е можно само ако $g(x)=0$. Според тоа $f(x)=x$ е единствена функција која ги исполнува условите на задачата. ●

3.97. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ такви што

$f(nx)=nf(x)$, за секои $x\in\mathbb{Q}$ и $n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Нека за f важат условите од задачата. Тогаш за произволен позитивен број n и $x\in\mathbb{Q}$ важи $f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(nf\left(\frac{x}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}f(x)$.

Нека $f(1)=a\in\mathbb{R}$ и нека $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, каде $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$f(x)=f\left(\frac{p}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1)=ax.$$

Значи ако f е функција која ги исполнува условите на задачата, тогаш $f(x)=ax$, за $x\in\mathbb{Q}$, каде $a\in\mathbb{R}$.

Нека $a\in\mathbb{R}$ и $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ е дадена со $f(x)=ax$, за $x\in\mathbb{Q}$. Тогаш за $x\in\mathbb{Q}$ и $n\in\mathbb{Z}$ важи $f(nx)=anx=nf(x)$. Значи, секоја функција f дадена со $f(x)=ax$, за $x\in\mathbb{Q}$, каде $a\in\mathbb{R}$ ги задоволува условите на задачата. ●

3.98. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за сите $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x^2+y)=f(x)+f(y^2)+a,$$

каде a е даден реален број.

Решение. Нека f е функција која ги исполнува условите на задачата. За $x=y=0$ од условот се добива $f(0)=f(0)+f(0)+a$, од каде следува дека $f(0)=-a$. Нека $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција дефинирана со $g(x)=f(x)+a$. Тогаш според условот на задачата имаме:

$$g(x^2+y)=g(x)+g(y^2),\ \text{за } x,y\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

а освен тоа $g(0)=f(0)+a=-a+a=0$.

Со замена $y=0$ во (1) се добива $g(x^2)=g(x)$, за $x\in\mathbb{R}$, од каде

$$g(x^4)=g(x^2)=g(x),\ \text{за}\ x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Ставајќи $y=-x^2$ во (1) добиваме $g(x)+g(x^4)=0$, за $x\in\mathbb{R}$, од каде поради (2) се добива $2g(x)=0$, односно $g(x)=0$, за $x\in\mathbb{R}$.

Значи $f(x)=g(x)-a=-a$, за $x\in\mathbb{R}$.

Притоа лесно се утврдува дека константната функција f дадена со $f(x)=-a$, ги исполнува условите на задачата. ●

3.99. Одреди ја функцијата $f(x)$ која е дефинирана за секој природен број n, прима само позитивни вредности и за неа важат:

1) $f(4)=4$;

2) $\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\ldots+\frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)}=\frac{f(n)}{f(n+1)}$, за секој n.

Решение. За $n=1$ се добива $\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}=\frac{f(1)}{f(2)}$, т.е. $f^2(1)=1$, односно $f(1)=1$.

За $n=2$ се добива $\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}=\frac{f(2)}{f(3)}$ т.е. $f^2(2)=f(3)+1$. (1)

За $n=3$ се добива $\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}=\frac{f(3)}{f(4)}$ т.е. $f^2(3)=4f(2)+1$. (2)

Од равенствата (1) и (2) се добива $f(2)=2$ и $f(3)=3$.

Сега ќе докажеме дека $f(n)=n$, за секој $n=1,2,\ldots$

За $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ равенството е исполнето. Нека равенството важи за некој природниот број k, каде $k\geq 4$. Значи имаме:

$$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\ldots+\frac{1}{f(k-1)\cdot f(k)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)\cdot k}=$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{k}$$

Од ова равенство и од 2) се добива $1-\frac{1}{k}+\frac{1}{f(k)f(k+1)}=\frac{f(k)}{f(k+1)}$, т.е. $1-\frac{1}{k}+\frac{1}{kf(k+1)}=\frac{k}{f(k+1)}$ од каде се добива дека $f(k+1)=k+1$.

Значи, со помош на ПМИ докажавне дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $f(n)=n$.●

3.100. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ за кои важи

$f(n+m)+f(n-m)=f(3n)$, за секои $n,m\in\mathbb{N}_0$, $n\geq m$.

Решение. Ако во равенството ставиме $m=0$, тогаш се добива $2f(n)=f(3n)$, за $n\in\mathbb{N}_0$. Ако е и $n=0$, тогаш $f(0)=0$.

Ако во равенството ставиме $n=m$, тогаш $f(2n)=f(3n)$.

Понатаму за $n=2m$ се добива дека $f(4m)=f(6m)=f(9m)$, а важи и $f(4m)+f(2m)=f(9m)$, за $n=3m$. Значи $f(2m)=0$, па и $f(3m)=2f(m)=0$.

Значи, единствена функција која ги исполнува условите на задачата е функци јата $f(x)=0$.●

3.101. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ такви што за секое $x\in\mathbb{Q}^+$ важи

1) $f(x+1)=f(x)+1$;

2) $f(x^2)=(f(x))^2$.

Решение. Од 1) следува дека за секое $x\in\mathbb{Q}^+$ и $n\in\mathbb{N}$ важи

$$f(x+n)=f(x)+n \tag{1}$$

Нека $x=\frac{p}{q}$, каде $p,q\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$f\left((x+q)^2\right)=(f(x+q))^2$$
$$f(x^2+2xq+q^2)=(f(x+q))^2$$
$$f(x^2+2p+q^2)=(f(x+q))^2$$

Од (1) и последното равенство следува

$$f(x^2)+2p+q^2=(f(x)+q)^2$$

$$f(x^2)+2p+q^2=(f(x))^2+2qf(x)+q^2.$$

Од последното равенство и 1) се добива $f(x)=\frac{p}{q}=x$.

Притоа со проверка се утврдува дека единствено функцијата $f(x)=x$ ги исполнува условите на задачата. ●

3.102. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ за кои важи

1) $f(1)=2$;

2) $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$, за сите $x,y\in\mathbb{Q}$.

Решение. Со замена $y=1$ во 2) се добива

$$f(x)=f(x)f(1)-f(x+1)+1 \text{ т.е.}$$

$$f(x+1)=f(x)+1 \qquad (1)$$

Од (1) се добива дека $f(x+n)=f(x)+n$, за секое $x\in\mathbb{Q}$ и $n\in\mathbb{Z}$ т.е. $f(n)=n+1$, за секој $n\in\mathbb{Z}$.

Во 2) ставаме замена $x=\frac{1}{n}$ и $y=n$ и добиваме

$$f\left(\frac{1}{n}n\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)f(n)-f\left(\frac{1}{n}+n\right)+1 \text{ т.е.}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+1.$$

Ако во 2) ставиме $x=p$ и $y=\frac{1}{q}$ се добива

$$f\left(p\frac{1}{q}\right)=f(p)f\left(\frac{1}{q}\right)-f\left(p+\frac{1}{q}\right)+1 \text{ т.е.}$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}+1.$$

Значи единствена функција која ги исполнува условите од задачата е $f(x)=x+1$, за секое $x\in\mathbb{Q}$.●

3.103. Функцијата f ги исполнува условите

1) $f(0)=1$;

2) За секој $n\in\mathbb{N}$ важи $1+f(0)+f(1)+...+f(n-1)=f(n)$.

Пресметај го збирот $S=f(0)^2+f(1)^2+...+f(n-1)^2+f(n)^2$.

Решение. Ако во 2) наместо n ставиме $n-1$ се добива

$$1+f(0)+f(1)+...+f(n-2)=f(n-1)$$

Ако последното равенство го замениме во 2) се добива $f(n)=2f(n-1)$.

Од $f(0)=1$ и $f(n)=2f(n-1)$, за $n=1,2,3$ се добива

$$f(1)=2f(0)=2,\ f(2)=2f(1)=2^2,\ f(3)=2f(2)=2^3$$

Ќе докажеме дека $f(n)=2^n$, за секој природен број n.

За $n=1$ тврдењето е точно.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $n=k$ т.е. $f(k)=2^k$. Од претпоставката и равенството $f(k)=2f(k-1)$ имаме $f(k+1)=2f(k)=2\cdot 2^k=2^{k+1}$

т.е. тврдењето важи и за $n=k+1$. Од принципот на математичка индукција следува дека $f(n)=2^n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Значи, бараниот збир е

$$S=f(0)^2+f(1)^2+\ldots+f(n-1)^2+f(n)^2=1^2+2^2+(2^2)^2+\ldots+(2^n)^2=$$

$$=1+4+4^2+\ldots+4^n=\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=\frac{4^{n+1}-1}{3}. \bullet$$

3.104. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такви што

1) $f(xf(y))f(y)=f(x+y)$, за сите $x,y\in\mathbb{R}^+$;

2) $f(2)=0$;

3) $f(x)\neq 0$, за сите $x\in[0,2)$.

Решение. Во 1) ставаме $y=2$ и добиваме $f(xf(2))f(2)=f(x+2)=0$, т.е. за секое $y\geq 2$ важи $f(y)=0$. Нека $y\in[0,2)$. Ставаме $x=2-y$ во 1) и добиваме $f((2-y)f(y))f(y)=f(2)=0$. Заради 3) важи $f(y)\neq 0$ следува дека $f((2-y)f(y))=0$, па $(2-y)f(y)\geq 2$ т.е. $f(y)\geq\frac{2}{2-y}$ за секое $y\in[0,2)$.

Нека $y\in[0,2)$ и $x=\frac{2}{f(y)}$. Тогаш од 1) се добива

$$f(x+y)=f\left(\frac{2}{f(y)}+y\right)=f\left(\frac{2}{f(y)}f(y)\right)=f(2)f(y),$$

па $\frac{2}{f(y)}+y\geq 2$, т.е. $f(y)\leq\frac{2}{2-y}$, за $y\in[0,2)$.

Од неравенствата $f(y)\geq\frac{2}{2-y}$ и $f(y)\leq\frac{2}{2-y}$, за $y\in[0,2)$ следува дека $f(y)=\frac{2}{2-y}$, за $y\in[0,2)$. Значи единствена таква функција е

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{2-x}, x\in[0,2)\\ 0, x\geq 2\end{cases}$$

Останува да се провери дали функцијата f ги исполнува условите на задачата.

Нека $x+y\geq 2$. Тогаш $f(x+y)=0$. Ако $y<2$, тогаш $x\frac{2}{2-y}\geq 2$ т.е. $xf(y)\geq 2$ и $f(xf(y))=0$. Ако $y\geq 2$, тогаш $f(y)=0$. Значи $f(x+y)=0$ ако и само ако $f(xf(y))f(y)=0$.

Нека $x+y<2$. Тогаш

$$f(xf(y))f(y)=f\left(\frac{2x}{2-y}\right)\frac{2}{2-y}=\frac{2}{2-\dfrac{2x}{2-y}}\cdot\frac{2}{2-y}=\frac{2}{2-x-y}=f(x+y)\ .●$$

3.105. Одреди ги сите реални функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}^+$ важи $f(x^y)=f(x)^{f(y)}$.

Решение. Функцијата $f(x)=1$ ги исполнува условите на задачата.

Нека $f(a)\neq 1$, за некое $a>0$. Тогаш

$$f(a)^{f(xy)}=f(a^{xy})=f(a^x)^{f(y)}=f(a)^{f(x)f(y)}$$

Значи $f(xy)=f(x)f(y)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$. (1)

Слично, важи

$$f(a)^{f(x+y)}=f(a^{x+y})=f(a^xa^y)=f(a^x)f(a^y)=f(a)^{f(x)}f(a)^{f(y)}=f(a)^{f(x)+f(y)},$$

па $f(x+y)=f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$. (2)

Од (1) следува $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)f(1)$ т.е. $f(1)=1$.

Од (2) следува $f(n)=f(1+1+\ldots+1)=f(1)+f(1)+\ldots+f(1)=n$, $n\in\mathbb{N}$.

Од (1) и (2) се добива: $f\left(\frac{m}{n}\right)n=f\left(\frac{m}{n}\right)f(n)=f\left(\frac{m}{n}n\right)=f(m)=m$.

Значи за секои $m,n\in\mathbb{N}$ важи:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n} \tag{3}$$

Да претпоставиме дека постои $x\in\mathbb{R}$, за кој $f(x)\neq x$. Нека $f(x)<x$.

Постои број $y=\frac{m}{n}$ таков што $f(x)<y<x$. (4)

Од (2) и (3) следува дека $f(x)=f(y+(x-y))=f(y)+f(x-y)>f(y)=y$, односно $f(x)>x$ што противречи на (4).

Значи за секој $x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=x$. Бараните функции се $f(x)=1$ и $f(x)=x$.●

3.106. Нека $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$f(x+df(y))=ax+by+c$, за сите $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. I *начин*: Нека f е функција за која важи

$f(x+df(y))=ax+by+c$, за сите $x,y\in\mathbb{R}$. (1)

За $x=0,y=-\frac{c}{b}$ се добива

$$f\left(df\left(-\frac{c}{b}\right)\right)=0 \qquad (2)$$

Значи за $m=df\left(-\frac{c}{b}\right)$ се добива $f(m)=0$.

Со замена на $y=m$ во (1) се добива

$f(x)=ax+bm+c$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Значи f е линеарна функција од облик

$$f(x)=ax+s, \text{ за секој } x\in\mathbb{R}, \qquad (3)$$

каде $s\in\mathbb{R}$ е слободниот член кој треба да го определиме. Со замена на (3) во (1) се добива:

$a^2dy+(ad+1)s=by+c$, за секој $y\in\mathbb{R}$.

Ова равенство е можно ако и само ако $\begin{cases}a^2d=b\\(ad+1)s=c\end{cases}$

Разгледуваме две можности:

1) $ad+1\neq 0$

Тогаш $s=\dfrac{c}{ad+1}$ и $f(x)=ax+\dfrac{c}{ad+1}$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Значи функцијата f го исполнува условот (1) доколку се исполнети условите $a^2d=b$ и $ad+1\neq 0$.

2) $ad+1=0$

Значи мора $c=0$. Според тоа $f(x)=ax+s$, за произволно $s\in\mathbb{R}$ го исполнува условот (1) и условите $a^2d=b$, $ad+1=0$ и $c=0$.

Значи f е линеарна функција.

II *начин*: Во (1) да ставиме смена $z=x+df(0)$, за секој $x\in\mathbb{R}$, и $y=0$. Оттука $x=z-df(0)$ па се добива

$f(z)=az-adf(0)+c$, за секој $x\in\mathbb{R}$. ●

3.4. Непрекинатост на функции.
Рамномерна непрекинатост

3.107. Користејќи ја дефиницијата за непрекинатост на функции, докажи дека следниве функции се непрекинати:

а) $f(x)=ax+b,\ x\in(-\infty,\infty)$ ($a\neq 0$ и b се дадени реални броеви);

б) $f(x)=x^2,\ x\in(-\infty,\infty)$;

в) $f(x)=\sqrt{x},\ x\in(0,\infty)$;

г) $f(x)=\sin x-x+1,\ x\in(-\infty,\infty)$

Решение. а) Нека x_0 е произволно избран реален број. Ќе докажеме непрекинатост на $f(x)$ во точката x_0, од каде, заради произволноста на x_0, ќе следува непрекинатост на $f(x)$ во сите реални точки.

Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран и нека ставиме $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}>0$. Нека x е реален број таков да $|x-x_0|<\delta$. Тогаш имаме

$|f(x)-f(x_0)|=|ax+b-ax_0-b|=|a(x-x_0)|=|a|\ |x-x_0|<|a|\delta=\varepsilon$.

Докажавме дека за секој $\varepsilon>0$, постои $\delta>0$, така да за сите реални броеви x за кои $|x-x_0|<\delta$, важи $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, од каде следува непрекинатост на $f(x)$ во точката x_0.

б) Нека x_0 е произволно избран реален број. Ќе докажеме непрекинатост на $f(x)$ во точката x_0, од каде, заради произволноста на x_0, ќе следува непрекинатост на $f(x)$ во сите реални точки.

Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран и нека ставиме $\delta=\sqrt{|x_0|^2+\varepsilon}-|x_0|>0$. Нека x е реален број таков да $|x-x_0|<\delta$. Тогаш имаме

$|f(x)-f(x_0)|=|x^2-x_0{}^2|=\left|(x-x_0)^2+2xx_0-2x_0{}^2\right|\leq|x-x_0|^2+2|x_0||x-x_0|<$

$<\delta^2+2|x_0|\delta=\varepsilon$

Докажавме дека за секој $\varepsilon>0$, постои $\delta>0$, така што за сите реални броеви

x за кои $|x-x_0|<\delta$, важи $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, од каде следува непрекинатост на $f(x)$ во точката x_0.

в) Нека x_0 е произволно избран позитивен, реален број. Ќе докажеме непрекинатост на $f(x)$ во точката x_0, од каде, заради произволноста на x_0, ќе следува непрекинатост на $f(x)$ во сите позитивни, реални точки.

Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран и нека ставиме $\delta=\varepsilon\sqrt{x_0}>0$.Нека x е позитивен, реален број таков да $|x-x_0|<\delta$.Тогаш имаме

$$|f(x)-f(x_0)|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|<\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\frac{\delta}{\sqrt{x_0}}=\varepsilon\,.$$

Докажавме дека за секој $\varepsilon>0$, постои $\delta>0$, така што за сите реални броеви x за кои $|x-x_0|<\delta$, важи $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, од каде следува непрекинатост на $f(x)$ во точката x_0.

г) Нека x_0 е произволно избран реален број. Ќе докажеме непрекинатост на $f(x)$ во точката x_0, од каде, заради произволноста на x_0, ќе следува непрекинатост на $f(x)$ во сите реални точки.

Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран и нека ставиме $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$. Нека x е реален број таков да $|x-x_0|<\delta$. Тогаш имаме

$$|f(x)-f(x_0)|=|\sin x-x+1-\sin x_0+x_0-1|=|\sin x-\sin x_0-(x-x_0)|\le$$

$$\le|\sin x-\sin x_0|+|x-x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|+|x-x_0|\le 2\cdot\left|\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot 1+|x-x_0|\le$$
$$\le 2|x-x_0|<2\delta=\varepsilon$$

Докажавме дека за секој $\varepsilon>0$, постои $\delta>0$, така што за сите реални броеви x за кои $|x-x_0|<\delta$, важи $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, од каде следува непрекинатост на $f(x)$ во точката x_0.●

3.108. Докажи дека следните функции се непрекинати во секоја точка од својата дефинициона област.

а) $f(x)=3x^5+\frac{1}{x^3}$; **б)** $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-6x^3}$; **г)** $f(x)=\cos\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$.

Решение. а) Функцијата е непрекината во секоја точка од $D_f = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$ како збир, производ и количник на непрекинати функции;

б) Функцијата е непрекината во секоја точка од $D_f = \mathbb{R}$ како збир, количник и композиција на непрекинати функции;

в) Непрекинатоста на функцијата во секоја точка од $D_f = \mathbb{R}$ следува од тоа што f е разлика, производ и композиција на непрекинати функции;

г) Функцијата е непрекината во секоја точка од $D_f = [-1,1]$ како разлика и композиција на непрекинати функции. ●

3.109. Нека $f(x)$ е непрекината функција на $[a,b]$ и е различна од 0 на сегментот $[a,b]$. Докажи дека постои број $\eta > 0$, таков што за сите $x \in [a,b]$ важи $|f(x)| \geq \eta$.

Решение. Бидејќи $f(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$ и $f(x)$ е непрекината функција на $[a,b]$ следува дека $f(x)$ не го менува знакот на сегментот $[a,b]$ т.е. единствено можни се следните два случаи:

i) $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$;

ii) $f(x) < 0, \forall x \in [a,b]$.

Нека е исполнето *i*). Бидејќи $f(x)$ е непрекината функција на затворениот сегмент $[a,b]$, таа постигнува минимум на $[a,b]$ т.е постои $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m > 0$.

Значи $f(x) \geq m, \forall x \in [a,b]$, па ставајќи $\eta = m > 0$, добиваме дека

$$|f(x)| = f(x) \geq \eta, \forall x \in [a,b].$$

Нека е исполнето *ii*). Бидејќи $f(x)$ е непрекината функција на затворениот сегмент $[a,b]$, таа постигнува максимум на $[a,b]$ т.е постои $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M < 0$.

Значи $f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$, па ставајќи $\eta = -M > 0$, добиваме дека

$$|f(x)| = -f(x) \geq -M = \eta, \forall x \in [a,b].$$ ●

3.110. Нека $f(x)$ е непрекината функција на интервалот (a,b) и $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$. Докажи дека постои точка $\xi \in (a,b)$ таква да важи $f(\xi) = \frac{1}{3}(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$.

Решение. Нека $x_1 < x_2 < x_3$. Тогаш $\min\limits_{x\in[x_1,x_3]} f(x) \leq \frac{1}{3}(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) \leq \max\limits_{x\in[x_1,x_3]} f(x)$

а бидејќи функцијата $f(x)$ е непрекината на $[x_1,x_3]\subset(a,b)$, следува дека постои $\xi\in(a,b)$ таква што $f(\xi)=\frac{1}{3}(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))$.

Ако две од точките $x_1,x_2,x_3\in(a,b)$ се еднакви, решавањето на задачата се сведува на првиот случај, а ако се сите три точки еднакви меѓу себе тогаш решението е тривијално. ●

3.111. Докажи дека, ако $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати функции на сегментот $[a,b]$ и $f(a)>g(a)$, $f(b)<g(b)$ тогаш постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што $f(x_0)=g(x_0)$.

Решение. Функцијата $h(x)=f(x)-g(x)$ е непрекината функција на сегментот $[a,b]$ како разлика од две непрекинати функции. Бидејќи $h(a)=f(a)-g(a)>0$, $h(b)=f(b)-g(b)<0$ и $h(x)$ е непрекината на $[a,b]$, следува дека постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што $h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$, т.е. $f(x_0)=g(x_0)$.●

3.112. Нека $f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[0,2]$ и $f(0)=f(2)$. Докажи дека постои $\{x,y\}\subset[0,2]$ така што $y-x=1,\ f(x)=f(y)$.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $g(x)=f(x+1)-f(x)$ на сегментот $[0,1]$. Бидејќи $f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[0,2]$ следува дека и $g(x)$ е непрекината функција на сегментот $[0,1]$.

Понатаму, $g(0)=f(1)-f(0)$, $g(1)=f(2)-f(1)=f(0)-f(1)=-g(0)$.

Ако $g(0)=0$, $0=g(0)=f(0+1)-f(0)$ т.е. $f(1)=f(0)$ и 1-0=1, па бараните точки се $x=0,\ y=1$.

Ако $g(0)\neq 0$, тогаш, заради непрекинатоста на $g(x)$ на $[0,1]$ и $g(1)=-g(0)$ добиваме дека постои $x_0\in[0,1]\subset[0,2],\ x_0+1\in[1,2]\subset[0,2]$ така што

$$0=g(x_0)=f(x_0+1)-f(x_0)\text{, т.е. } f(x_0+1)=f(x_0).$$

Бараните точки се $x=x_0,\ y=x_0+1$.●

3.113. Нека $f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[0,2]$. Докажи дека постои $\{x,y\}\subset[0,2]$ така што $y-x=1,\ f(y)-f(x)=\frac{1}{2}(f(2)-f(0))$.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $g(x)=f(x+1)-f(x)-\frac{f(2)-f(0)}{2}$ на сегментот $[0,1]$. Бидејќи $f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[0,2]$ следува дека и $g(x)$ е непрекината функција на сегментот $[0,1]$. Понатаму,

$$g(0)=f(1)-f(0)-\frac{f(2)-f(0)}{2}=f(1)-\frac{f(0)+f(2)}{2},$$

$$g(1)=f(2)-f(1)-\frac{f(2)-f(0)}{2}=-f(1)+\frac{f(2)+f(0)}{2}=-g(0).$$

Ако $g(0)=0$, $0=g(0)=f(1)-\frac{f(0)+f(2)}{2}$,т.е. $f(1)-f(0)=\frac{1}{2}(f(2)-f(0))$ и $1-0=1$ па бараните точки се $x=0,\ y=1$.

Ако $g(0)\neq 0$, тогаш, заради непрекинатоста на $g(x)$ на $[0,1]$ и $g(1)=-g(0)$, добиваме дека постои $x_0\in[0,1]\subset[0,2],\ x_0+1\in[1,2]\subset[0,2]$ така што

$$0=g(x_0)=f(x_0+1)-f(x_0)-\frac{f(2)-f(0)}{2}, \text{ т.е. } f(x_0+1)-f(x_0)=\frac{f(2)-f(0)}{2}.$$

Бараните точки се $x=x_0,\ y=x_0+1$.●

3.114. а) Нека $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати функции на интервалот (a,b). Докажи дека функциите $M(x)=\max(f(x),g(x))$ и $m(x)=\min(f(x),g(x))$ се непрекинати на интервалот (a,b).

б) Нека $f(x)$ е непрекината функција на интервалот (a,b) и нека k е позитивен реален број. Докажи дека и функцијата $f_k(x)$, дефинирана со

$$f_k(x)=\begin{cases}-k, & f(x)<-k\\ f(x), & -k\leq f(x)\leq k\\ k, & f(x)>k\end{cases}$$

е непрекината функција на (a,b).

в) Докажи дека, ако $f(x)$ е непрекината функција на интервалот (a,b), тогаш и функцијата $|f(x)|$ е непрекината на интервалот (a,b).

Решение. а) Прво ќе покажеме дека важи следното тврдење: ако $f(x)$ е непрекината функција во x_0 и $f(x_0)>0$, тогаш постои околина $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ на x_0 таква што за сите точки $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ важи $f(x)>0$.

Навистина, од непрекинатоста на $f(x)$ во x_0, следува дека за секое $\varepsilon>0$, па и за $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$ постои околина $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ на x_0 таква што за сите точки $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ важи $|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$, т.е. $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0$.

За секој $x_0\in(a,b)$ точна е една од следните можности:

1) $f(x_0)<g(x_0)$; 2) $f(x_0)=g(x_0)$; 3) $f(x_0)>g(x_0)$.

Ако за x_0 важи 1), тогаш $g(x_0)-f(x_0)>0$, па заради непрекинатоста на функцијата $g(x)-f(x)$ и тврдењето што претходно го докажавме, следува дека постои околина $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ на x_0 таква што за сите точки $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ важи $g(x)-f(x)>0$ т.е. $g(x)>f(x)$, за сите точки од таа околина. Тоа значи дека $M(x)=g(x)$, за сите точки $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, па за таквите x функцијата $M(x)$ е непрекината (бидејќи, по претпоставка, функцијата $g(x)$ е непрекината).

Ако за x_0 важи 3), аналогно како и во претходниот случај се докажува дека $M(x)$ е непрекината функција.

Нека за x_0 важи 2). Од непрекинатоста на $f(x)$ и $g(x)$, следува дека за секое $\varepsilon>0$, постои околина $\left(x_0-\delta_f,x_0+\delta_f\right)$ на x_0 така што за сите x од таа околина важи $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ и околина $\left(x_0-\delta_g,x_0+\delta_g\right)$ на x_0 така што за сите на x од таа околина важи $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$. Нека $\delta=\min\left(\delta_f,\delta_g\right)$.Тогаш за сите $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ важи $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ и $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$, т.е. за сите $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ мора да важи $|M(x)-M(x_0)|<\varepsilon$, бидејќи $M(x_0)=f(x_0)=g(x_0)$ и $M(x)=f(x)$ или $M(x)=g(x)$.

За докажување непрекинатост на функцијата $m(x)$ може да постапиме слично како и за $M(x)$, но непрекинатоста на $m(x)$ може да се докаже и со користење на непрекинатоста на $M(x)$, точноста на $m(x)=\min(f(x),g(x))=-\max(-f(x),-g(x))$ и фактот дека функциите $f,g,-f,-g$ се непрекинати.

б) Бидејќи $f(x)$ и константната функција се непрекинати функции на интервалот (a,b), согласно со **а)**, имаме дека и функцијата $\max(f(x),-k)$ е непрекината функција на (a,b), па повторно заради **а)**, и функцијата

$$h(x)=\min(\max(f(x),-k),k)$$

е непрекината функција на (a,b). Лесно се проверува (се остава на читателот) дека $h(x)=f_k(x)$.

в) Заради **а)**, од непрекинатоста на $f(x)$ и $-f(x)$ на (a,b), следува дека и функцијата $\max(f(x),-f(x))$ е непрекината функција на (a,b). Од друга страна, очигледно е дека $|f(x)|=\max(f(x),-f(x))$, па значи дека и функцијата $|f(x)|$ е непрекината на (a,b).●

3.115. Нека функцијата $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ во некој $x_0\in(a,b)$ има особина:

а) $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\big(\forall x\in(a,b)\big)\big(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\delta\big)$;

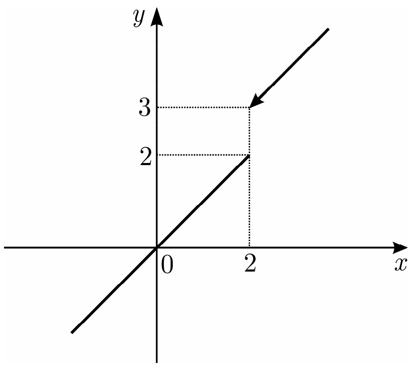
б) $(\forall\delta>0)(\exists\varepsilon>0)\big(\forall x\in(a,b)\big)\big(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\delta\big)$;

в) $(\forall\delta>0)(\exists\varepsilon>0)\big(\forall x\in(a,b)\big)\big(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\big)$.

Што може да се каже за непрекинатоста на функцијата f во точката x_0?

Решение. Постојат непрекинати функции што ги исполнуваат условите **а)**, **б)** и **в)**. Една таква функција е $f(x)=x$ (проверете).

Но, во општ случај, функцијата f исполнува некој од условите **а)**, **б)** или **в)**, но не е непрекината во x_0.



а) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\begin{cases}x, x\le 2\\ x+1, x>2\end{cases}$. Јасно е дека f е непрекината во секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, а има прекин во $x=2$.

Ќе докажеме дека дека f го исполнува условот **а)** во точката $x_0=2$. Нека $\varepsilon>1$ е произволен и нека $\delta=\varepsilon+1>0$. Да претпоставиме дека за секој $x\in(1,3)$ важи $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$. Тогаш за $x>2$ имаме

$$|x-2|=|f(x)-f(2)|<\varepsilon<\varepsilon+1=\delta,$$

а за $x<2$, $|x-1|=|x+1-2|=|f(x)-f(2)|<\varepsilon$, па $|x-2|=|x-1-1|\le|x-1|+1<\varepsilon+1=\delta$.

Значи, ако $\varepsilon>1$ е произволен, постои $\delta(=\varepsilon+1)$ така што

$$\forall x\in(1,3)|f(x)-f(2)|<\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\delta.$$

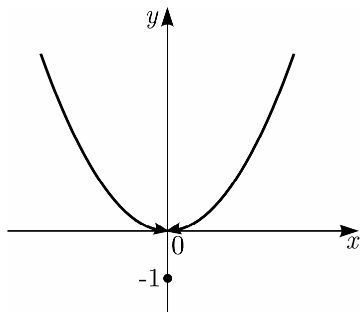
Сега, нека $0<\varepsilon\le 1$ е произволен, и нека нека $\delta=\varepsilon$. Да претпоставиме дека $x\in(1,3)$ е таков што

$$|f(x)-f(2)|<\varepsilon\,. \qquad (*)$$

Ако $x>2$, тогаш $|f(x)-f(2)|=|x-1|=x-1>1$. Според тоа не постои $x>2$ за кој важи (*). Значи **а)** е точно.

Ако $x<2$ и ако важи (*), тогаш $|x-2|=|f(x)-f(2)|<\varepsilon=\delta$, па **а)** е точно.

б) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\begin{cases}x^2, x\ne 0\\ -1, x=0\end{cases}$.



Функцијата има прекин во $x_0=0$. Ќе докажеме дека за f важи **б)**.

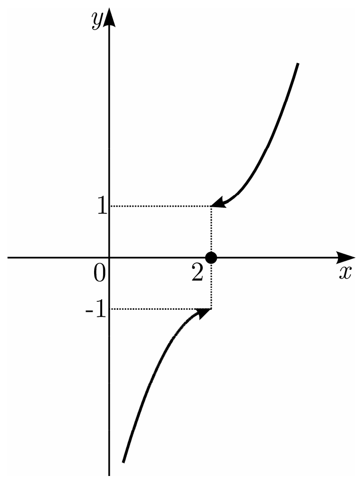
Нека $\delta>0$ е произволен. Постои $\varepsilon>0$ така што $1<\varepsilon<1+\delta^2$. Да претпоставиме дека за $x\in(-1,1)$ важи $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$, т.е. $x^2+1=|x^2+1|<\varepsilon$. Оттука добиваме $-\varepsilon<x^2+1<\varepsilon$, т.е $x^2<\varepsilon-1$. Тоагш имаме

$$|x-0|=|x|=\sqrt{|x|^2+1-1}<\sqrt{\varepsilon-1}<\sqrt{\delta^2}=\delta\,.$$

Значи за f важи **б)** но f не е непрекината во 0.

в) Да ја разгледаме функцијата

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+5, x>2\\ 0, x=2\\ -x^2+4x-5, x<2\end{cases}.$$



Јасно е дека f има прекин во $x=2$ а во сите други реални броеви е непрекината. Ќе докажеме дека важи **в)**. Навистина, нека $\delta>0$ е приизволен, и нека $\varepsilon=1+\delta^2$. Нека за произволен $x\in(-1,3)$ важи $|x-2|<\varepsilon$. Тогаш

$$|f(x)-f(2)|=$$

$$=|\pm(x^2-4x+5)|=x^2-4x+5=x^2-4x+4+1= \;=(x-2)^2+1<\delta^2+1=\varepsilon\,.$$

Значи **в)** важи но f не е непрекината во $x_0=2$.●

3.116. Докажи дека ако важи **в)** од задача **3.115.** тогаш f е ограничена функција на (a,b).

Решение. Нека постои $x_0 \in (a,b)$ така што важи **в)** од задача **3.115.** Тогаш за $\delta = \max\{x_0 - a, b - x_0\} > 0$ постои $\varepsilon > 0$ така што за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Притоа $(a,b) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Оттука следува $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$, односно $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ за секој $x \in (a,b)$.

Да означиме $M = \max\{|f(x_0) - \varepsilon|, |f(x_0) + \varepsilon|\}$. Тогаш за секој $x \in (a,b)$ важи $|f(x)| < M$, па f е ограничена на (a,b).●

3.117. Докажи дека функцијата $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ -1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ (функција на Дирихле) има прекин во секој $x_0 \in \mathbb{R}$.

Решение. Прво, нека $x_0 \in \mathbb{Q}$. Нека $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$ е произволен. Во интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ постои ирационален број y. Тогаш $|y - x_0| < \delta$ но

$$|f(y) - f(x_0)| = |-1-1| = 2 > 1 = \varepsilon.$$

Значи f има прекин во x_0.

Сега, нека $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$ е произволен. Постои $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q}$ па $|y - x_0| < \delta$ но $|f(y) - f(x_0)| = |1-(-1)| = 2 > 1 = \varepsilon$, па f има прекин во x_0.●

3.118. Дали постои реална функција $f(x)$, дефинирана за секој реален број x, која ни во една точка не е непрекината, а $|f(x)|$ е непрекината во секоја точка?

Решение. Одговорот на ова прашање е позитивен. Таква е функцијата $f(x)$, дефинирана со $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ -1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.●

3.119. Користејќи ги својствата на непрекинати функции, испитај дали равенката $\sin x - x + 1 = 0$ има реално решение.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = \sin x - x + 1$, на сегментот $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$. Бидејќи $f(0) = 1 > 0,\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} < 0$ и $f(x)$ е непрекината во сите релни точки, па значи и на сегментот $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, следува дека постои $x_0 \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, така што $f(x_0) = 0$ ([1] теорема 2, стр. 63) т.е. $\sin x_0 - x_0 + 1 = 0$.●

3.120. Користејќи ги својствата на непрекинати функции, испитај дали равенката $x^5 - 18x + 2 = 0$ има решение на сегментот $[-1,1]$.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^5 - 18x + 2$, на сегментот $[-1,1]$. Бидејќи $f(-1) = 19 > 0,\ f(1) = -15 < 0$ и $f(x)$ е непрекината во сите релни точки, па значи и на сегментот $[-1,1]$, следува дека постои $x_0 \in (-1,1)$, така да $f(x_0) = 0$ т.е. ${x_0}^5 - 18x_0 + 2 = 0$.●

3.121. Користејќи ги својствата на непрекинати функции, испитај дали функцијата $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin(\pi x) + 3$ прима вредност $2\frac{1}{3}$ на сегментот $[-2,2]$.

Решение. Функцијата $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin(\pi x) + 3$ е непрекината функција во сите реални точки, па и на сегментот $[-2,2]$. Бидејќи $f(-2) = 1,\ f(2) = 5$ и $1 < 2\frac{1}{3} < 5$, ([1] теорема 2, стр. 63) следува дека постои $x_0 \in (-2,2)$, така што $f(x_0) = 2\frac{1}{3}$, т.е. $f(x)$ прима вредност $2\frac{1}{3}$ на сегментот $[-2,2]$.●

3.122. Нека $y = f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[a,b]$ и нека $a < f(x) < b,\ \ \forall x \in [a,b]$. Докажи дека на интервалот (a,b) постои точка x_0, така што $f(x_0) = x_0$.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $g(x) = f(x) - x$ на сегментот $[a,b]$. Таа е непрекината функција на $[a,b]$, како разлика од две непрекинати функции. Бидејќи $g(a) = f(a) - a > 0,\ g(b) = f(b) - b < 0$, ([1] теорема 2, стр. 63) следува дека постои $x_0 \in (a,b)$, така да $g(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) = x_0$.●

3.123. Испитај ја рамномерната непрекинатост на функцијата $f(x) = x^2$ на множеството

а) $(-l,l)$, $l > 0$; **б)** $\mathbb{R}$.

