Марија Оровчанец **Билјана Крстеска**

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКА

Скопје, 2017

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
д-р Марија Оровчанец и д-р Билјана Крстеска
Природно – математички факултет, Скопје

Рецензенти
1. Проф. д-р Живорад Томовски,
редовен професор на ПМФ, Скопје

2. Проф. д-р Љупчо Настовски,
редовен професор на ПМФ, Скопје

3. Проф. д-р Ѓорѓи Маркоски,
вонреден професор на ПМФ, Скопје

Техничка обработка
д-р Марија Оровчанец и д-р Билјана Крстеска

Лектура на македонски јазик:
Виолета Јовановска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.8)(076)

ОРОВЧАНЕЦ, Марија
Збирка решени задачи по математика / Марија Оровчанец, Билјана Крстеска. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2018. - XII, 478 стр.: илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 476-478

ISBN 978-9989-43-406-8
1. Крстеска, Билјана [автор]
а) Математика - Високошколски учебници - Вежби
COBISS.MK-ID 106357258

Со љубов на Ана, Бодан и Марија

Предговор

Оваа збирка со решени задачи е наменета за студентите од прва година на Природно математичкиот факултет во Скопје, на насоката математика - физика, за студентите од прва година на Архитектонскиот факултет и за студентите од прва година на факултетот за дизајн и технологии на мебел и интериер, но може да ја користат и студентите од другите факултети кои во математичките предмети го изучуваат обработениот материјал.

Студентите често имаат сериозни потешкотии при совладување на материјалот од предметот математика, поради недоволните предзнаења од средно образование, но и поради објективната тежина на споменатите предмети. Поради тоа се појави потребата за пишување на збирка задачи која што би овозможила полесно совладување на материјалот предвиден со наведените студиски програми.

Збирката задачи е дополнување на учебникот Математика од истите автори. Таа се состои од девет поглавја. На почетокот, после предговорот е даден преглед на сите формули од елементарна математика кои се користат при изложување на материјалот. Во рамките на секое поглавје даден е краток преглед на теориските основи, како задачи за самостојна работа, во врска со материјалот што се обработува во поглавјето. Голем дел од решенијата на задачите се илустрирани со цртежи, што овозможува висок степен на нагледност во процесот на учење. Тоа ни дава за право да кажеме дека презентираниот материјал во збирката им овозможува на студентите лесно да ги совладаат целите определени со студиската програма.

Ќе дадеме совет како студетите да ја користат збирката. Им препорачуваме пред почетокот на секое поглавје да го совладаат теорискиот дел од соодветното поглавје, што значи треба да ги повторат поважните дефиниции и теореми во врска со обработениот материјал кои што се поместени на почеток од поглавјето. Потоа, да ги обработат решените задачи, со колку што е можно повисок степен на самостојност, во смисла пред да го разгледаат решението да се обидат сами да разработат свои идеи во врска со решението на задачата. Завршна и најважна етапа која треба да ја поминат студентите е решавањето на задачите за самостојна работа.

На крајот, им се заблагодаруваме на сите коишто помогна во подготовката на овој ракопис, особено на рецензентите, проф. д-р Живорад Томовски, проф. д-р Љупчо Настовски и проф. д-р Ѓорѓи Маркоски. Тие го прочитаа ракописот внимателно и со корисните забелешки и сугестии дадоа значаен допринос за негово подобрување.

Скопје, март 2017 година Авторите

Формули од елементарна математика

1. Алгебра

- Степенување на мономи

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \left(a^m\right)^n = a^{mn} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a^0 = 1$$

$$\left(ab\right)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

- Операции со дропки

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \frac{a}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{c}$$

- Разложување на множители

$$a^2 - b^2 = \left(a-b\right)\left(a+b\right)$$

$$a^3 - b^3 = \left(a-b\right)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$a^3 + b^3 = \left(a+b\right)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^4 - b^4 = \left(a^2\right)^2 - \left(b^2\right)^2 = \left(a-b\right)\left(a+b\right)\left(a^2 + b^2\right)$$

$$a^4 - b^4 = \left(a^2 + b^2\right)^2 - \left(ab\sqrt{2}\right)^2 = \left(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2\right)\left(a^2 + ab\sqrt{2} + b^2\right)$$

$$a^5 - b^5 = \left(a-b\right)\left(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4\right)$$

$$a^5+b^5=(a+b)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)$$

$$a^6-b^6=\left(a^3\right)^2-\left(b^3\right)^2=(a-b)(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$a^6+b^6=\left(a^2\right)^3+\left(b^2\right)^3=\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+ab\sqrt{3}+b^2\right)\left(a^2-ab\sqrt{3}+b^2\right)$$

- Коренување

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=a^{-\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a} \qquad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

- Квадратна равенка

$$ax^2+bx+c=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2. Тригонометрија

- Основни тригонометриски идентитети

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1 \qquad tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \qquad tg\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \qquad tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \qquad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

- Адициони теореми

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta} \qquad tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta} \qquad ctg(\alpha-\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}$$

- Тригонометриски функции од двојни агли

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

- Тригонометриски функции од полуагли

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad ctg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

- Трансформации на тригонометриски функции

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad ctg\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

3. Аналитичка геометрија

Растојание меѓу две точки

$M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ $\qquad d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Равенка на права

- Општ облик $\qquad Ax+By+C=0$
- Експлицитен облик $\qquad y=kx+n$
- Равенка на права низ една точка $\qquad y-y_1=k(x-x_1)$
- Равенка на права низ две точки $\qquad y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
- Агол меѓу две прави

  $y=k_1x+n_1$ и $y=k_2x+n_2$ $\qquad tg\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$
- Растојание од точка $M(x_0,y_0)$

  до права $Ax+By+C=0$ $\qquad d=\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

Равенка на

- Кружница со центар во

  $O(x_0, y_0)$ и радиус r $$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=r^2$$

- Елипса со полуоски a и b $$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$$

- Хипербола $$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$$

Содржина

1. Вовед

1.1. Поим за множество. Операции со множества

Нека A и B се дадени множества.

❖ Велиме дека множеството A е *подмножество* од множеството B, и пишуваме $A \subseteq B$, ако и само ако секој елемент на множеството A е елемент и на множеството B, симболички

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

❖ Велиме множествата A и B дека се *еднакви*, и запишуваме $A = B$, ако и само ако $A \subseteq B$, и $B \subseteq A$, симболички

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A).$$

❖ Ако $A \subseteq B$ и ако постои елемент во B што не е елемент во A, односно $A \neq B$, тогаш велиме дека множеството A е *вистинско подмножество* од множеството B. Во тој случај запишуваме $A \subset B$. Симболички,

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ и } A \neq B).$$

❖ *Унија* на множествата A и B, означуваме $A \cup B$, е множеството што се состои од сите елементи што припаѓаат во множеството A или во множеството B. Симболички,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$$

❖ *Пресек* на множествата A и B, означуваме $A \cap B$, е множеството што се состои од сите елементи што припаѓаат во множеството A и во множеството B. Симболички,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$$

❖ *Разлика* на множеството A со множеството B, означуваме $A \setminus B$, е множеството што се состои од сите елементи што припаѓаат во множеството A а не припаѓаат во множеството B. Симболички,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

❖ *Комплемент* на множеството A (во однос на универзалното множество U), означуваме со A^c, е множеството што се состои од сите елементи од множеството U што не припаѓаат во множеството A. Симболички,

$$A^c = U \setminus A = \{x : x \in U \text{ и } x \notin A\}$$

❖ *Декартовиот производ* на множествата A и B е множеството $A \times B$ што се состои од сите подредени двојки (a,b) каде што $a \in A$ и $b \in B$. Симболички,

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

❖ *Празното множество* не содржи ниту еден елемент, и се означува со $\varnothing$. Тоа е подмножество од секое множество A, односно $\varnothing \subseteq A$, и вистинско подмножество од секое непразно подмножество B, односно $\varnothing \subset B$.

1.1. За множествата $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$ и $C=\{3,4,5,6,7\}$, определи ги множествата:

1) $A\cup B$ и $A\cup C$ 2) $A\cap B$ и $A\cap C$

3) $A\setminus B$, $A\setminus C$ и $B\setminus A$

Решение. 1) Имаме дека $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$ и $A\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

2) Добиваме дека $A\cap B=\{2,3,4,5\}$ и $A\cap C=\{3,4,5\}$.

3) Наоѓаме дека $A\setminus B=\{1\}$, $A\setminus C=\{1,2\}$ и $B\setminus A=\{6\}$. ●

1.2. Определи ги сите подмножества од множеството $\{a,b,c,d\}$.

Решение. Бараните подмножества се: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$ и $\{a,b,c,d\}$. ●

1.3. Определи ги множествата:

1) $A\cap\varnothing$ 2) $A\setminus\varnothing$ 3) $\varnothing\setminus A$ 4) $A\cup(A\cap B)$

Решение. Со примена на дефинициите за соодветните операции на множества, добиваме дека

1) $A\cap\varnothing=\varnothing$ 2) $A\setminus\varnothing=A$ 3) $\varnothing\setminus A=\varnothing$ 4) $A\cup(A\cap B)=A$. ●

1.4. Ако $A\subseteq B$ и $B\subseteq C$, определи ги множествата:

1) $(A\cap B)\cap C$ 2) $(A\cap B)\cup C$

Решение. Од условите $A\subseteq B$ и $A\subseteq C$ добиваме $A\cap B=A$, $A\cap C=A$ и $A\cup C=C$. Според тоа, имаме дека

1) $(A\cap B)\cap C=A\cap C=A$ 2) $(A\cap B)\cup C=A\cup C=C$. ●

1.5. Нека A, B и C се дадени множества. Покажи дека важи:

1) $A \subseteq B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ 2) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$

3) $A, B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$ 4) $A \subseteq B,\ A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$

Решение. 1) Нека $x \in A$ е произволно избрано. Од условот $A \subseteq B$ следува дека $x \in B$, а од $B \subset C$ следува дека $x \in C$. Од условот $B \subset C$ следува дека постои барем еден елемент $y \in C$ таков што $y \notin B$, а од условот $A \subseteq B$ следува дека $y \notin A$. Според тоа, имаме дека постои $y \in C$ и $y \notin A$. Бидејќи $x \in A$ е произволно избрано, добиваме дека $A \subset C$.

2) Нека $A \subseteq B$ и нека $x \in A$ е произволно избрано. Тогаш, следува дека $x \in B$, па имаме дека $x \in A \cap B$, односно $A \subseteq A \cap B$. Бидејќи секогаш важи инклузијата $A \cap B \subseteq A$, добиваме дека $A \cap B = A$. Ако, пак, $A \cap B = A$ и $y \in A$ е произволно избрано, ќе следува дека $y \in A \cap B$, односно $y \in B$, од каде што добиваме дека $A \subseteq B$. Го покажавме тврдењето дека $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Ќе покажеме дека за произволни A, B важи $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$. Нека $A \subseteq B$ и нека $x \notin B$. Тогаш, следува $x \notin A$, па $x \in A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, односно $x \notin A \cup B$. Добивме дека $A \cup B \subseteq B$. Бидејќи секогаш важи инклузијата $B \subseteq A \cup B$, добиваме дека $A \cup B = B$. Ако, пак, $A \cup B = B$ и $y \in A$ е произволно избрано, ќе следува дека $y \in A \cup B = B$, односно $y \in B$, од каде што добиваме дека $A \subseteq B$. Го покажавме тврдењето дека $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

3) Нека $x \in A \cup B$ е произволно избрано. Тогаш $x \in A$ или $x \in B$, па од условот $A, B \subset C$ следува дека $x \in C$, односно $A \cup B \subseteq C$.

4) Доказот се спроведува аналогно како во 3). ●

1.6. Докажи дека за секои множества A, B и C важат следниве равенства:

1) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Решение. 1) Имаме дека $x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow (x \in A \text{ и } x \in B \cap C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \text{ и } (x \in B \text{ и } x \in C)) \Rightarrow ((x \in A \text{ и } x \in B) \text{ и } x \in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \cap B \text{ и } x \in C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C,$ што значи дека

$$A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C .$$

За обратната инклузија имаме, $x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow (x \in A \cap B \text{ и } x \in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow ((x \in A \text{ и } x \in B) \text{ и } x \in C) \Rightarrow (x \in A \text{ и } (x \in B \text{ и } x \in C)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \text{ и } x \in B \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C),$ што значи

$$(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C) .$$

Од $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$ и $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ следува дека

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) .$$

2) Равенството се докажува аналогно на равенството под 1). ●

1.7. Докажи дека за секои множества A, B и C важат следниве равенства:

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Решение. 1) Имаме дека $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow (x \in A \text{ и } x \in B \cup C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \text{ и } (x \in B \text{ или } x \in C)) \Rightarrow ((x \in A \text{ и } x \in B) \text{ или } (x \in A \text{ и } x \in C)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C),$ што значи дека

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

За обратната инклузија, имаме дека $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C) \Rightarrow ((x \in A$ и $x \in B)$ или $(x \in A$ и $x \in C)) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A$ и $(x \in B$ или $x \in C)) \Rightarrow x \in A$ и $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C),$

што значи

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

Заради $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ и $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ имаме дека

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2) Равенството се докажува аналогно на равенството под 1). ●

1.8. Најди го Декартовиот производ $A \times B,$ ако $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{x, y\}.$

Решение. Според дефиницијата за Декартов производ на множества имаме дека $A \times B = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}.$ ●