Решение. а) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и да избереме $\delta = \frac{\varepsilon}{2l}$. Нека $x,y \in (-l,l)$ се такви што $|x-y| < \delta$. Тогаш

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y| \cdot |x-y| \le (|x| + |y|)|x-y| \le 2l|x-y| < 2l\delta = 2l\frac{\varepsilon}{2l} = \varepsilon .$$

Значи за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за сите $x,y \in (-l,l)$ за кои $|x-y| < \delta$

важи $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Според тоа f е рамномерно непрекината на даденото множество.

б) Ќе докажеме дека f не е рамномерно непрекината на $\mathbb{R}$. Да избереме две низи од реални броеви на следниов начин $x_n = n+\frac{1}{n}$ и $y_n = n$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

Тогаш имаме $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n - y_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ но

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)| = \lim_{n\to\infty}\left|n^2+2+\frac{1}{n^2}-n^2\right| = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right) = 2\neq 0,$$

па функцијата не е рамномерно непрекината на $\mathbb{R}$. ●

3.124. Испитај ја рамномерната непрекинатост на функцијата f на множеството X:

а) $f(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$, $X=[-1,1]$; **б)** $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$, $X=(0,1)$;

в) $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$, $X=(0,1)$; **г)** $f(x)=\ln x$, $X=(0,1)$;

д) $f(x)=\sin x^2$, $X=\mathbb{R}$.

Решение. а) Функцијата е непрекината на X како количник од непрекинати функции и $4-x^2\neq 0$ за секој $x\in X$. Бидејќи X е затворен интервал следува дека f е и рамномерно непрекината на X.

б) Функцијата е непрекината на X како композиција на непрекинатите функции $\sin x$ и $\frac{\pi}{x}$. Избираме низи $\{x_n\},\{y_n\}$ со општи членови $x_n=\frac{1}{n+1}$ и $y_n=\frac{2}{2n+1}$. Очигледно е дека $x_n, y_n\in(0,1),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Понатаму,

$|x_n-y_n| = \left|\frac{1}{n+1}-\frac{2}{2n+1}\right| = \frac{1}{(n+1)\ (2n+1)}$, па $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0$. Бидејќи

$$|f(x_n)-f(y_n)| = \left|\sin(n+1)\pi-\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\right| = |0-(-1)^n| = 1\neq 0,$$

следува дека функцијата $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ не е рамномерно непрекината на интервалот $(0,1)$.

в) И овде функцијата е непрекината на X како композиција и производ на непрекинати функции. Нека $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ и $y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$x_n, y_n\in X \text{ и } \lim_{n\to\infty}|x_n-y_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2n\pi}-\frac{1}{(2n+1)\pi}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n(2n+1)\pi} = 0,$$

но $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|e^{\frac{1}{2n\pi}}\cos 2n\pi-e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\cos(2n+1)\pi\right|=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|e^{\frac{1}{2n\pi}}+e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right|=2\neq 0$

па f не е рамномерно непрекината на X.●

г) Функцијата f е непрекината на X. Ќе докажеме дека f не е рамномерно непрекината на X. Да избереме две низи од реални броеви на следниов начин $x_n=e^{-n}$, $y_n=e^{-n-1}$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Притоа $0<x_n,y_n<1$.

Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{e^n}-\frac{1}{e^{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}\left|1-\frac{1}{e}\right|=0$

но $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=\lim\limits_{n\to\infty}|-n-(-n-1)|=1\neq 0$, па f не е рамномерно непрекината на X.

д) Функцијата е непрекината на X како композиција на непрекинатите функции $\sin x$ и x^2. Ќе докажеме дека f не е рамномерно непрекината на X. Да избереме две низи од реални броеви $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ на следниов начин $x_n=\sqrt{n\pi}$ и $y_n=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Имаме дека,

$$|x_n-y_n|=\left|\sqrt{n\pi}-\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi}+\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}},\text{ па } \lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0.$$

Но $|f(x_n)-f(y_n)|=\left|\sin n\pi-\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|0-(-1)^n|=1\neq 0$

па следува дека функцијата $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ не е рамномерно непрекината на интервалот $(0,1)$.●

3.125. Нека функцијата $f(x)$ е непрекината на $[0,\infty)$ и нека $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ постои и е реален број. Докажи дека:

а) $f(x)$ е ограничена на $[0,\infty)$;

б) $f(x)$ е рамномерно непрекината на $[0,\infty)$.

Решение. а) Нека функцијата $f(x)$ е непрекината на $[0,\infty)$ и нека $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=K<\infty$. Тоа значи дека за секое $\varepsilon>0$, па и за $\varepsilon=1$, постои $M>0$ така што важи $|f(x)-K|<1$, за сите $x>M$, т.е. $K-1<f(x)<K+1$, за сите $x>M$. Од друга страна, бидејќи функцијата $f(x)$ е непрекината на $[0,\infty)$, таа е и ограничена на сегментот $[0,M]$, т.е. постои $T>0$ така што $|f(x)|<T$, за сите $x\in[0,M]$. За $S=\max\{T,|K|+1\}$, добиваме дека $|f(x)|<S$, за сите $x\in[0,\infty)$, т.е. $f(x)$ е ограничена на $[0,\infty)$.

б) Нека се исполнети условите на задачата и нека $\varepsilon>0$ е произволен. Од $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=K<\infty$, следува дека за $\frac{\varepsilon}{2}>0$, постои $M>0$ така што важи $|f(x)-K|<\frac{\varepsilon}{2}$, за сите $x>M$. За сите $x,y\in[M+1,\infty)$ важи

$$|f(x)-f(y)|=|f(x)-K+K-f(y)|\leq|f(x)-K|+|f(y)-K|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Докажавме дека $f(x)$ е рамномерно непрекината на $x,y\in[M+1,\infty)$. Од друга страна, бидејќи функцијата $f(x)$ е непрекината на $[0,\infty)$, таа е и рамномерно непрекината на на сегментот $[0,M+1]$. Тоа значи дека постои $\delta>0$ така да за сите $x,y\in[0,M+1]$ такви што $|x-y|<\delta$, важи $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Ставајќи $\delta_1=\min\{\delta,1\}$, добиваме дека за сите $x,y\in[0,\infty)$ такви што $|x-y|<\delta_1$, важи $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, од каде следува дека $f(x)$ е рамномерно непрекината и на $[0,\infty)$.●

3.126. Најди пример на функција којашто е непрекината, но не е рамномерно непрекината на: **а)** $(0,1)$; **б)** $[0,\infty)$.

Одговор. а) Функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ е непрекината, но не е рамномерно непрекината на $(0,1)$ (проверката се остава на читателот).

б) Функцијата $f(x)=\sin(x^2)$ е непрекината, но не е рамномерно непрекината на $[0,\infty)$ (проверката се остава на читателот). ●

3.127. Најди пример на функција којашто е неограничена и рамномерно непрекината на $[0,\infty)$.

Одговор. Функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ е неограничена и рамномерно непрекината на $[0,\infty)$ (проверката се остава на читателот). ●

3.128. Најди пример на функција којашто е ограничена и непрекината на $(0,1)$, но не е рамномерно непрекината на $(0,1)$.

Одговор. Функцијата $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ е ограничена и непрекината на $(0,1)$, но не е рамномерно непрекината на $(0,1)$ (проверката се остава на читателот). ●

3.5. Лимес на функција. Лев и десен лимес

3.129. Користејќи ја дефиницијата за лимес на функција, докажи дека.

а) $\lim_{x\to 2}(4x-3)=5$; **б)** $\lim_{x\to -1}(x+1)=0$; **в)** $\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$.

Колку ќе изнесува δ, ако $\varepsilon=0{,}01$?

Решение. а) Нека ε е произволен позитивен реален број. Треба за докажеме дека постои, т.е. да избереме $\delta>0$ така што за секој $x\in D_f=\mathbb{R}$, од $|x-2|<\delta$ да следува $|f(x)-5|<\varepsilon$. Имаме $|f(x)-5|=|4x-3-5|=4|x-2|$. Сега, да избереме $\delta=\frac{\varepsilon}{4}>0$ и нека $|x-2|<\delta$. Тогаш имаме $|f(x)-5|=4|x-2|<4\delta=4\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$.

Значи, докажавме дека за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$, $\left(\delta=\frac{\varepsilon}{4}\right)$, така што ако $|x-2|<\delta$, тогаш $|f(x)-5|<\varepsilon$. Според тоа $\lim_{x\to 2}(4x-3)=5$.

Од $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$ добиваме дека $\delta=0{,}0025$.

б) Нека $\varepsilon>0$ е произволен. Избираме $\delta=\varepsilon$ (Изборот на δ се врши на сличен начин како во **а)**). Тогаш за секој $x\in D_f=\mathbb{R}$, таков што $|x-(-1)|<\delta$, следува $|f(x)-0|=|x+1|<\delta=\varepsilon$. Уште $\delta=0{,}01$.

в) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta=\varepsilon$. Тогаш за секој $x\in D_f=\mathbb{R}$, таков што $|x-0|=|x|<\delta$, следува

$|f(x)-(-1)|=|x-1+1|=|x|<\delta=\varepsilon$ и $\delta=0{,}01$. ●

3.130. Користејќи ја дефиницијата за лимес на функција, докажи дека.

а) $\lim_{x\to 4}x^2=16$; **б)** $\lim_{x\to 2}(x^2-4x)=-4$; **в)** $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

Решение. а) Нека $\varepsilon>0$ е произволен. Ќе избереме $\delta>0$ така што за секој $x\in D_f=\mathbb{R}$, од $|x-4|<\delta$ да следува $|x^2-16|<\varepsilon$.

Ако $|x-4|<\delta$, тогаш

$$|x^2-16|=|x-4|\cdot|x+4|=|x-4|\cdot|(x-4)+8|\le|x-4|\cdot(|x-4|+8)<\delta(\delta+8),$$

па δ ќе го избереме од неравенството $\delta^2+8\delta\le\varepsilon$. Ова неравенство важи за сите $\delta\in(-\infty,-4-\sqrt{16+\varepsilon}]\cup[-4+\sqrt{16+\varepsilon},\infty)$. Но, $\delta>0$,па избираме $\delta=-4+\sqrt{16+\varepsilon}>0$.

Да забележиме дека за δ може да се избере и секој број од $[-4+\sqrt{16+\varepsilon},\infty)$, а

$\delta = -4+\sqrt{16+\varepsilon}$ е најмалиот позитивен број за кој важи $\delta^2 + 8\delta \le \varepsilon$.

Значи, нека $\varepsilon > 0$ е произволен и нека $\delta = -4+\sqrt{16+\varepsilon} > 0$. Уште, да претпоставиме дека $x \in D_f$ е таков што $|x-4| < \delta$. Тогаш, според претходното, важи $|x^2-16| \le |x-4|\cdot(|x-4|+8) < \delta(\delta+8) \le \varepsilon$, па $\lim\limits_{x\to 4} x^2 = 16$.

б) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Избираме $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Тогаш за секој $x \in D_f = \mathbb{R}$, таков што $|x-2| < \delta$, следува $|f(x)+4| = |x^2-4x+4| = \left|(x-2)^2\right| = |x-2|^2 < \delta^2 = \varepsilon$.

в) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \varepsilon$. Тогаш за секој $x \in D_f = \mathbb{R}$, таков што $|x+2| < \delta$, следува

$|f(x)+4| = \left|\dfrac{x^2-4}{x+2}+4\right| = |x+2| < \delta = \varepsilon$.●

3.131. Провери дали постојат границите.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

Решение. а) Нека (x_n) е произволна низа таква што $x_n \ne -1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Тогаш за соодветната низа вредности на функцијата $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$, каде $f(x_n) = \dfrac{x_n-1}{x_n+1}$ добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-1}{x_n+1} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 1} = \dfrac{1}{3}$.

б) Избираме две низи $x_n = 1+\dfrac{1}{n\pi}$ и $y_n = 1+\dfrac{2}{(4n+1)\pi}$. Тогаш, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. Соодветните низи од вредности на функцијата се

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{1+\frac{1}{n\pi}-1} = \sin(n\pi) = 0 \quad \text{и} \quad f(y_n) = \sin\frac{1}{1+\frac{2}{(4n+1)\pi}-1} = \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = 1.$$

Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ додека $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$, од каде што заклучуваме дека функцијата нема лимес во точката $x = 1$.

в) Избираме две низи $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $y_n = -\dfrac{1}{n}$. Тогаш, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ Соодветните низи од вредности на функцијата се $f(x_n) = 2^n$, $f(y_n) = 2^{-n}$. Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ додека $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = -\infty$, од каде што заклучуваме дека функцијата нема лимес во точката $x = 0$.

г) Избираме две низи $x_n = n\pi$ и $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Тогаш, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Со одветните низи од вредности на функцијата се $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$ и $f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ додека $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$, од каде што заклучуваме дека функцијата нема лимес кога x се стреми кон бесконечност.●

Определи ги следните граници (**3.132.-3.161.**)

3.132. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7 + 5x^6 + 4x^3}{x^7 + 2x^3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7 + 5x^6 + 4x^3}{x^7 + 2x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3(x^4 + 5x^3 + 4)}{x^3(x^4 + 2)} = 2$.●

3.133. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-2)}{(x-3)} = \dfrac{1}{2}$.●

3.134. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-5)}{(x-1)} = \infty$.●

3.135. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 6x + 8}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 6x + 8} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x-4)} = 0$.●

3.136. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3} + \dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3} + \dfrac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{(1-x)(x^2+x+1)} + \dfrac{1}{x-1}\right) =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 1 - 3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = 1 .●$$

3.137. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.●

3.138. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}=$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}\ .●$$

3.139. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2}\right)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[6]{a}}\ .●$$

3.140. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}{x\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ .●$$

3.141. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+a^2}-a}{\sqrt{x+b^2}-b}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+a^2}-a}{\sqrt{x+b^2}-b}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+a^2}-a\right)\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)\left(\sqrt{x+b^2}+b\right)}{\left(\sqrt{x+b^2}-b\right)\left(\sqrt{x+b^2}+b\right)\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+a^2-a^2)\left(\sqrt{x+b^2}+b\right)}{(x+b^2-b^2)\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+b^2}+b\right)}{x\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)}=\frac{b}{a}\ .●$$

3.142. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=\frac{1}{3}.\bullet$$

3.143. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})\left(\sqrt{x+b}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{x+b}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{x+b}+\sqrt{b}\right)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+a-a)\left(\sqrt{x+b}+\sqrt{b}\right)}{(x+b-b)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+b}+\sqrt{b}\right)}{x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}=\sqrt{\frac{b}{a}}.\bullet$$

3.144. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+m}-\sqrt{m}}{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+m}-\sqrt{m}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+m}-\sqrt{m}\right)\left(\sqrt{x^2+m}+\sqrt{m}\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+m}+\sqrt{m}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+m}+\sqrt{m}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{m}}.\bullet$$

3.145. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

Решение. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\bullet$

3.146. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x^2+\sqrt{x})}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=3.\bullet$$

3.147. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

Решение. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}.\bullet$$

3.148. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-5x-10}{3x^2-9x+6}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-5x-10}{3x^2-9x+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(5-\dfrac{5}{x}-\dfrac{10}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{9}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{5}{x}-\dfrac{10}{x^2}}{3-\dfrac{9}{x}+\dfrac{6}{x^2}}=\frac{5-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{x^2}}{3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2}}=\frac{5}{3}\,.\bullet$$

3.149. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{5x^2+x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{5x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{3+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{5+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{3}{5}\,.\bullet$

3.150. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+4x-1}{x^3+3x^2-4x+2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+4x-1}{x^3+3x^2-4x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=4\,.\bullet$

3.151. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}=0\cdot1=0\,.\bullet$

3.152. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+6x-2}{x^2+3x+4}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+6x-2}{x^2+3x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}x\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=\infty\cdot1=\infty\,.\bullet$

3.153. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x-x^2-x^3)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x-x^2-x^3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}-1\right)=\infty\,.\bullet$

3.154. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=\dfrac{2}{9}\,.\bullet$

3.155. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-1)=\infty$.●

3.156. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}=\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=1$.●

3.157. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\right)=-1$.●

3.158. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}=0$.●

3.159. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right)}{\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+b)x+ab}{\left(\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+b)+\dfrac{ab}{x}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{a+b}{x}+\dfrac{ab}{x^2}}+1\right)}=$

$=\dfrac{(a+b)+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ab}{x}}{\left(\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a+b}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ab}{x^2}}+1\right)}=\dfrac{a+b}{2}$.●

3.160. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax}{\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{\left(\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+1\right)}=\dfrac{a}{\left(\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x}}+1\right)}=\dfrac{a}{2}$.●

3.161. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)\left(\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-c)x+b-d}{\left(\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}\right)}=\frac{(a-c)+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b-d}{x}}{\left(\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x^2}}+\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{d}{x^2}}\right)}=$$

$$=\frac{a-c}{2}\,.\bullet$$

Користејќи дека $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ за $a>0$, $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1$ пресметај: (**3.162.-3.214.**)

3.162. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{ax}=a\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=a\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=a\cdot 1=a$.

Да забележиме дека во последниот чекор воведовме нова променлива $t=ax$. Тогаш од $x\to 0$ следува $t\to 0$. ●

3.163. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{2\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$. ●

3.164. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\frac{\sin ax}{ax}}{b\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}$. ●

3.165. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}kx}{\sin x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}kx}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{k\frac{\sin kx}{kx}}{\cos kx\cdot\frac{\sin x}{x}}=k\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos kx\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=k$. ●

3.166. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{\sin x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}}=\frac{0}{1}=0$. ●

3.167. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}5x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}5x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x}{\dfrac{5\sin 5x}{5x}} = \dfrac{1}{5}$.●

3.168. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}ax\cdot\operatorname{ctg}bx)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}ax\operatorname{ctg}bx = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax\cos bx}{\cos ax\sin bx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\dfrac{\sin ax}{ax}\cos bx}{b\cos ax\dfrac{\sin bx}{bx}} = \dfrac{a}{b}$.●

3.169. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.●

3.170. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x^2}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x^2}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}} = \sqrt{2}$.●

3.171. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

Решение.. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{-2\sin\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a} =$

$$= -\lim_{x\to a}\sin\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}} = -\sin a\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}} = -\sin a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = -\sin a\,.$$

Да забележиме дека во последниот чекор воведовме нова променлива $t=\dfrac{x-a}{2}$. Тогаш од $x\to a$ следува $t\to 0$.●

3.172. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\sin a}{\cos a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x\cos a-\sin a\cos x}{(x-a)\cos x\cos a} =$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x-a}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\cos x\cos a} = \dfrac{1}{\cos^2 a}$. Во овој случај воведовме смена $t=x-a$. Од $x\to a$ следува $t\to 0$, па $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x-a} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$.●

3.173. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{(x-\pi)(x+\pi)}$. Воведуваме нова променлива $x-\pi=t$, $x=\pi+t$. Кога $x\to\pi$, $t\to 0$, па имаме

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{(x-\pi)(x+\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\pi)}{t(t+2\pi)}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+2\pi}=-\frac{1}{2\pi}\,.\bullet$$

3.174. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$. Воведовме нова променлива. $t=\frac{1}{x}$. Кога $x\to\infty$, $t\to 0$.●

3.175. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$.

Решение. Воведуваме нова променлива. $t=\frac{x}{5}$, $x=5t$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^5=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^5=e^5\,.\bullet$$

3.176. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{kt}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^k=\left(\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^k=e^k$.●

3.177. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^2\left(1+\frac{1}{t}\right)=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^2=e^2\,.\bullet$$

3.178. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^x=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+3}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^3=e$.●

3.179. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3+3}{x-3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-3}\right)^x=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3\cdot t+3}=$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^3=e^3\,.\bullet$$

3.180. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-5+5}{x-3}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5\cdot t+3}=$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t}\left(1+\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\right)^{3}=e^{5}\ .\bullet$$

3.181. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3-4+4}{2x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2\cdot t+\frac{1}{2}}=e^{2}\ .\bullet$$

3.182. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{1+x}-1\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{x+1-1}=\frac{1}{e}\ .\bullet$

3.183. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)^{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{1+x}-1\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{1+x}\right)^{x}=\lim_{t\to-\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-(2t+1)}=\frac{1}{e^{2}}\ .\bullet$$

3.184. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{2}{t}\right)^{t}=e^{2}\ .\bullet$

3.185. $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}=\frac{1}{e}\ .\bullet$

3.186. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$. (Воведовме нова променлива $t=x-1$).●

3.187. $\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{1}{x+1}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e\ .\bullet$

3.188. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$.

Решение. I *начин*: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}\right)$. Воведуваме нова променлива $2x=\frac{1}{t}$, па имаме $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{2t}\right)=\ln e^2=2$.

II *начин*: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\frac{t}{2}}=2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=2$. Воведовме смена $t=2x$. Притоа од $x\to 0$ следува $t\to 0$. ●

3.189. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e^k=k$. ●

3.190. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{a\frac{x}{a}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{at}=\frac{1}{a}$. ●

3.191. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{et}=\frac{1}{e}$. ●

3.192. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$. ●

3.193. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_2(1+3x)}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_2(1+3x)}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_2(1+t)}{\frac{t}{3}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{3\log_2(1+t)}{t}=\frac{3}{\ln 2}$. ●

3.194. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_3(1+kx)}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_3(1+kx)}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_3(1+t)}{\frac{t}{k}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{k\log_3(1+t)}{t}=\frac{k}{\ln 3}$. ●

3.195. $\lim\limits_{x\to\infty} x\log_2 \dfrac{10+x}{5+x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} x\log_2 \dfrac{10+x}{5+x} = \lim\limits_{x\to\infty} x\log_2\left(1+\dfrac{5}{5+x}\right)$. Воведуваме нова променлива $t=\dfrac{5}{5+x}$. Кога $x\to\infty$, $t\to 0$, па имаме

$$\lim_{x\to\infty} x\log_2\left(1+\frac{5}{5+x}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{(5-5t)\log_2(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0}(5-5t)\log_2(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{5}{\ln 2}. \bullet$$

3.196. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2(e^t-1)}{t} = 2$. Воведовме нова променлива $t=2x$. ●

3.197. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{k(e^t-1)}{t} = k$. ●

3.198. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{mx}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{mx} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{k(e^t-1)}{mt} = \dfrac{k}{m}$. ●

3.199. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Решение. Воведуваме нова променлива. $t=\dfrac{1}{x}$. Кога $x\to\infty$, $t\to 0$, па имаме.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t} = 1$. ●

3.200. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e(e^{x-1}-1)}{x-1} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e(e^t-1)}{t} = e$.

Воведовме нова променлива $t=x-1$. ●

3.201. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^a(e^t-1)}{t} = e^a$. ●

3.202. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+a}-e^a}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+a}-e^a}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^a\,(e^x-1)}{x}=e^a$.●

3.203. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x\sin 2x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{e^{\frac{t}{2}}\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}e^{\frac{t}{2}}\dfrac{\dfrac{e^t-1}{t}}{\dfrac{\sin t}{t}}=1$.●

3.204. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{5x}-1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{5x}-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{5(a^t-1)}{t}=5\ln a$.●

3.205. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{kx}-1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{kx}-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{k(a^t-1)}{t}=k\ln a$.●

3.206. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{kx}-1}{mx}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{kx}-1}{mx}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{k(a^t-1)}{mt}=\dfrac{k}{m}\ln a$.●

3.207. $\lim\limits_{x\to \infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to \infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a^t-1}{t}=\ln a$.●

3.208. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^x-a}{x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^x-a}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(a^{x-1}-1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a(a^t-1)}{t}=a\ln a$.●

3.209. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2^x-2^a}{x-a}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2^x-2^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2^a\,(2^{x-a}-1)}{x-a}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2^a\,(2^t-1)}{t}=2^a\ln 2$.●

3.210. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+a}-3^a}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+a}-3^a}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^a\,(3^x-1)}{x}=3^a\ln 3$. ●

3.211. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{4x}-1}{\operatorname{tg}x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{4x}-1}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{t\to 0}\cos\left(\dfrac{t}{4}\right)\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a^t-1}{t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4\dfrac{t}{4}}{\sin\dfrac{t}{4}}=4\ln a$. ●

3.212. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\dfrac{x}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3^x-1}=\dfrac{1}{\ln 3}$. ●

3.213. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$.

Решение. Применувајќи ја формулата $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ добиваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{3x+7x}{2}\sin\dfrac{3x-7x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\sin 2x}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=20\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)=20\cdot 1\cdot 1=20\ .●$$

3.214. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)$

Решение. Да ставиме смена $y=\dfrac{\pi}{4}-x$. Ако $x\to\dfrac{\pi}{4}$ тогаш $y\to 0$, па имаме

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\operatorname{ctg}2\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\cdot\operatorname{ctg}y\right)=\lim_{y\to 0}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)\cdot\operatorname{ctg}y\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}(\operatorname{tg}2y\cdot\operatorname{ctg}y)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\cos 2y}\cdot\frac{\cos y}{\sin y}=\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\cos 2y}}_{=1}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{2\dfrac{\sin 2y}{2y}}{\dfrac{\sin y}{y}}=2\ .●$$

3.215. Пресметај: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Решение. а) Заради $x\to 0$ можеме да сметаме дека $1-2x^3>0$. Функцијата e^x е непрекината во секој $a\in\mathbb{R}$, па $\lim\limits_{x\to a}e^x=e^{\lim\limits_{x\to a}x}=e^a$. Исто така важи $e^{\ln x}=x$ за секој $x>0$. Користејќи го претходното имаме:

$$\lim_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^3}\ln(1-2x^3)}=\lim_{x\to 0}e^{-2\cdot\frac{\ln(1+(-2x^3))}{-2x^3}}=e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(-2x^3))}{-2x^3}}=e^{-2}.$$

б) Заради $x\to 0$ можеме да сметаме дека $\cos x>0$. Имаме

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}(\cos x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}}=\lim_{x\to 0}e^{-2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}}=$$

$$=e^{-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}}=e^{-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Притоа ставивме смена $y=\cos x-1$, па $y\to 0$ кога $x\to 0$, и искористивме дека $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(y+1)}{y}=1$.

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-2^2+2^2-x^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2^x-2^2}{x-2}-\dfrac{x^2-2^2}{x-2}\right)=$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2^x-2^2}{x-2}-(x+2)\right)=4\lim_{x\to 2}\frac{2^{x-2}-1}{x-2}-\lim_{x\to 2}(x+2)=4\lim_{y\to 0}\frac{2^y-1}{y}-4=4\ln 2-4.$$

Притоа воведовме смена $y=x-2$, па следува дека $y\to 0$ кога $x\to 2$. Исто така искористивме $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ за $a>0$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to 0}(e^t+t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(e^t+t)^{\frac{1}{t}}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(e^t+t)}{t}}=$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\frac{\ln(e^t-1+t+1)}{e^t-1+t}\cdot\frac{e^t-1+t}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(e^t-1+t+1)}{e^t-1+t}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1+t}{t}}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{e^t-1}{t}+1\right)}=e^{1\cdot(1+1)}=e^2.$$

Воведовме смена $y=e^t-1+t$ и $y\to 0$ кога $t\to 0$. ●

3.216. Докажи дека:

а) $\lim\limits_{x\to 0^-}a^{\frac{1}{x}}=0$ за $a>1$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0^+}a^{\frac{1}{x}}=+\infty$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. а) Треба да докажеме дека

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(x\in(0-\delta,0)=(-\delta,0)\Rightarrow|f(x)-0|=a^{\frac{1}{x}}<\varepsilon\right). \tag{1}$$

Нека $\varepsilon>0$ е произволен. Ќе ги разгледаме двата случаи: $\varepsilon\geq 1$ и $\varepsilon<1$.

1) Нека $\varepsilon \geq 1$. Да избереме $\delta = 1 > 0$. Нека $x \in (-\delta, 0)$, т.е. $-1 < x < 0$. Тогаш $\frac{1}{x} < -1$, па $a^{\frac{1}{x}} < a^{-1} = \frac{1}{a} < 1 \leq \varepsilon$, и со тоа (1) е докажано.

2) Нека $\varepsilon < 1$. Прво да ја решиме неравенката $a^{\frac{1}{x}} < \varepsilon$.

Да забележиме дека функцијата $g(y) = \ln y$ е растечка. (*)

Сега, добиваме

$$a^{\frac{1}{x}} < \varepsilon \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} \ln a < \ln \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{\ln \varepsilon}{\ln a} \overset{\substack{x<0 \\ \ln \varepsilon < 0}}{\Leftrightarrow} x > \frac{\ln a}{\ln \varepsilon}. \tag{2}$$

Притоа, $\frac{\ln a}{\ln \varepsilon} < 0$. Да избереме $\delta = -\frac{\ln a}{\ln \varepsilon} > 0$ и нека $x \in (-\delta, 0)$. Тогаш $x > -\delta = \frac{\ln a}{\ln \varepsilon}$ па од (2) ова неравенство е еквивалентно со $a^{\frac{1}{x}} < \varepsilon$, т.е. $\left| a^{\frac{1}{x}} - 0 \right| < \varepsilon$. Со тоа (1) е докажано и за $\varepsilon < 1$.

б) Треба да докажеме дека

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)\left(x \in (0, \delta) \Rightarrow a^{\frac{1}{x}} > M\right) \tag{3}$$

Нека $M > 0$ е произволен. Ќе ги разгледаме двата случаи: $M \leq 1$ и $M > 1$.

1) Нека $M \leq 1$. Да избереме $\delta = 1$. Нека $x \in (0, \delta) = (0, 1)$. Тогаш $0 < x < 1$, па $\frac{1}{x} > 1$ и оттука $a^{\frac{1}{x}} > a^1 > 1 \geq M$, со што (3) е докажано за $M \leq 1$.

2) Нека $M > 1$. Да ја решиме неравенката $a^{\frac{1}{x}} > M$.

Имаме

$$a^{\frac{1}{x}} > M \Leftrightarrow \frac{1}{x} \ln a > \ln M \overset{\substack{\ln M > 0 \\ \ln a > 0 \\ x > 0}}{\Leftrightarrow} x < \frac{\ln a}{\ln M} \tag{4}$$

Сега, да избереме $\delta = \frac{\ln a}{\ln M} > 0$ и нека $x \in (0, \delta) = \left(0, \frac{\ln a}{\ln M}\right)$, т.е. $0 < x < \frac{\ln a}{\ln M}$.

Тогаш, од (4), последново неравенство е еквивалентно со $a^{\frac{1}{x}} > M$, со што (3) е докажано и за $M > 1$.

в) Треба да докажеме дека

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(x \in (0, \delta) \Rightarrow \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon\right) \tag{5}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно.

1) Нека $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$. Да избереме $\delta = 1$. Нека $x \in (0,\delta) = (0,1)$. Значи $0 < x < 1$, па $\frac{1}{x} > 1 > 0$ и оттука $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} > 0$. Заради $\operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}$ за секој $y \in \mathbb{R}$ добиваме $\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x} < \frac{\pi}{2} \leq \varepsilon$, со што (5) е докажано за $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$.

2) Нека $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Да ја решиме неравенката $\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$.

Заради $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$ за секој $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имаме

$$\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow \operatorname{arctg}\frac{1}{x} > \frac{\pi}{2} - \varepsilon .$$

Притоа за $x > 0$ имаме $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Функцијата $\operatorname{tg} x$ е растечка, па $\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\right) > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, односно $\frac{1}{x} > \operatorname{ctg}\varepsilon$, т.е. $x < \frac{1}{\operatorname{ctg}\varepsilon}$. Притоа заради $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ добиваме $\operatorname{ctg}\varepsilon > 0$.

Сега да избереме $\delta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\varepsilon} > 0$ и нека $x \in \left(0, \frac{1}{\operatorname{ctg}\varepsilon}\right)$. Значи $x < \frac{1}{\operatorname{ctg}\varepsilon}$ и од претходното следува дека ова неравенство е еквивалентно со $\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$. ●

3.217. Нека за функциите $f(x)$ и $g(x)$ важи $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ и $\lim\limits_{x \to y_0} g(x) = z_0$. Дали тогаш мора да постои и $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x))$?

Решение. Ако функцијата $g(x)$ е непрекината во точката y_0, тогаш важи $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right) = g(y_0) = z_0$. Меѓутоа, во општ случај, $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x))$ не мора да постои. Така, ако $f(x) = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{n} \\ x, & x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ и $g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, тогаш $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, но $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$ не постои. ●

Одреди ги следните граници (**3.218.- 3.150.**)

3.218. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2}$.

Решение. Ако $x \to 2^+$, тогаш $t = x - 2 > 0$, па имаме.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2+t}{t}=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{2}{t}+1\right)=\infty\ .●$$

3.219. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{x-2}$.

Решение. Ако $x\to 2^-$, тогаш $t=x-2<0$, па имаме.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=\lim_{t\to 0^-}\frac{2+t}{t}=\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{2}{t}+1\right)=-\infty\ .●$$

3.220. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{2+t}{t}=\infty$.●

3.221. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{2+t}{t}=-\infty$.●

3.222. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sin x}{x}=-1$.●

3.223. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$.●

3.224. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}$.

Решение. Ако $x\to 1^-$, тогаш $x-1<0$, па $|x-1|=-(x-1)$.

Имаме $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{-(x-1)}=-1$.●

3.225. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{|x-1|}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.●

3.226. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-|x|}{2x}$.

Решение. Ако $x\to 0^-$ тогаш $x<0$ па $|x|=-x$.

Имаме $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-|x|}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+x}{2x}=1$.●

3.227. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-|x|}{2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-|x|}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-x}{2x}=0$.●

3.228. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{t}=\infty$.●

3.229. $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to-\infty}e^{t}=0$.●

3.230. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{t}}=1$.●

3.231. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{1+e^{t}}=0$.●

3.232. Пресметај: **а)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$;   **б)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)}{e^{-\frac{1}{x}}\left(e^{\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(e^2)^{\frac{1}{x}}-1}{(e^2)^{\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$.

б) $$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-(e^2)^{-\frac{1}{x}}}{1+(e^2)^{-\frac{1}{x}}}\ .$$

Да ставиме $t=-x$. Тогаш при $x\to 0^-$ имаме $t\to 0^+$ па

$$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-(e^2)^{-\frac{1}{x}}}{1+(e^2)^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1-(e^2)^{\frac{1}{t}}}{1+(e^2)^{\frac{1}{t}}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1\ .●$$

3.233. Дали постои лимес на функцијата $f(x)$ во дадена точка x_0 ?

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ во точката $x_0=1$;

б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ во точката $x_0=0$;

в) $f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^3}$ во точката $x_0=2$;

г) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{x}$ во точката $x_0=0$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}=-2$ и $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$. Бидејќи левиот и десниот лимес се различни, следува дека функцијата нема лимес во точката $x_0=1$.

б) Од $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}|\sin x|}{x}=-\sqrt{2}$ и $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2}|\sin x|}{x}=\sqrt{2}$ следува дека функцијата нема лимес во точката $x_0=0$, бидејќи левиот и десниот лимес се различни.

в) И во овој случај функцијата нема лимес во точката $x_0=2$, бидејќи $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{5}{(x-2)^3}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{5}{(x-2)^3}=\infty$

г) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^x-1}{x}=\ln 2$ и $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^x-1}{x}=\ln 2$. Левиот и десниот лимес се еднакви, па заклучуваме дека функцијата има лимес во точката $x_0=0$. ●

3.234. Определи ги левиот и десниот лимес на дадената функција во точката x_0 ако:

а) $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$, $x_0=0$;

б) $f(x)=\arcsin(x+1)$, $x_0=0$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+e^{\frac{1}{2-x}}}$, $x_0=2$.

Решение. а) Ако $x\to 0^+$ тогаш $x>0$, па $f(x)=\dfrac{x-x}{2x}=0$. Според тоа и $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$. Слично, ако $x\to 0^-$ следува $x<0$, па $f(x)=\dfrac{x-(-x)}{2x}=2$. Значи $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=2$.

б) Функцијата $\arcsin(x+1)$ е дефинирана за $x+1<1$, т.е. за $x<0$. Според тоа не постои десната граница во 0. За левата граница имаме $\lim\limits_{x\to 0^-}\arcsin(x+1)=\dfrac{\pi}{2}$.

в) Нека $x \to 2^+$. Значи $x > 2$, па $2 - x < 0$ и $2 - x \to 0^-$. Оттука $\frac{1}{2-x} \to -\infty$.

Значи $\lim\limits_{x \to 2^+} e^{\frac{1}{2-x}} = 0$. Според тоа $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{4}$.

Сега, нека $x \to 2^-$. Тогаш $x < 2$ па $2 - x \to 0^+$. Следува $\frac{1}{2-x} \to +\infty$ па $\lim\limits_{x \to 2^-} e^{\frac{1}{2-x}} = +\infty$. Оттука $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(x^2 + e^{\frac{1}{2-x}}\right) = +\infty$ и конечно $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0$.●

3.235. Определи ги точките на прекин и нивниот вид на следните функции.

а) $f(x) = (\operatorname{sgn} x)^2$; **б)** $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1)$; **в)** $f(x) = [x]$.

Решение. а) $(\operatorname{sgn} x)^2 = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$. Дадената функција е дефинирана на целата реална права. При тоа, таа е константа на множесрвото $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ од каде следува дека таа е непрекината во сите точки $x \neq 0$. Од $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sgn} x)^2 = 1$ и $f(0) = 0$ следува дека функцијата има отстранлив прекин од прв вид во точката $x = 0$.

б) $\operatorname{sgn}(x-1) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$. Дадената функција е дефинирана на целата реална права. При тоа, таа е константа на множествата $(-\infty, 1)$ и $(1, \infty)$ од каде следува дека таа е непрекината во сите точки $x \neq 1$. Од $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \operatorname{sgn}(x-1) = -1$ и $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \operatorname{sgn}(x-1) = 1$ следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x = 1$, кој што не може да се отстрани.

в) $[x] = \begin{cases} n-1, & n-1 \le x < n \\ n, & n \le x < n+1 \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}$. Дадената функција е дефинирана на целата реална права. При тоа, таа е константа на множествата $(n-1, n)$, $n \in \mathbb{Z}$, од каде следува дека таа е непрекината во сите точки $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Нека $n \in \mathbb{Z}$.

Од $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} [x] = n-1$ и $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = \lim\limits_{x \to n^+} [x] = n$ следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x = n, n \in \mathbb{Z}$, кој што не е отстранлив. ●

3.236. Определи ги точките на прекин и нивниот вид на следните функции.