1.9. Најди го Декартовиот производ $A \times A,$ ако $A = \{x, y, z\}.$

Решение. Заради дефиницијата за Декартов производ на множества имаме дека $A \times A = \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,x),(y,y),(y,z),(z,x),(z,y),(z,z)\}$. ●

1.10. Докажи дека ако $A \subseteq B$ и $C \subseteq D,$ тогаш $A \times C \subseteq B \times D.$

Решение. Нека $(x, y) \in A \times C$ е произволно избрано. Тогаш, според дефиницијата за Декартов производ имаме дека $x \in A$ и $y \in C.$ Од условот во задачата имаме дека $x \in B$ и $y \in D,$ што значи $(x, y) \in B \times D.$ Бидејќи $(x, y) \in A \times C$ е произволно, добиваме дека $A \times C \subseteq B \times D.$ ●

1.11. Докажи дека за секои множества A, B и C важат следниве равенства:

1) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

Решение. 1) Имаме дека $(x,y)\in A\times(B\cap C)\Rightarrow(x\in A$ и $y\in B\cap C)\Rightarrow$

$\Rightarrow(x\in A$ и $(y\in B$ и $y\in C))\Rightarrow((x\in A$ и $y\in B)$ и $(x\in A$ и $y\in C))\Rightarrow$

$\Rightarrow(x,y)\in A\times B$ и $(x,y)\in A\times C)\Rightarrow(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$, што значи

$$A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C).$$

За обратната инклузија, имаме дека $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)\Rightarrow$

$\Rightarrow(x,y)\in A\times B$ и $(x,y)\in A\times C\Rightarrow((x\in A$ и $y\in B)$ и $(x\in A$ и $y\in C))\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in A$ и $(y\in B$ и $y\in C))\Rightarrow x\in A$ и $y\in B\cap C\Rightarrow(x,y)\in A\times(B\cap C)$,

што значи дека

$$(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C).$$

Од $A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$ и $(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)$ имаме

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C).$$

2) Равенството се докажува аналогно на равенството под 1). ●

1.12. Нека се дадени множествата $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $A=\{a,b,c,d\}$ и $B=\{a,c,e,g\}$. Определи ги следните множества:

1) A^c 2) B^c 3) $A^c\cup B^c$ 4) $A^c\cap B^c$

5) $A^c\setminus B^c$ 6) $A\setminus B^c$ 7) $(A\cup B)^c$ 8) $(A\cap B)^c$

Решение. Со примена на дефинициите за операции на множества, добиваме дека

1) $A^c = \{e, f, g, h\}$ 2) $B^c = \{b, d, f, h\}$

3) $A^c \cup B^c = \{b, d, e, f, g, h\}$ 4) $A^c \cap B^c = \{f, h\}$

5) $A^c \setminus B^c = \{e, g\}$ 6) $A \setminus B^c = \{a, c\}$

7) $(A \cap B)^c = \{b, d, e, f, g, h\}$ 8) $(A \cup B)^c = \{f, h\}$. ●

1.2. Релации

❖ Нека A е множество. Секое подмножество ρ од $A \times A$ се вика *релација* во A. Ако $(x, y) \in \rho$ пишуваме $x\rho y$.

❖ За релацијата ρ дефинирана на A велиме дека е:

1. *Рефлексивна* ако $x\rho x$, за секое $x \in A$
2. *Симетрична* ако $x\rho y \Rightarrow y\rho x$, $x, y \in A$
3. *Транзитивна* ако $x\rho y$ и $y\rho z \Rightarrow x\rho z$, $x, y, z \in A$
4. *Антисиметрична* ако $x\rho y$ и $y\rho x \Rightarrow x = y$, $x, y \in A$

❖ Релација за *еквивалентност* на A е секоја релација ρ која што е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

❖ *Подредување* на A е секоја релација ρ која што е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

1.13. Испитај ги својствата на релацијата ρ дефинирана во множеството $A = \{a, b, c, d\}$.

1) $\rho=\{(a,b),(b,c),(b,a)\}$

2) $\rho=\{(a,b),(b,a)\}$

3) $\rho=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,c),(a,d),(b,d)\}$

4) $\rho=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$

Решение. 1) Дадената релацијата не е рефлексивна бидејќи, на пример, $(a,a)\notin\rho,$ односно $\Delta=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}\not\subset\rho;$ релацијата не е симетрична бидејќи $(b,c)\in\rho,$ но $(c,b)\notin\rho;$ релацијата не е антисиметрична бидејќи $(a,b)\in\rho$ и $(b,a)\in\rho,$ но $a\neq b;$ и релацијата не е транзитивна бидејќи $(a,b),(b,c)\in\rho,$ но $(a,c)\notin\rho.$

2) Релацијата не е рефлексивна бидејќи, на пример, $(a,a)\notin\rho;$ релацијата е симетрична бидејќи за $(a,b)\in\rho$ имаме дека и $(b,a)\in\rho,$ и обратно; релацијата не е антисиметрична бидејќи имаме $(a,b)\in\rho$ и $(b,a)\in\rho,$ но $a\neq b;$ релацијата не е транзитивна бидејќи имаме дека $(a,b),(b,a)\in\rho,$ но $(a,a)\notin\rho.$

3) Релацијата не е рефлексивна бидејќи, на пример, $(a,a)\notin\rho;$ релацијата не е симетрична бидејќи $(b,c)\in\rho,$ но $(c,b)\notin\rho;$ може да се провери дека релацијата е антисиметрична, и дека релацијата е транзитивна.

4) Слично како во претходните случаи, со непосредна проверка се утврдува дека релацијата е рефлексивна, симетрична и транзитивна, но не е антисиметрична. ●

1.14. Дали релацијата ρ зададена во множеството $A=\{k,l,m\}$

1) $\rho = \{(k,k),(l,l),(m,m)\}$

2) $\rho = \{(k,k),(k,l),(l,k),(l,l),(m,m)\}$

3) $\rho = \{(l,l),(k,l),(l,k),(k,m),(m,k),(l,m)\}$

4) $\rho = \{(k,k),(k,l),(l,k),(l,l),(k,m),(m,k),(m,l),(l,m),(m,m)\}$

е релација за еквиваленција?

Решение. 1) Со непосредна проверка, како во задача 1.13. се утврдува дека релацијата ρ е рефлексивна, симетрична и транзитивна, па според тоа таа е релација за еквиваленција на множеството A.

2) Да, бидејќи може да се провери дека зададената релацијата ρ е рефлексивна, симетрична и транзитивна, па според тоа таа е релација за еквиваленција на множеството A.

3) Дадената релација не е релација за еквиваленција на множеството A. Таа, на пример, не е рефлексивна, бидејќи $(k,k) \notin \rho$.

4) Да, бидејќи зададената релацијата ρ е рефлексивна, симетрична и транзитивна. ●

1.15. Дали релациите зададени во множеството $A = \{p,q,r,s\}$

1) $\rho_1 = \{(p,p),(q,q),(r,r),(s,s)\}$.