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, x<0\\ (x+1)^2, 0\leq x\leq 2\\ 1-x, x>2\end{cases}$;

б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|-x}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Решение. а) Дадената функција е дефинирана на целата реална права. При тоа, таа е непрекината во секоја точка од множеството $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$ како збир, разлика, производ и количник од непрекинати функции.

Од $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=-1$ и $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)^2=1$ следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=0$, кој што не може да се отстрани. Од $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)^2=9$ и $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(1-x)=-1$ следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=2$, кој што не може да се отстрани.

б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{x}, & x<0\\ 0, & x\geq 0\end{cases}$. Дадената функција е дефинирана на целата реална права.

При тоа, таа е константа на интервалот $(-\infty,0)$ од каде заклучуваме дека е непрекината во секоја точка од споменатиот интервал. Исто така, функцијата е непрекината во секоја точка од интервалот $(0,\infty)$ како количник од непрекинати функции. Од $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{x^2}=\infty$, следува дека функцијата има бесконечен прекин од втор вид во точката $x=0$.

в) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\\ 0, x=0\\ -\dfrac{1}{x^2}, x\in(1,\infty)\end{cases}$. Дадената функција е дефинирана на множеството $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$. Таа е непрекината во секоја точка од $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$ како количник од непрекинати функции.

Од $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=\infty$ следува дека функцијата има бесконечен прекин од втор вид во точката $x=0$. ●

3.237. Најди ги точките на прекин и нивниот вид на следните функции.

а) $f(x)=\begin{cases}1, & x<-1\\ 1-x^2, & 1\le x\le 1\\ x+1, & x>0\end{cases}$; **б)** $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1\le x<1\\ 1, & x=1\\ x-1, & 1<x\le 4\end{cases}$.

Решение. а) Функцијата е непрекината во секоја точка од $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ како збир и разлика на непрекинати функции.
Од $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0$ следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=-1$ кој не може да се отстрани. Од $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$, следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=1$ кој не е отстранлив. б) Функцијата е непрекината во секоја точка од $[-1,4]\setminus\{1\}$ како разлика на непрекинати функции. Од $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ и $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$, следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=1$ кој не е отстранлив. ●

3.238. Испитај ја непрекинатоста во секој $x\in\mathbb{R}$ на функциите:

а) $f(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, x\ne 0\\ 1, x=0\end{cases}$; **б)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, x\ne 0\\ 1, x=0\end{cases}$.

Решение. а) Функциите $|x|$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ се непрекинати во секој $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ па и f е непрекината во x_0 како нивна композиција.

Останува да ја провериме непрекинатоста во $x_0=0$. Функцијата ќе биде непрекината во 0 ако $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$.

Нека $x\to 0^+$. Значи $x>0$. Можеме да сметаме дека $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ па и $\sin x>0$. Оттука и $\dfrac{\sin x}{x}>0$. Значи $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, па $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Сега, нека $x\to 0^-$. Тогаш $x<0$ и ќе сметаме дека $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$. Затоа и $\sin x<0$ па $\dfrac{\sin x}{x}>0$. Значи $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Според тоа $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Бидејќи и $f(0)=1$ добиваме дека f е непрекината во 0. Според тоа f е непрекината во секој $x\in\mathbb{R}$.

б) На множеството $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функциите $|x|$ и $\sin x$ се непрекинати, па и f е непрекината како нивен количник.

Да ја испитаме непрекинатоста во 0.

Нека $x \to 0^+$. Тогаш $x > 0$, па можеме да сметаме дека $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Имаме $\sin x > 0$ па $\frac{\sin x}{|x|} = \frac{\sin x}{x}$, т.е. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Оттука $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Ако $x \to 0^-$ тогаш $x < 0$. Како и претходно можеме да сметаме дека $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, па $\sin x < 0$. Според тоа $\frac{\sin x}{|x|} = \frac{\sin x}{-x}$ и $f(x) = -\frac{\sin x}{x}$. Оттука $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1$.

Добивме дека $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, па функцијата f има прекин во $x_0 = 0$. ●

3.239. За кои вредности на $a \in \mathbb{R}$ дадената функција е непрекината во секоја точка од дефиниционата област.

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$; **б)** $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$;

в) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$; **г)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$.

Решение. а) Функцијата е непрекината во секоја точка од $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ како разлика и количник од непрекинати функции. Од $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, следува дека функцијата е непрекината во точката $x = 0$ за $a = 1$.

б) Функцијата е непрекината во секоја точка од $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ како количник и композиција од непрекинати функции. Од $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, следува дека функцијата е непрекината во точката $x = 0$ за $a = 0$.

в) Функцијата е непрекината во секоја точка од $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ како збир, количник и композиција од непрекинати функции. Од $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, следува дека функцијата е непрекината во точката $x = 0$ за $a = e$.

г) Функцијата е непрекината во секоја точка од $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ како количник и композиција од непрекинати функции.

Од $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{n}x^n-1}{x}=n$, следува дека функцијата е непрекината во точката $x=0$ за $a=n$.●

3.240. Дали постои реален број a таков што дадената функција е непрекината во секоја точка од дефиниционата област.

а) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$; **б)** $f(x)=\begin{cases} ax^2+1, & x>0\\ -x, & x\leq 0\end{cases}$.

Решение. а) Функцијата е непрекината во секоја точка од $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ како производ, количник и композиција од непрекинати функции. Од $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$, следува дека функцијата е непрекината во точката $x=0$ за $a=0$;

б) Функцијата е непрекината во секоја точка од $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ како збир и производ од непрекинати функции. Од $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+1)=1$ следува дека независно од вредноста на a , функцијата има прекин во точката $x=0$. ●

3.241. Дали може да се определи реалниот број a така што функцијата f е непрекината во x_0 ако:

а) $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|-x}{x^2}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$, $x_0=0$;

б) $f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}, x\neq -1\\ a, x=-1\end{cases}$, $x_0=-1$;

в) $f(x)=\begin{cases}\cos^2\frac{1}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$, $x_0=0$?

Решение. а) Имаме

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-x}{x^2}\stackrel{x\geq 0}{=}0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-x}{x^2}\stackrel{x<0}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x^2}=-\infty .$$

Значи $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, па за секој избор на a функцијата има прекин во 0 .

б) На сличен начин како **а)** имаме

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{|x+1|}{x+1}\stackrel{x+1>0}{=}\lim_{x\to -1^+}\frac{x+1}{x+1}=1 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{|x+1|}{x+1}\stackrel{x+1<0}{=}\lim_{x\to -1^-}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1 .$$

Повторно $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ па за секој $a\in\mathbb{R}$ функцијата f има прекин во -1.

в) Ќе докажеме дека не постои $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Нека $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}n}$ и $y_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $n\in\mathbb{N}$.

Тогаш $x_n, y_n \neq 0$ за секој $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ но

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^2 \frac{\pi}{2}n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^2(2n\pi) = 1$. Заради непостоењето на границата функцијата има прекин во 0 за секој избор на a.●

3.242. Дали можат да се одредат реалните броеви a и b така што функцијата $f(x) = \begin{cases} 2x, |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b, |x| > 1 \end{cases}$ е непрекината на $\mathbb{R}$?

Решение. На множеството $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ функцијата е непрекината за секој избор на a и b. За f да биде непрекината во 1 треба да важи

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 2$$

а за да биде непрекината во -1 треба да важи $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = -2$.

Според тоа имаме

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x) = 2 = f(1)$$

и оттука добиваме $1 + a + b = 2$, односно $a + b = 1$.

За -1 имаме

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (2x) = -2 = f(-1) \text{ и } \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x^2 + ax + b) = 1 - a + b$$

па добиваме $1 - a + b = -2$, т.е. $a - b = 3$. Значи бараните a и b ќе бидат решение на системот $\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 3 \end{cases}$. Решение на последниов систем е $a = 2, b = -1$, па тие се бараните a и b. Значи функцијата $f(x) = \begin{cases} 2x, |x| \leq 1 \\ x^2 + 2x - 1, |x| > 1 \end{cases}$ е непрекината во секој $x\in\mathbb{R}$.●

3.243. За кои реални броеви a и b функцијата $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ ax + b, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ е непрекината во секоја точка од дефиниционата област?

Решение. Функцијата е непрекината во секоја точка од $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ како збир, разлика, производ и композиција од непрекинати функции. Од $\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)^3=-1$ и $\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=b$ следува дека функцијата е непрекината во точката $x=0$ за $b=-1$. Од $\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b$ и $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1$ следува дека функцијата е непрекината во точката $x=1$ за $a+b=1$, односно $a=2$. ●

3.244. Најди функција којашто е ограничена и има прекин на сегментот $[0,1]$.

Одговор. Функцијата $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}\right), \; x\neq\dfrac{1}{2}\\ 2, \; x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ е една таква функција. (проверката се остава на читателот) ●

3.245. Испитај ја рамномерната непрекинатост на функцијата $f(x)=x\sin x$ на множеството $[0,\infty)$.

Решение. Дадената функција е непрекината на $[0,\infty)$ како производ на две непрекинати функции. Ќе докажеме дека f не е рамномерно непрекината на $[0,\infty)$. Нека $x_n=n\pi$ и $y_n=n\pi+\dfrac{1}{n}$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Притоа $x_n,y_n\in[0,\infty)$.

Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|n\pi-n\pi+\dfrac{1}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. Меѓутоа

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=\lim_{n\to\infty}\left|n\pi\sin n\pi-\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\left(\sin n\pi\cos\frac{1}{n}+\cos n\pi\sin\frac{1}{n}\right)\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)(-1)^n\sin\frac{1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}\right)=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}=\pi\neq 0.$$

Според тоа f не е рамномерно непрекината на $[0,\infty)$. ●

3.5. Асимптоти на функција

Определи ги асимптотите на следните функции (**3.246.-3.258**)

3.246. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

Решение. Од $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$ следува дека правата $y=1$ е хоризонтална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x-1}=\infty$ следува дека правата $x=1$ е вертикална асимптота. Од $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ следува дека дадената функција нема коса асимптота. ●

3.247. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Решение. Од $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x}=-\infty$ следува дека дадената функција нема хоризонтална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+1}{x}=\infty$ следува дека правата $x=0$ е вертикална асимптота.

Од $k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=1$, $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=1$,

$n_1=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-k_1x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)=0$; $n_2=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)=0$,

заклучуваме дека правата $y=x$ е коса асимптота. ●

3.248. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$.

Решение. Од $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-4x+3}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-4x+3}=0$ следува дека правата $y=0$ е хоризонтална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{(x-3)(x-1)}=\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{(x-3)(x-1)}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x}{(x-3)(x-1)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x}{(x-3)(x-1)}=\infty$ следува дека правите $x=1$ и $x=3$ се вертикални асимптоти.

Од $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(x-3)(x-1)}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-3)(x-1)}=0$, заклучуваме дека дадената функција нема коса асимптота. ●

3.249. $f(x)=\frac{x^3}{x^2+9}$.

Решение. Од $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+9}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+9}=-\infty$ следува дека дадената функција нема хоризонтална асимптота. Исто така дадената функција нема вертикална асимптота.

Од $k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$, $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$,

$$n_1=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0 \text{ и } n_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$$

заклучуваме дека правата $y=x$ е коса асимптота. ●

3.250. $f(x)=\frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^2+1}$.

Решение. Од $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^2+1}=\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^2+1}=-\infty$ следува дека дадената функција нема хоризонтална асимптота. Исто така дадената функција нема вертикална асимптота.

Од $k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^3+x}=2$, $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$,

$$n_1=\lim_{x\to\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^2+1}-2x\right)=3 \text{ и}$$

$$n_1=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^2+1}-2x\right)=3$$

заклучуваме дека правата $y=2x+3$ е коса асимптота. ●

3.251. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Решение. Од $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=\infty$ следува дека дадената функција нема хоризонтална асимптота. Дадената функција нема вертикална асимптота.

Од $k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1$, $k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$,

$$n_1=\lim_{x\to\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=0,$$

$$n_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=0,$$

заклучуваме дека правите $y=x$ и $y=-x$ се коси асимптоти. ●

3.252. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Решение. Од $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=1$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=1$ следува дека правата $y=1$ е хоризонтална асимптота. Дадената функција нема вертикална асимптота.

Од $k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}=0$ и $k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, заклучуваме дека дадената функција нема коса асимптота. ●

3.253. $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$.

Решение. Од $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-x^3}=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{1-x^3}=\infty$ следува дека дадената функција нема хоризонтална асимптота. Исто така, дадената функција нема вертикална асимптота.

Од $k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=-1$, $k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$,

$n_1=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)=0$ и $n_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)=0$ заклучуваме дека правата $y=-x$ е коса асимптота. ●

3.254. $f(x)=e^{-x^2}+2$.

Решение. Од $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}+2=2$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{-x^2}+2=2$ следува дека правата $y=2$ е хоризонтална асимптота. Дадената функција нема вертикална асимптота.

Од $k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}+2}{x}=0$ и $k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x^2}+2}{x}=0$, заклучуваме дека дадената функција нема коса асимптота. ●

3.255. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$.

Решение. Од $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-e^x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1-e^x}=1$ следува дека правите $y=0$ и $y=1$ се хоризонтални асимптоти.

Од $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{1-e^x}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1-e^x}=-\infty$, следува дека правата $x=0$ е вертикална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x(1-e^x)}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x(1-e^x)}=0$, заклучуваме дека дадената функција нема коса асимптота. ●

3.256. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Од $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$ следува дека правата $y=1$ е хоризонтална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$ и $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$, следува дека правата $x=0$ е вертикална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=0$, заклучуваме дека дадената функција нема коса асимптота. ●

3.257. $f(x)=\ln(1+x)$.

Решение. Од $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x)=\infty$ следува дека дадената функција нема хоризонтална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(1+x)=-\infty$ следува дека правата $x=-1$ е вертикална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\infty$, заклучуваме дека дадената функција нема коса асимптота. ●

3.258. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

Решение. Од $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ следува дека правата $y=0$ е хоризонтална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to-0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to-0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-0^-}\frac{\sin x}{x}=1$ следува дека дадената функција нема вертикална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$, заклучуваме дека дадената функција нема коса асимптота. ●

IV. Диференцијално сметање

4.1. Дефиниција на извод. Основни правила за диференцирање

Нека $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ и $x_0\in(a,b)$. Тогаш граничната вредност

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

(ако постои) се вика прв извод на функцијата f во точката x_0.

Разликата $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ се вика нараснување на независно променливата во точката x_0.

Десен извод на функцијата f во точката x_0 претставува десната гранична вредност

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Лев извод на функцијата f во точката x_0 претставува левата гранична вредност

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ако функциите f и g се дефинирани на интервалот (a,b) и имаат првви изводи во точката $x\in(a,b)$, тогаш:

- $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$;
- $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$;
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, под услов $g(x)\neq 0$.

Задачи:

4.1. Определете го нараснувањето Δy на следните функции за соодветна промена на аргументот:

а) $f(x)=2x^3-x^2+3x+1$, $x=1,\ \Delta x=0{,}1$.

б) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-1}$, $x=2,\ \Delta x=0{,}2$.

в) $f(x)=\log x$, од $x_1=1$ до $x_2=1000$.

Решение. а) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 5{,}752 - 5 = 0{,}752$.

б) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = -\dfrac{25}{48}$.

в) $f(x+\Delta x) - f(x) = \log 1000 - \log 1 = \log 10^3 = 3$. ●

4.2. Ако променливата x добива нараснување Δx, определете го нараснувањето на функцијата:

а) $f(x) = ax + b$.

б) $f(x) = ax^2 + bx + c$.

в) $f(x) = a^x$.

Решение: а) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = a(x+\Delta x) + b - (ax+b) = a\Delta x$.

б) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) =$

$= 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x = \Delta x(2ax + a\Delta x + b)$.

в) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)$. ●

4.3. Определете го, по дефиниција, првиот извод на следните функции во дадените точки:

а) $f(x) = 3|x+1|$ во точката $x = -2$.

б) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ во точката $x = -1$.

в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ во точката $x = 1$.

г) $f(x) = 1 + \ln 2x$ во точката $x = 1$.

д) $f(x) = 2\sin 3x$ во точката $x = \dfrac{\pi}{6}$.

ѓ) $f(x) = x + \operatorname{ctg} x$ во точката $x = \dfrac{\pi}{4}$.

е) $f(x) = (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, во точката $x = 1$.

ж) $f(x) = 2^x$, во точката $x = 1$.

Решение: а) Од дефиницијата следува дека

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\ \ |-2+\Delta x+1| - 3|-2+1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\ \ (1-\Delta x) - 3}{\Delta x} = -3$$

.

б) Во овој случај имаме:

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{-1+\Delta x}+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\Delta x-1)}=-1$$

в) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{(1+\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=-2$.

г) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1+\ln(2+2\Delta x)-1-\ln 2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=1$.

д) Во овој случај имаме:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+\Delta x\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\Delta x\right)-2}{\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(3\Delta x)-1}{\Delta x}$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin^2(3\Delta x)}-1}{\Delta x}==2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin^2(3\Delta x)}{\Delta x\left(\sqrt{1-\sin^2(3\Delta x)}+1\right)}$$

$$=-6\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(3\Delta x)}{3\Delta x}\frac{\sin(3\Delta x)}{\sqrt{1-\sin^2(3\Delta x)}+1}=-6\cdot 0=0.$$

ѓ) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{4}+\Delta x+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)-\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=3.$$

е) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x-1)\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{\Delta x+2}}}{\Delta x}=\dfrac{\pi}{4}$.

ж) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2^{1+\Delta x}-2}{\Delta x}=2\ln 2$. ●

4.4. Определете ги, по дефиниција, првите изводи во точката x на следните функции:

а) $f(x)=ax^2+bx+c$, $x\in\mathbf{R}$. б) $f(x)=3x-x^2$, $x\in\mathbf{R}$.

в) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x\in\mathbf{R}$. г) $f(x)=\frac{p}{x}$, $x\neq 0$.

д) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$. ѓ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

е) $f(x)=e^{ax+b}$. ж) $f(x)=\sqrt{ax+b}$.

з) $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}$. ѕ) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

и) $f(x)=\sqrt[3]{ax+b}$. ј) $f(x)=3^x\sin x$.

к) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.　　　　　　л) $f(x)=x\sqrt{x}$.

Решение: а) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2ax\Delta x+a\Delta x^2+b\Delta x}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2ax+a\Delta x+b)}{\Delta x}=2ax+b\,.$$

б) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-x^2-2x\Delta x-\Delta x^2+3x+3\Delta x+x^2-3x}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x\Delta x-\Delta x^2+3\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(-2x-\Delta x+3)}{\Delta x}=-2x+3\,.$$

в) За $x\neq 0$ имаме: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Во точката $x=0$, левиот и десниот извод се:

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=+\infty \quad \text{и}$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=+\infty\,.$$

Геометриски, последново значи дека тангентата на графикот на функцијата f во точката $(0,0)$ е правата $x=0$.

г) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{p}{x+\Delta x}-\dfrac{p}{x}}{\Delta x}=-\dfrac{p}{x^2}$.

д) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{(x+\Delta x)^3}-\dfrac{2}{x^3}}{\Delta x}=-\dfrac{6}{x^4}$.

ѓ) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{x+\Delta x-1}{x+\Delta x+1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x}{\Delta x\cdot(x+\Delta x+1)(x+1)}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

е) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{a(x+\Delta x)+b}-e^{ax+b}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{ae^{ax+b}\left(e^{a\Delta x}-1\right)}{a\Delta x}=ae^{ax+b}$.

ж) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{a(x+\Delta x)+b}-\sqrt{ax+b}}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{a(x+\Delta x)+b}+\sqrt{ax+b}\right)}=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

з) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{a(x+\Delta x)+b}-\dfrac{1}{ax+b}}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-a\Delta x}{\Delta x(a(x+\Delta x)+b)(ax+b)}=-\dfrac{a}{(ax+b)^2}$.

ѕ) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{a(x+\Delta x)+b}{c(x+\Delta x)+d}-\dfrac{ax+b}{cx+d}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(ad-bc)\Delta x}{\Delta x(c(x+\Delta x)+d)(cx+d)}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

и) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a(x+\Delta x)+b}-\sqrt[3]{ax+b}}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{a(x+\Delta x)+b}-\sqrt[3]{ax+b}\right)\left(\sqrt[3]{(a(x+\Delta x)+b)^2}+\sqrt[3]{(a(x+\Delta x)+b)(ax+b)}+\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right)}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(a(x+\Delta x)+b)^2}+\sqrt[3]{(a(x+\Delta x)+b)(ax+b)}+\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(a(x+\Delta x)+b)^2}+\sqrt[3]{(a(x+\Delta x)+b)(ax+b)}+\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right)}=\dfrac{a}{3\cdot\sqrt[3]{(ax+b)^2}}$.

ј) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3^{x+\Delta x}\sin(x+\Delta x)-3^x\sin x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3^x3^{\Delta x}(\sin x\cos\Delta x+\sin\Delta x\cos x)-3^x\sin x}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3^x\sin x\left(3^{\Delta x}\cos\Delta x-1\right)+3^x3^{\Delta x}\sin\Delta x\cos x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{3^x3^{\Delta x}\sin x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+3^x\sin x\dfrac{3^{\Delta x}-1}{\Delta x}+\dfrac{3^x3^{\Delta x}\sin\Delta x\cos x}{\Delta x}\right)=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3^x3^{\Delta x}\sin x(\sqrt{1-\sin^2\Delta x}-1)}{\Delta x}+3^x\sin x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3^{\Delta x}-1}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3^x3^{\Delta x}\sin\Delta x\cos x}{\Delta x}=$

$=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3^x3^{\Delta x}\sin x\sin^2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{1-\sin^2\Delta x}+1)}+3^x\sin x\ln 3+3^x\cos x=$

$=-3^x\sin x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3^{\Delta x}\sin\Delta x}{\Delta x}\dfrac{\sin\Delta x}{\sqrt{1-\sin^2\Delta x}+1}+3^x\ln 3\sin x+3^x\cos x=3^x\sin x\ln 3+3^x\cos x$

к) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x\sqrt{x+\Delta x}\sqrt{x}}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x\sqrt{x+\Delta x}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

л) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)\sqrt{x+\Delta x}-x\sqrt{x}}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{x\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)}{\Delta x}+\dfrac{\Delta x\sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x}\right)=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x}=\dfrac{x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}$. ●

4.5. Докажи дека функцијата $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ нема извод во точката $x=0$.

Решение: По дефиниција, $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$. Ќе покажеме дека последниот лимес не постои. Ги земаме низите: $\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ и $\left(1\Big/\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$. Тие конвергираат кон нулата, но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{1}{\dfrac{1}{2n\pi}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin 2n\pi=0$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$. ●

4.6. Определете, по дефиниција, лев и десен извод на следните функции во дадените точки:

а) $f(x)=x|x|$ во точката $x=0$.

б) $f(x)=|3x-6|$ во точката $x=2$.

в) $f(x)=x^2-2|x|+1$ во точката $x=0$.

г) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ во точката $x=0$.

д) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ во точката $x=0$.

ѓ) $f(x)=\begin{cases} (x-2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}, & x\neq 2 \\ 0, & x=2 \end{cases}$ во точката $x=2$.

е) $f(x)=|\ln x|$ во точката $x=1$.

ж) $f(x)=\ln|x|$ во точката $x=1$.

з) $f(x)=|\sin 2x|$ во точката $x=0$.

ѕ) $f(x)=|\operatorname{tg} x|$ во точката $x=0$.

Решение:

а) $f'_{-}(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x}=0$.

$f'_{+}(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x}=0$.

б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{3|\Delta x|}{\Delta x}=-3$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{3|\Delta x|}{\Delta x}=3$.

в) $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta x^2-2|\Delta x|}{\Delta x}=2$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x^2-2|\Delta x|}{\Delta x}=-2$.

г) $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=1$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0$.

д) $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x}=-\infty$,

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x}=\infty\ .$$

ѓ) $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta x\operatorname{arctg}\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\Delta x}=-\dfrac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\Delta x}=\dfrac{\pi}{2}$.

е) $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\ln(1+\Delta x)|}{\Delta x}=$

$=-\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\left|\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}\right|=-1$.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\left|\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}\right|=1$.

ж) $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\ln|1+\Delta x|}{|\Delta x|}=$

$=-\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\left|\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}\right|=-1$. $\qquad\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\ln\left|(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}\right|=1$.

з) $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{2|\sin\Delta x||\cos\Delta x|}{|\Delta x|}=-2$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{2|\sin\Delta x||\cos\Delta x|}{|\Delta x|}=2$.

ѕ) $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\operatorname{tg}\Delta x|}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\sin\Delta x|}{|\Delta x|}\dfrac{1}{|\cos\Delta x|}=-1$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\sin\Delta x|}{|\Delta x|}\dfrac{1}{|\cos\Delta x|}=1$. ●

4.7. Покажете дека следниве функции имаат бесконечни изводи:

а) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ во точката $x=0$.

б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ во точката $x=0$.

Решение: а) Да се види задачата 4.4. под в).

б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x^2}=\infty$. ●

4.8. Дали следните функции имаат извод:

а) $f(x)=|\ln x|$ во точката $x=1$.

б) $f(x)=3|x|+1$ во точката $x=0$.

Решение: а) Бидејќи левиот и десниот извод се различни (да се види задачата 32), следува дека функцијата нема извод во точката $x=1$.

б) Од $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{3|\Delta x|+1-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{3|\Delta x|}{\Delta x}=-3$ и

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{3|\Delta x|+1-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{3|\Delta x|}{\Delta x}=3$ следува дека функцијата нема извод во точката $x=0$. ●

4.9. Нека $f(x)=\begin{cases} g(x), & x>a \\ h(x), & x<a \end{cases}$. Кои услови треба да ги исполнуваат непрекинатите функции g и h, за да функцијата f биде диференцијабилна на целото **R** ?

Решение. Бидејќи $f(x)=g(x),\ x>a$ и $f(x)=h(x),\ x<a$, диференцијабилноста на g на (a,∞) и на h на $(-\infty,a)$ е потребен и доволен услов за диференцијабилност на функцијата f на множеството $(-\infty,a)\cup(a,\infty)$. За да f биде диференцијабилна во точката a потребно и доволно е да $g(a)=h(a)$ и $g'_+(a)=h'_-(a)$, бидејќи $f'_+(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}$ и

$f'_-(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}$.●

4.10. Нека

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ x^2+ax+b, & x>0 \end{cases}.$$

Определете ги вредностите на a и b, за да f биде диференцијабилна на целата бројна права.

Решение. Да забележиме дека f треба задолжително да биде непрекината во нулата, а тоа значи $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+ax+b)=b=1$. Добивме $b=1$.

Од друга страна, $f'_+(0)=(x^2+ax+b)'|_{x=0}=a$ и $f'_-(0)=(e^x)'|_{x=0}=1$. Следува дека $f'(0)$ постои ако $a=1$ и $b=1$. За овие вредности на a и b функцијата f е диференцијабилна во секоја точка од $\mathbf{R}$. ●

4.11. Определете ги a_1, a_2, b_1 и b_2, така што функцијата

$$f(x)=\begin{cases} a_1x^2+b_1, & x<\dfrac{1}{e} \\ x^2\ln x, & \dfrac{1}{e}\le x\le e \\ a_2x+b_2, & x>e \end{cases}$$

биде диференцијабилна на $\mathbf{R}$.

Одговор. $a_1=-\dfrac{1}{2}$, $b_1=-\dfrac{1}{2e^2}$, $a_2=3e$, $b_2=-2e^2$. ●

4.12. Определете полином со најмала степен $g(x)$ таков што функцијата f да биде диференцијабилна на цело $\mathbf{R}$.

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5x}{4+x^2}, & |x|\ge 1 \\ g(x), & |x|<1 \end{cases}$.

б) $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-2x}, & |x|\ge 1 \\ g(x), & |x|>1 \end{cases}$.

Решение. а) Функцијата f е непрекината па важи:

$$\lim_{x\to -1^+} g(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{5x}{4+x^2}=-1 \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{5x}{4+x^2}=1 \tag{2}$$

А бидејќи функцијата е диференцијабилна, тогаш во секоја точка левиот и десниот извод се еднакви, т.е.

$$g'_+(-1)=\frac{5(4-x^2)}{(4+x^2)^2}|_{x=-1}=\frac{3}{5} \tag{3}$$

$$g'_{-}(1)=\frac{5(4-x^2)}{(4+x^2)^2}\Big|_{x=1}=\frac{3}{5} \tag{4}$$

Полиномот не може да биде од нула степен заради (1) и (2).

Ако $g(x)=a_1x+a_0$, тогаш $g'(x)=a_1$, па од (1),(2),(3) и (4) го добиваме следниот систем равенки: $-a_1+a_0=-1$, $a_1+a_0=1$, $a_1=\frac{3}{5}$ што нема решение.

Ако $g(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, тогаш $g'(x)=2a_2x+a_1$. Од (1),(2),(3) и (4) го добиваме системот равенки: $a_2-a_1+a_0=-1$, $a_2+a_1+a_0=1$, $-2a_2+a_1=\frac{3}{5}$, $2a_2+a_1=\frac{3}{5}$.

Решение на системот е: $a_2=a_0=0$, $a_1=\frac{3}{5}$. Од предходната дискусија следува дека и овој случај не е можен.

Нека $g(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, тогаш $g'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$. Заменувајќи во (1),(2),(3) и (4) добиваме дека $a_2=a_0=0$, $a_1=\frac{6}{5}$ и $a_3=-\frac{1}{5}$. Така, $g(x)=-\frac{1}{5}x^3+\frac{6}{5}x$. б) $g(x)=\frac{e^{-2}-e^2}{2}x+\frac{e^2+e^{-2}}{2}$. ●

4.13. Најдете $g'(a)$, каде што $g(x)=(x-a)f(x)$ при што функцијата f е непрекината во точката $x=a$.

Решение. По дефиниција,

$$g'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x-a)f(a+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(a+\Delta x)=f(a).$$

Последното равенство следува заради непрекинатоста на функцијата f во точката $x=a$. ●

4.14. Покажете дека функцијата $g(x)=|x-a|f(x)$, каде што функцијата f е непрекината во точката $x=a$ и $f(a)\neq 0$, нема извод во точката a.

Решение. Ќе ги пресметаме десниот и левиот извод $g'_{+}(a)$ и $g'_{-}(a)$:

$$g'_{+}(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|a+\Delta x-a|f(a+\Delta x)}{\Delta x}=+f(a),$$

$$g'_{-}(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|a+\Delta x-a|f(a+\Delta x)}{\Delta x}=-f(a).$$

Бидејќи $f(a)\neq 0$, заклучуваме дека функцијата нема извод во точката a. ●

4.15. Покажете дека функцијата $f(x)=|x-a_1||x-a_2|\cdots|x-a_n|$ е непрекината во точките $a_1,a_2,\cdots a_n$, но нема извод во тие точки.

Решение. Непрекинатоста е очигледна.

$$f'_+(a_i)=\lim_{\Delta x\to a_i^+}\frac{|a_i+\Delta x-a_1||a_i+\Delta x-a_2|\cdots|a_i+\Delta x-a_i|\cdots|a_i+\Delta x-a_n|}{\Delta x}=$$

$$=+|a_i-a_1||a_i-a_2|\cdots|a_i-a_{i-1}||a_i-a_{i+1}|\cdots|a_i-a_n|,$$

$$f'_-(a_i)=\lim_{\Delta x\to a_i^-}\frac{|a_i+\Delta x-a_1||a_i+\Delta x-a_2|\cdots|a_i+\Delta x-a_i|\cdots|a_i+\Delta x-a_n|}{\Delta x}=$$

$$=-|a_i-a_1||a_i-a_2|\cdots|a_i-a_{i-1}||a_i-a_{i+1}|\cdots|a_i-a_n|.$$

$f'_+(a_i)\neq f'_-(a_i)$, па функцијата нема извод во точките $a_1,a_2,\cdots a_n$. ●

4.16. Покажете дека функцијата $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ е диференцијабилна само во точката $x=0$.

Решение. Прво ќе покажеме дека функцијата е диференцијабилна во $x=0$. Нека $(x_n)_n$ е произволна низа реални броеви која конвергира кон нулата. Тогаш, од $\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|\leq\left|\frac{x_n^2}{x_n}\right|=|x_n|$ имаме $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=0$, па следува $f'(0)=0$.

Нека $x=r\neq 0$ е рационален број. Ќе покажеме дека не постои $\lim_{x\to r}\frac{f(x)-r^2}{x-r}$. Нека $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ се низи од рационални и ирационални броеви соодветно кои конвергираат кон r.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-r^2}{x_n-r}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-r^2}{x_n-r}=2r,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-r^2}{y_n-r}=\lim_{n\to\infty}\frac{0-r^2}{y_n-r}\neq 2r.$$

Бидејќи горните лимеси се различни, следува дека не постои $\lim_{x\to r}\frac{f(x)-r^2}{x-r}$, а тоа значи дека функцијата не е диференцијабилна во точката $x=r\neq 0$.

Слично, ќе покажеме дека функцијата не е диференцијабилна во ниту една ирационална точка. Нека $x=s$ е ирационален број. Ќе покажеме дека не постои $\lim_{x\to s}\frac{f(x)}{x-s}$. Нека $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ се низи од рационални и ирационални броеви соодветно кои конвергираат кон s.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)}{y_n-s}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{y_n-s}=0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n-s}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{x_n-s}\neq 0\,.$$

Добивме дека не постои граничната вредност: $\lim\limits_{x\to s}\frac{f(x)-f(s)}{x-s}$ што значи дека функцијата не е диференцијабилна во ирационалната точка s . ●

4.17. Нека f е диференцијабилна функција во секоја точка од дефинициoната област. Покажете дека:

а) Ако функцијата f е парна, тогаш f' е непарна функција;

б) Ако функцијата f е непарна, тогаш f' е парна функција.

в) Ако функцијата f е периодична, тогаш и f' е периодична со истиот период.

Решение. а) Нека $f(x)=f(-x)$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{-\Delta x}=-f'(-x)\,.$$

б) Нека $f(x)=-f(-x)$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(-x-\Delta x)+f(-x)}{-\Delta x}=f'(-x)\,.$$

в) Нека $f(x)=f(x+T)$.

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\,.\ ●$$

4.18. Функцијата f е диференцијабилна во точка x ако и само ако нараснувањето $f(x+\Delta x)-f(x)$ може да се напише во облик:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$$

каде што A е реален број а функцијата $\alpha(\Delta x)$ е бесконечно мала кога $\Delta x\to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

Решение. Нека постои $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$. Тогаш $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)=\alpha(\Delta x)$ каде што $\alpha(\Delta x)\to 0$ кога $\Delta x\to 0$. Од пследното равенство имаме $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$.

Обратно, нека $f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, $A\in\mathbf{R}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

Одовде следува дека $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=A=f'(x)$. ●

4.19. Нека функцијата f има извод во точката $x=a$. Пресметајте

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(f\Big(a+\frac{1}{n^2}\Big)+f\Big(a+\frac{2}{n^2}\Big)+\cdots f\Big(a+\frac{n}{n^2}\Big)-nf(a)\Big).$$

Решение. Бидејќи f има извод во точката, $x=a$ за произволно $\varepsilon>0$, постои $\delta>0$ така што за $0<|x|<\delta$ ќе важи неравенството: $\left|\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}-f'(a)\right|<\varepsilon$ т.е. $\left|f(a+x)-f(a)-f'(a)x\right|<\varepsilon|x|$. Избираме N така што $\dfrac{1}{N}<\delta$. Тогаш $\forall n\geq N$ и $\forall k\in\{1,\cdots n\}$ ќе важи $\dfrac{1}{n}<\delta$ и $\dfrac{k}{n^2}<\delta$, па имаме:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k}{n^2})-nf(a)-\sum_{k=1}^{n} f'(a)\frac{k}{n^2}\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\left|f(a+\frac{k}{n^2})-nf(a)-f'(a)\frac{k}{n^2}\right|<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=$$

$=\varepsilon\dfrac{n+1}{2n}$. Добивме сека $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(f(a+\dfrac{k}{n^2})-nf(a)-\sum\limits_{k=1}^{n} f'(a)\dfrac{k}{n^2})=0$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(f(a+\frac{k}{n^2})-nf(a))=f'(a)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{f'(a)}{2}. \ \bullet$$

4.20. Најдете извод на следните функции:

а) $f(x)=\dfrac{\ln 3}{x}+e^2$, б) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$,

в) $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{(m+n)x}$, г) $f(x)=x^3\ \sqrt[3]{x^2}+x^7\ \sqrt[3]{x}+\ \sqrt[3]{3}$,

д) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg}x}$, ѓ) $f(x)=e^x(a\sin x-b\cos x)$,

е) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$, ж) $f(x)=x\sin x\ln x$.

Решение: а) $f'(x)=-\dfrac{\ln 3}{x^2}$.

б) $f'(x)=(\sqrt{x})'+(\sqrt[3]{x})'+(\sqrt[4]{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\ \sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{4\ \sqrt[4]{x^3}}$.

в) $f'(x)=\dfrac{(ax^2+bx+c)'(m+n)x-(ax^2+bx+c)(m+n)x'}{(m+n)^2x^2}=$

$=\dfrac{ax^2-c}{(m+n)x^2}$.

г) $f'(x)=3x^2\ \sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^8}+7x^6\ \sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}\ \sqrt[3]{x^{19}}$.

д) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}x-\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}$.

ѓ) $f'(x)=e^x(a\sin x-b\cos x)+e^x(a\cos x+b\sin x)=$

$=e^x((a+b)\sin x+(a-b)\cos x)$. ●

4.21. Определете ја вредноста на изводот на функцијата $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ во точката $x=e$.

Решение. $f'(x)=\dfrac{2x\ln x-x}{\ln^2 x}$; $f'(e)=e$.●

4.22. Најдете извод на функцијата:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & -2<x<1 \\ (1-x)(2-x), & 1\le x\le 2 \\ -(2-x), & 2<x<4 \end{cases}.$$

Решение. Функциите $1-x,\ (1-x)(2-x)$ и $-(2-x)$ имаат извод во соодветните области и притоа $f'(x)=\begin{cases} -1, & -2<x<1 \\ 2x-3, & 1<x<2 \\ 1, & 2<x<4 \end{cases}$.