2) $\rho_2 = \{(p,p),(q,r),(s,s),(r,r),(r,p),(q,p),(q,q)\}$

3) $\rho_3 = \{(p,p),(q,r),(r,r),(r,p),(q,p)\}$

4) $\rho_4 = \{(p,p),(r,s),(s,s),(r,r),(p,q),(q,q)\}$

се релации за подредување?

Решение. 1) Релацијата ρ_1 е релација за подредување на множеството $A,$ бидејќи со непосредна проверка како во задача 1.13. може да се уврди дека таа е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

2) Да, бидејќи непосредно може да се провери дека релацијата ρ_2 е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

3) Релацијата ρ_3 не е релација за подредување на множеството $A,$ Таа, на пример, не е рефлексивна бидејќи $(q,q)\notin\rho.$

4) Да, бидејќи непосредно може да се провери дека релацијата ρ_4 е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. ●

1.3. Операции

❖ Ако по некое правило, на секој елемент на Декартовиот производ $A\times A$ е придружен еднозначно определен елемент од множеството $A,$ велиме дека е дефинирана *операција* во A .

1.16. Нека A е дадено множество и нека S е множеството што се состои од сите подмножества од A . Дали со

1) $X*Y=X\cap Y,$ за секои $X,Y\in S$

2) $X*Y=X\cup Y,$ за секои $X,Y\in S$

3) $X*Y=X\setminus Y,$ за секои $X,Y\in S$

се дефинирани операции во S ?

Решение. 1) Да, бидејќи од $X,Y\in S,$ односно $X,Y\subseteq A$ следува дека $X\cap Y\subseteq A,$ што значи дека $X\cap Y\in S.$

2) Да, бидејќи од $X,Y\in S$, односно $X,Y\subseteq A$ следува дека $X\cup Y\subseteq A,$ што значи дека $X\cup Y\in S.$

3) Да, бидејќи од $X, Y \in S$, односно $X, Y \subseteq A$ следува дека $X \setminus Y \subseteq A$, што значи $X \setminus Y \in S$. ●

1.17. Нека A е множество со повеќе од еден елемент и нека S е множеството што се состои од сите непразни вистински подмножества од A. Дали со

1) $X * Y = X \cap Y$ за секои $X, Y \in S$

2) $X * Y = X \setminus Y$ за секои $X, Y \in S$

се дефинирани операции во S?

Решение. 1) Не, бидејќи ако A е множество со повеќе од еден елемент, тогаш постојат барем две негови различни подмножества X и Y со по еден елемент. Тогаш имаме дека $X, Y \in S,$ но $X \cap Y = \varnothing \notin S.$

2) Не, бидејќи за $X \in S$ имаме дека $X \setminus X = \varnothing \notin S.$ ●

1.4. Задачи за самостојна работа

1. Дадени се множествата $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a\}$. Определи ги сите подмножества на множеството A така што пресекот на секое од нив со множеството B да биде празното множество.

2. Нека A, B и C се дадени множества. Покажи дека

1) $A \cap A = A$ 2) $A \cup A = A$ 3) $A \cap B = B \cap A$

4) $A \cup B = B \cup A$ 5) $A \cap (A \cup B) = A$ 6) $A \cup (A \cap B) = A$

3. Најди непразни множества $A,$ B и C такви што

1) $A \cup B = A \cup C,$ но $B \neq C$ 2) $A \cap B = A \cap C,$ но $B \neq C$

4. Докажи дека ако $A \subseteq B,$ тогаш $B^c \subseteq A^c.$

5. Нека се дадени множествата $U=\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$, $A=\{3,5,7,11\}$ и $B=\{1,7,13,15\}$. Определи ги следните множества:

1) A^c 2) B^c 3) $A^c \cup B^c$ 4) $A^c \cap B^c$

5) $A^c \setminus B^c$ 6) $A \setminus B^c$ 7) $(A \cup B)^c$ 8) $(A \cap B)^c$

6. Најди го Декартовиот производ $X \times Y$, ако $X=\{1,3,5\}$ и $Y=\{2,4,6\}$.

7. Определи ги множествата од кои се добиени следниве Декартови производи:

1) $A \times B=\{(1,2),(1,y),(3,2),(3,y),(5,2),(5,y)\}$

2) $A \times B=\{(7,5),(7,10),(7,15),(7,20),(7,25),(7,30)\}$

8. Пресметај ги x и y, ако важи равенството $(x-2,y+3)=(y+1,x)$.

9. Докажи дека за секои множества A, B, C и D важат следниве равенства:

1) $(A \times B) \cap (C \times D)=(A \cap C) \times (B \cap D)$

2) $(A \times B) \cup (C \times D)=(A \cup C) \times (B \cup D)$

10. Во множеството $M=\{x,y,z,t\}$ се определени релациите

1) $\alpha=\{(x,y),(y,z),(z,t),(y,t),(x,z)\}$

2) $\beta=\{(x,y),(y,x),(z,z),(t,t)\}$

3) $\gamma=\{(x,x),(x,t),(t,x),(t,t),(y,y),(y,z),(z,y)(z,z),(x,y)\}$

Испитај ги својствата на дефинираните релации.

11. Докажи дека релацијата

$$\alpha = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(d,d),(a,c),(b,c),(b,a),(c,a),(c,b),(e,e)\}$$

дефинирана во множеството $A = \{a,b,c,d,e\}$ е релација на еквивалентност.

12. Нека A е множеството зборови од македонскиот јазик и нека на множеството A е дефинирана релација α на следниов начин:

> $u\alpha v$ ако и само ако првите четири букви од зборовите u и v се еднакви.

Дали α е релација на еквивалентност?

13. Дадено е множеството $A = \{a,b,c,d\}$ и во него релацијата

$$\alpha = \{(a,a),(b,b),(c,b),\ (d,d),(c,c),(d,b)\}.$$

Докажи дека α е релација на подредување во множеството A.

14. Нека M е бесконечно множество и нека S е множеството од сите конечни подмножества на M. Дали унијата, пресекот и разликата се операции во S?

2. Реални броеви

2.1. Дефиниција на множество реални броеви

❖ Под *множество реални броеви* подразбираме множество $\mathbf{R}$ во кое се дефинирани две операции: собирање „+“ и множење „$\cdot$“, и релација „$\leq$“ (што ќе ја читаме „е помало или еднакво со“) така што се исполнети следните својства:

(1) Својства на собирањето:

1.1. $(\forall x, y \in \mathbf{R})\ x + y = y + x$

2.1. $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$

3.1. постои точно еден елемент $0 \in \mathbf{R}$ таков што $x + 0 = x, \forall x \in \mathbf{R}$

4.1. за секој елемент $x \in \mathbf{R}$ постои точно еден елемент $-x \in \mathbf{R}$, така што $x + (-x) = 0$.

(2) Својства на множењето:

2.1. $(\forall x, y \in \mathbf{R}) x \bullet y = y \bullet x$

2.2. $(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$

2.3. постои точно еден елемент $1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ таков што $x \bullet 1 = x, \forall x \in \mathbf{R}$

2.4. за секој елемент $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ постои точно еден елемент $x^{-1} \in \mathbf{R}$, така што $x \bullet x^{-1} = 1$.

2.5. $(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) (x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$

(3) Својства на релацијата „$\leq$“

3.1. $(\forall x \in \mathbf{R}) \quad x \leq x$

3.2. $(\forall x, y \in \mathbf{R}) \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

3.3. $(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

3.4. $(\forall x, y \in \mathbf{R}) \quad x \leq y$ или $y \leq x$

3.5. ако $x \leq y$ и z е произволен елемент во $\mathbf{R}$, тогаш важи $x + z \leq y + z$

3.6. Ако $0 \leq x$ и $0 \leq y$, тогаш $0 \leq x \bullet y$

(4) ако A и B се непразни подмножества од $\mathbf{R}$, такви што $x \leq y$, $\forall x \in A$ и $\forall y \in B$, тогаш постои елемент $z \in \mathbf{R}$ таков што $x \leq z \leq y$ за сите $x \in A, y \in B$.

❖ *Апсолутна вредност* на реален број x се дефинира со:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ако} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{ако} \quad x < 0 \end{cases}.$$

2.1. Пресметај вредноста на изразот $\left|9|x-1|-5|y+2|+|z-4|\right|$ ако:

1) $x=-2,\ y=3,\ z=-4$ 2) $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{2}$

Решение. 1) Со непосредна замена, заради својствата на апсолутна вредност на реален број, добиваме дека

$$\left|9|x-1|-5|y+2|+|z-4|\right|=\left|9|-2-1|-5|3+2|+|-4-4|\right|=$$

$$=\left|9\cdot 3-5\cdot 5+8\right|=10.$$

2) Слично како во претходниот случај, имаме дека

$$\left|9|x-1|-5|y+2|+|z-4|\right|=\left|9\left|\frac{1}{2}-1\right|-5\left|-\frac{1}{2}+2\right|+\left|\frac{1}{2}-4\right|\right|=$$

$$=\left|9\cdot\frac{1}{2}-5\cdot\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right|=\frac{1}{2}.\ \bullet$$

2.2. Во множеството реални броеви реши ги равенките:

1) $|x-5|=2$ 2) $2x+|x|=3$

3) $|x|-|x+2|=0$ 4) $|2x+1|+|x+3|=|x+6|$

Решение. 1) Според дефиницијата за апсолутна вредност на реален број имаме дека

$$|x-5|=\begin{cases}x-5, & x\in[5,\infty)\\ 5-x, & x\in(-\infty,5)\end{cases}.$$

Можни се следниве два случаи:

I. Ако $x\in(-\infty,5)$, тогаш дадената равенка има облик $5-x=2$. Решението на равенката е $x=3$.

II. Ако $x \in [5, \propto)$, тогаш дадената равенка има облик $x - 5 = 2$. Решението на равенката е $x = 7$.

Конечно, решенија на равенката се $x = 3$ и $x = 7$.

2) Имаме дека $|x| = \begin{cases} x, & x \in [0, \propto) \\ -x, & x \in (-\propto, 0) \end{cases}$. Можни се следниве два случаи:

I. Ако $x \in (-\propto, 0)$, тогаш дадената равенка има облик $2x - x = 3$, од каде што следува дека $x = 3$. Бидејќи $3 \notin (-\propto, 0)$, равенката нема решение во разгледуваниот интервал.

II. Ако $x \in [0, \propto)$, тогаш дадената равенка има облик $2x + x = 3$, од каде што следува дека $x = 1$. Според тоа, решение на равенката во дадениот интервал е $x = 1$.

Конечно, решението на равенката е $x = 1$.

3) Имаме дека $|x| = \begin{cases} x, & x \in [0, \propto) \\ -x, & x \in (-\propto, 0) \end{cases}$ и $|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x \in [-2, \propto) \\ -x - 2, & x \in (-\propto, -2) \end{cases}$.

Можни се следниве три случаи:

I. Ако $x \in (-\propto, -2)$, тогаш дадената равенка има облик $-x + x + 2 = 0$, односно $2 = 0$, што е невозможно. Според тоа, равенката нема решение во разгледуваниот интервал.

II. Ако $x \in [-2, 0)$, тогаш дадената равенка има облик $-x - x - 2 = 0$, односно $x = -1$. Решение на равенката е $x = -1$.

III. Ако $x \in [0, \propto)$, тогаш дадената равенка има облик $x - x - 2 = 0$, односно $-2 = 0$, што е невозможно. Според тоа, равенката нема решение во разгледуваниот интервал.

Конечно, решение на равенката е $x=-1$.

4) Имаме дека $|2x+1|=\begin{cases} 2x+1, & x\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right) \\ -2x-1, & x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\end{cases}$,

$$|x+3|=\begin{cases} x+3, & x\in[-3,\infty) \\ -x-3, & x\in(-\infty,-3)\end{cases} \text{ и } |x+6|=\begin{cases} x+6, & x\in[-6,\infty) \\ -x-6, & x\in(-\infty,-6)\end{cases}.$$

Можни се следниве четири случаи:

I. Ако $x\in(-\infty,-6)$, тогаш равенката има облик $-2x-1-x-3=-x-6$, односно $x=1$. Равенката нема решение во разгледуваниот интервал, бидејќи $1\notin(-\infty,-6)$.

II. Ако $x\in[-6,-3)$, тогаш равенката добива облик $-2x-1-x-3=x+6$, односно $x=-\frac{5}{2}$. Равенката нема решение во разгледуваниот интервал, бидејќи $-\frac{5}{2}\notin[-6,-3)$.

III. Ако $x\in\left[-3,-\frac{1}{2}\right)$, тогаш равенка има облик $-2x-1+x+3=x+6$, односно $x=-2$. Решение на равенката е $x=-2$.

IV) Ако $x\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$, тогаш равенката има облик $2x+1+x+3=x+6$, односно $x=1$. Решението на равенката е $x=1$.