Ќе ги побараме левиот и десниот извод на функцијата во точките $x=1$ и $x=2$:

$f'_-(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{1-1-\Delta x}{\Delta x}=-1$; $f'_+(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{(1-1-\Delta x)\cdot(2-1-\Delta x)}{\Delta x}=-1$,

$f'_-(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{(1-2-\Delta x)\cdot(2-2-\Delta x)}{\Delta x}=1$; $f'_+(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{-(2-2-\Delta x)}{\Delta x}=1$.

Добивме дека $f'(1)=-1$ и $f'(2)=1$.

Значи, изводот можеме да го запишеме како $f'(x)=\begin{cases} -1, & -2<x<1 \\ 2x-3, & 1\le x\le 2 \\ 1, & 2<x<4 \end{cases}$. ●

4.23. Пресметајте ги збировите:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{kx},\ x\in\mathbf{R}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1},\ x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

Решенија. а) Ако $x=0$, тогаш $\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{kx}=\frac{n(n+1)}{2}$. Нека $x\neq 0$. Ако се искористи дека $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{kx}=\frac{e^{(n+1)x}-e^{x}}{e^{x}-1}$, добиваме $\sum\limits_{k=1}^{n} ke^{kx}=\left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{kx}\right)'=$

$$=\left(\frac{e^{(n+1)x}-e^{x}}{e^{x}-1}\right)'=\frac{-e^{(n+2)x}+(n+1)e^{(n+1)x}-(n+1)e^{nx}+e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}.$$

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}=\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k}\right)'=\left(\frac{x^{n-1}-1}{x-1}\right)'=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1}{(x-1)^{2}}$. ●

4.24. Нека функцијата f има извод во точката $x=a$. Пресметајте ги следните граници:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f(a)-f\left(a-\frac{1}{2n}\right)\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f\left(a-\frac{1}{n}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)+f\left(a+\frac{2}{n}\right)+\cdots f\left(a+\frac{k}{n}\right)-kf(a)\right)$,

каде што $k\in\mathbf{N}$ сме го фиксирале.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)e^{x}-f(0)}{f(x)\cos x-f(0)}$, $a=0,\ f'(0)\neq 0$;

ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{n}f(x)-x^{n}f(0)}{x-a}$, $n\in\mathbf{N}$.

Решение. а) $f'(a)$.

б) $$\lim_{n\to\infty} n\left(f(a)-f\left(a-\frac{1}{2n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\left(-\frac{1}{2n}\right)\right)-f(a)}{2\left(-\frac{1}{2n}\right)}=\frac{f'(a)}{2}.$$

в) $$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f\left(a-\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{f(a)-f\left(a-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=2f'(a).$$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(f\Big(a+\frac{1}{n}\Big)+f\Big(a+\frac{2}{n}\Big)+\cdots f\Big(a+\frac{k}{n}\Big)-kf(a)\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\Big(a+\frac{1}{n}\Big)-f(a)}{\frac{1}{n}}+$

$+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\Big(a+\frac{2}{n}\Big)-f(a)}{\frac{2}{n}}+\cdots+k\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\Big(a+\frac{k}{n}\Big)-f(a)}{\frac{k}{n}}=\dfrac{k(k+1)}{2}f'(a)$.

д) Ако ставиме $g(x)=f(x)e^x$ и $h(x)=f(x)\cos x$, имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)e^x-f(0)}{f(x)\cos x-f(0)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-g(0)}{x}}{\frac{h(x)-h(0)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}}=\frac{g'(0)}{h'(0)}=$$

$$=\frac{f'(0)e^0+f(0)e^0}{f'(0)\cos 0-f(0)\sin 0}=\frac{f'(0)+f(0)}{f'(0)}.$$

ѓ) Нека $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}$, тогаш $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^n f(x)-x^n f(0)}{x-a}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x^n}-\frac{f(0)}{a^n}}{x-a}x^n a^n=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\lim_{x\to 0}x^n a^n=g'(a)\cdot a^{2n}=$$

$$=\frac{f'(a)a^n-nf(a)a^{n-1}}{a^{2n}}a^{2n}=f'(a)a^n-nf(a)a^{n-1}.$$

4.25. Функциите f и g имаат извод во точката a. Пресметајте ја границата $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$.

Решение. $f'(a)g(a)-f(a)g'(a)$. ●

4.2. Извод од сложена функција

Нека функцијата $g:(a,b)\to(c,d)$ има прв извод во точката $x_0\in(a,b)$, и нека $f:(c,d)\to\mathbf{R}$ има прв извод во точката $g(x_0)\in(c,d)$. Тогаш првиот извод во точката x_0 на сложената функција $h=f\circ g$, $h:(a,b)\to\mathbf{R}$ постои и важи

$$h'(x_0)=f_g'(g(x_0))\cdot g'(x_0) \tag{3.1}$$

Задачи:

4.26.Најдете извод на следните функции:

а) $f(x)=(ax+b)^n$, б) $f(x)=\left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$,

в) $f(x)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$, г) $f(x)=\left(a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$,

д) $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$, ѓ) $f(x)=x\ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Решение: а) Ако замениме $ax+b=u$, тогаш $f(u)=u^n$. Бидејќи $f'(u)=nu^{n-1}$ и $u'(x)=a$, имаме $f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=an(ax+b)^{n-1}$.

б) Заменуваме $\frac{a+bx^n}{a-bx^n}=u$, тогаш $f(u)=u^m$. Од $f'(u)=mu^{m-1}$ и $u'(x)=\frac{2nabx^{n-1}}{(a-bx^n)^2}$, имаме $f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{2mnabx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$.

в) Ако замениме $\frac{x-1}{x+1}=u$, тогаш $f(u)=\frac{4}{3}\ \sqrt[4]{u}$. Бидејќи $f'(u)=\frac{4}{3}\frac{1}{4}u^{\frac{-3}{4}}=\frac{1}{3\ \sqrt[4]{u^3}}$ и $u'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$, имаме $f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{2}{3(x+1)\sqrt[4]{(x+1)(x-1)^3}}$.

г) Ако замениме $a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=u$, тогаш $f(u)=u^{\frac{3}{2}}$. Бидејќи $f'(u)=\frac{3}{2}\sqrt{u}$ и $u'(x)=\frac{2}{3\ \sqrt[3]{x}}$, имаме $f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}}$.

д) $f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{nx^{n-1}}{(1-x)^{n+1}}$. ѓ) $f'(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{x}{(1+x)^2}$. ●

4.27. Најдете извод на следните функции:

а) $f(x)=\sin(\sin x)$, б) $f(x)=\cos^2(\cos(3x))$,

в) $f(x)=\cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$, г) $f(x)=\sqrt{1+\operatorname{tg}\frac{x+1}{x}}$,

д) $f(x)=\arcsin\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)$, $|b|<a,\ x\in(0,\pi)$,

ѓ) $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

Решение: а) Ако замениме $\sin x=u$, тогаш $f(u)=\sin u$. Бидејќи $f'(u)=\cos u$ и $u'(x)=\cos x$, имаме $f'(x)=\cos(\sin x)\cdot\cos x$.

б) Заменуваме $\cos(\cos(3x))=u$, тогаш $f(u)=u^2$. Од $f'(u)=2u$ и $u'(x)=3\sin(3x)\sin(\cos(3x))$ (слично како во задачата под 1)), имаме дека $f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=6\sin(3x)\cdot\sin(\cos(3x))\cdot\cos(\cos(3x))$.

в) Во овој случај, $f'(x)=2\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right)'=$

$$=-2\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\sin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\sin\left(2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).$$

г) Заменуваме $1+\operatorname{tg}\frac{x+1}{x}=u$, тогаш $f(u)=\sqrt{u}$. Од $f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$ и $u'(x)=\frac{-1}{x^2\cos^2\frac{x+1}{x}}$, имаме дека $f'(x)=\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\operatorname{tg}\frac{x+1}{x}}\cos^2\frac{x+1}{x}}$.

д) $f'(x)=\frac{-\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$. ѓ) $f'(x)=\frac{2\operatorname{tg}x}{(1+\operatorname{tg}^4 x)\cos^2 x}$.●

4.28. Најдете извод на следните функции:

а) $f(x)=\sqrt{1+\ln^2 x}$, б) $f(x)=\sqrt[3]{\ln\left(\sin\frac{x+3}{4}\right)}$,

в) $f(x)=\ln^4(\sin x)$, г) $f(x)=\operatorname{arctg}(\ln(ax+b))$,

д) $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$, ѓ) $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{2}-\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}$.

Решение: а) Со смената $1+\ln^2 x=u$, добиваме:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}(1+\ln^2 x)'=\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}.$$

б) Во овој случај : $f'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\ln^2\left(\sin\dfrac{x+3}{4}\right)}}\left(\ln\left(\sin\dfrac{x+3}{4}\right)\right)'=$

$$=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\ln^2\left(\sin\dfrac{x+3}{4}\right)}}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{x+3}{4}}\left(\sin\frac{x+3}{4}\right)'=\frac{\operatorname{ctg}\dfrac{x+3}{4}}{12\cdot\sqrt[3]{\ln^2\left(\sin\dfrac{x+3}{4}\right)}}.$$

в) Ако замениме $\ln(\sin x)=u$, тогаш $f(u)=u^4$. Бидејќи $f'(u)=4u^3$ и $u'(x)=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x$, имаме $f(x)=4\ln^3(\sin x)\cdot\operatorname{ctg}x$.

г) $f'(x)=\dfrac{1}{1+(\ln(ax+b))^2}(\ln(ax+b))'=\dfrac{1}{1+(\ln(ax+b))^2}\cdot\dfrac{a}{ax+b}$.

д) Со смената $\ln(\ln x)=u$, добиваме: $f'(x)=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\cdot(\ln(\ln x))'=\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.

ѓ) $f'(x)=\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{1+x^2}$.●

4.29.Најдете извод на следните функции:

а) $f(x)=2^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}$, б) $f(x)=2^{\frac{x}{\ln x}}$,

в) $f(x)=e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$, г) $f(x)=\sin\left(e^{x^2+3x-2}\right)$,

д) $f(x)=\sqrt{e^{\sin x}}$, ѓ) $f(x)=a^{\sin^3 x}$,

е) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, ж) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

Решение: а) Со смената $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)=u$, добиваме:

$$f'(x)=2^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}\ln 2\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)'=2^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}\ln 2\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{2^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}\ln 2}{x^2\cos^2\dfrac{1}{x}}.$$

б) Во овој случај : $f'(x)=2^{\frac{x}{\ln x}}\ln 2\cdot\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'=2^{\frac{x}{\ln x}}\ln 2\cdot\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$.

в) $f'(x)=e^x\cdot e^{e^x}+e^x\cdot e^{e^x}\cdot e^{e^{e^x}}$.

г) $f'(x)=\cos\left(e^{x^2+3x-2}\right)\cdot e^{x^2+3x-2}\cdot(2x+3)$. д) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^{\sin x}}}\cdot e^{\sin x}\cdot\cos x$.

ѓ) $f'(x)=a^{\sin^3 x}\cdot\ln a\cdot(\sin^3 x)'=a^{\sin^3 x}\cdot\ln a\cdot 3\sin^2 x\cos x$.

е) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}\,(1+x^2)}=$

$=\dfrac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2}, & |x|<1\\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & |x|>1\end{cases}$. Изводот не постои за $|x|=1$.

ж) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$. ●

4.30. Со примена на методот на логаритмирање, најдете изводи на следните функции:

а) $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$, $x>-1$, б) $f(x)=x^x$, $x>0$,

в) $f(x)=x^{x^x}$, $x>0$, г) $f(x)=x^{\sqrt{x}}$, $x>0$,

д) $f(x)=\sqrt[x]{x}$, $x>0$, ѓ) $f(x)=\sqrt[x]{(x+1)^2}$, $x>-1$, е) $f(x)=x^{\sin x}$, $x>0$, ж) $f(x)=(\sin x)^x$, $x\in(0,\pi)$, з) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, ѕ) $f(x)=(\ln x)^x$, $x>1$.

Решение. а) Функцијата f може да се запише како

$$f(x)=e^{\ln\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}}=e^{2\ln(x+2)-3\ln(x+1)-4\ln(x+3)}.$$

Така, $f'(x)=e^{2\ln(x+2)-3\ln(x+1)-4\ln(x+3)}\cdot\left(2\ln(x+2)-3\ln(x+1)-4\ln(x+3)\right)'=$

$$=e^{2\ln(x+2)-3\ln(x+1)-4\ln(x+3)}\cdot\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x+3}\right)=f(x)\cdot\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x+3}\right)=$$

$$=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x+3}\right).$$

б) Бидејќи $f(x)=e^{x\ln x}$, $x>0$, имаме $f'(x)=f(x)\cdot(x\ln x)'=x^x(\ln x+1)$.

в) Од равенството $f(x)=e^{\ln x^{x^x}}=e^{x^x\ln x}$, $x>0$, имаме

$$f'(x)=f(x)\cdot(x^x\ln x)'=x^{x^x}\left(x^x(\ln x+1)\ln x+\frac{x^x}{x}\right)=x^{x^x}\cdot x^x\cdot(\ln^2 x+\ln x+x^{-1}).$$

г) $f'(x)=\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right)'=x^{\sqrt{x}}\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$.

д) Од равенството $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}$, $x>0$, следува

$$f'(x)=f(x)\cdot\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'=\sqrt[x]{x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(1-\ln x)\,.$$

ѓ) Од равенството $f(x)=e^{\frac{2}{x}\ln(x+1)}$, $x>-1$, следува

$$f'(x)=f(x)\cdot\left(\frac{2}{x}\ln(x+1)\right)'=\sqrt[x]{(x+1)^2}\cdot\frac{2}{x}\cdot\left(\frac{1}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}\right).$$

е) $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

ж) $f'(x)=(\sin x)^x\cdot(x\ln(\sin x))'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x)\,.$

з) $f'(x)=(\cos x)^{\sin x}\cdot(\sin x\cdot\ln(\cos x))'=(\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$.

ѕ) $f'(x)=(\ln x)^x(x\ln\ln x)'=(\ln x)^x\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)$.●

4.31. Секоја од функциите $f_1,f_2,\cdots f_n$ е различна од нула и има извод во точката x. Докажете го равенството: $\dfrac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}f_k\right)'}{\prod\limits_{k=1}^{n}f_k}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f_k'(x)}{f_k(x)}$.

Решение. Функцијата $f(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$ може да се запише како $f(x)=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f_k(x)}$.

Така, $\left(\prod\limits_{k=1}^{n}f_k(x)\right)'=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f_k(x)}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f_k'(x)}{f_k(x)}=\prod\limits_{k=1}^{n}f_k(x)\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f_k'(x)}{f_k(x)}$. ●

4.32. Нека функциите f и g имаат извод во точката x и $f(x)>0$. Покажете го равенството: $(f^g)'(x)=f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)$.

Упатство. Го користиме претставувањето $f^g=e^{g\ln f}$. ●

4.33. Пресметајте ги изводите на функциите во наведените точки:

а) $f(x)=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos(\ln^3 x)}}$ во точката $x=1$.

б) $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x$ во точката $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Решенија.

а) $f'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2\sqrt[5]{\cos(\ln^3 x)}}}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt[5]{\cos^2(\ln^3 x)}}\cdot(-\sin(\ln^3 x))\cdot\dfrac{3\ln^x}{x}$. Во точката $x=1$ изводот изнесува: $f'(1)=0$.

б) Со примена на методот на логаритмирање, добиваме $f'(x)=e^{(x\cdot(\ln(\sin x)-\ln x))}\cdot(x\cdot(\ln(\sin x)-\ln x))'=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x(\ln(\sin x)-\ln x+x\operatorname{ctg}x-1)$ Во точката $x=\frac{\pi}{2}$ изводот изнесува $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\ln\frac{\pi}{2}+1\right)$.●

4.34. Најдете извод на функцијата $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,

Решение. За $x\neq 0$, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, а во точката $x=0$ имаме $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=0$. Значи, $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. ●

4.35. Нека функцијата f има извод во точката x_0. Пресметај ја границата $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right)^n$ ако $f(x_0)>0$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left[n\left(\ln(f(x_0+\frac{1}{n}))-\ln(f(x_0))\right)\right]=$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(f(x_0+\frac{1}{n}))-\ln(f(x_0))}{\frac{1}{n}}\right]=\exp\left(\ln'(f(x_0))f'(x_0)\right)=\exp\left(\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right).●$$

4.36. Ако реалната функција f има конечен извод во секоја точка од сегментот $[a,b]$, дали тогаш функцијата f' е ограничена на $[a,b]$?

Решение. Одговорот е негативен. На пример, нека $a=-1, b=1$ и $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ е дефинирана со $f(x)=\begin{cases}x^{3/2}\sin\frac{1}{x}, & x\in(0,1]\\ 0, & x\in[-1,0]\end{cases}$. За $x\in(0,1]$, $f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}\sin\frac{1}{x}-x^{-1/2}\cos\frac{1}{x}$, а за $x\in[-1,0)$, $f'(x)=0$. Бидејќи $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{3/2}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{1/2}\sin\frac{1}{x}=0$, имаме $f'(0)=0$. Значи,

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^{1/2}\sin\frac{1}{x}-x^{-1/2}\cos\frac{1}{x}, & x\in(0,1]\\ 0, & x\in[-1,0]\end{cases}.$$

Функцујата f' не е ограничена на $[-1,1]$. Навистина, нека избереме $x_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$.

Низата $(x_n)_n$ конвергира кон нулата, додека $\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{(2n+1)\pi}=+\infty$,

што значи дека $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}f'(x)=+\infty$.

Графикот на функцијата е претставен на сликата .●

4.37. При кои услови функцијата $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

а) има конечен извод во точката $x=0$;

б) има непрекинат извод во точката $x=0$?

Решенија: а) За да постои конечен извод во точката $x=0$, треба левиот и десниот извод да се еднакви. Од $f_{\pm}'(0)=\lim\limits_{x\to 0^{\pm}}\frac{x^n\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{\pm}}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}$, следува дека тие изводи постојат кога $n>1$ и се еднакви на нула. Така, функцијата f има конечен извод во точката $x=0$ кога $n>1$.

б) Како во претходната задача, добиваме дека $f'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Функцијата f' е непрекината во точката $x=0$ ако и само ако $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=f'(0)$.

Лимесите $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)$ постојат само кога $n>2$ и тие се еднакви на нула.

Од друга страна, ако $n>2$, тогаш $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=0$.●

4.38. Најдете извод на следните функции:

а) $f(x)=sh^2x^3+ch^3x^2$,

б) $f(x)=\ln(chx)$,

в) $f(x)=\arccos(thx)+sh(\sin 6x)$,

Решение. а) $f'(x)=3x(xsh2x^3+chx^2sh2x^2)$. б) $f'(x)=thx$.

в) $f'(x)=-\frac{(thx)'}{\sqrt{1-th^2x}}+ch(\sin 6x)\cdot(\sin 6x)'=-\frac{1}{chx}+6\cos 6xch(\sin 6x)$.●

4.3. Извод од функции што не се експлицитно зададени (имплицитни функции)

Ако за функцијата $f:(a,b)\to(c,d)$ важат следните услови:

- има прв извод во точката $x_0\in(a,b)$;
- монотона на интервалот (a,b);
- $f'(x_0)\neq 0$,

тогаш постои инверзна функција $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ за функцијата f. Под горните услови, прв извод на инверзната функција f^{-1} во точката $y_0=f(x_0)$ е еднаков на

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.1}$$

Нека со равенката

$$F(x,y)=0 \tag{4.2}$$

е дефинирана единствена функција $y=f(x)$, $x\in(a,b)$. Тогаш велиме дека функцијата f е зададена имплицитно со равенката (4.2) . Првиот извод на имплицитно дадената функција f во точката x_0 е еднаков на

$$f'(x_0)=-\frac{F_y'(x_0,y_0)}{F_x'(x_0,y_0)}. \tag{4.3}$$

Нека функциите $x=x(t)$ и $y=y(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$, се диференцијабилни по променливата t. Со пресликување f, така што на вредноста $x=x(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$ одговара вредност $y=y(t)$, е определена функција $y=f(x)$, која се вика параметарска функција. Првиот извод на параметарската функција $y=f(x)$ во точката x_0 е еднаков на

$$y'(x_0)=-\frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)},\ t_0\in(\alpha,\beta) \tag{4.4}$$

каде што $x(t_0)=x_0$. Да напоменеме дека формулата (4.4) има смисол само за оние t_0 во кои функциите $x=x(t)$ и $y=y(t)$ имаат први изводи и важи $x_t'(t_0)\neq 0$.

Задачи:

4.39. Користејќи го правилото за диференцирање на инверзна функција, најдете извод на функциите:

а) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x\in\mathbf{R}$, б) $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$, $x\in(0,1)$, в) $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$.

Решение. а) Ако ставиме $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$, тогаш $x=y^3$. Така функцијата $f^{-1}(y)=y^3,\ y\in\mathbf{R}$ е инверзна за дадената функција f. Таа има извод $(f^{-1})'(y)=3y^2$. Така, $f'(x)=\dfrac{1}{(f^{-1})'(y)}=\dfrac{1}{3y^2}=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$.

б) Ако ставиме $y=f(x)=\arcsin\sqrt{x}$, тогаш $x=\sin^2 y$. Функцијата $f^{-1}(y)=\sin^2 y$, $y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ е инверзна за дадената функција f. Таа има извод $(f^{-1})'(y)=2\sin y\cos y$. Така,

$$f'(x)=\frac{1}{(f^{-1})'(y)}=\frac{1}{2\sin\arcsin\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-\sin^2\arcsin\sqrt{x}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

в) За $x>0$ инверзната функција $f^{-1}(y)=\sqrt{e^{2y}-1}$ има извод $(f^{-1})'(y)=\dfrac{e^{2y}}{\sqrt{e^{2y}-1}}$.

Така, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{e^{2y}-1}}{e^{2y}}=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2+1}=\dfrac{x}{x^2+1}$. ●

4.40. Најдете ги изводите на инверзните хиперболиски функции.

Решение. Ќе ги разгледуваме инверзните на хиперболиските функции: $\mathrm{sh}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\mathrm{ch}:\mathbf{R}\to[1,\infty)$, $\mathrm{th}\,x=\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$ и $\mathrm{cth}\,x=\dfrac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}$.

а) I *начин*: Функцијата $\mathrm{sh}\,x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ е строго монотоно растечка и сурјективна функција на $\mathbf{R}$. Според тоа, таа има инверзна функција $\mathrm{arsh}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Од $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, следува дека $e^x=y+\sqrt{1+y^2}$ (равенството $e^x=y-\sqrt{1+y^2}$ не се зема предвид бидејќи $e^x>0$). Одтука $x=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$, $y\in\mathbf{R}$, т.е . $\mathrm{arsh}\,y=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$, $y\in\mathbf{R}$, па имаме $\mathrm{arsh}'x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

II *начин:* Нека $y=\operatorname{arsh}x$, тогаш

$$\operatorname{arsh}'x=\frac{1}{\operatorname{sh}'y}=\frac{1}{\operatorname{ch}y}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

б) I *начин*: Функцијата $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ е строго монотона на секој од интервалите $(-\infty,0]$ и $[0,\infty)$. Нејзините рестрикции на тие интервали ги означуваме со $\operatorname{ch}_-=\operatorname{ch}/(-\infty,0]$ и $\operatorname{ch}_+=\operatorname{ch}/[0,+\infty)$. Нивните инверзни функции ги ознауваме со arch_- и arch_+ соодветно. Тие се непрекинати, строго монотони (првата опаѓачка, а втората растечка), дефинирани на $[1,\infty)$. Слично како arsh, и овие функции можеме да ги изразиме со: $\operatorname{arch}_- y=\ln(y-\sqrt{y^2-1})$, $y\geq 1$ и $\operatorname{arch}_+ y=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$, $y\geq 1$, или кратко со $\operatorname{arch}y=\ln(y\pm\sqrt{y^2-1})$, $y\geq 1$. Така имаме $\operatorname{arch}'x=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

II *начин*: Нека $y=\operatorname{arch}x$, тогаш

$$\operatorname{arch}'x=\frac{1}{\operatorname{ch}'y}=\frac{1}{\operatorname{sh}y}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

в) $\operatorname{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$. г) $\operatorname{arcth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $|x|>1$. ●

4.41. Најдете извод на инверзните на функциите:

а) $f(x)=x+\ln x$.

б) $f(x)=3x+x^2$.

в) $f(x)=x+\frac{\sin x}{2}$.

г) $f(x)=x+e^x$.

Решение:. а) $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}$. б) $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{3+2x}$.

в) $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+\frac{\cos x}{2}}=\frac{2}{\cos x+2}$. г) $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+e^x}$. ●

4.42. Определете го изводот на имплицитно зададените функции:

а) $2x-5y-10=0$. б) $x^2+y^2=r^2$.

в) $y - xe^y + 1 = 0$. г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

д) $x^2 + y^2 = a^2(x^2 - y^2)$. ѓ) $y^4 - 2y^2x - 1 = 0$.

е) $y^2 = 1 + e^{xy}$. ж) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

з) $y = \sin(x+y)$. ѕ) $x = ye^{\sin y}$.

и) $x^2y - xy^2 = a$. ј) $x\sin y - y\cos x = 1$.

к) $y = e^{x^2+y^2}$. л) $x^y = y^x$.

Решенија. а) Бараме извод по x на левата страна од равенството и го изедначуваме со нула. Добиваме: $2 - 5y' = 0$, одкаде $y' = \frac{2}{5}$. б) По диференцирањето по x на даденото равенство, добиваме $2x + 2yy' = 0$ или $y' = -\frac{x}{y}$. в) Од $y' - e^y - xe^y y' = 0$, следува $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$. г) $y' = -\frac{xb^2}{ya^2}$. д) Од $2x + 2yy' = a^2\left(2x - 2yy'\right)$ следува $y' = \frac{x(a^2-1)}{y(a^2+1)}$. ѓ) Во овој случај $4y^3 - 4yy'x - 2y^2 = 0$, па имаме $y' = \frac{y}{2(y^2 - x)}$. е) Бидејќи $2yy' = e^{xy}(y + xy')$, имаме $y' = \frac{ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$. ж) Од $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0$ следува $y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$. з) $y' = \frac{\cos(x+y)}{1 - \cos(x+y)}$. ѕ) Во овој случај, $1 = y'e^{\sin y} + ye^{\sin y}\cos y \cdot y'$, па имаме $y' = \frac{1}{e^{\sin y}(1 + y\cos y)}$.

и) $y' = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy}$. ј) $y' = \frac{y\sin x + x\sin y}{\cos x - x\cos y}$. к) $y' = \frac{2xe^{x^2+y^2}}{1 - 2ye^{x^2+y^2}}$. л) Од $x^y = y^x$ имаме $e^{y\ln x} = e^{x\ln y}$, па затоа $y\ln x = x\ln y$. Диференцираме по x и добиваме $y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y}y'$, од каде што следува $y' = \frac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}$. ●

4.43. Определете го изводот на имплицитно зададените функции во соодветните точки:

а) $(x+y)^3 = 27(x-y)$ во точката (2,1).

б) $2y = 1 + xy^3$ во точката (1,1).

в) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ во точката $(2,1)$..

Решение. а) Со диференцирање добиваме $3(x+y)^2(1+y')=27(1-y')$. Ставаме $x=2$ и $y=1$ и добиваме $y'=\frac{1}{2}$. б) $y'=-1$.

в) Со диференцирање по x добиваме $y'=\frac{x+y}{x-y},\ x\neq y$. Во точката $(2,1)$ изводот прима вредност $y'=2$. ●

4.44. Покажете дека функцијата $xy-\ln y=1$ ја задоволува релацијата $y^2+(xy-1)y'=0$.

4.45. За параметарските функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ пресметајте $y'(x)$:

а) $x=t^3+3t+1,\ y=t^3-3t+1$,

б) $x=\frac{3at}{1+t^3},\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}$,

в) $x=\sqrt{t},\ y=\sqrt[3]{t}$,

г) $x=\sqrt{t^2+1},\ y=\frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}$,

д) $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$,

ѓ) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$,

е) $x=2\ln\operatorname{ctg}t,\ y=\operatorname{tg}t+\operatorname{ctg}t$,

ж) $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$,

з) $x=\ln\sqrt{1+t^2},\ y=1-\operatorname{arctg}t$.

Решенија. а) Имаме $x'(t)=3t^2+3,\ y'(t)=3t^2-3$ и со замена во $y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}$, добиваме $y'(x)=\frac{t^2-1}{t^2+1}$.

б) Од $x'(t)=\dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$, $y'(t)=\dfrac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$, со замена во $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, добиваме

$y'(x)=\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. в) $y'(x)=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[6]{t}}$. г) $y'(x)=\dfrac{t+1}{t(t^2+1)}$.

д) $y'(x)=\operatorname{ctg}t,\ t\neq\dfrac{(2k+1)\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$. ѓ) $y'(x)=\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2},\ t\neq 2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

е) $y'(x)=\operatorname{ctg}2t,\ t\neq\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$. ж) $y'(x)=\dfrac{t}{2}$.

з) $x'(t)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{1+t^2}}}\dfrac{-t}{\sqrt{1+t^2}\,(1+t^2)}=\dfrac{t}{|t|(1+t^2)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+t^2}, & t>0\\ -\dfrac{1}{1+t^2}, & t<0\end{cases}$,

$y'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{t^2}{1+t^2}}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}\,(1+t^2)}=\dfrac{1}{(1+t^2)}$. Значи, $y'(x)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$. ●

4.46. За параметарските функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ пресметајте $y'(x)$ за дадено t:

а) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t$ за $t=\dfrac{\pi}{4}$.

б) $x=a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\cos t-\sin t\right),\ y=a(\sin t+\cos t)$ за $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Решенија. а) $y'(x)=\dfrac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}=\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$. Така, $y'(x)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\infty$.

б) $y'(x)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg}t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=1$. ●

4.4. Тангента и нормала на рамнинска крива

Ако функцијата $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ има прв извод во точката $x_0\in(a,b)$, тогаш правата

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \tag{5.1}$$

каде што $y_0=f(x_0)$, се вика тангента на графикот на функцијата f во точката $A(x_0,f(x_0))$. Ако додатно важи $f'(x_0)\neq 0$, тогаш правата

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \tag{5.2}$$

е нормала на графикот на функцијата f во точката $A(x_0,f(x_0))$.

Задачи

4.47. Состави равенка на тангента и нормала на функцијата:

а) $f(x)=x^3-4x+3$ за $x=1$.

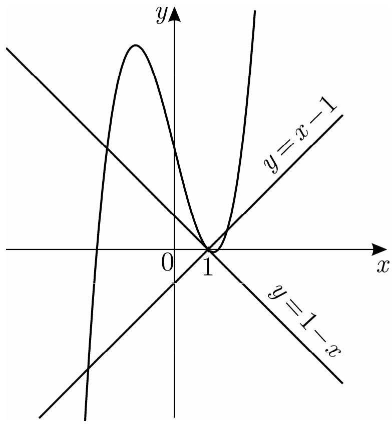
б) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ во пресечните точки со параболата $g(x)=\dfrac{x^2+4x+8}{16}$.

в) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ во пресекот со $x-$ оската.

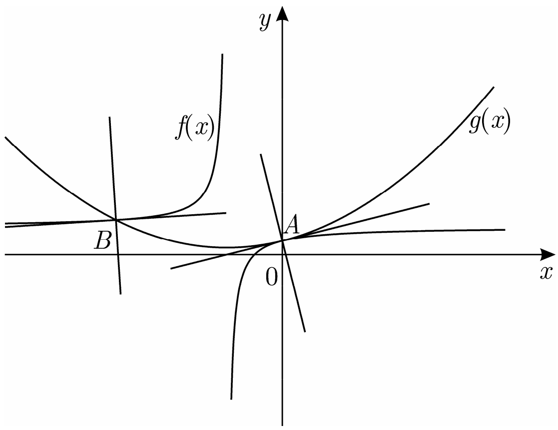
г) $f(x)=e^{1-x^2}$ во пресекот со правата $y=1$.

д) $f(x)=x^x$ во точката $x=1$.

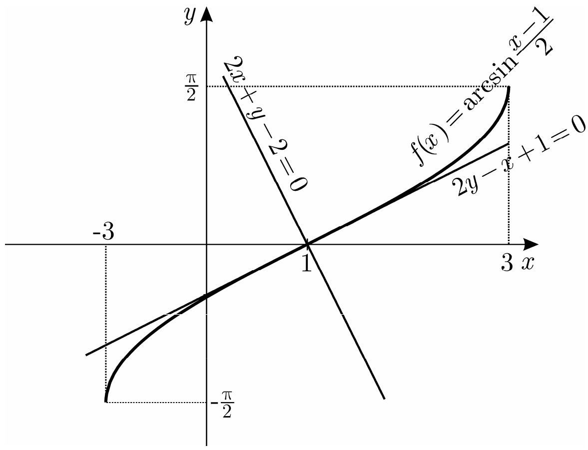
Решение: а) Го наоѓаме изводот на функцијата во точката $x=1$: $f'(1)=-1$. Равенката на тангентата е $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ т.е. $y=1-x$, а на нормалата $y-f(1)=-\dfrac{1}{f'(1)}(x-1)$ т.е. $y=x-1$.



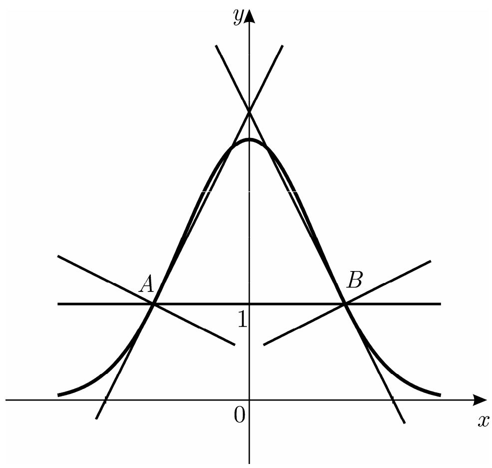
б) Пресечните точки на кривите се $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(-6,\frac{5}{4}\right)$. Равенките на тангентите на функцијата f во точките A и B се $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$ и $y=\frac{x}{16}+\frac{13}{8}$ соодветно. Равенките на нормалите на функцијата f во точките A и B се $y=-4x+\frac{1}{2}$ и $y=-16x-\frac{379}{4}$ соодветно.



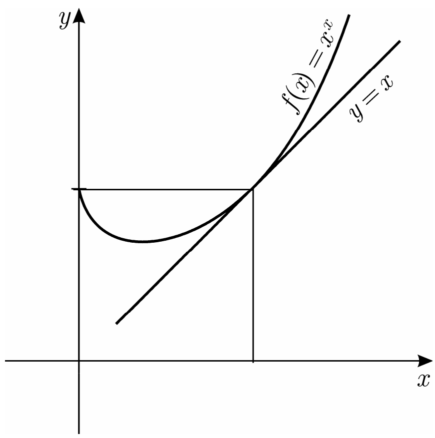
в) Ги бараме равенките на тангентата и нормалата на функцијата во точката $(1,0)$. Од $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x)(3-x)}}$, добиваме дека изводот на функцијата за $x=1$ изнесува $f'(1)=\frac{1}{2}$. Бараните равенки се соодветно $2y-x+1=0$ и $2x+y-2=0$.



г) Во точката $A(-1,1)$ равенките на тангентата и нормалата се $y-2x-3=0$ и $2y+x-1=0$ соодветно, а во точката $B(1,1)$ тие се $y+2x-3=0$ и $2y-x-1=0$.



д) $y=x$.

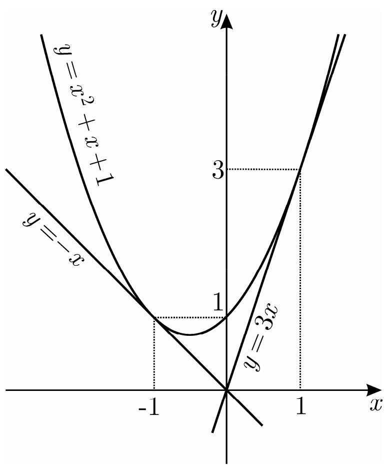


4.48. Состави равенка на тангента на кривата $y=x^2+2$ која е паралелна со правата $y=x-2$.

Решение:.Равенката на тангентата на кривата $y=x^2+2$ во точката (x_0,y_0) е $y-2x_0x+x_0^2+2=0$. Таа е паралелна со правата $y=x-2$ ако $2x_0=1$. Бараната тангента е $y-x+\frac{9}{4}=0$. ●

4.49. Од координатниот почеток се повлечени тангенти на кривата $y=x^2+x+1$. Определете ги координатите на допирните точки.

Решение:. Равенката на тангентата на кривата $y=x^2+x+1$ во точката (x_0,y_0) е $y-(1+2x_0)x+x_0^2-1=0$. Таа минува низ координатниот почеток, па затоа $x_0^2-1=0$, т.е. $x_0=-1$ и $x_0=1$. Значи, ги бараме равенките на тангентите на кривата $y=x^2+x+1$ во точките $(-1,1)$ и $(1,3)$. Бараните равенки се: $y=-x$ и $y=3x$.



●

4.50. Составете равенка на нормала на кривата $y=\sqrt{x+2}$ во пресечната точка со кривата $y=x$.

Решение: Точките $(-1,-1)$ и $(2,2)$ се пресечните точки. Од друга страна, $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$, па затоа $y'(-1)=\frac{1}{2}$ и $y'(2)=\frac{1}{4}$. Со замена во равенката за нормала

$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ за нормалите во точките $(-1,-1)$ и $(2,2)$ добиваме $y+2x+3=0$ и $y+4x-10=0$. ●

4.51. Покажете дека тангентите на хиперболата $y=\frac{x-4}{x-2}$ во нејзините пресечни точки со координатните оски се паралелни.

Решение: Хиперболата $y=\frac{x-4}{x-2}$ со координатните оски се сече во точките $(0,2)$ и $(4,0)$. Коефициентот на правецот на тангентата на графикот на функцијата во точката $(0,2)$ е $y'(0)=\frac{1}{2}$. Исто така, коефициентот на правецот на тангентата на графикот на функцијата во точката $(4,0)$ е $y'(0)=\frac{1}{2}$, што значи дека тангентите на хиперболата $y=\frac{x-4}{x-2}$ во во точките $(0,2)$ и $(4,0)$ се паралелни. ●

4.52. Покажете дека нормалите на параболата $y=x^2-x+1$ во точките $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=\frac{5}{2}$ се сечат во една точка.

Решение: Равенките нс нормалите на кривата $y=x^2-x+1$ во точките $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=\frac{5}{2}$ се: $y=x+1$, $y=\frac{x}{3}+\frac{10}{3}$ и $y=-\frac{x}{4}+\frac{43}{8}$ соодветно. Тие се сечат во точката $\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$. ●

4.53.. Составете равенка на нормала на кривата $y=x\ln x$ паралелна со правата $2x-2y+3=0$.

Решение: Равенката на нормалата на кривата $y=x\ln x$ во точката $(x_0,x_0\ln x_0)$ е $y(\ln x_0+1)+x-x_0\ln x_0(\ln x_0+1)-x_0=0$. Таа е паралелна со правата $2x-2y+3=0$ ако $\ln x_0+1=-1$ т.е. $x_0=e^{-2}$. Значи равенката на нормалата е: $x-y-3e^{-2}=0$. ●

4.54. Определете ја равенката на тангентата на кривата $y=x\sqrt[3]{1-x}$ во точките со абсциси: а) $x=0$, б) $x=1$, в) $x=2$.

Решение. Имаме $y(0)=0$, $y(1)=0$, $y(2)=-2$,

$$y'=\frac{3-4x}{3\ \sqrt[3]{(1-x)^2}}\ , \tag{1}$$

$y'(0)=1$, $y'(2)=-\frac{5}{3}$. Следува дека равенката на тангентата е:

а) $y=x$, в) $5x+3y-4=0$.

б) Кога $x=1$ формулата (1) нема смисла. Во тој случај, непосредно пресметуваме $\lim\limits_{x\to 1}\frac{y(x)-y(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}=-\infty$.

Тоа значи дека кривата $y=x\sqrt[3]{1-x}$ во точката (1,0) има вертикална тангентата $x=1$. ●

4.55. Составете равенка на тангента и нормала на функцијата:

а) $x=\frac{1+t}{t^3}$, $y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}$ во точката (2,2).

б) $x=t\cos t$, $y=t\sin t$ во точката $t=\frac{\pi}{4}$.

в) $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$ во точките $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\pi$ и $t=\frac{3\pi}{2}$.

Решение: а) Прво ќе ја определиме вредноста на t што одговара за дадените вредности на x и y. Значи, t истовремено ги задоволува двете равенки:

$$\begin{cases} 2=\frac{1+t}{t^3}, \\ 2=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}. \end{cases}$$

Корени на втората равенка се: $t_1=1$ и $t_2=-\frac{1}{4}$, а само $t=1$ е решение на првата равенка.

За да го најдеме изводот $y'(x)$ во точката $x=2$, ја користиме формулата $y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t(6+t)}{2(t+2)}$ за $t=1$. Така добиваме $y'(2)=\frac{7}{10}$.

Равенката на бараната тангента е од облик $y-2=\frac{7}{10}(x-2)$ т.е. $7x-10y+6=0$, а равенката на нормалата од облик: $y-2=-\frac{6}{10}(x-2)$, т.е. $10x+7y-34=0$.

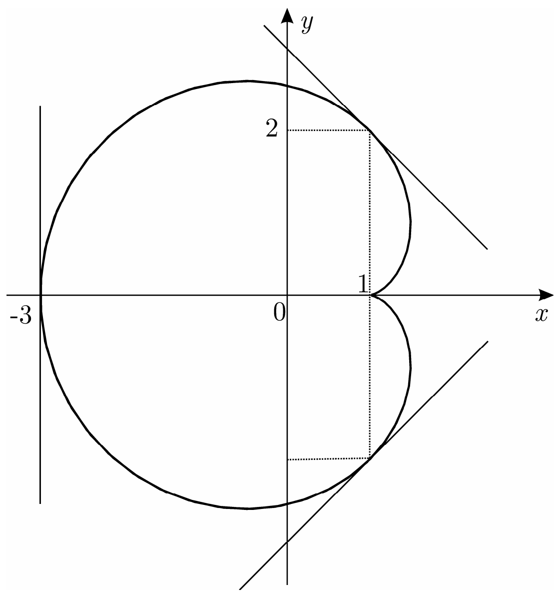
б) $(\pi+4.)x+(\pi-4)y-\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0$.

в) Имаме $t=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=1,\ y=2$; $t=\pi\Rightarrow x=-3,\ y=0$;

$t=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow x=1,\ y=-2$; $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\operatorname{tg}\dfrac{3t}{2}$; $y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=-1$; $y'_x\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}}=1$.

Во точката $t=\pi$ $\big(x=-3,\ y=0\big)$ функцијата y'_x не е определена. Равенките на тангентите во точките $t=\dfrac{\pi}{2}$ и $t=\dfrac{3\pi}{2}$ ќе бидат $x+y-1=0$ и $x-y-3=0$ соодветно.

Да ја разгледаме функцијата во околина на точката $x=-3$. Бидејќи во околината на точката $t=\pi$ имаме $y'_t<0$, функциата $x(y)$ е непрекината во таа околина и важи $x'_y=\dfrac{x'_t}{y'_y}=\operatorname{ctg}\dfrac{3t}{2}$. Равенката на тангентата на функцијата во точката $y=0,\ x=-3$ е $x+3=0\cdot y$ т.е. $x=-3$ - тангентата е паралелна со $y-$оската.



●

4.56. Докажи дека тангентата на лемнискатата $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ во точката за $\theta = \frac{\pi}{6}$ е паралелна со $x-$ оската.

Решение. Ќе ја напишеме равенката на лемнискатата во параметарски вид:

$$x = \rho\cos\theta = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta ,$$

$$y = \rho\sin\theta = a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta .$$

Имаме $x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, $\quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$,

$$x'(\theta) = -\frac{a\cos\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} - a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta , \quad x'\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\sqrt{2} \quad \text{и}$$

$$y'(\theta) = -\frac{a\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} + a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta , \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 ,$$

па така $y'\left(\frac{a}{4}\right) = 0$.

Равенката на бараната тангента гласи $y - \frac{a\sqrt{2}}{4} = 0$, па значи таа е паралелна со $x-$ оската. ●

4.57. Најдете го аголот под кој се сечат кривите:

а) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ и $g(x) = \frac{x^2+4x+8}{16}$;

б) $x^2 + y^2 = 8$ и $2y = x^2$.

Решение. а) Две пресечни точки: $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-6,\frac{5}{4}\right)$; аглите во тие точки $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{18}{31}$ соодветно.

б) Две пресечни точки: $(2,2)$ и $(-2,2)$; аглите во тие точки $\varphi_0 = \varphi_1 = \operatorname{arctg} 3$. ●

4.5. Извод од повисок ред. Лајбницова формула.

Нека функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ има прв извод во секоја точка $x\in(a,b)$.Тогаш функцијата $f':(a,b)\to\mathbf{R}$ се вика прв извод на функцијата f на (a,b). Ако постои прв извод на функцијата f' во точката $x_0\in(a,b)$, тогаш тој се вика втор извод на функцијата f во точката x_0 и се означува со $f''(x_0)$. На тој начин се дефинираат и трети, четврти, .. , $n-$ти извод на функцијата f во точката x_0 и се означуваат со $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$, .. , $f^{(n)}(x_0)$ соодветно.

Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ имаат извод од $n-$ти ред, тогаш и функциите $\alpha u(x)+\beta v(x)$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ и $u(x)v(x)$ исто така имаат извод од $n-$ти ред и важи:

$$(\alpha u+\beta v)^{(n)}(x)=\alpha u^{(n)}(x)+\beta v^{(n)}(x) \tag{6.1}$$

$$(uv)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x) \tag{6.2}$$

Формулата (6.2) се вика Лајбницова формула.

Задачи:

4.58. Најди втор извод на функциите:

а) $f(x)=xe^{\sin x}$. б) $f(x)=\sin^2 x$. в) $f(x)=x\ln x$.

г) $f(x)=\operatorname{arctg}x$. д) $f(x)=xe^{2x}$. ѓ) $f(x)=x^x$.

Решенија: а) $f'(x)=\sin 2x$, $f''(x)=2\cos 2x$. б) $f'(x)=e^{\sin x}(1+x\cos x)$, $f''(x)=e^{\sin x}(2\cos x+\cos^2 x-x\sin x)$. в) $f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\frac{1}{x}$. г) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. д) $f'(x)=e^{2x}(1+2x)$, $f''(x)=4e^{2x}(1+x)$. ѓ) $f'(x)=x^x(\ln x+1)$, $f''(x)=x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}$. ●

4.59. Најди трет извод на функциите:.

а) $f(x)=(x-2)e^x$. б) $f(x)=\ln(ax+b)$.

Решение: а) $f'(x)=(x-1)e^x$, $f''(x)=xe^x$, $f'''(x)=(x+1)e^x$.

б) $f'(x)=\dfrac{a}{ax+b}$, $f''(x)=\dfrac{-a}{(ax+b)^2}$, $f'''(x)=\dfrac{2a^2}{(ax+b)^3}$. ●

4.60. Најди $n-$ти извод на функциите:

а) $f(x)=x^n$. б) $f(x)=e^x$.

в) $f(x)=a^x$. г) $f(x)=xe^x$.

д) $f(x)=e^{ax}$. ѓ) $f(x)=e^{-x}$.

е) $f(x)=\sin x$.ж) $f(x)=\sin(ax)+\cos(bx)$.

Решенија. а) Ако $f(x)=x^n$, тогаш $f'(x)=nx^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$,

...., $f^{(n)}(x)=n!$. б) $f^{(n)}(x)=e^x$. в) $f'(x)=a^x\ln a$, $f''(x)=a^x\ln^2 a$, ..., $f^{(n)}(x)=a^x\ln^n x$.
г) $f^{(n)}(x)=e^x(x+n)$. д) $f^{(n)}(x)=a^n e^{ax}$. ѓ) $f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$.
е) $f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$, $f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$,
$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. ж) $f^{(n)}(x)=a^n\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+b^n\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)$.●

4.61. Провери дека следните функции ги задоволуваат релациите:

а) $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$, $2y=xy'+\ln y'$.

б) $y=xe^{-x}$, $xy'=(1-x^2)y$.

в) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $(1-x^2)y'-xy=1$.

г) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $xy'=y(y\ln x-1)$.

д) $y=\sin(n\arcsin x)$, $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$.

ѓ) $y=e^{n\arcsin x}$, $(1-x^2)y''-xy'-n^2y=0$.

е) $y=a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)$, $x^2y''+xy'+y=0$.

ж) $y=e^{2x}\sin(5x)$, $y''-4y'+29y=0$.

Одговори. а) . б) . в) .г) .д) .ѓ)не. е) да. ж) да.

4.62. Со примена на Лајбницовата формула најди ги изводите на дадените функции:

а) $y = x(2x-1)^2$, $y^{(6)}$.

б) $y = e^{ax}x^2$, $y^{(10)}$.

в) $y = x\operatorname{sh} x$, $y^{(100)}$.

Решенија. Ја користиме Лајбницовата формула: $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$. а) Во овој случај $u(x) = x$ и $v(x) = (2x-1)^2$. Изводите на u и v се: $u'(x) = 1$, $u^{(k)}(x) = 0,\ k = 2,3,\cdots$, $v'(x) = 4(2x-1)$, $v''(x) = 8$, $v^{(k)}(x) = 0,\ k = 3,4,\cdots$.

Така, $y^{(6)} = x\cdot 0 + 6\cdot 1\cdot 0 + 15\cdot 0\cdot 0 + 20\cdot 0\cdot 0 + 15\cdot 0\cdot 8 + 6\cdot 0\cdot 4(2x-1) + 0\cdot(2x-1)^2 = 0$.

б) $u(x) = e^{ax}$ и $v(x) = x^2$. Како во претходниот пример, користејќи ја Лајбницовата формула, имаме:

$(e^{ax}x^2)^{(10)} = C_{10}^8 u^{(8)} v'' + C_{10}^9 u^{(9)} v' + u^{(10)} v^{(0)} = a^8(a^2x^2 + 20ax + 90)e^{ax}$.

в) $u(x) = x$, $v(x) = \operatorname{sh} x$. Изводите на u и v се: $u' = 1$, $u^{(k)}(x) = 0,\ k \geq 2$, $v^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & n = 2k \\ \operatorname{ch} x, & n = 2k+1 \end{cases}$. Тогаш $y^{(100)}(x) = x\operatorname{sh} x + 100\operatorname{ch} x$. ●

4.63. Определи го вториот извод на имплицитно зададените функции:

а) $x^2 + y^2 = r^2$. б) $y^3 - y + x = 0$. в) $y + x + e^y = 0$.

г) $y^2 = 2px$. д) $y = x + \operatorname{arctg} y$; ѓ) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

Решенија. а) Двапати ја диференцираме имплицитната функција $x^2 + y^2 = r^2$, добиваме $2x + 2yy' = 0$ и $1 + y'^2 + yy'' = 0$. Во последното равенство заменуваме $y' = -\frac{x}{y}$ и добиваме: $y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3}$.

б) Диференцираме по x и го определуваме y':

$$3y^2y' - y' + 1 = 0, \text{ одкаде } y' = \frac{1}{1-3y^2}.$$

Диференцираме уште еднаш по x: $y'' = \frac{6yy'}{(1-3y^2)^2}$. На крајот заменуваме y' и добиваме: $y''=\dfrac{6y}{(1-3y^2)^3}$.

в) $y'=-\dfrac{1}{e^y+1}$, $y''=\dfrac{e^y y'}{(e^y+1)^2}=-\dfrac{e^y}{(e^y+1)^3}$. г) $y'=\dfrac{p}{y}$, $y''=\dfrac{p^2}{y^3}$.

д) $y'=1+\dfrac{y'}{1+y^2} \Rightarrow y'=\dfrac{1+y^2}{y^2}=1+\dfrac{1}{y^2}$, $y''=-\dfrac{2y'}{y^3}=-\dfrac{2(1+y^2)}{y^5}$. ѓ) $y''=\dfrac{x+y-3}{(x+y-1)^3}$. ●

4.64. Пресметај:

а) $y^{(n)}(0)$ ако $y=\operatorname{arctg}x$; б) $y^{(n)}(1)$ ако $y=(x^2-1)^n$.

Решение. а) Ќе најдеме неколку изводи на функцијата и ќе ги определиме нивните вредности во нулата:

$y=\operatorname{arctg}x$, $y(0)=0$;

$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $y'(0)=1$;

$y''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $y''(0)=0$;

$y'''=\dfrac{6x-2}{(1+x^2)^3}$, $y'''(0)=-2$;

$y^{(4)}=\dfrac{24-24x^3}{(1+x^2)^4}$, $y^{(4)}(0)=0$;

$y^{(5)}=\dfrac{24-240x^2+120x^4}{(1+x^2)^5}$, $y^{(5)}(0)=24$;

$y^{(6)}=\dfrac{-720x+2400x^3-720x^5}{(1+x^2)^6}$, $y^{(6)}(0)=0$.

Користејќи го принципот на математичка индукција можеме да заклучиме дека

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & n=2k \\ (-1)^n(n-1), & n=2k+1 \end{cases}.$$

б) $y^{(n)}(1)=2^n n!$. ●

4.65. Определи го вториот извод y''_{xx} на параметарски зададените функции:

а) $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $x=\ln t$, $y=t^3$, $t>0$;

в) $x=e^{-at}$, $y=e^{at}$, $t\in\mathbf{R}$;

г) $x=\ln t$, $y=\dfrac{1}{1-t}$, $t>0$, $t\neq 1$.

Решение. а) За функцијата имаме $y'_t = e^t(\cos t - \sin t)$ и $x'_t = e^t(\cos t + \sin t)$, $x'_t \neq 0$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Добиваме $y'_x = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$. Понатаму,

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)_t'}{x'_t} = \frac{\frac{(-\sin t - \cos t)(\cos t + \sin t) - (\cos t - \sin t)(-\sin t + \cos t)}{(\cos t + \sin t)^2}}{e^t(\cos t + \sin t)} = \frac{-2}{e^t(\cos t + \sin t)^3}.$$

б) $y'_t = 3t^2$ и $x'_t = \frac{1}{t}$, $x'_t \neq 0$ на $(0, \infty)$. Добиваме $y'_x = 3t^3$. Понатаму,

$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)_t'}{x'_t} = \frac{9t^2}{\frac{1}{t}} = 9t^3$. в) $y''_{xx} = -2e^{3at}$. г) $y''_{xx} = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$. ●

4.66. Определи го третиот извод y'''_{xxx} на параметарски зададените функции:

а) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$;

б) $x = e^{-t}$, $y = t^3$;

Решение. а) $y'_t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$, $x'_t = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$, $y'_x = \frac{\sin t - \cos t}{\cos t + \sin t}$.

Понатаму, $\left(y'_x\right)_t' = \frac{2}{(\cos t + \sin t)^2}$, $y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)_t'}{x'_t} = \frac{-2e^t}{(\cos t + \sin t)^3}$,

$\left(y''_{xx}\right)_t' = \frac{4e^t(\cos t - 2\sin t)}{(\cos t + \sin t)^4}$, $y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)_t'}{x'_t} = \frac{4e^{2t}(2\sin t - \cos t)}{(\cos t + \sin t)^5}$.

б) $y'_t = 3t^2$, $x'_t = -e^{-t}$, $y'_x = -3t^2e^t$. Понатаму, $\left(y'_x\right)_t' = -3te^t(t+2)$,

$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)_t'}{x'_t} = 3te^{2t}(t+2)$, $\left(y''_{xx}\right)_t' = 6e^{2t}(t^2+3t+1)$, $y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)_t'}{x'_t} = -6e^{3t}(t^2+3t+1)$. ●

4.67. Ако $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+1}$, докажи дека

$$f^{(n)}(0) = 3nf^{(n-1)}(0) - n(n-1)f^{(n-2)}(0), \quad n > 2.$$

Решение. Ќе побараме $n-$ти извод на левата и десната страна на равенството: $(x^2-3x+1)f(x) = 2x+1$. Со математичка индукција покажуваме дека за $n > 2$, важи равенството

$$n(n-1)f^{(n-2)}(x) + (2x-3)nf^{(n-1)}(x) + (x^2-3x+1)f^{(n)}(x) = 0.$$

Во последното равенство заменуваме $x = 0$ и го добиваме бараното равенство. ●

4.6. Диференцијал на функција.

Ако нараснувањето Δy на функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ во точката $x_0\in(a,b)$ може да се напише во облик

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (7.1)$$

за некое $A\in\mathbf{R}$ кое зависи од x_0, но не и од Δx, и важи $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, тогаш за функцијата f велиме дека е диференцијаилна во точката x_0.

Да напомeнеме дека важи следното тврдење: Функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е диференцијабилна во точката $x_0\in(a,b)$ ако и само ако таа има прв извод во таа точка. Притоа, $A=f'(x_0)$.

Диференцијал на диференцијабилна функција f во точката x е линеарната функција $df(x):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ од нараснувањето на аргументот Δx зададена со

$$df(x)(\Delta x) = A\Delta x\,,\ \Delta x\in\mathbf{R}\,.$$

Користиме ознака dy или df. Диференцијалот dx на идентичната функција $I(x)=x$, $x\in\mathbf{R}$ е $dx(\Delta x)=\Delta x$. Затоа, користиме ознака $dx=\Delta x$.

Заради горното тврдење, диференцијалот на диференцијабилна функција f во точката x_0 можеме да го претставиме како $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

Ако функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во секоја точка од интервалот (a,b), тогаш $df(x)=f'(x)dx$, $\forall x\in(a,b)$.

Равенството (7.1) може да се запише во како:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + df(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta x\,.$$

Ако $df(x_0)\neq 0$, тогаш за приближно претставување на функцијата во точка $x_0+\Delta x$ можема да ја користиме формулата:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)\,. \qquad (7.2)$$

Задачи:

4.68. Определете ги диференцијалите на следните функции:

а) $f(x) = xe^{-x}$; б) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$; в) $f(x) = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$; г) $f(x) = \sin(n\arcsin x)$.

Решение. а) Првиот извод на функцијата f е $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, па од Формулата $df(x) = f'(x)dx$, диференцијалот на f во точката x од доменот на функцијата е даден со $df(x) = (1-x)e^{-x}dx$.

б) Во овој случај $df(x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.●

4.69. Определете ги диференцијалите на имплицитно зададените функции:

а) $x^2 + y^2 = r^2$. б) $y^3 - y + x = 0$.

в) $y + x + e^y = 0$. г) $y^2 = 2px$.

д) $y = x + \mathrm{arctg}\, y$; ѓ) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

Решенија. а) Ја диференцираме имплицитната функција $x^2 + y^2 = r^2$, добиваме $2x + 2yy' = 0$ т.е. $y' = -\frac{x}{y}$. Така $dy = -\frac{x}{y}dx$.

б) Диференцираме по x и го определуваме y': $3y^2y' - y' + 1 = 0$, од каде $y' = \frac{1}{1-3y^2}$. Диференцијалот е $dy = \frac{1}{1-3y^2}dx$.

в) $dy = -\frac{1}{e^y+1}dx$. г) $dy = \frac{p}{y}dx$. д) $dy = \left(1+\frac{1}{y^2}\right)dx$. ѓ) $dy = \frac{x+y}{x-y}dx$. ●

4.70. Пресметејте приближно:

а) $\sin 31^0$. б) $\sqrt{9.0003}$. в) $\ln 1.001$.

г) $\sqrt[3]{1.0003}$. д) $e^{0.1}$. ѓ) $\mathrm{arctg}\, 1.05$.

Решенија: а). За функцијата $f(x) = \sin x$, нејзиниот извод е $f'(x) = \cos x$. Од формулата $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, $\Delta x \to 0$, за $x = 30^0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = 1^0 = \frac{\pi}{180}$, следува, $\sin 31^0 \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} = 0.515$.

б) За функцијата $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ нејзиниот извод е $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. За $x = 4$,

$\Delta x = 0.0003$, следува $\sqrt{9.0003} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0.0003 = 3.00005$.

в) $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\ln(1.001) \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0.001 = 0.001$.

г) $\sqrt[3]{1.0003} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{1^2}} \cdot 0.0003 = 1.0001$. д) $e^{0.1} \approx 1.1$. ѓ) $\operatorname{arctg} 1.05 \approx \frac{\pi + 0.1}{4} \approx 0.81$.

●

4.71. Определете го вториот диференцијал $d^2 y$ за функцијата:

а) $y = e^x$; б) $y = \sqrt{1 + x^2}$;

в) $y = \cos 5x$; г) $y = \sin x \ln x$.

Решение. а) $d^2 y = d(d(e^x)) = d(y' dx) = d(e^x dx) = d(e^x) dx = e^x dx dx = e^x dx^2$.

б) Прво ќе го определиме првиот диференцијал: $dy = \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}$. Потоа,

$$d^2 y = d(dy) = d\left(\frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \left(\frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}\right)' dx = \left(\frac{\sqrt{1 + x^2} dx - x \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} dx}{1 + x^2}\right) dx = \frac{dx^2}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} .$$

в) $dy = -5 \sin 5x dx$, $d^2 y = -25 \cos 5x dx^2$; г) $d^2 y = \left(-\sin x \ln x + \frac{2 \cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) dx^2$. ●

4.72. Определете го третиот диференцијал $d^3 y$ за функцијата:

а) $y = 3 \sin(2x + 5)$; б) $y = x^2 e^{-x}$;

в) $y = \operatorname{ch} 5x$; г) $y = \sin^2 x$.

Решение. а) $d^3 y = y''' dx^3 = -24 \cos(2x + 5) dx^3$.

б) $d^3 y = -e^{-x}(x^2 - 6x + 6)(dx)^3$.

в) $d^3 y = \operatorname{sh} x (dx)^3$. г) $d^3 y = -4 \sin 2x (dx)^3$.●

4.73. Определете го диференцијалот од дадениот ред за функцијата:

а) $y = x^2 e^x$, $d^{10} y$;

б) $y = x \operatorname{sh} x$, $d^{100} y$;

Решение. Коистејќи ја Лајбницовата формула, имаме:

а) $d^{10} y = (x^2 e^x)^{(10)} dx^{10} = (x^2 + 20x + 90) e^x dx^{10}$. б) $d^{100} y = (x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x) dx^{100}$. ●

4.7. Теореми за средна вредност

Теорема на Рол. Ако функцијата $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ е непрекината на сегментот $[a,b]$, диференцијабилна на интервалот (a,b) и важи , тогаш постои барем еден реален број $\xi\in(a,b)$, така што $f'(\xi)=0$.

Теорема на Лагранж. Ако функцијата $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и диференцијабилна на интервалот (a,b), тогаш постои барем еден реален број $\xi\in(a,b)$, така што $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема на Коши. Нека функциите f и g се непрекинати на сегментот $[a,b]$ и диференцијабилни на интервалот (a,b) и уште $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$, тогаш постои барем еден реален број $\xi\in(a,b)$, така што $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

(Ако $g(a)\neq g(b)$, тогаш условот $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$ може да се замени со послабиот услов $\left(f'(x)\right)^2+\left(g'(x)\right)^2\neq 0$, $x\in(a,b)$.)

Задачи:

4.74. Покажете дека за секои $a_1,a_2,\cdots a_n\in\mathbf{R}$, равенката

$$a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\ \cdots+a_1\cos x=0$$

има барем едно решение во интервалот $(0,\pi)$.

Решенија. Функцијата

$$f(x)=\frac{a_n}{n}\sin nx+\frac{a_{n-1}}{n-1}\sin(n-1)x+\ \cdots+a_1\sin x=0$$

е непрекината на $[0,\pi]$, диференцијабилна на $(0,\pi)$ и го задоволува условот $f(0)=f(\pi)=0$. Според теоремата на Рол, постои $c\in(0,\pi)$ такво што $f'(c)=0$, т.е $a_n\cos nc+a_{n-1}\cos(n-1)c+\ \cdots+a_1\cos c=0$, што и требаше да се покаже. ●

4.75. Проверете дали следните функции ги исполнуваат условите на теоремата на Рол во дадените сегменти:

а) $f(x)=\frac{a_n}{n}\sin nx+\frac{a_{n-1}}{n-1}\sin(n-1)x+\cdots+a_1\sin x=0$ на сегментот $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

б) $f(x)=|x-2|$ на сегментот $[1,3]$,

в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ на сегментот $[-1,1]$,

г) $f(x)=\ln\sin x$ на сегментот $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.

Решенија: а) Не, бидејќи $f(0)\neq f(\frac{\pi}{2})$. Имено вредноста $f(\frac{\pi}{2})$ зависи од коефициентите $a_i,\ i=1,2,\cdots,n$.

б) Не, бидејќи функцијата нема прв извод во точката $x=2$.
в) Не, бидејќи функцијата нема прв извод во точката $x=0$.

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=-\infty,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=+\infty.$$

г) Да. ●

4.76. Ако $a<x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}<b$ се нули на полиномот P на сегментот $[a,b]$, тогаш постои точка $c\in(a,b)$ таква што $P^{(n)}(c)=0$.

Решение: На секој од сегментите $[x_i,x_{i+1}],\ i=1,\cdots n$ се исполнети условите од теоремата на Рол за полиномот P, па постојат барем n точки c_i такви што $P'(c_i)=0$. На секој од сегментите $[c_i,c_{i+1}],\ i=1,\cdots n-1$ се исполнети условите од теоремата на Рол за полиномот P', па постојат барем $n-2$ точки d_i такви што $P''(d_i)=0,\ \ i=1,\cdots n-2$. Ја повторуваме постапката $n-1$ пати и добиваме $n-(n-2)=2$ точки $\xi_i, i=1,2$ такви што $P^{(n-1)}(\xi_i)=0, i=1,2$. Ја применуваме теоремата на Рол за полиномот $P^{(n-1)}$ на сегментот $[\xi_1,\xi_2]$, па постои барем една точка $c\in(\xi_1,\xi_2)$ таква што $P^{(n)}(c)=0$, што требаше да се покаже. ●

4.77. На интервалите $(-2,2)$ и $(2,3)$ одреди ги точките во кои тангентите на графикот на функцијата $f(x)=(x^2-4)(x-3)$ се хоризонтални.

Решение. Дадената функција ги задоволува условите на теоремата на Рол на сегментите $[-2,2]$ и $[2,3]$. Од $f'(x)=3x^2-6x-4$ следува дека $f'(x)=0$ за $c_1=\frac{3-\sqrt{21}}{3}\in(-2,2)$ и $c_2=\frac{3+\sqrt{21}}{3}\in(2,3)$. Во точките c_1 и c_2 тангентите на графикот на функцијата $f(x)=(x^2-4)(x-3)$ се хоризонтални. ●

4.78. Покажи дека на интервалот $(0,1)$ множеството точки во кои тангентите на графикот на функцијата $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ се хоризонтални е бесконечно.

Решение. Бидејќи $f(x)=0$ за $x=\frac{1}{k}, k\in\mathbf{N}$, теоремата на Рол можеме да ја примениме на секој од сегментите $\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$, $k\in\mathbf{N}$. Следува дека постојат бесконечно многу точки ξ_k, $\frac{1}{k+1}<\xi_k<\frac{1}{k}$ во кои изводот на функцијата е нула. ●

4.79. Докажете дека равенката $3^x+4^x=5^x$ има на $\mathbf{R}$ единствено решение $x=2$.

Решение. Нека $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$, $x\in\mathrm{R}$. Ако равенката $f(x)=0$ има два корена, тогаш според теоремата на Рол, за некое $c\in\mathbf{R}$ ќе имаме $f'(c)=0$. Но, $f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}<\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x\right)\ln\frac{4}{5}<0$, $\forall x\in\mathbf{R}$. ●

4.80. Ако функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ го задоволува следниот услов

$$x_1,x_2\in(a,b)\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\le C|x_1-x_2|^p$$

каде што $C>0$ и $p>1$, тогаш таа е константна. Покажи!

Решение. Функцијата f е диференцијабилна бидејќи за секој $x_1\in(a,b)$ имаме $\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|}\le C|x_1-x_2|^{p-1}\to 0$ кога $x_2\to x_1$. Исто така имаме дека $f'(x_1)=0$.

На секој сегмент $[x_1,x_2]$ можеме да ја примениме теоремата на Лагранж, па за некое $t\in(x_1,x_2)$ ќе важи $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)f'(t)=0$. Значи, $f(x_1)=f(x_2)$ за произволни две точки од (a,b). ●

4.81. Нека функцијата f е непрекината на сегментот $[0,1]$ и диференцијабилна на $(0,1)$. Докажи дека постои $c\in(0,1)$ така што $f(1)-f(0)=\dfrac{f'(c)+f'(1-c)}{2}$.

Решение. Нека $g(x)=\dfrac{f(x)-f(1-x)}{2}$, $x\in[0,1]$. Постои изводот $g'(x)=\dfrac{f'(x)+f'(1-x)}{2}$, $x\in(0,1)$. Ја применуваме теоремата на Лагранж за функцијата g и добиваме:

$$g(1)-g(0)=g'(c)\,,\ c\in(0,1)\,.$$

Значи,

$$\frac{f(1)-f(0)}{2}-\frac{f(0)-f(1)}{2}=\frac{f'(c)+f'(1-c)}{2},$$

т.е.

$$f(1)-f(0)=\frac{f'(c)+f'(1-c)}{2},$$

што требаше да се докаже. ●

4.82. Нека $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е непрекината функција, диференцијабилна на (a,b) и нека $f(a)=a$, $f(b)=b$. Докажете дека постојат u,v такви што $a<u<v<b$ и $\dfrac{1}{f'(u)}+\dfrac{1}{f'(v)}=2$.

Решение. Заради непрекинатоста на f постои $c\in(a,b)$ така што $f(c)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=\dfrac{a+b}{2}$. Ја применуваме теоремата на Лагранж на сегментите $[a,c]$ и $[c,b]$ и наоѓаме броеви u,v такви што $a<u<c<v<b$ и $f'(u)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$, $f'(v)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$. Лесно се проверува дека важи: $\dfrac{1}{f'(u)}+\dfrac{1}{f'(v)}=2$.●

4.83. Нека функцијата f е непрекината на $[a-h,a+h]$, диференцијабилна на $(a-h,a+h)$. Докажете дека постои $\theta\in(0,1)$ така што:

а) $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=f'\big(a+\theta\ h\big)+f'(a-\theta\ h)$;

б) $\dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=f'\big(a+\theta\ h\big)-f'(a-\theta\ h)$.

Решение. а) Ја разгледуваме функцијата $g(t)=f(a+th)-f(a-th)$ на сегментот $[0,1]$. Според теоремата на Лагранж, постои $\theta\in(0,1)$ така што $g(1)-g(0)=g'(\theta)\cdot 1=\left(f'\left(a+\theta\ h\right)+f'\left(a-\theta\ h\right)\right)h$. Така, добиваме

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=\frac{g(1)-g(0)}{h}=f'\left(a+\theta\ h\right)+f'(a-\theta\ h).$$

б) Ја применуваме теоремата на Лагранж на функцијата $g(t)=f(a+th)+f(a-th)-2f(a)$ на сегментот $[0,1]$, па постои $\theta\in(0,1)$ така што $g(1)-g(0)=g'(\theta)\cdot 1=\left(f'\left(a+\theta\ h\right)-f'\left(a-\theta\ h\right)\right)h$. Значи,

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=\frac{g(1)-g(0)}{h}=f'\left(a+\theta\ h\right)-f'(a-\theta\ h). \bullet$$

4.84. Нека функцијата f е непрекината на $[0,2]$, постои f'' на $(0,2)$ и нека $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$. Покажете дека постои $c\in(0,2)$ така што $f''(c)=0$.

Решение. Ја применуваме теоремата на Лагранж на секој од сегментите $[0,1]$ и $[1,2]$, па ќе постојат $c_1\in(0,1)$ и $c_2\in(1,2)$ така што: $f(1)-f(0)=f'(c_1)\cdot 1$ и $f(2)-f(1)=f'(c_2)\cdot 1$, т.е. $f'(c_1)=1$ и $f'(c_2)=1$. Ја разгледуваме функцијата f' на сегментот $[c_1,c_2]$. Таа ги исполнува условите на теоремата на Рол, па постои $c\in(0,2)$ така што $f''(c)=0$.●

4.85. Нека функциите $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ и $g:(a,b)\to\mathbf{R}$ имаат изводи на (a,b) и нека $f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in(a,b)$. Покажете дека постои $C\in\mathbf{R}$ така што $\forall x\in(a,b)$, $f(x)=g(x)+C$.

Решение. Функцијата $h=f-g:(a,b)\to\mathbf{R}$ има извод на (a,b) и важи $h'(x)=0$, $\forall x\in(a,b)$. Нека фиксираме $x_0\in(a,b)$ и нека $x\neq x_0$ е произволно. Функцијата h ги исполнува условите на теоремата на Лагранж, па постои $\theta\in(x_0,x)$ така што $h(x)-h(x_0)=h'(\theta)(x-x_0)=0$. Добивме дека $\forall x\in(a,b)$, $h(x)=h(x_0)$ т.е. $h(x)=C$. ●

4.86. Докажете дека ако функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ го задоволува условот $f''(x)+f(x)=0$ за секој x, тогаш постои константа k така што $\left(f'(x)\right)^2+(f(x))^2=k$ за секој x и уште f е ограничена функција.

Решение. Нека $g(x)=\left(f'(x)\right)^2+(f(x))^2$. Од $g'(x)=2f'(x)\left(f''(x)+f(x)\right)=0$ и задачата 4.85. следува дека $g(x)=\left(f'(x)\right)^2+(f(x))^2=k$. Тврдењето дека f е ограничена функција следува од неравенството: $f(x)\le\sqrt{\left(f'(x)\right)^2+(f(x))^2}=\sqrt{k}$. ●

4.87. Определете ја класата функции со особина:

а) $f'(x)=f(x)$ за секој x.

б) $(1+x)f'(x)-\alpha f(x)=0,\ \alpha\in\mathbf{R}$, $x\in(-1,b)$,

в) $f''(x)+f(x)=0$ за секој x.

Решение. а) Познато ни е дека $(e^x)'=e^x$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Дали постои друга функција со таа особина? Нека f таква што $f'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Ја разгледуваме функцијата $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$. Таа е диференцијабилна на $\mathbf{R}$ нејзиниот извод е $g'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=f(x)e^x-f(x)e^x=0$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Според задачата 4.85.. g е константна функција т.е. $\dfrac{f(x)}{e^x}=C$. Значи, секоја функција со особина $f'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$ е од облик $f(x)=Ce^x$.

б) Познато ни е дека $((1+x)^\alpha)'=\dfrac{\alpha}{1+x}(1+x)^\alpha$, $\forall x\ne-1$, т.е за функцијата $y=(1+x)^\alpha$ важат условите на задачата. Дали постои друга функција со таа особина? Нека f таква што $(1+x)f'(x)-\alpha f(x)=0,\ \alpha\in\mathbf{R}$, $x\in(-1,b)$. Ја разгледуваме функцијата $g(x)=\dfrac{f(x)}{(1+x)^\alpha}$. Таа е диференцијабилна на $(-1,b)$ и нејзиниот извод е $g'(x)=\dfrac{(1+x)f'(x)-\alpha f(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}=0$, $x\in(-1,b)$. Според задачата 4.85. , g е константна функција т.е. $g(x)=\dfrac{f(x)}{(1+x)^\alpha}=C$. Значи, секоја функција со особина $(1+x)f'(x)-\alpha f(x)=0,\ \alpha\in\mathbf{R}$, $x\in(-1,b)$ е од облик $f(x)=C(1+x)^\alpha$.