Конечно, решенија на равенката се $x=-2$ и $x=1$. ●

2.3. Докажи ги равенствата:

1) $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$ 2) $\frac{x+y+|y-x|}{2}=\begin{cases} y, & x\le y \\ x & x>y\end{cases}$

Решение. 1) Со непосредна примена на својствата на апсолутна вредност на реален број, добиваме дека

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\frac{x^2+2x|x|+|x|^2}{4}+\frac{x^2-2x|x|+|x|^2}{4}=x^2.$$

2) Слично како во претходниот случај имаме дека

$$\frac{x+y+|y-x|}{2}=\begin{cases}(x+y+y-x)/2, & y-x\geq 0\\ (x+y-(y-x))/2, & y-x<0\end{cases}=\begin{cases}y, & x\leq y\\ x, & x>y\end{cases}. \quad \bullet$$

2.4. Во множеството реални броеви реши ги неравенките:

1) $x-5>0$ 2) $(x-5)(x-2)>0$ 3) $\dfrac{x-2}{x-6}>0$

4) $x^2-6x+8>0$ 5) $x^2-6x+8\leq 0$ 6) $x^2+x+1\geq 0$

Решение. 1) Равенката $x-5>0$ е еквивалентна со неравенката $x>5$, од каде што следува дека решение на неравенката се сите реални броеви $x\in(5,\infty)$.

2) Решенијата на дадената неравенка се реалните броеви x за кои-што ($x-5>0$ и $x-2>0$) или ($x-5<0$ и $x-2<0$), односно $x\in(5,\infty)$ или $x\in(-\infty,2)$, од каде што следува дека $x\in(-\infty,2)\cup(5,\infty)$.

3) Решенијата на дадената неравенка се реалните броеви x за кои-што ($x-2>0$ и $x-6>0$) или ($x-2<0$ и $x-6<0$), односно $x\in(6,\infty)$ или $x\in(-\infty,2)$, од каде што следува дека $x\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$.

4) Корени на квадратната равенка $x^2-6x+8=0$ се $x_1=2$ и $x_2=4$, па дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x-2)(x-4)>0$.

Производот $(x-2)(x-4)$ е позитивен ако множителите се истовремено позитивни или негативни. Според тоа, решенија на дадената неравенка се сите реални броеви x за коишто ($x-2>0$ и $x-4>0$) или ($x-2<0$ и $x-4<0$). Оттука следува дека множеството решенија на неравенката $x^2-6x+8>0$ се состои од сите $x\in(-\infty,2)\cup(4,\infty)$.

5) Неравенка е еквивалентна со неравенката $(x-2)(x-4)\le 0$. Множеството решенија го сочинуваат сите реални броеви x за коишто ($x-2\ge 0$ и $x-4\le 0$) или ($x-2\le 0$ и $x-4\ge 0$), односно $x\in[2,4]$, бидејќи вториот систем нема решение.

6) Бидејќи равенката $x^2+x+1=0$ нема реални корени, квадратниот трином не го менува знакот, односно множеството решенија на дадената неравенка е или целото множество реални броеви или празното множество. Со метод на проба, заради $0^2+0+1\ge 0$ заклучуваме дека секој реален број е решение на неравенката, односно $x\in(-\infty,\infty)$. ●

2.5. Во множеството реални броеви реши ги следните неравенки:

1) $|3x-4|\ge 5$ 2) $|2x+1|\ge x+2$ 3) $|x^2-4x|+3>x^2+|x-5|$

Решение. 1) Заради својствата на апсолутна вредност на реален број, добиваме дека

$$|3x-4|=\begin{cases}3x-4, & 3x-4\ge 0\\ 4-3x, & 3x-4<0\end{cases}=\begin{cases}3x-4, & x\ge 4/3\\ 4-3x, & x<4/3\end{cases}.$$

Можни се следниве два случаи:

I. Ако $x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, тогаш дадената неравенка има облик $-3x + 4 \geq 5$, што е еквивалентно со $x \leq -\frac{1}{3}$. Решение на неравенката се реалните броеви $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$.

II. Ако $x \in \left[\frac{4}{3}, \infty\right)$, тогаш дадената неравенка има облик $3x - 4 \geq 5$, односно $x \geq 3$. Решение на неравенката се реалните броеви $x \in [3, \infty)$.

Конечно, имаме дека решение на дадената неравенка се сите реални броеви $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [3, \infty)$.

2) Имаме дека $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & 2x+1 \geq 0 \\ -2x-1, & 2x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1, & x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1, & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Можни се следниве два случаи:

I. Ако $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, тогаш неравенката има облик $-2x - 1 \geq x + 2$, што е еквивалентно со $x \leq -1$. Решение на дадената неравенка се реалните броеви $x \in (-\infty, -1]$.

II. Ако $x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$, тогаш неравенката има облик $2x + 1 \geq x + 2$, односно $x \geq 1$. Решение на неравенката се реалните броеви $x \in [1, \infty)$.

Конечно, имаме дека решение на дадената неравенка се сите реални броеви $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

3) Имаме дека

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & x-5 \geq 0 \\ -(x-5), & x-5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-5, & x \in [5, \infty) \\ -x+5, & x \in (-\infty, 5) \end{cases}$$ и

$$\left|x^2-4x\right| = \begin{cases} x^2-4x, & x^2-4x \geq 0 \\ -x^2+4x, & x^2-4x<0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4x, & x\in(-\infty,0]\cup[4,\infty) \\ -x^2+4x, & x\in(0,4) \end{cases}.$$

Можни се следниве три случаи:

I. Ако $x\in(-\infty,0]\cup[4,5)$, тогаш неравенката е $x^2-4x+3>x^2-x+5$, што е еквивалентно со $x<-2/3$. Решение на неравенката се сите реални броеви $x\in(-\infty,-2/3)$.

II. Ако $x\in(0,4)$, тогаш неравенката има облик $-x^2+4x+3>x^2-x+5$, што е еквивалентно со $(2x-1)(x-2)<0$. Решение на неравенката се сите реални броеви $x\in(1/2,2)$.

III. Ако $x\in[5,\infty)$, тогаш неравенката има облик $x^2-4x+3>x^2+x-5$, што е еквивалентно со $x<8/5$. Неравенката нема решение во разгледуваниот интервал, бидејќи $(-\infty,8/5)\cap[5,\infty)=\varnothing$.

Конечно, имаме дека решение на дадената неравенка се сите реални броеви $x\in(-\infty,-2/3)\cup(1/2,2)$. ●

2.6. Докажи ги следните неравенства:

1) $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$, a и b се ненегативни реални броеви.

2) $\sqrt[4]{abcd}\leq\frac{a+b+c+d}{4}$, a, b, c и d се ненегативни реални броеви.

3) $\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}$, a, b и c се ненегативни реални броеви.

4) $ab+bc+ac \le a^2+b^2+c^2$, $a,b,c \in \mathbf{R}$.

5) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2,$ ако a и b се реални броеви со ист знак.

6) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$, a , b и c се позитивни реални броеви.

Решение. 1) Тргнуваме од очигледното неравенство

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0,$$

од каде што следува дека $\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \ge 0,$ односно

$$|a| - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + |b| \ge 0.$$

Бидејќи a и b се ненегативни реални броеви, според дефиницијата на апсолутна вредност на реален број имаме дека $|a| = a,$ $|b| = b$ и $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ Според тоа, добиваме дека

$$a - 2\sqrt{ab} + b \ge 0,$$

од каде што следува дека

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

2) Имаме дека

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \le \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)} \le \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4},$$

при што ги користевме неравенствата

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \text{ и } \sqrt{cd} \le \frac{c+d}{2},$$

односно врската меѓу геометриска и аритметичка средина кај реални броеви.