в) Нека f е произволна функција која го задоволува условот $f''(x)+f(x)=0$ за секој x и нека $f(0)=C_1$ и $f'(0)=C_2$. Ќе покажеме дека $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$,

$\forall x \in \mathbf{R}$. Ја разгледуваме функцијата $g(x) = f(x) - C_1 \cos x - C_2 \sin x$. Функцијата g го задоволува условот $g''(x) + g(x) = 0$, па како во задачата 4.86. покажуваме дека постои константа C, така што $(g'(x))^2 + (g(x))^2 = C$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Од $g'(0) = g(0) = 0$ следува дека $C = 0$, па имаме дека $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, т.е. $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. ●

4.88. Определете функција $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ што има извод на (a,b) и го задоволува условот:

а) $\exists D \in \mathbf{R}$, $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) = D$;

б) $\exists D,E \in \mathbf{R}$, $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) = Ex + D$.

Решение. а) Ја разгледуваме функцијата $g(x) = Dx$. Таа е диференцијабилна на $\mathbf{R}$ и важи $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$. Според задачата 4.85. постои $C \in \mathbf{R}$ така што $\forall x \in (a,b)$, $f(x) = g(x) + C = Dx + C$.

б) Во овој случај ја разгледуваме функцијата $g(x) = \frac{1}{2}Ex^2 + Dx$. Како под а), добиваме дека $f(x) = \frac{1}{2}Ex^2 + Dx + C$. ●

4.89. Нека $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е неконстантна, периодична функција и диференцијабилна на $\mathbf{R}$. Докажете дека постои позитивен реален број a така што за секој период $T \neq 0$ важи $|T| \geq a$.

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. нека $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ е низа периоди за функцијата која конвергира кон 0. Нека $x \in \mathbf{R}$ е произволно. Тогаш, $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x+T_n) - f(x)}{T_n} = 0$. Според задачата 4.85. $(g = 0)$, добиваме дека f е константна функција. ●

4.90. Докажете ги неравенствата:

а) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, $x,y \in \mathbf{R}$;

б) $|\mathrm{arctg}\, x - \mathrm{arctg}\, y| \leq |x - y|$, $x,y \in \mathbf{R}$;

в) $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$, $0 < y < x$;

г) $ny^{n-1}(x-y) < x^n - y^n < nx^{n-1}(x-y)$.

Решение. Нека $y < x$.

а) Ја разгледуваме функцијата $f(x)=\sin x$. Таа е непрекината и има конечен извод на сегментот $[y,x]$. Според Лагранжовата терема на сегментот $[y,x]$, постои $c\in(y,x)$ така што $\sin x-\sin y=(x-y)\cos c$, одкаде е

$$|\sin x-\sin y|=|x-y|\cdot|\cos c|\leq|x-y| .$$

б) Користејќи ја Лагранжовата терема на сегментот $[y,x]$ имаме:

$\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y=\dfrac{(x-y)}{1+c^2}$, $y<c<x$, одкаде се добива

$$|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|\leq|x-y| .$$

в) Користејќи ја Лагранжовата терема на сегментот $[y,x]$ имаме:

$\ln x-\ln y=\dfrac{(x-y)}{c}$, $0<y<c<x$. Одовде го добиваме неравенството $\dfrac{(x-y)}{x}<\ln\dfrac{x}{y}<\dfrac{(x-y)}{y}$.

г) Ја разгледуваме функцијата $f(x)=x^n$ на сегмнтот $[y,x]$. Таа е непрекината и има конечен прв извод $f'(x)=nx^{n-1}$ на дадениот интервал. Според Лагранжовата терема на сегментот $[y,x]$, постои $c\in(y,x)$ така што $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)=nc^{n-1}$.

$$y<c<x\,;$$

$$y^{n-1}<c^{n-1}<x^{n-1};$$

$$ny^{n-1}<nc^{n-1}<nx^{n-1};$$

$$ny^{n-1}<\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<nx^{n-1};$$

$$ny^{n-1}<\frac{x^n-y^n}{x-y}<nx^{n-1}.$$

На крајот се добива:

$$ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)\,. \bullet$$

4.91. Докажете ја формулата $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Ја разгледуваме функцијата $f(x)=\arcsin x+\arccos x$ на сегментот $[-1,1]$. Таа е диференцијабилна на интервалот $(-1,1)$ и $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$, за секој $x\in(-1,1)$. Тогаш, f е константна функција, т,е $\arcsin x+\arccos x=C$, за секој $x\in(-1,1)$. За да го определиме C, земаме, на пример $x=0$ и добиваме $C=\frac{\pi}{2}$. Исто така, со непосредна проверка, добиваме $f(\pm 1)=\frac{\pi}{2}$. ●

4.92. Докажи дека ако функцијата f, дефинирана на конечен или бесконечен интервал (a,b), има ограничен извод, тогаш таа е рамномерно непрекината на (a,b).

Решение. За секои две точки $x_1,x_2 \in (a,b)$, според формулата на Лагранж имаме

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(c)||x_2-x_1|\le M|x_2-x_1|,$$

каде што M е така избран да $|f'(x)|\le M$, $\forall x\in(a,b)$.

Нека $\varepsilon>0$ е произволно и нека $\delta<\frac{\varepsilon}{M}$, тогаш за $|x_2-x_1|<\delta$ ќе имаме $|f(x_2)-f(x_1)|\le M|x_2-x_1|<\varepsilon$, што требаше да се покаже. ●

4.93. Функцијата $f:(a,b)\to \mathbf{R}$, $a,b\in\mathbf{R}$ има втор извод на (a,b) и $\sup\limits_{x\in(a,b)}|f''(x)|<+\infty$. Докажете дека функцијата f е рамномерно непрекината на (a,b).

Решение. Нека $x_0\in(a,b)$ е произволно фиксирана и $x\in(a,b)$, $x\ne x_0$. За функцијата f' важат условите на теоремата на Лагранж на $[x_0,x]$, па постои $\theta_1\in(x_0,x)$ така што $f'(x)-f'(x_0)=f'(\theta_1)(x-x_0)<M(b-a)$, каде што $M=\sup\limits_{x\in(a,b)}|f''(x)|$. Добиваме дека за $\forall x\in(a,b)$, $|f'(x)|<C$. каде што $C=f'(x_0)+M(b-a)$. Како во предходната задача покажуваме дека f е рамномерно непрекината на (a,b). ●

4.94. Нека функцијата f е диференцијабилна на $[0,1]$, $f(0)=0$ и за некое $k>0$ е точно неравенството $|f'(x)|\le k|f(x)|, \forall x\in[0,1]$. Докажете дека тогаш $f(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$.

Решение. Нека $x\in\left[0,\frac{1}{2k}\right]\cap[0,1]$ и $n\in\mathbf{N}$ се дадени. Со примена на теоремата на Лагранж $n-$ пати, добиваме:

$|f(x)|=|f(x)-f(0)|=|f'(\xi_1)|x\le k|f(\xi_1)|x\le\frac{1}{2}|f(\xi_1)|=\frac{1}{2}|f'(\xi_2)|\xi_1\le\frac{k}{2}|f(\xi_2)|\xi_1\le\frac{1}{2^2}|f(\xi_2)|\le$

$\cdots\le\frac{1}{2^n}|f(\xi_n)|$, каде што $\xi_1\in(0,x)$, $\xi_{i+1}\in(0,\xi_i)$, $i=1,2,\cdots,n-1$. Бидејќи функцијата f е ограничена на $[0,1]$, и n произволен природен број, следува дека $f(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$. ●

4.95. Дали теоремата на Коши може да се примени на функциите $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=x^3$, $x\in[-1,1]$?

Решение. Да. Ќе ја одредиме точката ξ која го задоволува условот $\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, $\xi\in(-1,1)$. Од $\frac{3+1}{1+1}=\frac{2\xi+2}{3\xi^2}$, добиваме $\xi_1=\frac{1+\sqrt{13}}{6}\in(-1,1)$ и $\xi_2=\frac{1-\sqrt{13}}{6}\in(-1,1)$. ●

4.96. Нека функцијата f е непрекината на $[a-h,a+h]$, диференцијабилна на $(a-h,a+h)$. Ако постои $f''(a)$, докажете дека

$$f''(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}.$$

Решение. Нека $g(t)=f(a+th)-2f(a)+f(a-th)$ и $h(t)=(th)^2$, $t\in(0,1)$. Според теоремата на Коши за средна вредност, постои $\theta\in(0,1)$ така што $\frac{g(1)-g(0)}{h(1)-h(0)}=\frac{g'(\theta)}{h'(\theta)}$, т.е. $\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=\frac{f'\left(a+\theta\ h\right)h-f\left(a-\theta\ h\right)h}{2\theta\ h^2}=$

$=\frac{f'\left(a+\theta\ h\right)-f\left(a-\theta\ h\right)}{2\theta\ h}=\frac{1}{2}\left(\frac{f'(a+\theta\ h)-f'(a)}{\theta\ h}+\frac{f'(a-\theta\ h)-f'(a)}{-\theta\ h}\right)$. Ако пуштиме $h\to0$, бидејќи по претпоставка постои $f''(a)$, имаме

$$f''(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}.$$ ●

4.8. Лопиталово правило

Нека $c \in \mathbf{R}$ или е еден од симболите $+\infty$ и $-\infty$. Изразот $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е неопределен од облик $"\dfrac{0}{0}"$ во $x=c$ ако $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$. Изразот $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е неопределен од облик $"\dfrac{\infty}{\infty}"$ во $x=c$ ако $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$.

Лопиталово правило. Нека функциите f и g се диференцијабилни во секоја точка од интервалот (a,b), освен можеби во точката $c \in (a,b)$. Ако $g'(x) \neq 0$ за $x \neq c$ и ако $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е неопределен израз од облик $"\dfrac{0}{0}"$ или $"\dfrac{\infty}{\infty}"$ во $x=c$, тогаш важи

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{9.1}$$

под услов да постои $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Лопиталовото правило важи и ако $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$.

Задачи:

4.97. Со примена на Лопиталовото правило, определете ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+3x-1}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $a,b\neq 0$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{\cos x}}{e^x-e^{-x}}$; ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-e^{\sin x}}$;

Решение: а) Функциите $f(x)=\cos x+3x-1$ и $g(x)=2x$ се диференцијабилни на интервал што ја содржи нулата. Изразот е од облик $\frac{0}{0}$ кога $x\to 0$, па имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+3x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3}{2}=\frac{3}{2}.$$

И во наредните задачи условите за Лопиталовото правило се исполнети, па имаме:

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{a\sin ax}{\cos ax}}{-\frac{b\sin bx}{\cos bx}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\sin ax\cdot\cos bx}{b\sin bx\cdot\cos ax}$.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}}{1}=n$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=\ln a$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^{\cos x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-x\sin xe^{\cos x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e}{2}$.

ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-e^{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-\cos x\cdot e^{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x+\sin x\cdot e^{\sin x}-\cos^2 x\cdot e^{\sin x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x+\cos x\cdot e^{\sin x}+3\cos x\sin x\cdot e^{\sin x}-\cos^3 xe^{\sin x}}=1$. ●

4.98. Определете ги следните гранични вредности :

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x^b},\ b>0$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+e^x}$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(ae^x+b)}{\ln(ce^x+d)}$; ѓ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}$.

Решение: Изразите се од облик $\frac{\infty}{\infty}$ кога $x\to\infty$, и условите на Лопиталовото правило се исполнети, па имаме :

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{2x}=\frac{6}{2}=3$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x^b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{bx^{b-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{bx^b}=0$.

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$. г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$.

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(ae^x+b)}{\ln(ce^x+d)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{ae^x}{ae^x+b}}{\frac{ce^x}{ce^x+d}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ace^x}{ace^x}=1$.

ѓ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{mx^{m-1}}{a^x\ln a}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{m!}{a^x(\ln a)^m}=0$. ●

4.99. Определете ги следните гранични вредности :

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{a}{x}}-1\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; ѓ) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$;

Решение: а) Изразот е од облик $\infty\cdot0$ кога $x\to\infty$. Делејќи ги броителот и именителот со e^{-x}, изразот ќе добие облик: $\frac{\infty}{\infty}$, и условите на Лопиталовото правило се исполнети, па имаме :

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{e^{-x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\,.$$

б) Изразот е од облик $0\cdot(-\infty)$ кога $x\to0$. Делејќи ги броителот и именителот со x, изразот ќе добие облик: $\frac{-\infty}{\infty}$, и условите на Лопиталовото правило се исполнети, па имаме :

$$\lim_{x\to0}x\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln x}{1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(-x)=0\,.$$

в) Изразот е од облик $\infty\cdot0$ кога $x\to\infty$. Ги делиме броителот и именителот со x, изразот ќе добие облик: $\frac{0}{0}$, и условите на Лопиталовото правило се исполнети, па имаме :

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-a}{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)}}{\frac{-1}{x^2}}=a\,.$$

г) Изразот е од облик $\infty\cdot0$ кога $x\to\infty$. Делејќи ги броителот и именителот со x, изразот ќе добие облик: $\frac{0}{0}$, и условите на Лопиталовото правило се исполнети, па имаме :

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{a}{x}}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{a}{x}}-1}{\frac{1}{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-a}{x^2}e^{\frac{a}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}=a\,.$$

д) Изразот е од облик $\infty-\infty$ кога $x\to 1$. Пресметувањето го сведуваме на случај $\frac{0}{0}$, и условите на Лопиталовото правило се исполнети, па имаме :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}= \;=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}\,.$$

ѓ) Изразот е од облик $\infty-\infty$ кога $x\to 1$. Пресметувањето го сведуваме на случај $\frac{0}{0}$, и условите на Лопиталовото правило се исполнети, па имаме :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0\,.\; \bullet$$

4.100. Определете ги следните гранични вредности :

а) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\ln(e^x-1)}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}\,x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{ctg}\,x}$; ѓ) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln\mathrm{ctg}\,x)^{\mathrm{tg}\,x}$.

Решение. а) Во овој случај имаме неопределеност од облик ∞^0. Нека $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$. Тогаш $\ln y=\sin x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ е неопределеност од облик $0\cdot\infty$. Трансформираме до неопределеност од облик $\frac{\infty}{\infty}$ и го применуваме Лопиталовото правило:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=0\,.$$

Следува, $\lim\limits_{x\to 0^+} y=e^0=1$. б) Во овој пример се појавува неопределен облик 0^0. Од равенството $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{xe^x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^x+xe^x}=1$ добиваме

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\ln(e^x-1)} = e^1 = e$. в) И во овој пример се појавува неопределен облик 0^0. За функцијата $y=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ имаме $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ln\sin x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} =$

$= -\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x = 0$. Следува, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1$.

г) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0$. Значи $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

д) Во овој пример се појавува неопределен облик ∞^0. Од равенството $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{ctg} x \ln\operatorname{tg} x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = 0$, следува, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x^{\operatorname{ctg} x} = e^0 = 1$.

ѓ) Од $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln\ln\operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\ln\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{\ln\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{ctg} x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln\operatorname{ctg} x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x \frac{-1}{\sin^2 x}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x = 0$, следува, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\operatorname{ctg} x^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$. ●

4.101. Функцијата $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ има извод на $(0,\infty)$, при што $f(x)+f'(x)\to 0,\ x\to\infty$. Докажете дека $f(x)\to 0,\ x\to\infty$.

Решение. Го применуваме Лопиталовото правило:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)e^x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\big(f(x)+f'(x)\big)e^x}{e^x} = 0. \ \bullet$$

4.102. Функцијата $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ има извод на $(0,\infty)$, при што $f(x)+2f'(x)\sqrt{x}\to 0,\ x\to\infty$. Докажете дека $f(x)\to 0,\ x\to\infty$.

Решение. Го применуваме Лопиталовото правило:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(f(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} + f'(x)\right)e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\big(f(x)+2f'(x)\sqrt{x}\big) = 0. \ \bullet$$

4.103. Определете ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$.

Решение. а) Границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$ не постои, па не можеме да го примениме Лопиталовото правило. Меѓутоа, дадената гранична вредност постои и е еднаква на $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\lim\limits_{x\to 0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0$.

б) За $x>0$, имаме $\dfrac{2x-1}{2x+1}\le\dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x}\le\dfrac{2x+1}{2x-1}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{2x-1}=1$, па $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x}=1$. И во овој случај не постои граничната вредност $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-\sin x)'}{(2x+\sin x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\cos x}{2+\cos x}$, па не можеме да го примениме Лопиталовото правило. в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec x}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sec x}=\cdots$. Применувањето на Лопиталовото правило не не доведува до целта, иако постои границата: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$. ●

4.104. Докажете дека ако за функцијата $f(x)$ постои вториот извод $f''(x)$, тогаш важи:

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h^2}.$$

Решение. Со примена на Лопиталовото правило имаме:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=$$
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right)=f''(x).$$ ●

4 .9. Тејлорова формула

1) Нека функцијата $f(x):\left(a,b\right)\to\mathbb{R}$ е таква што за секој $x\in(a,b)$, постои $f^{(n+1)}(x)$. Тогаш за секој $x\in(a,b)$, постои $\theta\in(0,1)$ таков што точна е формулата

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+R_n(x). \qquad (10.1)$$

Формулата (10.1) ја нарекуваме формула на Тејлор од $n-$ти ред за функцијата $f(x)$ во околина на точката x_0, а

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\left(x-x_0\right))}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

се нарекува остаточен член.

Значи

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (10.2)$$

Формулата (10.2) ја нарекуваме формула на Тејлор од $n-$ти ред за функцијата $f(x)$ во околина на точката x_0, со остаточен член на Лагранж.

3) Ако $x_0=0$, тогаш Тајлоровата формула ја нарекуваме Маклоренова формула:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n),\ x\to 0\,. \qquad (10.3)$$

Задачи

4.105. Нека функцијата $f(x)$ е бесконечно диференцијабилна во околина на точката $x_0=0$.

а) Ако функцијата е парна, тогаш за секое $n\in\mathbf{N}$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k)}\left(0\right)}{\left(2k\right)!}x^{2k}+R_{2n+1}\left(x\right);\,;$$

б) Ако функцијата е непарна, тогаш за секое $n\in\mathbf{N}$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}\left(0\right)}{\left(2k+1\right)!}x^{2k+1}+R_{2n+2}\left(x\right);\,.$$

Решение. Нека функцијата $f(x)$ е бесконечно диференцијабилна на интервалот $(-l,l)$. Ако функцијата е парна, тогаш нејзиниот извод е непарна функција, а бидејќи изводот на непарна функција е парна функција (види задача 4.17.), следува дека $f^{(2k-1)}(0)=0,\ k\in\mathbf{N}$. Ако функцијата е непарна, од истите причини следува дека во тој случај, $f^{(2k)}(0)=0,\ k\in\mathbf{N}$. Значи, ако функцијата е бесконечно диференцијабилна, формулата (10.3) може да се запише како:

а) $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+R_{2n+1}(x)$; за парна функција, Остаточниот член е запишан во вид $R_{2n+1}(x)$ а не во вид $R_{2n}(x)$, бидејќи последниот собран член од Тејлоровиот полином е еднаков на нула.

б) $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+R_{2n+2}(x)$ за непарна функција. ●

4.106. Ако $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k+R_n(x)$, $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kx^k+R_n(x)$, тогаш

а) $f(bx)=\sum\limits_{k=0}^{n}b^ka_kx^k+R_n(x)$,

б) $f(x)+g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k+b_k)x^k+R_n(x)$;

в) $f(x)g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_kx^k+R_n(x),\ x\to 0$, каде што $c_k=\sum\limits_{p=0}^{k}a_pb_{k-p}$.

Решение. а) Нека $h(x)=f(bx)$. Лесно се покажува дека $h^{(k)}(x)=b^kf^{(k)}(bx)$, $h^{(k)}(0)=b^kf^{(k)}(0)$, па имаме $f(bx)=h(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{b^kf^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)=\sum\limits_{k=0}^{n}b^ka_kx^k+R_n(x).$

б) Нека $h(x)=f(x)+g(x)$. Тогаш $h^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)+g^{(k)}(0)$, па имаме

$$f(x)+g(x)=h(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)+g^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)x^k+R_n(x).$$

в) Нека $h(x)=f(x)g(x)$. Согласно Лајбницовата формула,

$h^{(k)}(0)=\sum\limits_{p=0}^{k}C_k^pf^{(p)}(0)g^{(k-p)}(0)=\sum\limits_{p=0}^{k}\dfrac{k!f^{(p)}(0)g^{(k-p)}(0)}{p!(k-p)!}$, па Маклореновиот развој на функцијата $h(x)$ е

$$h(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sum\limits_{p=0}^{k}\dfrac{k!f^{(p)}(0)g^{(k-p)}(0)}{p!(k-p)!}}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}\frac{f^{(p)}(0)g^{(k-p)}(0)}{p!(k-p)!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}a_p b_{k-p}x^k\,.\ \bullet$$

4.107. Најдете ја Маклореновата формула со остаточен член во облик на Пеано за функциите:

а) $f(x)=\sin x$; б) $f(x)=\cos x$;

в) $f(x)=\operatorname{sh} x$; г) $f(x)=\operatorname{ch} x$;

д) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$; ѓ) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$;

е) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$; ж) $f(x)=e^x$;

з) $f(x)=\ln(1+x)$; ѕ) $f(x)=\ln(1-x)$.

Решение. а) Со помош на математичка индукција се покажува дека $(\sin x)^{(k)}=\sin\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$, $k=1,2,\cdots$, па затоа $f^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k=2m,\ m\in\mathbf{N}\\ (-1)^m, & k=2m+1,\ m\in\mathbf{N}\end{cases}$. Ако се искористи формулата (10.2) добиваме

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+2}(x)\,.$$

Да напоменеме дека остаточниот член го запишуваме во обликот $R_{2n+2}(x)$, а не во облик $R_{2n+1}(x)$, бидејќи последниот собран член од Тејлоровиот полином е еднаков на нула.

б) Во овој случај $(\cos x)^{(k)}=\cos\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$, $k=1,2,\cdots$, па затоа

$f^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k=2m+1,\ m\in\mathbf{N}\\ (-1)^m, & k=2m,\ m\in\mathbf{N}\end{cases}$. Ако се искористи формулата (10.2) добиваме

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x)\,.$$

Остаточниот член го запишуваме во обликот $R_{2n+1}(x)$, а не во облик $R_{2n}(x)$, бидејќи последниот собран член од Тејлоровиот полином е еднаков на нула.

в) Бидејќи функцијата $f(x)=\operatorname{sh} x$ е непарна функција, $f^{(2k+1)}(x)=\operatorname{ch} x$, $f^{(2k+1)}(0)=1$, $k=1,2,\cdots$. Добиваме

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x).$$

г) $\operatorname{ch} x = x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$.

д) $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}$, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1)) = C_\alpha^k k!$.

Добиваме $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + R_n(x)$.

ѓ) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + R_n(x)$.

е) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + R_n(x)$.

з) Ако $f(x) = \ln(1+x)$, тогаш $f(0) = 0$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)\ !}{(1+x)^k}$,

$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ и по формулата (10.1) добиваме

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

ѕ) Ако во формулата добиена под з) наместо x ставиме $-x$, добиваме

$$\ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + R_n(x). \bullet$$

4.108. Разложете по формулата на Тејлор во околина на точката $x_0 = 0$ до $R_n(x)$ функцијата $f(x)$, ако:

а) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$;

в) $f(x) = \ln\dfrac{x-5}{x-4}$; г) $f(x) = (x+3)e^{-2x}$.

Решение. а) Ја применуваме формулата од задачата 4.107. под д) за $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ и добиваме $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{-\frac{1}{2}}^k x^k + R_n(x)$, каде што

$$C_{-\frac{1}{2}}^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = \frac{(-1)^k 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2^k\cdot k!} = \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}.$$

Добиваме $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!} x^k + R_n(x)$.

б) Бидејќи $\frac{1}{3x+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)}$, со примена на формулата во задача 4.107. под е),

добиваме $\frac{1}{3x+2}=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k\frac{3^k}{2^{k+1}}x^k+R_n(x)$.

в) Од $\ln\frac{x-5}{x-4}=\ln\frac{5}{4}+\ln\frac{1-\frac{x}{5}}{1-\frac{x}{4}}$ и задачата 4.107. под з) и ѕ), добиваме

$$\ln\frac{x-5}{x-4}=\ln\frac{5}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\left(\frac{1}{4^k}-\frac{1}{5^k}\right)+R_n(x).$$

г) Од формулата $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$, и од

$(x+3)e^{-2x}=xe^{-2x}+3e^{-2x}$, добиваме

$$(x+3)e^{-2x}=x\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k2^k}{k!}x^k+o(x^{n-1})\right)+3\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^k2^k}{k!}x^k+R_n(x)=$$

$$=3+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k-1}2^{k-1}}{\left(k-1\right)!}x^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{3\left(-1\right)^k2^k}{k!}x^k+R_n(x)=$$

$$=3+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k-1}2^{k-1}}{\left(k-1\right)!}\left(k-6\right)x^k+R_n(x).\ \bullet$$

4.109. Разложете ја по формулата на Маклорен до $R_{2n+1}(x)$ функцијата $f(x)=\cos^4 x$.

Решение. Ги користиме равенството

$$\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

и задачата 4.107. под б) и добиваме

$$\cos^4 x=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^{2k-1}}{(2k)!}(1-2^{2k-2})x^{2k}+R_{2n+1}(x).\ \bullet$$

4.110. Разложете ги по Маклореновата формула до $R_{2n+1}(x)$ функциите:

а) $f(x)=\operatorname{arctg}x$; б) $f(x)=\arcsin x$; в) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Решение. Ако постои $f^{(n+1)}(0)$ и е познато разложувањето на функцијата

$f'(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k + R_n(x)$ каде што $b_k=\dfrac{f^{(k+1)}(0)}{k!}$, тогаш

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_{n+1}(x)=f(0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)\cdot k!}x^{k+1}+R_{n+1}(x)=$$

$$=f(0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k+1}x^{k+1}+R_{n+1}(x). \qquad (*)$$

а) Од $(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ и задачата 4.107. под е), имаме $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+R_{2n}(x)$.

Одовде и од (*), $\operatorname{arctg}x=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}+R_{2n+1}(x)$.

б) Од $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, развојот $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k}+R_{2n}(x)$ и од (*),

имаме $\arcsin x=x+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)}x^{2k+1}+R_{2n+1}(x)$.

в) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)}x^{2k+1}+R_{2n+1}(x)$. ●

4.111. Разложете ја до $R_6(x)$ функцијата:

а) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+\sin x}$; б) $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$;

в) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x-2}$; г) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

Решение. а) Нека $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{6}a_k x^k+R_6(x)$ е Маклореновиот зазвој на функцијата $f(x)$ до $R_6(x)$. Ќе ги искористиме релацијата $(1+\sin x)f(x)=x^2$ и Маклореновиот развој на функцијата $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+R_6(x)$ и добиваме

$\left(1+x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+R_6(x)\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{6}a_k x^k+R_6(x)\right)=x^2$. Со срамнување на коефициентите пред $1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6$ го добиваме системот равенки:

$a_0=0$, $a_{1.}+a_0=0$, $a_{2.}+a_1=1$, $a_3+a_{2.}-\dfrac{a_0}{3!}=0$, $a_4+a_{3.}-\dfrac{a_1}{3!}=0$,

$a_5+a_{4.}-\dfrac{a_2}{3!}+\dfrac{a_0}{5!}=0$ и $a_6+a_5-\dfrac{a_3}{3!}+\dfrac{a_1}{5!}=0$ со чие решавање добиваме $a_0=0$,

$a_{1.}=0$, $a_{2.}=1$, $a_3=-1$, $a_4=1$, $a_5=-\frac{5}{6}$ и $a_6=\frac{2}{3}$.

Според тоа, $f(x)=x^2-x^3+x^4-\frac{5}{6}x^5+\frac{2}{3}x^6+R_6(x)$.

б) Нека $f(x)=\sum_{k=0}^{6}a_kx^k+R_6(x)$ е Маклореновиот развој на функцијата $f(x)$ до $R_6(x)$. Ќе ги искористиме релацијата $\left(1+x+x^2\right)\left(\sum_{k=0}^{6}a_kx^k+R_6(x)\right)=1-x+x^2$ и слично како под а), добиваме $f(x)=1-2x+2x^2-2x^4+2x^5+R_6(x)$.

в) $f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x-\frac{7}{8}x^2-\frac{9}{16}x^3-\frac{23}{32}x^4-\frac{41}{64}x^5-\frac{87}{128}x^6+R_6(x)$.

г) $f(x)=-3+5x-5x^2+5x^3-5x^4+5x^5-5x^6+R_6(x)$. ●

4.112. Разложете ја до $R_3(x)$ функцијата:

а) $f(x)=e^{\sin x}$; б) $f(x)=\sin(\operatorname{arctg}x)$;

в) $f(x)=\ln(1+\arcsin x)$; г) $f(x)=\operatorname{tg}(\operatorname{sh}3x)$.

Решение. а) Маклореновиот развој на функцијата е $f(\omega)=e^{\omega}=\sum_{k=0}^{3}\frac{\omega^k}{k!}+R_3(\omega)$, каде што $\omega(x)=\sin x$. Маклореновиот развој на функциите $\omega^k, k=1,2,3$ е: $\omega(x)=x-\frac{x^3}{3!}+R_4(x)$, $\omega^2(x)=x^2+R_3(x)$,

$\omega^3(x)=x^3+o(x^3)$.

Следува $f(x)=e^{\sin x}=1+x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)=1+x+\frac{x^2}{2!}+R_3(x)$.

б) Маклореновиот развој на функцијата е $f(\omega)=\sin\omega=\omega-\frac{\omega^3}{3!}+R_3(\omega)$, каде што $\omega(x)=\operatorname{arctg}x$. Маклореновиот развој на функциите $\omega^k, k=1,2,3$ е: $\omega(x)=x-\frac{x^3}{3}+R_3(x)$ (види задача 4.110 под а)), $\omega^2(x)=x^2+o(x^3)$, $\omega^3(x)=x^3+R_3(x)$. Следува

$f(x)=\sin\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{3!}+R_3(x)=x-\frac{x^3}{2}+R_3(x)$.

в) Маклореновиот развој на функцијата е $f(\omega)=\ln(1+\omega)=\omega-\frac{\omega^2}{2}+\frac{\omega^3}{3}+R_3(x)$, каде што $\omega(x)=\arcsin x$. Маклореновиот развој на функциите $\omega^k, k=1,2,3$ е:

$\omega(x)=x+\frac{x^3}{6}+R_4(x)$ (види задача 4.110 под б)), $\omega^2(x)=x^2+R_3(x)$,

$\omega^3(x)=x^3+R_3(x)$. Следува

$$f(x)=\ln\left(1+\arcsin x\right)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+R_3(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+R_3(x).$$

г) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\operatorname{sh}x\right)=3x+\frac{27x^3}{2}+R_4(x)$. ●

4.113. Разложете ја по формулата на Тејлор во околина на точката $x=2$ до $R_n(x)$ функцијата $f(x)=\ln(2x-x^2+3)$.

Решение. Бидејќи $2x-x^2+3=(3-x)(x+1)$, па ако ставиме $x-2=t$, добиваме $2x-x^2+3=(1-t)(3+t)=3(1-t)\left(1+\frac{t}{3}\right)$. Одовде следува дека $f(x)=g(t)=\ln 3+\ln(1-t)+\ln(1+\frac{t}{3})$. Ја разложуваме по Меклорен функцијата $g(t)$, а потоа заменуваме t со $x-2$: $g(t)=\ln 3-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k-1}t^k}{k\cdot 3^k}+R_n(\mathrm{t})$;

$$f(x)=\ln 3-\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(x-2\right)^k}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k-1}\left(x-2\right)^k}{k\cdot 3^k}+R_n(x). \text{ ●}$$

4.114. Докажи дека:

а) $|\sin x-x|\le\frac{x^2}{2}$, $x\in\mathbf{R}$;

б) $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$, за $x>0$.

Решение. а) Ја применуваме формулата на Тејлор за $n=2$ и $x_0=0$ на функцијата $f(x)=\sin x$. Добиваме $\sin x=x-\frac{\sin\xi}{2!}x^2$, од каде што следува $|\sin x-x|\le\frac{x^2}{2}$, $x\in\mathbf{R}$.

б) Ако $f(x)=\sin x$, тогаш $f(0)=f^{(2)}(0)=f^{(4)}(0)=0$, $f'(0)=1$, $f^{(3)}(0)=-1$, $f^{(n)}(x)=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. Ја применуваме формулата на Тејлор за $n=5$ и $x_0=0$ и добиваме: $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\sin\left(\xi+\frac{5\pi}{2}\right)$, одкаде што следува десното неравенство. За левото неравенство, во Тејлоровата формула земаме $n=3$ и $x_0=0$. ●

4.115. Пресметајте

а) $\sqrt[3]{e}$ со точност до 10^{-3};

б) $\sin 9^0$ со точност до 10^{-5};

в) $\sqrt[3]{29}$ со точност до 10^{-3}.

Решение: а) Маклореновата формула за функцијата $f(x)=e^x$ с остаточен член во форма на Лагранж е дадена со: $e^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$. За да за $x=\frac{1}{3}$, грешката биде помала од 10^{-3}, доволно е да биде $\frac{e^{\frac{\theta}{3}}}{3^{n+1}(n+1)!}<10^{-3}$ т.е $n\geq 3$.

Значи, $e^x\approx\sum\limits_{k=0}^{3}\frac{1}{3^k k!}=1.395\cdots$.

в) Ќе запишеме $\sqrt[3]{29}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{27}}$ и ќе ја искористиме функцијата $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$, со што добиваме: $\sqrt[3]{29}\approx 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2^2}{81^2}\right)=0.2079117$. ●

4.116. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е ограничена функција која има непрекинати и ограничени изводи од прв и втор ред на множеството $\mathbf{R}$. Ако $a=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|$, $b=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f'(x)|$ и $c=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f''(x)|$, докажете дека $b^2\leq 2ac$.

Решение. Нека $x\in\mathbf{R}$ е произволна. За произволно $h\in\mathbf{R}$, да ги напишеме Тајлоровите формули:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta_1 h)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x-\theta_2 h),$$

каде што $\theta_i\in(0,1)$, $i=1,2$. Со одземање на горните равенства, добиваме

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{h^2}{2}\left(f''(x+\theta_1 h)-f''(x-\theta_2 h)\right),$$

одкаде што следува $f(x+h)-f(x-h)\geq 2hf'(x)-\frac{h^2}{2}\left(|f''(x+\theta_1 h)|+|f''(x-\theta_2 h)|\right)$.

Добиваме $2a \geq 2hf'(x) - \frac{h^2}{2}2c$ т.е. $ch^2 - 2f'(x)h + 2a \geq 0$. Последното неравенство е точно за секое $h \in \mathbf{R}$.

Ако $c = 0$, тогаш $f''(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, па $f(x) = Ax + B$. Заради ограниченоста на f, следува дека $A = 0$, па важи $b^2 \leq 2ac$.

Ако $c > 0$, тогаш $ch^2 - 2f'(x)h + 2a \geq 0$ ако и само ако $(f'(x))^2 \leq 2ac$. Бидејќи $(f'(x))^2 \leq 2ac$, $\forall x \in \mathbf{R}$, тогаш $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}(f'(x))^2 = b^2 \leq 2ac$. ●

Користејќи ја Тејлоровата формула пресметајте ги границите:

4.117. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$;

Решение. а) Користејќи го развојот

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$, и заради

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'''(\theta x)}{3!\,x^2}x^3 = 0,$$

имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^2}{2} + R_2(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2} + R_2(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + R_2(x) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$. ●

4.118. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x - \arcsin x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x - \arcsin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3} + R_3(x) - x - \frac{x^3}{6} + R_3(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2} + R_3(x)}{x^3} = 0$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x + x^2 + \frac{x^5}{4!} + R_5(x)}{x^5} = \frac{1}{24}$. ●

4.10. Монотоност и локални екстреми на функции

1) Нека функцијата f е непрекината на сегментот $[a,b]$ и диференцијабилна на интервалот (a,b).

- функцијата f е монотоно растечка ако и само ако $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$;
- функцијата f е монотоно опаѓачка ако и само ако $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

2) Бројот $c \in (a,b)$ е критичен број за функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ ако $f'(c) = 0$ или $f'(c)$ не постои.

3) Ако функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ е непрекината на $[a,b]$ и има локален екстрем (максимум или минимум) во точката $c \in (a,b)$, тогаш c е критичен број за функцијата f.

4) Нека функцијата f во точката $c \in (a,b)$ ги има сите изводи до ред $n \geq 2$ и нека важи $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$, но $f^{(n)}(c) \neq 0$.

- Ако n е непарен број, тогаш c не е екстремна вредност на функцијата f
- Ако n е парен број, тогаш c е екстремна вредност на функцијата f, и притоа, ако $f^{(n)}(c) > 0$, тогаш функцијата има локалн минимум во c, а ако $f^{(n)}(c) < 0$, тогаш функцијата има локалн максимум во c.

Задачи

4.119. Определи ги интервалите на монотоност на функциите:

а) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x - 4$;

б) $y = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$;

в) $y = \frac{1}{x^2}$;

г) $y = x^2 - 2x + 1$;

д) $y = x - \frac{1}{x}$;

ѓ) $y = \sqrt{x+2}$;

е) $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$;

ж) $y = x \ln x$.

Решение: а) $y' = x^2 - 3x + 2$;. $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ т.е. $x_1 = 2$; $x_2 = 1$. $y' = (x-1)(x-2)$. $y'(x) > 0$ за $x \in (-\infty,1) \cup (2,\infty)$, што значи дека функцијата монотоно расте на на интервалите $(-\infty,1)$ и $(2,\infty)$. За $x \in (1,2)$, $y'(x) < 0$, што значи дека функцијата опаѓа на $(1,2)$.

б) $y' = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$. $y' = 0$ ако $x = 0$. Функцијата $y = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ расте во точките x за кои важи $y'(x) > 0$, додека опаѓа таму каде што $y'(x) < 0$. $y'(x) > 0$ $\Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$. $y'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow x \in (0,\infty)$. Значи, функцијата расте во интервалот $(-\infty,0)$, а опаѓа во $(0,\infty)$.

в) $y' = -\frac{2}{x^3}$. За $x \in (-\infty,0)$, $y'(x) > 0$, што значи дека функцијата расте во $(-\infty,0)$. Ако $x \in (0,\infty)$, тогаш $y'(x) < 0$, што значи дека функцијата опаѓа во $(0,\infty)$.

г) $y' = 2(x-1) > 0$ за сите $x \in (1,\infty)$. Функцијата монотоно расте на $(1,\infty)$. Ако $x \in (-\infty,1)$, тогаш $y'(x) < 0$, што значи дека функцијата опаѓа во $(-\infty,1)$.

д) функцијата $y = x - \frac{1}{x}$ монотоно расте на интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$, бидејќи $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \ \forall x \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.

ѓ) Функцијата $y = \sqrt{x+2}$ монотоно расте на целата дефинициона област, бидејќи $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0, \ \forall x \in (-2,\infty)$.

е) $y' = \frac{16x}{(3+x^2)^2} > 0, \ \forall x > 0$ и $y' = \frac{16x}{(3+x^2)^2} < 0, \ \forall x < 0$. Значи, функцијата расте на $(0,\infty)$ и опаѓа на $(-\infty,0)$.

ж) $y' = \ln x + 1$. $y' = \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{e},\infty\right)$.

$y' = \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1} \Leftrightarrow x \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$. Значи, функцијата расте на $\left(\frac{1}{e},\infty\right)$ и опаѓа на $\left(0,\frac{1}{e}\right)$. ●

4.120. Определи ги интервалите на монотоност на функциите:

а) $x = \frac{t^3}{1+t^2}, \ y = \frac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}, \ t \in \mathbf{R}$; б) $x = \frac{t^3}{1+t^2}, \ y = \frac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}, \ t \in \mathbf{R}$;

Решение. а) Од $x_t' = \dfrac{t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2}$ и $y_t' = \dfrac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(1+t^2)^2}$ следува

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)}.$$

Бидејќи $y_x' > 0$ за $t \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$ т.е. за $x \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{1}{2},\infty\right)$ следува дека функцијата монотоно расте на на интервалите $(-\infty,0)$ и $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. Од $y_x' < 0$ следува дека функцијата монотоно опаѓа на $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. б) Функцијата монотоно опаѓа на на интервалите $\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$ и (e,∞), а монотоно расте на интервалот $\left(-\frac{1}{e},e\right)$. ●

4.121. Нека f е непрекината функција на $[0,1]$,диференцијабилна на $(0,1)$, $f(0)=4$, $f(1)=2$, $f'(x) \geq -2$ $\forall x \in [0,1]$. Докажи дека $f(x)$ е линеарна функција.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $g(x) = f(x) + 2x - 4$. Таа е непрекината на $[0,1]$, диференцијабилна на $(0,1)$ и $g'(x) = f'(x) + 2 \geq -2+2 = 0$. Значи, g е монотоно растечка на $[0,1]$, а бидејќи, $g(0) = f(0) - 4 = 0$, $g(1) = 0$, имаме дека $g(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$ т.е. $f(x) = -2x+4$. ●

4.122. Ако функцијата g е монотоно растечка и диференцијабилна на $(0,\infty)$, а f диференцијабилна на $(0,\infty)$ и постои $x_0 \in (0,\infty)$ со особина $|f'(x)| \leq g'(x)$ за $x \geq x_0$, тогаш $|f(x) - f(x_0)| \leq g(x) - g(x_0)$ за $x \geq x_0$.

Решение. Функциите f и g ги задоволуваат условите на теоремата на Коши, па за секое $x \geq x_0$ постои $\xi \in (x_0,x)$ така што $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right| = \left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|$. Од условот на задачата, десната страна од последниот израз е помала од 1, па бидејќи g е монотоно растечка на $(0,\infty)$, имаме $|f(x)-f(x_0)| \leq |g(x)-g(x_0)| = g(x) - g(x_0)$ за $x \geq x_0$. ●

4.123. Покажете ги следните неравенства:

а) $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2},\ x \in \mathbf{R}$; б) $\operatorname{arctg} x \leq x,\ x \geq 0$.

Решение. а) Ако означиме $f(x)=\cos x$ и $g(x)=1-\frac{x^2}{2}$, имаме $f(0)=g(0)=1$ и $f'(x)=-\sin x$, $g'(x)=-x$. Функцијата $h(x)=x-\sin x$ е монотоно растечка и уште $h(0)=0$, па имаме $x-\sin x>0$ за $x>0$, т.е. $x>\sin x$ за $x>0$. Од $f'(x)>g'(x)$ за $x>0$ следува $f(x)>g(x)$ за $x>0$, т.е. $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$, $x>0$. Бидејќи функциите f и g се парни, за $x<0$ т.е. $-x>0$ имаме $f(x)=f(-x)>g(-x)=g(x)$.

б) Ако $f(x)=x-\operatorname{arctg}x,\ x\geq 0$, тогаш $f'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}>0$, значи функцијата монотоно расте. Нека $x\geq 0$, тогаш $f(x)\geq f(0)$ од каде што следува даденото неравенство. ●

4.124. Определи ги екстремните вредности на следните функции:

а) $f(x)=2x^3-15x^2+36x-14$; б) $f(x)=\frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$;

в) $f(x)=\operatorname{ch}x+\cos x$; г) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$;

Решение. а) Бидејќи $f'(x)=6x^2-30x+36=6(x-2)(x-3)$, стационарните точки на функцијата се $x=2$ и $x=3$. Вториот извод на функцијата е $f''(x)=12x-30$. Од $f''(2)=-6<0$ и $f''(3)=6>0$ следува дека во точката $x=2$ функцијата има локален максимум $f(2)=14$, а во точката $x=3$ локален минимум $f(3)=13$.

б) Функцијата е дефинирана и диференцијабилна на множеството $\mathrm{R}\setminus\{-1\}$. Првиот извод $f'(x)=\frac{(x+3)^2(x-3)}{(x+1)^3}$ се анулира за $x=-3$ и $x=3$. Лесно се проверува дека постои околина на точката $x=-3$ во која $f'(x)\geq 0$, т.е. не го менува знакот, па заклучуваме дека стационарната точка $x=-3$ не е точка на екстрем. Во точката $x=3$ функцијата има локален минимум бидејќи на пример за $\delta=1$ важи: $\forall x\in(3-\delta,3)$, $f(x)<0$ и $\forall x\in(3,3+\delta)$, $f(x)>0$.

в) Функцијата е диференцијабилна за сите $x\in\mathbf{R}$. Бидејќи $f'(x)=\operatorname{sh}x-\sin x$ и $\operatorname{sh}x-\sin x=0$ има само едно решение $x=0$, екстремот на функцијата може да биде само во таа точка. Вториот извод на функцијата е $f''(x)=\operatorname{ch}x-\cos x$.

Бидејќи $f''(0)=0$, бараме трет извод $f'''(x)=\operatorname{sh}x+\sin x$. И за него важи $f'''(0)=0$. Го бараме наредниот извод $f^{(4)}(x)=\operatorname{ch}x+\cos x$. Бидејќи $f^{(4)}(0)=2>0$, заклучуваме дека дадената функција има локален минимум во точката $x=0$.

г) Функцијата е дефинирана и непрекината за сите $x\in\mathbf{R}$. Првиот извод $f'(x)=\dfrac{4-3x}{\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}}$ не постои во точките $x=1$ и $x=2$. $f'(x)=0$ за $x=\dfrac{4}{3}$, $f'(x)<0$ за $x\in(-\infty,1)\cup\left(1,\dfrac{4}{3}\right)\cup(2,\infty)$, $f'(x)>0$ за $x\in\left(\dfrac{4}{3},2\right)$. Функцијата расте на интервалот $\left(\dfrac{4}{3},2\right)$ а опаѓа на интервалите $(-\infty,1)$, $\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$ и $(2,\infty)$. Значи, за $x=2$ функцијата достигнува локален максимум $f(2)=0$, а за $x=\dfrac{4}{3}$ локален минимум $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$. Првиот извод не го менува знакот во околина на точката $x=1$, па во оваа точка функцијата нема екстрем. ●

4.125. Определи ги екстремите на функциите $y=f(x)$:

а) $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; б) $x=\dfrac{t^3}{1+t^2},\ y=\dfrac{t^3-2t^2}{1+t^2},\ t\in\mathbf{R}$.

Решение. а) $y'_x=\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$; $y''_{xx}=\dfrac{-2}{e^t(\cos t+\sin t)^3}$ (види задача 4.65. под а)). Првиот извод се анулира за $t=\dfrac{\pi}{4}$, и бидејќи $y''_{xx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{-1}{e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\sqrt{2}}<0$, заклучуваме дека функцијата има локален максимум во точката $x=\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$. б) Анализирајќи ги интервалите на монотоност (задача 4.120.) заклучуваме дека во точката $x=-\dfrac{1}{e}$ функцијата има локален минимум, а во точката $x=e$, локален максимум. ●

4.11. Конвексни функции

1) Функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е конвексна (вдлабната) на интервалот (a,b) ако за секои $x_1,x_2\in(a,b)$, $\alpha\in(0,1)$ важи $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)<\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$.

2) Функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е конкавна (испакната) на интервалот (a,b) ако за секои $x_1,x_2\in(a,b)$, $\alpha\in(0,1)$ важи $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)>\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$.

3) Ако функцијата f е двапати диференцијабилна на отворен интервал (a,b), тогаш таа е

- конвексна на (a,b) ако за секое $x\in(a,b)$ важи $f''(x)>0$;
- конкавна на (a,b) ако за секое $x\in(a,b)$ важи $f''(x)<0$.

4) Ако точката $(c,f(c))$ е превојна точка на функцијата f, тогаш или $f''(x)=0$ или $f''(x)$ не постои.

Задачи:

4.126. Нека функциите f и g се конвексни на интервалот (a,b). Тогаш:

а) функцијата $tf+sg$, каде што $t,s>0$ е конвексна на (a,b);

б) функцијата $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ е конвексна на (a,b);

Решение. Нека $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, $\alpha\in(0,1)$ се дадени. Тогаш

а) $(tf+sg)(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=tf(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)+sg(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le$

$\le t\alpha f(x_1)+t(1-\alpha)f(x_1)+s\alpha\ \ g(x_1)\ +s(1-\alpha)g(x_2)=$

$=\alpha(tf(x_1)+sg(x_1))+(1-\alpha)ftf(x_2)+sg(x_2))=\alpha(tf+sg)(x_1)+(1-\alpha)(tf+sg)(x_2)$.

б) $h(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=\max\{f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2),g(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\}\le$

$$\le\max\{\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2),\alpha g(x_1)+(1-\alpha)g(x_2)\}\le$$
$$\le\max\{\alpha f(x_1),\alpha g(x_1)\}+\max\{(1-\alpha)f(x_2),(1-\alpha)g(x_2)\}\le$$

$$\le\alpha\max\{f(x_1),g(x_1)\}+(1-\alpha)\max\{f(x_2),g(x_2)\}=\alpha\ \ h(x_1)+(1-\alpha)h(x_2).$$ ●

4.127. Нека $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$. Докажете дека функцијата $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ е конвексна ако и само ако е конвексна функцијата $h(x)=xf(x)$.

Решение. Нека функцијата g е конвексна и нека $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, $\alpha\in(0,1)$ се дадени. Имаме:

$$h(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=\left(\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}\right)f\left(\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}\right)f\left(1\Bigg/\left(\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_1+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_2\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}\right)g\left(\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_1+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_2\right)=$$

$$=\left(\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}\right)g\left(\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_1+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_2\right)\le$$

$$\le\left(\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}\right)\left(\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}g(u_1)+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}g(u_2)\right)=$$

$$=\frac{\alpha}{u_1}g(u_1)+\frac{1-\alpha}{u_2}g(u_2)=\frac{\alpha}{u_1}f\left(\frac{1}{u_1}\right)+\frac{1-\alpha}{u_2}f\left(\frac{1}{u_2}\right)=.$$

$$=\alpha x_1 f(x_1)+(1-\alpha)x_2 f(x_2)=\alpha h(x_1)+(1-\alpha)h(x_2)$$

Притоа воведовме смена $x_i=\frac{1}{u_i}, i=1,2$, искористивме конвексноста на g, како и фактот дека $\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}\in(0,1)$, $\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}\in(0,1)$ и $\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}=1$.

Покажавме дека и функцијата h е конвексна.

Обратно, ќе покажеме дека ако h е конвексна функција, тогаш и g е конвексна. Нека $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, $\alpha\in(0,1)$ се дадени. Слично како во првиот дел на доказот добиваме:

$$g\left(\alpha\quad x_1+(1-\alpha)x_2\right)=g\left(\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}\right)=$$

$$=g\left(1\Bigg/\left(\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_1+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_2\right)\right)=f\left(\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_1+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_2\right)=$$

$$=\left(\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}\right)\left(\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_1+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_2\right)f\left(\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_1+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_2\right)=$$

$$=\left(\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}\right)h\left(\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_1+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}u_2\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}\right)\left(\frac{\frac{\alpha}{u_1}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}h(u_1)+\frac{\frac{1-\alpha}{u_2}}{\frac{\alpha}{u_1}+\frac{(1-\alpha)}{u_2}}h(u_2)\right)=$$

$$=\frac{\alpha}{u_1}h(u_1)+\frac{1-\alpha}{u_2}h(u_2)=\frac{\alpha}{u_1}u_1f(u_1)+\frac{1-\alpha}{u_2}u_2f(u_2)=$$

$$=\alpha\quad f\left(\frac{1}{x_1}\right)+(1-\alpha)f\left(\frac{1}{x_2}\right)=\alpha\quad g(x_1)+(1-\alpha)g(x_2)\,.\ \bullet$$

4.128. Покажете дека за секои $a,b\in(0,\infty)$, $\lambda\in(0,1)$ е исполнето неравенството:

$$ab\leq\lambda a^{\frac{1}{\lambda}}+(1-\lambda)b^{\frac{1}{1-\lambda}}\,.$$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=e^x, x\in\mathbf{R}$. Бидејќи $f'(x)=e^x$ е строго монотоно растечка на целата реална права, следува дека функцијата е строго конвексна на цело $\mathbf{R}$. Ставаме $x_1=\frac{\ln a}{\lambda}$, $x_2=\frac{\ln b}{1-\lambda}$ и добиваме $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda\quad f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ за секои $a,b\in(0,\infty)$, $\lambda\in(0,1)$, односно $e^{\lambda\frac{\ln a}{\lambda}+(1-\lambda)\frac{\ln b}{1-\lambda}}\leq\lambda\quad e^{\frac{\ln a}{\lambda}}+(1-\lambda)e^{\frac{\ln b}{1-\lambda}}$. Според тоа $e^{\ln ab}\leq\lambda\quad e^{\ln a^{1\lambda}}+(1-\lambda)e^{\ln b^{\frac{1}{1=\lambda}}}$, од што добиваме $ab\leq\lambda a^{\frac{1}{\lambda}}+(1-\lambda)b^{\frac{1}{1-\lambda}}$. ●

4.129. Испитај ја конвексноста и конкавноста на функциите:

а) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x-4$;

б) $y=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$;

в) $y=\frac{1}{x^2}$;

г) $y=x^2-2x+1$;

д) $y=x-\frac{1}{x}$;

ѓ) $y=\sqrt{x+2}$;

е) $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$;

ж) $y=x\ln x$.

Решение: а) $y'=x^2-3x+2$; $y''=2x-3$.

Функцијата $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x-4$ е конвексна во точките x за кои важи $y''(x)>0$, додека е конкавна таму каде што $y''(x)<0$.

За $x\in\left(\frac{3}{2},\infty\right)$, $y''(x)>0$, што значи дека функцијата е конвексна на $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$. За $x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$, $y''(x)<0$, што значи дека функцијата е конкавна на $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$.

б) $y'=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$; $y''=\frac{2e^x(-e^{2x}+e^x-1)}{(e^x+1)^4}<0,\ \forall x$. Значи, функцијата $y=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ е конкавна на дефиниционата област.

в) $y'=-\frac{2}{x^3}$. $y''=\frac{6}{x^4}>0,\ \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Значи, функцијата $y=\frac{1}{x^2}$ е конвексна на дефиниционата област.

г) $y''=2>0$ за сите $x\in\mathbf{R}$, па функцијата е конвексна.

д) $y''=-\frac{1}{x^3}$. Ако $x<0$, тогаш $y''>0$, додека за позитивни x, $y''<0$. Значи, функцијата е конвексна на интервалот $(-\infty,0)$ и конкавна на $(0,\infty)$.

ѓ) Функцијата $y=\sqrt{x+2}$ е конкавна на дефиниционата област, бидејќи $y''=-\frac{1}{4(x+2)^2\sqrt{x+2}}<0,\ \forall x\in(-2,\infty)$.

е) Функцијата е конвексна на интервалот $(-1,1)$, а конкавна на интервалите $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$.

ж) $y''=\frac{1}{x}>0,\ \forall x\in(0,\infty)$. Функцијата е конвексна. ●

4.12. График на функција

Испитувањето на функциите ќе го вршиме по следниот редослед:

1) Ја наоѓаме дефинициoната област, точките на прекин. Ја определуваме периодичноста и парноста на функцијата, го определуваме знакот на функцијата и ги наоѓаме пресечните точки на кривата со координатните оски.
2) Однесување на функцијата во околини на граничните точки од дефинициoната област. Ги определуваме асимптотите на функцијата.
3) Ги наоѓаме локалните екстреми и интервалите на монотоност.
4) Конвексност и конкавност. Точки на превој.
5) Скицирање график.

Задачи

Испитај го текот и скицирај го графикот на функциите:

4.130 $f(x)=\dfrac{(x+2)^3}{(x-2)^2}$.

Решение. 1) Дробно рационалната функција е дефинирана за сите вредности на аргументот за кои именителот е различен од нула. Според тоа, дефинициoната област е множеството $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$**,** а точката $x=2$ е точка на прекин**.** Бидејќи дефинициoната област не е симетрично множество во однос на координатниот почеток, функцијата не е ниту парна, ниту непарна, ниту периодична. За $x>-2$, $f(x)>0$, а за $x<-2$, $f(x)<0$. За $x=-2$, $f(x)=0$, за $x=0$, $f(x)=2$.

2) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x+2)^3}{(x-2)^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x+2)^3}{(x-2)^2}=+\infty$. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x+2)^3}{(x-2)^2}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x+2)^3}{(x-2)^2}=+\infty$.

Вертикална асимптота е $x=2$. Функцијата нема хоризонтални асимптоти.

Од , $k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)^3}{x(x-2)^2}=1$, $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+2)^3}{x(x-2)^2}=1$,

$n_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(x+2)^3}{(x-2)^2}-x\right)=10$, $n_2=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=10$,

заклучуваме дека коса асимптота е $y=x+10$.

3) Прв извод на функцијата е: $f'(x)=\dfrac{(x+2)^2(x-10)}{(x-2)^3}$. Нули на првиот извод, т.е. стационарните точки за функцијата се: $x_1=-2$ и $x=10$.

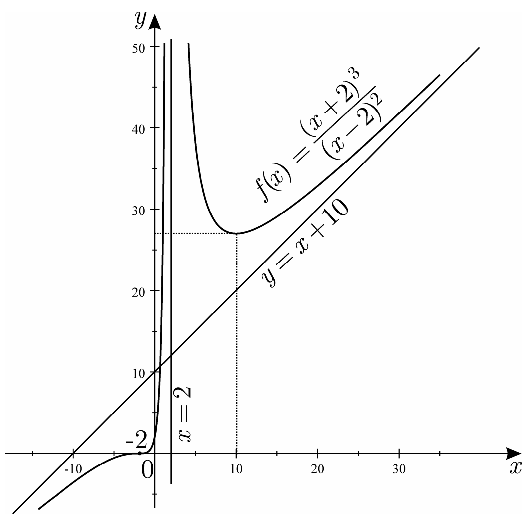
Вториот извод на функцијата е: $f''(x)=\dfrac{96(x+2)}{(x-2)^4}$. Бидејќи $f''(10)>0$, точката $x=10$ е точка на локален минимум. Од $f''(-2)=0$ и $f'''(-2)=\dfrac{96}{(-4)^4}\neq 0$ следува дека точката $x=-2$ не е точка на локален екстрем.

Испитуваме монотоност на функцијата на интервалите: $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(2,10)$ и $(10,+\infty)$. Функцијата монотоно расте на интервалите $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ и $(10,+\infty)$, бидејќи таму $f'(x)>0$, а монотоно опаѓа на интервалот $(2,10)$ бидејќи $f'(x)<0$ $\forall x\in(2,10)$.

4) Вториот извод на функцијата $f''(x)=\dfrac{96(x+2)}{(x-2)^4}$ е нула за $x=-2$ и функцијата f'' го менува знакот во околина на -2, што значи дека $x=-2$ е превојна точка за функцијата.

Од $f''(x)>0$ за $x>-2$ следува дека функцијата е конвексна на интервалите $(-2,2)$ и $(2,+\infty)$, а од $f''(x)<0$ за $x<-2$ следува дека функцијата е конкавна на $(-\infty,-2)$.

5.



4.131. $f(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^2}$.

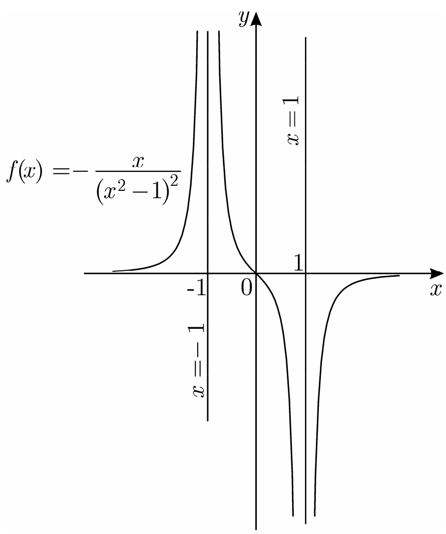
Решение. 1) Функцијата е дефинирана за секој x, освен за $x=-1$ и $x=1$. Бидејќи $f(-x)=-f(x)$, функцијата е непарна , па доволно е испитувањата да ги вршиме само на интервалите $[0,1)$ и $(1,\infty)$. Графикот на функцијата ја сече $x-$ оската во точката $x=0$.

2) Од $\lim\limits_{x\to 1^-} -\frac{x}{(x^2-1)^2} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1^+} -\frac{x}{(x^2-1)^2} = -\infty$ следува дека правата $x=1$ е вертикална асимптота на кривата. Аналогно се добива дека и правата $x=-1$ е вертикална асимптота. Од $\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{x}{(x^2-1)^2} = 0$ следува дека правата $y=0$ е хоризонтална асимптота. Притоа, нема и коси асимптоти.

3) Изводот $f'(x) = \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$ не се анулира ниту за едно x. За $x\in[0,1)$, $f'(x)<0$, што значи дека функцијата монотоно опаѓа. Функцијата монотоно расте на интервалот $(1,\infty)$, бидејќи $f'(x)>0$ на $(1,\infty)$.

4) Вториот извод $f''(x) = -\frac{12x(x^2+1)}{(x^2-1)^4}$ се анулира во точката $x=0$, што значи дека точката $(0,0)$ е превојна точка на функцијата. Функцијата е конкавна на интервалите $[0,1)$ и $(1,\infty)$.

5)



4.132 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

Решение. 1) Функцијата е дефинирана за секој $x\in\mathbb{R}$, бидејќи $x^2+x+1>0$, $x\in\mathbb{R}$. Исто така $x^2-x+1>0$ за секое $x\in\mathbb{R}$, па функцијата нема реални нули и секогаш е позитивна. За $x=0$, $f(x)=1$. Дадената функција не е парна, непарна ниту периодична.

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=1$. Според тоа, правата $y=1$ е хоризонтална асимптота на дадената функција. Функцијата нема вертикални и коси асимптоти. Проверете.

3) Првиот извод $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$ се анулира за $x=-1$ или $x=1$. $f'(x)>0$ за $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ и $f'(x)<0$ за $x\in(-1,1)$, ја формираме приложената табела од која се гледа дека за $x=-1$ функцијата достигнува максимум $f_{\max}=f(-1)=3$, а за $x=1$ функцијата достигнува минимум $f_{\min}=f(1)=\dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	$\uparrow$	3	$\downarrow$	$\frac{1}{3}$	$\uparrow$	1

4) За вториот извод $f''(x)=4\dfrac{-x^3+3x+1}{(x^2+x+1)^3}$ е непрекината функција, и

$$f''(-2)>0, f''(-1)<0, f''(0)>0, f''(1)>0, f''(-2)<0,$$

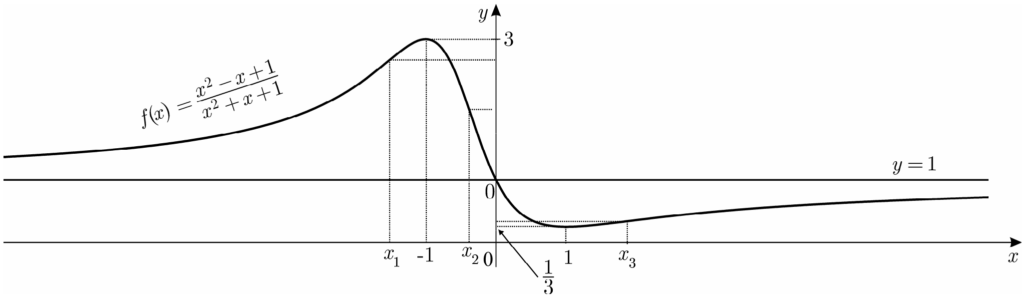
па тој има нули во $x=x_1$, $x=x_2$ и $x=x_3$ кои се во интервалите $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(1,2)$, соодветно, и тие се сите негови нули. Според тоа на интервалите $(-\infty,x_1)$, (x_1,x_2), (x_2,x_3), (x_3,∞) овој извод не го менува знакот.

Бидејќи $f''(-2)>0$ следува дека $f''(x)>0$ за секој $x\in(-\infty,x_1)$, па таму функцијата е конвексна.

Заради $-1\in(x_1,x_2)$ и $f''(-1)<0$ следува дека $f''(x)<0$ на (x_1,x_2), па f е конкавна.

Слично, f е конвексна на (x_2,x_3) и конкавна на (x_3,∞)

5)



4.133. $f(x)=\left|x-2\right|e^{-\frac{1}{x}}$.

Решение. 1) Дефиниционата област на функцијата е

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Точката $x=0$ е точка на прекин. Функцијата не е ниту парна, ниту непарна, ниту периодична. За, $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$ $f(x)>0$, а за $x=2$, $f(x)=0$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^-}|x-2|e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}|x-2|e^{-\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}|x-2|e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}|x-2|e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$.

Вертикана асимптота е $x=0$. Функцијата нема хоризонтална асимптота. Од

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left|x-2\right|e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\left|x-2\right|e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left((x-2)e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-3$$

следува дека коса асимптота кон ∞ е $y=x-3$.

Слично,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left|x-2\right|e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x}=-1 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left|x-2\right|e^{-\frac{1}{x}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-(x-2)e^{-\frac{1}{x}}+x\right)=3$$

следува дека коса асимптота кон $-\infty$ е $y=-x+3$.

3) Функцијата не е диференцијабилна во точката $x=2$ заради

$$f'_{\pm}(2)=\lim_{\Delta x\to 0^{\pm}}\frac{|\Delta x|\exp\left(-\frac{1}{2+\Delta x}\right)}{\Delta x}=\pm\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Првиот извод на функцијата е $f'(x)=\begin{cases}-e^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x^2+x-2}{x^2}, & x<2\\ e^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x^2+x-2}{x^2}, & x>2\end{cases}$.

Нули на првиот извод се: $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

Функцијата расте кога $f'(x) > 0$, т.е на интервалите $(-2,0)$, $(0,1)$ и $(2,\infty)$ а опаѓа кога $f'(x) < 0$, т.е на $(-\infty,-2)$ и $(1,2)$.

Вториот извод на функцијата е: $f''(x) = \begin{cases} -e^{-\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{5x-2}{x^4}, & x < 2 \\ e^{-\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{5x-2}{x^4}, & x > 2 \end{cases}$.

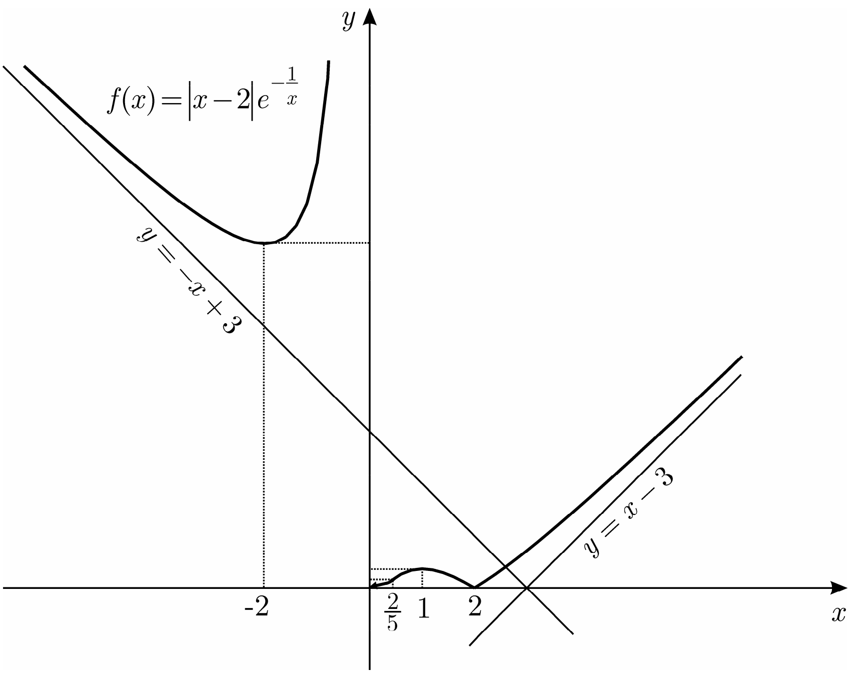
$f''(-2) > 0$, па за $x = -2$ функцијата има локален минимум.

$f''(1) < 0$, значи за $x = 1$ функцијата има локален максимум.

Во $x = 2$ може да има локален екстрем, но тој не може да се испита со извод. Бидејќи $f'\left(x\right) < 0$ за $x \in \left(1,2\right)$ и $f'\left(x\right) > 0$ за $x \in \left(2,\infty\right)$ следува дека точката $\left(2,0\right)$ е локален минимум (заклу;окот може да се изведе и од тоа што $f\left(x\right) \geq 0$ за секој $x \in D_f$, f е непрекината во секој $x \in D_f$ и $f\left(2\right) = 0$).

4) Функцијата е конвексна на $\left(-\infty,\dfrac{2}{5}\right) \setminus \left\{0\right\}$ и $(2,\infty)$, а конкавна на $\left(\dfrac{2}{5},2\right)$.

5)



4.134. $f(x) = x\sqrt[3]{x+1}$.

Решение. 1) Дефиниционата област на дадената функција е $\mathbb{R}$. Функцијата е непрекината на $\mathbf{R}$, нули на функцијата се $x=0$ и $x=-1$. $f(x)>0$ за $x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$ и $f(x)<0$ за $x\in(-1,0)$. Функцијата не е периодична, парна, непарна. Дадената функција поминува низ точките $(0,0)$ и $(-1,0)$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt[3]{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{x+1}=+\infty$. Дадената функција нема асимптоти.

3) Функцијата не е диференцијабилна во точката $x=-1$:

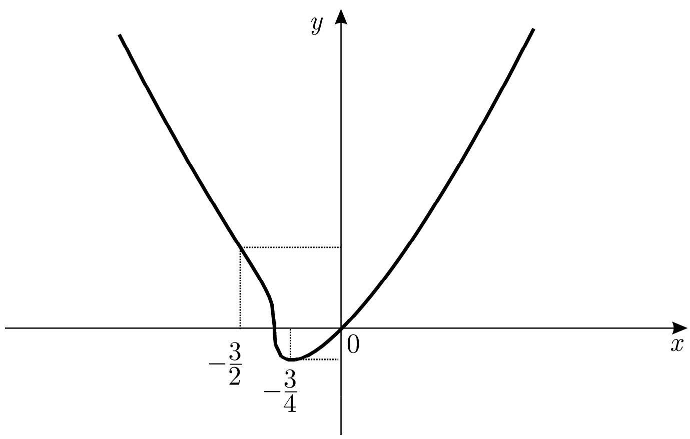
$f'_{\pm}(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{\pm}}\dfrac{(\Delta x-1)\cdot\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=-\infty$. Првиот извод на функцијата е $f'(x)=\dfrac{4x+3}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ и тој се анулира за $x=-\dfrac{3}{4}$. Функцијата расте кога $f'(x)>0$, т.е на интервалот $\left(-\dfrac{3}{4},\infty\right)$, а опаѓа кога $f'(x)<0$, т.е на $(-\infty,-1)$ и $\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right)$.

Точката $(-1,0)$ не е екстрем бидејќи f опаѓа на $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right)$.

Вториот извод на функцијата е: $f''(x)=\dfrac{4x+6}{3(x+1)\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. $f''\left(-\dfrac{3}{4}\right)>0$, па за $x=-\dfrac{3}{4}$ функцијата има локален минимум.

4) Функцијата е конвексна на интервалите $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$ и $(-1,\infty)$, а конкавна на $\left(-\dfrac{3}{2},-1\right)$.

5)



4.135. $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$.

Решение. 1) Функцијата е дефинирана и непрекината на целата реална права. $f(x)<0$ за $x<-1$ и $f(x)>0$ за $x\in(-1,2)\cup(2,\infty)$. Нули на функцијата се $x=-1$ и $x=2$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}=-\infty$.

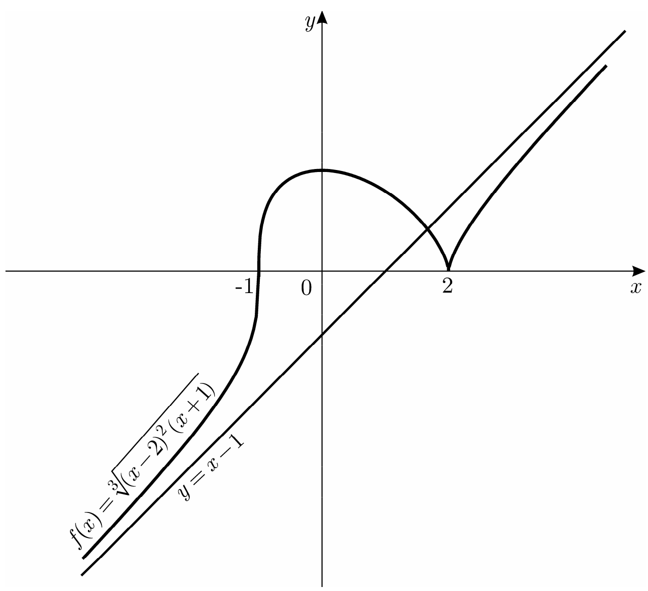
Од $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}-x\right)=-1$ заклучуваме дека правата $y=x-1$ е коса асимптота на функцијата.

3) Функцијата е диференцијабилна за сите $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,2\}$ и $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}$.

$f'(x)=0$ за $x=0$, $f'(x)>0$ за $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(2,\infty)$, $f'(x)<0$ за $x\in(0,2)$. Функцијата расте на интервалите $(-\infty,0)$ и $(2,\infty)$ а опаѓа на интервалот $(0,2)$. Значи, за $x=0$ функцијата достигнува локален максимум $f(0)=\sqrt[3]{4}$, а за $x=2$ локален минимум е $f(2)=0$.

4) Вториот извод на функцијата е $f''(x)=\dfrac{-2}{\sqrt[3]{(x-2)^4(x+1)^5}}$. Функцијата е конвексна на интервалот $(-\infty,-1)$ а конкавна на интервалите $(-1,2)$ и $(2,\infty)$. Превојна точки се $x=-1$ и $x=2$.

5)



4.136. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x^2}}$.

Решение. 1) Дефиниционата област е множеството $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$**,** а точките $x=\pm1$ се точки на прекин**.** Функцијата е парна, па графикот е симетричен во однос на правата $x=0$. За $x\in(-1,1)$, $f(x)>0$, а за $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, $f(x)<0$. За $x=0$, $f(x)=0$.

2) $\lim\limits_{x\to-1^-}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x^2}}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x^2}}=+\infty$. $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x^2}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x^2}}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x^2}}=-1$. Вертикална асимптоти се $x=-1$ и $x=1$. Хоризонтална асимптота: $y=-1$. Дадената функција нема коси асимптоти.

3) Функцијата не е диференцијабилна во точката $x=0$:

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{\Delta x^2}{1-\Delta x^2}}}{\Delta x}=-\infty \text{ и } f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{\Delta x^2}{1-\Delta x^2}}}{\Delta x}=+\infty .$$

Првиот извод на функцијата за $x\neq0$ е $f'(x)=\dfrac{2}{3(1-x^2)\cdot\sqrt[3]{x(1-x^2)}}$. $f'(x)\neq0$ за секое x. Монотоноста на функцијата ќе ја прикажеме на следната табела:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		-		+		+	
$f(x)$	-1	$\downarrow$	$-\infty$, $+\infty$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$+\infty$, $-\infty$	$\uparrow$	-1

Од табелата можеме да заклучиме дека во точката $(0,0)$ функцијата има локален минимум.

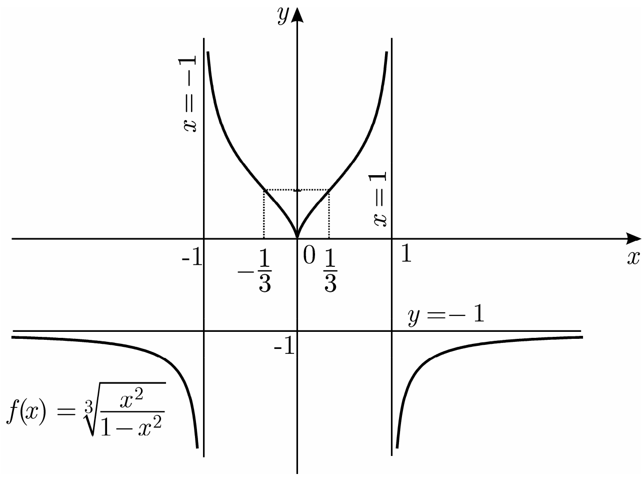
4) Вториот извод на функцијата е: $f''(x)=\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{x^2(1-x^2)^2}\,(9x^2-1)}{9x^2(1-x^2)^3}$, $x\notin\{-1,0,1\}$.