3) Неравенството

$$\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} \le \frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4}$$

следува од врската меѓу геометриска и аритметичка средина кај реални броеви. Оттука добиваме дека

$$4\sqrt[3]{abc} \le a+b+c+\sqrt[3]{abc},$$

од каде што следува бараното неравенство.

4) Од очигледните неравенства

$$(a-b)^2 \ge 0,\ (a-c)^2 \ge 0 \text{ и } (b-c)^2 \ge 0$$

ги добиваме неравенствата

$$a^2+b^2 \ge 2ab,\ a^2+c^2 \ge 2ac \text{ и } b^2+c^2 \ge 2bc,$$

соодветно. Ако ги собереме последните неравенства, го добиваме бараното неравенство, односно неравенството

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc.$$

5) Ако a и b се реални броеви со ист знак, тогаш важи

$$\frac{a}{b} > 0 \text{ и } \frac{b}{a} > 0.$$

Тогаш од неравенството

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \ge 0$$

следува дека

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$

6) Со непосредна примена на алгебарски операции, добиваме дека

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1=$$

$$=3+\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{b^2+c^2}{bc}\geq$$

$$\geq 3+\frac{2ab}{ab}+\frac{2ac}{ac}+\frac{2bc}{bc}=9\,.\ \bullet$$

2.2. Множество природни броеви

❖ Подмножество $\mathbf{N}$ од множеството реални броеви $\mathbf{R}$ со следните својства:

1. $1\in\mathbf{N}$
2. ако $x\in\mathbf{N}$, тогаш $x+1\in\mathbf{N}$
3. ако $A\subseteq\mathbf{N}$ за кое важи $1\in A$ и $x\in A\Rightarrow x+1\in A$, тогаш $A=\mathbf{N}$.

се нарекува *множество природни броеви*.

❖ Природниот број n е *делив* со $m\in\mathbf{N}$, означуваме $m\,|\,n$, ако постои $k\in\mathbf{N}$ таков што $n=mk$. Притоа ќе велиме дека m е *делител* на n, односно дека n е *содржател* на m.

❖ Природен број е *прост* ако е делив само со 1 и со самиот себе. Во спротивно велиме дека е *сложен*.

❖ За природниот број n велиме дека е *најмал заеднички содржател* за броевите m и p ако е најмалиот природен број за кој важи $m\,|\,n$ и $p\,|\,n$. Пишуваме $n=$ НЗС(m,p).

❖ За природниот број n велиме дека е *најголемиот заеднички делител* (НЗД) на броевите m и p ако е најголемиот природен број за кој важи $n \mid m$ и $n \mid p$. Пишуваме $n =$ НЗД(m, p).

❖ За два природни броја m и n велиме дека се *заемно прости* ако НЗД$(m,n) = 1$.

2.7. Ако $A = \{2k : k \in \mathbf{N}\}$ и $B = \{2k-1 : k \in \mathbf{N}\}$, најди ги множествата:

1) $\mathbf{N} \setminus A$ 2) $\mathbf{N} \setminus B$ 3) $A \setminus \mathbf{N}$ 4) $(\mathbf{N} \setminus A) \cup (\mathbf{N} \setminus B)$

Решение. Множеството A се состои од сите парни броеви, додека множеството B се состои од сите непарни броеви. Имаме дека

1) $\mathbf{N} \setminus A = B$ 2) $\mathbf{N} \setminus B = A$ 3) $A \setminus \mathbf{N} = \varnothing$ 4) $(\mathbf{N} \setminus A) \cup (\mathbf{N} \setminus B) = \mathbf{N}$. ●

2.8. Нека се дадени множествата $A = \{x : x \in \mathbf{N}, x \leq 4\}$, $B = \{x : x = 3\}$ и $C = \{x : x \in \mathbf{N}, 2 < x < 5\}$. Определи ги множествата:

1) $(A \setminus C) \setminus B$ 2) $A \setminus (C \setminus B)$

Решение. Од условот во задачата имаме дека $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3\}$ и $C = \{3,4\}$. Според тоа, добиваме дека

1) $(A \setminus C) \setminus B = \{1,2\}$ 2) $A \setminus (C \setminus B) = \{1,2,3\}$. ●

2.9. Покажи дека се точни следниве тврдења:

1) збирот на два парни броја е парен број,

2) збирот на два непарни броја е парен број,

3) збирот на парен со непарен број е непарен број,

4) производот на два парни броја е парен број,

5) производот на два непарни броја е непарен број,

6) производот на парен со непарен број е парен број.

Решение. 1) Нека m и n се два произволни парни броја. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ такви што $m = 2k_1$ и $n = 2k_2$. Тогаш, имаме дека нивниот збир $m + n = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$ е парен број бидејќи $k_1 + k_2 \in \mathbf{N}$.

2) Нека m и n се два произволни непарни броја. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ такви што $m = 2k_1 - 1$ и $n = 2k_2 - 1$. Тогаш, добиваме дека нивниот збир $m + n = 2k_1 - 1 + 2k_2 - 1 = 2(k_1 + k_2 - 1)$ е парен број бидејќи $k_1 + k_2 - 1 \in \mathbf{N}$.

3) Нека m е произволен парен број и n е произволен непарен број. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ такви што $m = 2k_1$ и $n = 2k_2 - 1$. Тогаш, збирот $m + n = 2k_1 + 2k_2 - 1 = 2(k_1 + k_2) - 1$ е непарен број бидејќи $k_1 + k_2 \in \mathbf{N}$.

4) Нека m и n се два произволни парни броја. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ такви што $m = 2k_1$ и $n = 2k_2$. Тогаш, добиваме дека нивниот производ $m \cdot n = 2k_1 \cdot 2k_2 = 2(2k_1 \cdot k_2)$ е парен број, бидејќи $2k_1 \cdot k_2 \in \mathbf{N}$.

5) Нека m и n се два произволни непарни броја. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ такви што $m = 2k_1 - 1$ и $n = 2k_2 - 1$. Тогаш, имаме дека нивниот производ $m \cdot n = (2k_1 - 1)(2k_2 - 1) = 2(2k_1k_2 - k_1 - k_2 + 1) - 1$ е непарен број бидејќи $2k_1k_2 - k_1 - k_2 + 1 \in \mathbf{N}$.

6) Нека m е произволен парен и n е произволен непарен број. Постојат $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ такви што $m = 2k_1$ и $n = 2k_2 - 1$. Тогаш, имаме дека нивниот производ $m \cdot n = 2k_1(2k_2 - 1) = 2(k_1(2k_2 - 1))$ е парен број, бидејќи $k_1(2k_2 - 1) \in \mathbf{N}$. ●

2.10. Докажи дека ако збирот на два природни броја е непарен број, тогаш нивниот производ е парен број.