$f''(x)=0$ за $x=-\dfrac{1}{3}$ и $x=\dfrac{1}{3}$. Конвексноста на функцијата ќе ја прикажеме на следната табела:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		-		+		-		-		+		-	

Според тоа, функцијата е конвексна на интервалите $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{1}{3},1\right)$ а конкавна на интервалите $(-\infty,-1)$, $\left(-\frac{1}{3},0\right)$, $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ и $(1,+\infty)$. Превојни точки се $x=-\frac{1}{3}$ и $x=\frac{1}{3}$.

5)



4.137 $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. 1) Дефинициона област на функцујата е $\mathbf{R}$. Функцијата е парна. $f(0)=-1$ и $f(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbf{R}$.

2) Функцијата нема вертикални асимптоти.

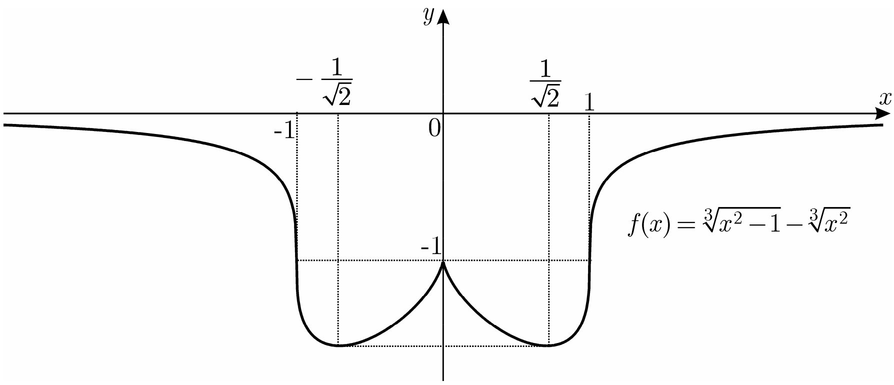
Од $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[3]{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2\left(x^2-1\right)}+\sqrt[3]{x^4}}=0$ следува дека функцијата $y=0$ е хоризонтална асимптота. Функцијата нема коси асимптоти.

3) Првиот извод е $f'(x)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}$. Функцијата не е диференцијабилна во

$x=-1$, $x=0$ и $x=1$. Првиот извод се анулира за $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. На интервалите $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$ функцијата расте, додека монотоно опаѓа на интервалите $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Значи, точките $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ се точки на локален минимум. Функцијата има локален максимум во точката за $x=0$, иако во оваа точка функцијата не е диференцијабилна.

4) Вториот извод е $f''(x)=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}-\frac{3+x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}\right)$. Функцијата е конвексна за $x\in(-1,0)\cup(0,1)$, а конкавна за $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Превојни точки се: $x=1$ и $x=-1$.

5)



4. 138 $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

Решение. 1) Дефиниционата област на функцијата е $\mathbf{R}$. Бидејќи $f(-x)=(-x+1)^{\frac{2}{3}}-(-x-1)^{\frac{2}{3}}=-\left((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)=-f(x)$, следува дека функцијата е непарна, затоа е доволно да ја испитаме функцијата на $(0,+\infty)$. Нула на функцијата е $x=0$. Ако $x>0$, тогаш $f(x)>0$. Заради непарноста на функцијата, заклучуваме дека $f(x)<0$ за $x\in(-\infty,0)$.

2) Од $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)=0$ заклучуваме дека $y=0$ е хоризонтална асимптота на функцијата .

3) Функцијата не е диференцијабилна во точката $x=1$ (заначи и во $x=-1$), бидејќи левиот и десниот извод во таа точка се разликуваат:

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+\Delta x+1)^{\frac{2}{3}}-(1+\Delta x-1)^{\frac{2}{3}}-(1+1)^{\frac{2}{3}}+(1-1)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(2+\Delta x)^{\frac{2}{3}}-(\Delta x)^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{4}}{\Delta x}=+\infty$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(1+\Delta x+1)^{\frac{2}{3}}-(1+\Delta x-1)^{\frac{2}{3}}-(1+1)^{\frac{2}{3}}+(1-1)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}=-\infty\,.$$

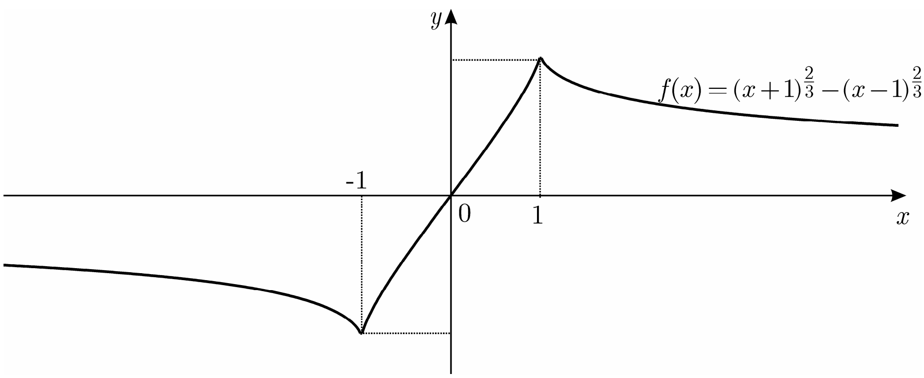
За $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, првиот извод на функцијата е: $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\right)$.

$f'(x)\neq 0$, $\forall\ x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$. Функцијата монотоно расте на интервалот $(-1,1)$, а опаѓа на интервалите $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$. Значи во точката $\left(-1,-\sqrt[3]{4}\right)$ функцијата има минимум, а во точката $\left(1,\sqrt[3]{4}\right)$ функцијата има максимум.

4) Вториот извод на функцијата е $f''(x)=-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\left(x+1\right)^{\frac{4}{3}}}-\frac{1}{\left(x-1\right)^{\frac{4}{3}}}\right)$. За $x=0$, $f''(x)=0$.

Вториот извод е позитивен на интервалите $(0,1)$ и $(1,\infty)$, значи таму функцијата е конвексна. Функцијата е конкавна на интервалите $(-\infty,-1)$ и $(-1,0)$.

5)



4.139 $f(x)=\frac{x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)$.

Решение. 1) Дефиниционата област е множеството $\left\{x:x\in\mathbf{R},e-\frac{1}{x}>0\right\}=$ $=(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$. Нули на функцијата се $x=0$ и $x=\frac{1}{e-1}$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{\left(e-\frac{1}{x}\right)x^2}}{-\frac{2}{x^2}}=0$;

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+}\frac{x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)=\infty$. Вертикална асимптота е $x=\frac{1}{e}$.

Функцијата нема хоризонтални асимптоти.

Од , $k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)}{2}=\frac{1}{2}$, $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)}{2}=\frac{1}{2}$,

$n_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)-1\right)=-\frac{1}{2e}$, $n_2=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=-\frac{1}{2e}$,

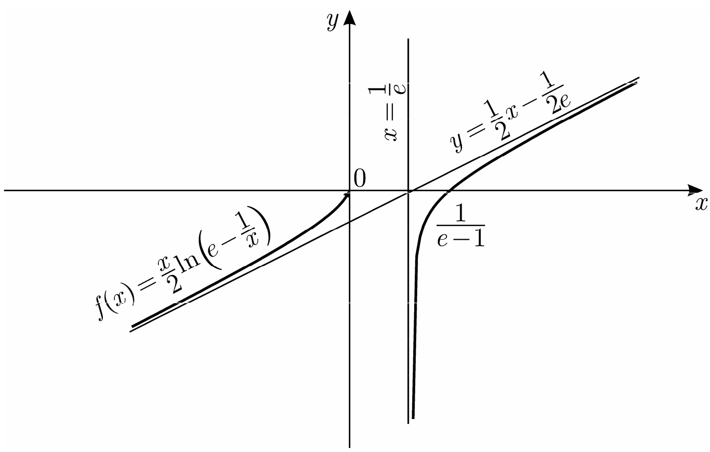
заклучуваме дека коса асимптота е $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2e}$.

3) Првиот извод на функцијата е $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\ln\left(e-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{ex-1}\right)$. Функцијата монотоно расте на интервалите $(-\infty,0)$ и $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

4) Вториот извод е $f''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(ex-1)x}-\frac{e}{(ex-1)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{ex-1-ex}{x(ex-1)^2}\right)=\frac{-1}{2x(ex-1)^2}$.

Функцијата е конвексна на нтервалот $(-\infty,0)$ и конкавна на $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

5)



4.140 $f(x)=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Решение. 1) Дефинициона та област на функцијата е множеството $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Нула на функцијата е $x=-1$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$;

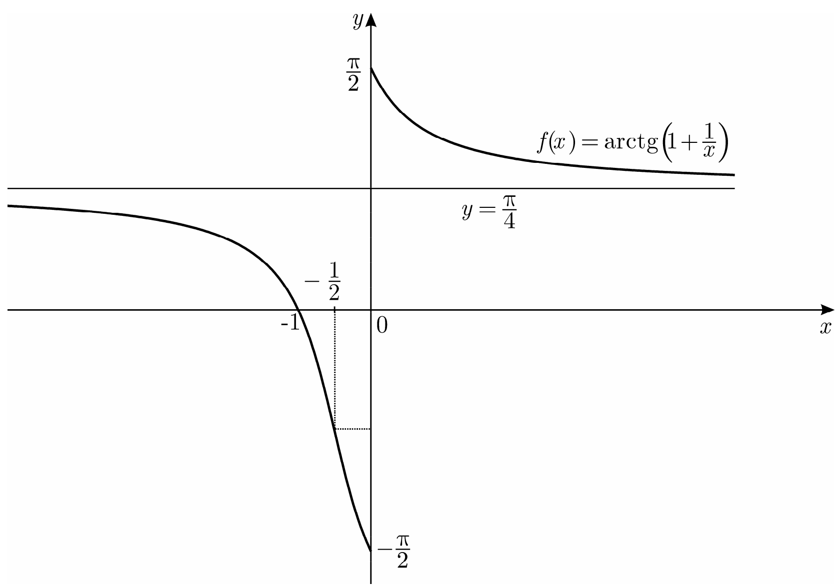
$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Значи, функцијата нема вертикална асимптота. Хоризонтална асимптота е правата $y=\frac{\pi}{4}$.

3) Функцијата е диференцијабилна во секоја точка од дефиниционата област и првиот извод е $f'(x)=\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{2x^2+2x+1}$. Бидејќи $f'(x)<0$ за секое x од дефиниционата област, следува дека функцијата монотоно опаѓа на интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$.

4) Вториот извод на функцијата е $f''(x)=\frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}$. Функцијата е конкавна на интервалот $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, а конвексна на интервалите $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ и $(0,\infty)$. Точката $x=-\frac{1}{2}$ е превојна точка.

5)



V. Задачи од писмени испити

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел)	април, 2003

1. а) Нека $A \subseteq [0,1]$ е такво што $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\exists x_n \in A)$ т.ш. $x_n > \frac{n-1}{n}$. Пресметај $\sup A$. (со образложение)

б) Пресметај $\sup A$ и $\inf A$ (со образложение), ако $A = \left\{ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\frac{2n+3}{2n+2} \right)^n \middle| \; n \in \mathbb{N} \right\}$

2. а) Нека (x_n) е низа од реални броеви така што постои $c \in \mathbb{R}$ т.ш.

$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \; . \; . \; . \; + |x_n - x_1| < c$ за секој $n \in \mathbb{N}$. (1)

Докажи дека низата (x_n) конвергира.

б) Дали низата $x_n = \frac{1-(-1)^n}{n}$

i) конвергира; ii) го исполнува условот (1) ?

3. Испитај рамномерна непрекинатост на функциите:

а) $f(x) = x + \sin x$ на на $\mathbb{R}$; б) $f(x) = e^x \cos\frac{1}{x}$ на $(0,1)$.

4. Испитај ја диференцијабилноста на функциите:

а) $f(x) = |x^2 - 9x + 20|$ б)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1 \\ \operatorname{arctg} x, & |x| < 1 \end{cases}.$$

5. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата: $f(x) = |x| e^{-\frac{1}{x}}$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел)	21.12.2001 год.

1. а) Пресметај (со образложение) $\sup A$ и $\inf A$ ако

$$A = \left\{ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{5 \cdot 2^n + 1}{2^n + 3} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}.$$

б) Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи неравенството

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \; . \; . \; . \; + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

2. а) Испитај ја конвергенцијата на низата $\frac{1}{\sin 1} + \frac{2}{\sin 2} + \; . \; . \; . \; + \frac{n}{\sin n}$.

б) Нека $A \subseteq \mathbb{R}$ и $M = \sup A$. Докажи дека постои низа (x_n) т.ш. $x_n \in A$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$.

3. Испитај непрекинатост на функциите:

а) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}\ , & x \neq 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$ б) $f(x) = [x]\sin \pi x$

4. Пресметај ја левата и десната гранична вредност на функцијата $f(x)$ во точката x_0 ако:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + e^{2-x}}$, $x_0 = 2$ б) $f(x) = \arcsin(x+1)$, $x_0 = 0$.

5. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата: $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) јануари 2004

1.(15) а) Пресметај $\sup A$ и $\inf A$ каде $A = \left\{ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \middle| x \in [-2,2] \right\}$.

б) Нека (a_n) е низа од реални броеви дефинирана со $a_n = \dfrac{5n+4}{3n-2}$. Најди природен број k така што за секој $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq k$ важи $a_n \in \left(\dfrac{1664}{999}, \dfrac{1666}{999} \right)$.

2. (15) Нека $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ се пресликувања дефинирани со $f(m) = 5m$ и $g(m) = |3m|$, $A = \{-21,-20,-13,-9,-8,-5,0,1,3,7,15\}$ и $B = \{1,2,3,8,10,12,17\}$.

а) Најди ги $f^{-1}(A)$, $g(A)$, $g^{-1}(B)$, gf;

б) Дали постојат f^{-1} и g^{-1}? Ако постојат, најди ги правилата со кои пресликувањата се определени.

3. (20) а) Испитај ја конвергенцијата на низата $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, каде (a_n) е конвергентна низа од реални броеви. Ако (b_n) конвергира најди $\lim\limits_{n\to 0} b_n$.

б) Нека за низите од реални броеви (a_n) и (b_n) важи $a_n \leq b_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

4. (20) Испитај ја непрекинатоста и диференцијабилноста на функциите

а) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ 1-x, 0\le x\le 1\\ 0, x>1\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, x<-4\\ \operatorname{arctg} x, -4\le x<4\\ \frac{\pi}{2}, x\ge 4\end{cases}$; в) $f(x)=\begin{cases}2^x, x<0\\ \frac{1}{2^x}, x\ge 0\end{cases}$

и скицирај ги нивните графици.

5.(15) Со примена на теоремите за средна вредност докажи дека равенката $\sin x=\frac{2}{\pi}x$ има единствено решение на $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$.

6.(15) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x^2-2}$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) 24.01.2002 год.

1. а) Пресметај (со образложение) $\sup A$ и $\inf A$ каде

$A=\left\{\frac{mn}{4m^2+n^2}\ \middle|\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Дали A има најголем и најмал елемент? Во случај на потврден одговор најди ги.

б) Докажи дека $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$ за секои реални броеви a,b,c такви што $a+b+c=1$ и $4a+1,4b+1,4c+1>0$.

2. а) За низата (x_n) важи:

постои $R\in\mathbb{R}^+$ т.ш. $|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ .\ .\ .\ +|x_n-x_{n-1}|<R$ за секој $n\in\mathbb{N}$. (1)

Докажи дека низата (x_n) конвергира.

б) Дали за низата $x_n=\frac{1-(-1)^n}{5n}$ важи (1)? Дали (x_n) конвергира?

3. а) Пресметај (без лопиталово правило)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3+2x)-2\cos(3+x)+\cos 3}{x^2}.$$

б) Испитај непрекинатост на $\mathbb{R}$ на функцијата $f(x)=\begin{cases}\left[\frac{1}{x}\right], & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

4. а) Најди прв извод на функцијата $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x\ge 0\\ e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0\end{cases}$. Дали првиот извод е непрекината функција на $\mathbb{R}$?

б) Пресметај со помош на маклореновата формула $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

5. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=|x-3|e^{x-1}$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) 6.02.20020год.

1. (15) Дадени се множествата $A=\left\{\frac{3}{3n-1} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}$ и $B=\left\{1+\frac{2(-1)^n}{n} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}$.

   Одреди $\sup A,\ \inf A,\ \sup B,\ \inf B$ (со образложение). Дали A и B имаат најголем и најмал елемент? Во случај на потврден одговор најди ги.

2. (20) а) Испитај конвергенција на низата $a_n=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ \ldots\ +\frac{1}{\ln n}$.

   б) Одреди $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$ за низата $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{2}$.

3. (20) Определи го реалниот број a (ако постои) така што функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати на R, каде $f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1} & , \ x\neq -1\\ a & , \ x=-1\end{cases}$ и

   $$g(x)=\begin{cases}\cos^2\frac{1}{x} & , \ x\neq 0\\ a & , \ x=0\end{cases}.$$

4. (15) Пресметај ја левата и десната гранична вредност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x^2+e^{\frac{1}{3-x}}}$ во точката $x_0=3$.

5. (15) Најди прв извод на функцијата $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & , \ x\neq 0\\ 0 & , \ x=0\end{cases}$.

6. (15) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x+1}$.

Втор колоквиум по математичка анализа I (прв дел) 17.I-2002 год.

1. Испитај непрекинатост на $\mathbb{R}$ на функциите:

   а) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & , \ x\neq 0\\ 0 & , \ x=0\end{cases}$ б) $f(x)=[x]\sin\pi x$

2. Докажи дека функцијата $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ е рамномерно непрекината на $(0,1)$ и на $(-1,0)$ но не е рамномерно непрекината на $(-1,0)\cup(0,1)$.

3. а) Пресметај проближно $\operatorname{arctg}1{,}05$.

б) Пресметај со помош на маклореновата формула $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

4. а) Определи ги реалните броеви a и b така што функцијата $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|}, x>c\\ a+bx^2, x\le c\end{cases}$ има непрекинат извод.

б) Испитај диференцијабилност на функцијата $f(x)=|x^2-5x+6|$ на $\mathbb{R}$.

5. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=|1-x|(3x^2-2x-1)$.

Писмен испит по метематчка анализа I (прв дел) 7.02.2003 год.

1. (15) Нека $A=\left\{\dfrac{mn}{9m^2+4n^2}\,\middle|\, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$. Определи ги со образложение) $\sup A$ и $\inf A$. Дали A има најголем и најмал елемент?

2. (15) Докажи дека за секој природен број n важи $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

3. (20) Нека низата (a_n) конвергира и нака $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4. (15) Испитај ја непрекинатоста на функциите:

а) $f(x)=ax+b[x];\ a,b\neq 0$ б) $f(x)=\begin{cases}x\ln x^2, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$.

5. (20) Испитај ја диференцијабилноста на функциите:

а) $f(x)=\left|x^2-2x-\dfrac{5}{4}\right|$ б) $f(x)=|\cos x|$.

6. (15) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=|x-1|e^{-\frac{1}{x}}$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) 24.I-2003 год.

4. (15) Пресметај (со образложение) $\sup A$ и $\inf A$ ако

$$A=\left\{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{5\cdot 2^n+1}{2^n+3}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

2. (10+15) а) Испитај ја конвергенцијата на низата: $\dfrac{1}{\sin 1}+\dfrac{2}{\sin 2}+\ .\ .\ .\ +\dfrac{n}{\sin n}$.

б) Нека $A \subseteq \mathbb{R}$ и $M = \sup A$. Докажи дека постои низа (x_n) т.ш. $x_n \in A$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$.

3. (5+5+10) Пресметај ги левиот и десниот лимес на:

а) функцијата $f(x) = e^{\operatorname{ctg} x}$ во точката $x_0 = 0$;

б) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ во точката $x_0 = 0$;

в) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}, & x \notin \{-1,0,1\} \\ 0, & x \in \{-1,0,1\} \end{cases}$ во точките $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$

4. (20) Определи го реалниот број a (ако постои) така што функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати на $\mathbb{R}$, каде $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1}, & x \neq -1 \\ a, & x = -1 \end{cases}$ и $g(x) = \begin{cases} \cos^2\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$.

5. (20) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата: $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел)

1. а) Пресметај $\sup A$ и $\inf A$ (со образложение) ако $A = \left\{\frac{x}{x+1} \middle| 0 \leq x \leq 10\right\}$. Дали A има најдолем и најмал елемент? Во потврден случај најди ги.

б) Нека (a_n) е низа од реални броеви дефинирана со $a_n = \dfrac{5n+4}{3n-2}$. Најди природен број k така што за секој $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq k$ важи $a_n \in \left(\frac{1664}{999}, \frac{1666}{999}\right)$.

2. а) Дали низата (a_n) определена со формулата $a_n = \underbrace{\sqrt{26 + \sqrt{26 + \ldots + \sqrt{26}}}}_{n \text{ пати } 26}$, $n \in \mathbb{N}$ конвергира? Во случај на потврден одговор најди ја нејзината граница.

б) Определи ги $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ ако $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+3}\sin\dfrac{2n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}$. Дали низата (a_n) конвергира?

3. Дадени се функциите $f(x) = x[x]$ ($[x]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од x) и

$g(x) = \begin{cases} x^2, |x| < 2 \\ 4, |x| \geq 2 \end{cases}$

а) Испитај непрекинатост на f и g на множеството реални броеви.

б) Скицирај ги графиците на f и g во интервалот $[-6,6]$.

4. а) Нека функцијата f има извод на (a,b). Ако f е неограничена на (a,b), тоагаш и f' е неограничена на (a,b). Докажи!

б) Ако функцијата f има ограничен извод на (a,b), тогаш таа е рамномерно непрекината на (a,b). Докажи!

5. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=xe^{-\frac{1}{|x-1|}}$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) јуни 2003 2 рок

1. а) (15) Дадена е низата $x_n=\dfrac{n}{1-n^2}$. Најди супремум и инфимум на множеството $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. Најди најголем и најмал елемент на ова множество. Испитај конвергенција на низата (x_n).

б) (10) Нека $f: X\to Y$ е пресликување и $A,B\subseteq Y$, $C\subseteq X$. Докажи $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ и $f^{-1}f(C)\supseteq C$. Дали ако f е инјекција важи равенставо?

2. (15) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ каде $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$.

3. (20) Дадена е функцијата $f(x)=\begin{cases}-x^2-3, |x|\leq 3\\ [x], |x|>3\end{cases}$.

а) испитај непрекинатост на f на $\mathbb{R}$.

б) Скицирај го графикот на f.

4. (20) Испитај диференцијабилност на функциите

а) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, |x|\leq 2\\ x+1, x>2\\ x-1, x<-2\end{cases}$ б) $f(x)=|x^2-x-6|$

5. (20) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=3xe^{-\frac{1}{|2x-3|}}$

Прв колоквиум по математичка анализа I (прв дел) 2003/2004 I група

1. а) Нека $A\subseteq[0,1]$ е такво што $(\forall n\in\mathbb{N})$ $(\exists x_n\in A)$ т.ш. $x_n>\dfrac{n-1}{n}$. Пресметај $\sup A$. (со образложение)

б) Дадено е множеството K од позитивни конечни децимални броеви со вообичаеното подредување, Најди пример на ограничено множество кое нема супремум во K .

2. Нека $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ и $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ се пресликувања дефинирани со $f(m)=3m$ и $g(m)=|m|$,

$$A=\{-21,-20,-13,-9,-8,-5,0,1,3,7,15\} \text{ и } B=\{1,2,3,8,10,12,17\}.$$

а) Најди ги $f^{-1}(A)$, $g(A)$, $g^{-1}(B)$, gf ;

б) Дали постојат f^{-1} и g^{-1} ? Ако постојат, најди ги правилата со кои пресликувањата се определени.

3. а) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ каде $a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

б) Нека (a_n) е низа од реални броеви дефинирана со $a_n=\dfrac{5n^2+4}{3n^2-2}$. Најди природен број n_0 така што за секој $n\in\mathbb{N}$ и $n\ge n_0$ важи $a_n\in\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{1000},\frac{5}{3}+\frac{1}{1000}\right)$.

4. а) Пресметај ги $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ каде $x_n=(-1)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\sin\frac{n\pi}{3}$.

б) Нека за низите од реални броеви (a_n) и (b_n) важи $a_n\le b_n$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека

$$\limsup_{n\to\infty} a_n\le\limsup_{n\to\infty} b_n .$$

Прв колоквиум по математичка анализа I (прв дел) 2003/2004	II група

1. а) Нека $A\subseteq[1,2]$ е такво што $(\forall n\in\mathbb{N})$ $(\exists x_n\in A)$ т.ш. $x_n<\dfrac{n+1}{n}$. Пресметај $\inf A$. (со образложение)

б) Дадено е множеството K од позитивни конечни децимални броеви со вообичаеното подредување, Најди пример на ограничено множество кое нема инфимум во K .

2. Нека $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ и $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ се пресликувања дефинирани со $f(m)=5m$ и $g(m)=m^2$,

$$A=\{-21,-20,-13,-9,-8,-5,0,1,3,7,15\} \text{ и } B=\{1,2,3,8,10,12,17\}.$$

а) Најди ги $f^{-1}(A)$, $g(A)$, $g^{-1}(B)$, gf ;

б) Дали постојат f^{-1} и g^{-1} ? Ако постојат, најди ги правилата со кои пресликувањата се определени.

3. а) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ каде $a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

б) Нека (a_n) е низа од реални броеви дефинирана со $a_n = \dfrac{3n^2+4}{4n^2-2}$. Најди природен број n_0 така што за секој $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq n_0$ важи $a_n \in \left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{100}, \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{100}\right)$.

4. а) Пресметај ги $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ каде $x_n = (-1)^{n(n-1)}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{3}$.

б) Нека за низите од реални броеви (a_n) и (b_n) важи $a_n \leq b_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n .$$

Втор колоквиум по математичка анализа I (прв дел)	2003/2004

1.(20) Испитај непрекинатост на функциите:

а) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$; б) $f(x) = [x]\sin \pi x$

2. (20) а) Докажи дека збир на рамномерно непрекинати функции е рамномерно непрекината функција

б) Испитај ја рамномерната непрекинатост на функцијата $f(x) = x + \sin x$ на на $\mathbb{R}$;

в) Производ на рамномерно непрекинати функции не мора да биде рамномерно непрекината функција. (разгледај пример $f(x) = x\sin x$).

3. (20) Испитај ја диференцијабилноста на функциите:

а) $f(x) = |x^2 - 9x + 20|$ б) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, |x|>1 \\ ar\operatorname{ctg} x, |x|<1 \end{cases}$.

4. (15) Со помош на теоремите за средна вредност докажи дека равенката $\cos x = x$ има точно едно решение на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. (10) Пресметај со помош на маклореновата формула $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

6. (15) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x) = |1-x|(3x^2-2x-1)$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) 20.III-2003

1. а) (15) Нека $f: X \to Y$ и $A, B \subseteq X$ и $C, D \subseteq Y$. Докажи дека $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Докажи $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Дали важи равенство ако f е инјекција или сурјекција (одговорот да се објасни)?

б) (10) Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1$. Докажи дека важи неравенството $y = 1$.

2. (20) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ каде $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right)$.

3. а) Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right], x \neq 0 \\ 4, x = 0 \end{cases}$.

б) Дали може да се определи реален број a, така што функцијата $f(x) = \begin{cases} e^{a+\frac{1}{x}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.

4. Испитај ја диференцијабилноста на функциите:

а) $f(x) = \left|\cos x + \frac{1}{2}\right|$ б) $f(x) = |x^2 + 4x - 3|$.

5. (15) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x) = |2x - 1| e^x$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) 20.III-2003

1. а) (15) Нека $f: X \to Y$ и $A, B \subseteq X$ и $C, D \subseteq Y$. Докажи дека $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Докажи $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Дали важи равенство ако f е инјекција или сурјекција (одговорот да се објасни)?

б) (10) Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1$. Докажи дека важи неравенството $y = 1$.

2. (20) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ каде $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right)$.

3. а) Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right], x \neq 0 \\ 4, x = 0 \end{cases}$.

б) Дали може да се определи реален број a, така што функцијата $f(x) = \begin{cases} e^{a+\frac{1}{x}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.

4. Испитај ја диференцијабилноста на функциите:

а) $f(x)=\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|$ б) $f(x)=|x^2+4x-3|$.

5. (15) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=|2x-1|e^x$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) ноември 2003

1. (10) а) Пресметај $\sup A$ и $\inf A$ ако $A=\left\{\frac{x^2}{x^2+2}\middle| x\in[-1,2]\right\}$. Дали множеството A има најголем и најмал елемент?

(10) б) Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{2^2}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}},$$

$x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

2. (15) Докажи дека ако $f:E\to F$, $A\subset E,\ B\subset F$, тогаш важи:

а) $f(A)\cap B=f(A\cap f^{-1}(B))$; б) $f(A)\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\cap f^{-1}(B)=\varnothing$.

3. (15) Испитај ја конвергенцијата на низата зададена со рекурентната формула $a_1=1;\ a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2a_n}$. Ако низата конвергира најди ја нејзината граница.

4. (20) Испитај ја рамномерната непрекинатост на следниве функции

а) $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$, $x\in(0,1)$; б) $f(x)=x\sin x$, $x\in[0,\infty)$.

5. (15) Дали може да се определи реалниот број a така што функијата е непрекината на $\mathbb{R}$

а) $f(x)=\begin{cases}\frac{(1+x)^n-1}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$, за $n\in\mathbb{N}$; б) $f(x)=\begin{cases}\cos^2\frac{1}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$?

6. (15) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=|x+3|(x^2-2x-4)$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) ноември 2003

1. (10) а) Пресметај $\sup A$ и $\inf A$ ако $A=\left\{\frac{x^2}{x^2+2}\middle| x\in[-1,2]\right\}$. Дали множеството A има најголем и најмал елемент?

(10) б) Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{2^2}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

2. (15) Докажи дека ако $f:E\to F$, $A\subset E,\ B\subset F$, тогаш важи:

а) $f(A)\cap B=f(A\cap f^{-1}(B))$; б) $f(A)\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\cap f^{-1}(B)=\varnothing$.

3. (15) Испитај ја конвергенцијата на низата зададена со рекурентната формула $a_1=1\,;a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+1}{2a_n}$. Ако низата конвергира најди ја нејзината граница.

4. (20) Испитај ја рамномерната непрекинатост на следниве функции

а) $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$, $x\in(0,1)$; б) $f(x)=x\sin x$, $x\in[0,\infty)$.

5. (15) Дали може да се определи реалниот број a така што функијата е непрекината на $\mathbb{R}$

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$, за $n\in\mathbb{N}$; б) $f(x)=\begin{cases}\cos^2\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$?

6. (15) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=|x+3|(x^2-2x-4)$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) 19.XI-2002 год.

1. Пресметај $\sup A$ и $\inf A$ (со образложение) ако $A=\left\{(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

2. а) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (1+a^n)}$, ако $a\geq 0$.

б) Испитај ја конвергенцијата на низата (a_n) дадена со рекурентната формула: $a_1\in[0,\pi)$ и $a_n=a_{n-1}-\sin a_n$. Во случај низата да конвергира, пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

3. Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x)=\begin{cases}x\ \left[\dfrac{1}{x}\right] &, \ x\neq 0\\ 0 &, \ x=0\end{cases}$ на $\mathbb{R}$.

4. Испитај ја непрекинатоста, диференцијабилноста и непрекинатоста на првиот извод на функциите $f(x)=|1-5x-2x^2\,|$ и $g(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x} &, \ x\neq 0\\ 0 &, \ x=0\end{cases}$.

5. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=|1-x\,|(3x^2-2x-1)$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) 25.10.2002 год.

5. а) Пресметај (со образложение) $\sup A$ и $\inf A$ каде

$A=\left\{\dfrac{mn}{4m^2+n^2}\ \middle|\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Дали A има најголем и најмал елемент? Во случај на потврден одговор најди ги.

б) Докажи дека $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$ за секои реални броеви a,b,c такви што $a+b+c=1$ и $4a+1,4b+1,4c+1>0$.

2. а) Испитај конвергенција на низата $a_n=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ ...\ +\frac{1}{\ln n}$.

б) Одреди $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$ за низата $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{2}$.

3. Определи го реалниот број a (ако постои) така што функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати на □, каде $f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1} &, x\neq -1\\ a &, x=-1\end{cases}$ и $g(x)=\begin{cases}\cos^2\frac{1}{x} &, x\neq 0\\ a &, x=0\end{cases}$.

4. а) Најди прв извод на функцијата $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x\geq 0\\ e^{-\frac{1}{x}}+1 , & x<0\end{cases}$. Дали првиот извод е непрекината функција на $\mathbb{R}$?

б) Пресметај со помош на маклореновата формула $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

5. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=|x|e^{\frac{1}{x}}$.

Писмен испит по Математичка анализа I (прв дел) 5.IX-2001 год.

1. а) Нека f е функција т.ш. за секој $x,y\in(a,b)$ и $\lambda\in(0,1)$ важи неравенството $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

Докажи дека за секој $n\in$□ важи $f(\lambda_1x_1+\ ...\ +\lambda_nx_n)\leq\lambda_1f(x_1)+\ ...\ +\lambda_nf(x_n)$,

каде $x_1,x_2,\ ...\ ,x_n\in(a,b)$, $\lambda_1,\ ...\ ,\lambda_n\geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

б) Нека $A\subseteq(0,\infty)$ е такво што $(\forall n\in\mathbb{N})$ $(\exists x_n\in A)$ т.ш. $x_n\leq\frac{1}{n}$. Пресметај $\inf A$. (со образложение)

2. а) Нека (x_n) е низа од реални броеви така што постои $c\in$□ т.ш.

$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ ...\ +|x_n-x_1|<c$ за секој $n\in$□. (1)

Докажи дека низата (x_n) конвергира.

б) Дали низата $x_n=\frac{1-(-1)^n}{n}$

i) конвергира; ii) го исполнува условот (1) ?

3. Докажи дека:

а) збирот на две рамномерно непрекинати функции на $\mathbb{R}$ е рамномерно непрекината функција на $\mathbb{R}$;

б) производот на две рамномерно непрекинати функции на интервал $[a,b]$ е рамномерно непрекината функција на $[a,b]$.

4. а) Ако функцијата f има ограничен извод на интервал P тогаш f е рамномерно непрекината на P.

б) Докажи дека важи неравенството $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$,

каде $x,y \in \mathbb{R}$ и $0 < x < y$.

5. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата:

$$f(x) = |x^2 - 3x - 4|\, e^{\frac{1}{|x-3|}}.$$

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) 4.IX-2002 год.

1. Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ каде: а) $a_n = \left(3 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{(-1)^n}{n}}$

б) $a_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \ . \ . \ . \ + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

2. Пресметај ги левите и десните граници на дадените функции во дадените точки. Дали постои $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?

а) $f(x) = e^{\operatorname{ctg} x}$ во $x_0 = 0$; б) $f(x) = \arcsin(x+1)$ во $x_0 = 0$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + e^{\frac{1}{2-x}}}$ во $x_0 = 2$.

3. Докажи дека функцијата $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ е рамномерно непрекината на $(0,1)$ и на $(-1,0)$ но не е рамномерно непрекината на $(-1,0) \cup (0,1)$.

4. Испитај диференцијабилност (со доказ) на функцијата $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ на □.

5. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x) = |x+3|\, e^{-\frac{1}{|x|}}$.

Писмен испит по математичка анализа I (прв дел) септември 2003

1. (15) Со помош на математичка индукција докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи неравенството $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

2. (15) Нека $f : X \to Y$ е пресликување и $A, B \subseteq Y, C \subseteq X$. Докажи

   а) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

   б) $ff^{-1}(A) \subseteq A$. Дали ако f е сурјекција важи равенство?

3. (15) Испитај конвергенција на низата дадена со рекурентната формула

$x_{n+1} = \dfrac{1}{21}\left(20x_n + \dfrac{13}{x_n^{20}}\right), x_1 = 4$. Ако низата конвергира најди ја нејзината граница.

4. (20) Испитај ја непрекинатоста, диференцијабилноста и непрекинатоста на првиот

извод на функциите $f(x) = |1 - 4x - 5x^2|$ и $g(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

5. (15) Пресметај со помош на маклореновата формула $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

6. (20) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x) = |1 - x|(3x^2 - 2x - 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Шекутковски, *Математичка анализа 1*, Просветно дело ад Скопје, 2008
2. Н. Ивановски, *Математичка анализа I*, Универзитет "Кирил и Методиј", Скопје 1991
3. И.И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач, *Справочное пособие по математическому анализу I,* издательского объединеня "Виша школа" Киев 1984
4. И.И Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач, *Справочное посебие по математическому анализу II,* издательство объединеня "Виша школа" Киев 1984
5. Б. П, Демидович, *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, издательство Наука, Москва 1969
6. Г. Н. Берман, *Сборник задач по курсу математического анализа*, издательство Наука, Москва 1972
7. В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин, *Математический анализ в вопросах и задачах,* Москва Высшая школа, 1988
8. D. Adnadjevic, Z. Kadelburg. , *Matematicka analiza 1*, Naucna Knjiga, Beograd, 1989
9. Г. М. Фихтенгольц, *Курс диференциалного и интегралного исчисления*, т. I, II, III, Наука, Москва, 1969
10. Л. Д. Кудриявцев, *Курс математического анализа, т I, II*, Высшая школа, Москва 1981
11. S. Kurepa, *Matematicka analiza 1, 2, diferenciranje i integriranje*, Tehnicka Kniga, Zagreb 1977
12. Б .А. Зорич, *Математический анализ*, т. I, II, Наука, Москва, 1981
13. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Mc Graw Hill, 1964
14. M.Mrsevic, D.Dugoshija, *Zbirka reshenih zadataka iz matematicke analize 1*, Grad.Knjiga,, Beograd, 1978
15. Lj. Gajic, S. Pilipovic, *Zbirka zadataka iz Analize I*, Novi Sad, 1990

СОДРЖИНА