Решение. Збирот на два природни броја е непарен број само ако едниот од нив е парен број а другиот е непарен број. (види задача 2.9.).

Тогаш, повторно од задачата 2.9., следува дека нивниот производ е парен број, како производ на парен број со непарен број. ●

2.11. Ако производот на три природни броеви е непарен број, тогаш и нивниот збир е непарен број.

Решение. Производот на три природни броеви е непарен само во случај кога трите броеви се непарни (види задача 2.9). Тогаш, повторно од задачата 2.9, следува дека нивниот збир е непарен број. Поточно, збирот на било кои два од броевите е парен број и збирот со третиот број којшто е непарен број е непарен број. ●

2.12. Покажи дека производот на два последователни природни броеви е парен број.

Решение. Едниот од двата последователни броја е парен број, па од задачата 2.9. следува дека нивниот производ е парен број. ●

2.13. Докажи дека квадратот на непарен природен број може да се запише во облик $8p+1,\ p\in\mathbf{N}$.

Решение. Нека $2k+1$ е произволен непарен број. Тогаш, заради задачата 2.12 постои $p\in\mathbf{N}$ таков што $k(k+1)=2p.$ Оттука следува дека $4k(k+1)=8p,$ што е еквивалентно со $4k^2+4k+1=8p+1.$ Тоа значи дека $(2k+1)^2=8p+1,$ што требаше да се докаже.

2.14. Покажи дека производот на два последователни парни броеви е делив со 8.

Решение. Нека m и n се два последователни парни броеви. Постои $k\in\mathbf{N}$ таков што $m=2k$ и $n=2(k+1)$. Тогаш, заради задачата 2.12., за нивниот производ добиваме $m\cdot n=2k2(k+1)=4k(k+1)=4\cdot 2k_1=8k_1,$ за $k_1\in\mathbf{N}.$ ●

2.15. Докажи дека збирот на три последователни степени на бројот 2, чии степенови показатели се природни броеви, е делив со бројот 7.

Решение. Според условот на задачата имаме дека степеновите показатели се $k, k+1$ и $k+2$, $k \in \mathbf{N}$. Затоа, за бараниот збир имаме дека

$$2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2} = 2^k + 2 \cdot 2^k + 2^2 \cdot 2^k = 2^k (1 + 2 + 2^2) = 7 \cdot 2^k ,$$

од каде што заклучуваме дека $7 \mid (2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2})$. ●

2.16. Докажи дека $8 \mid (9^8 - 1)$.

Решение. Имаме дека

$$8 \mid 8 \cdot (9^7 + 9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 + 1) =$$

$$= (9-1)(9^7 + 9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 + 1) =$$

$$= 9^8 + 9^7 + 9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 - 9^7 - 9^6 - 9^5 - 9^4 - 9^3 - 9^2 - 9 - 1 =$$

$$= 9^8 - 1$$

што требаше да се докаже. ●

2.17. Докажи дека ако бројот n е делив со броевите 2 и 3, тогаш тој е делив со бројот 6.

Решение. Бидејќи $3 \mid 3$ и $2 \mid n$ имаме дека $2 \cdot 3 \mid 3n$, односно $6 \mid 3n$. Аналогно, од $2 \mid 2$ и $3 \mid n$, добиваме дека $2 \cdot 3 \mid 2n$, односно $6 \mid 2n$. Конечно, имаме дека $6 \mid (3n - 2n) = n$, што требаше да се докаже. ●

2.18. Покажи дека збирот на три последователни природни броеви е сложен број.

Решение. Од $n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1)$ заклучуваме дека збирот на три последователни природни броја е број делив со 3. Освен тоа, имаме дека $n+(n+1)+(n+2)>3$ од каде што следува дека збирот е сложен број. ●

2.19. Докажи дека секој прост број поголем од 3 е од облик $6k+1$ или $6k-1$, $k\in\mathbf{N}$.

Решение. Секој природен број може да се запише во еден од следниве облици:

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5,\ k\in\mathbf{N}\cup\{0\}.$$

Очигледно е дека $6\,|\,6k$, $2\,|\,(6k+2)$, $3\,|\,(6k+3)$ и $2\,|\,(6k+4)$, па затоа овие броеви се сложени. Според тоа, ако p е прост број и $p>3$, тогаш $p=6k+1$ или $p=6k-1$, $k\in\mathbf{N}$. ●

2.20. Докажи дека ако p е прост број и $p>3$, тогаш $24\,|\,(p^2-1)$.

Решение. Ако p е прост број и $p>3$, тогаш заради задача 2.19 имаме дека $p=6k\pm1$, $k\in\mathbf{N}.$ Во задача 2.12. видовме дека $k(k\pm1)=2m.$ Врз основа на погорните факти наоѓаме дека

$$p^2-1=(6k\pm1)^2-1=36k^2\pm12k+1-1=24k^2+12k^2\pm12k=$$

$$=24k^2+12k(k\pm1)=24k^2+12\cdot2m=24(k^2+m)$$

што значи дека $24\,|\,(p^2-1)$. ●

2.21. Покажи дека броеви $p,\ p+5$ и $p+9$ се прости ако и само ако $p=2.$

Решение. Ако $p=2,$ тогаш $p+5=7$ и $p+9=11,$ од каде што следува дека броевите $p,\ p+5$ и $p+9$ се прости. Нека $p>2.$ Тогаш p мора да биде непарен број, бидејќи во спротивно би бил делив со два. Сега, од задача 2.9. следува дека броевите $p+5$ и $p+9$ се парни броеви (како збир на два непарни броеви) поголеми од 2, односно се сложени броеви. ●

2.22. Најди НЗС(6930,32340) и НЗД(6930,32340) .

Решение. Имаме дека

$$\begin{array}{r||l} 6930 & 2 \\ 3465 & 3 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r||l} 32340 & 2 \\ 16170 & 2 \\ 8085 & 3 \\ 2695 & 5 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

од што добиваме $6930 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и $32340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$. Оттука заклучуваме дека

$$\text{НЗД} = (6930, 32340) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310,$$

$$\text{НЗС} = (6930, 32340) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 = 97020. \text{ ●}$$

2.23. Докажи дека броевите n и $n+1$ се заемно прости.

Решение. Нека $d =$ НЗД$(n, n+1)$. Бидејќи $d|n$ и $d|(n+1)$, постојат природни броеви k_1 и k_2 така што $n = k_1 d$ и $(n+1) = k_2 d$. Тогаш, имаме дека $1 = (k_2 - k_1)d$. Бидејќи $n+1 > n$ следува дека $k_2 > k_1$, од каде што добиваме дека $k_2 - k_1 \in \mathbf{N}$. Конечно, имаме дека $d|1$, од каде што заклучуваме дека $d = 1$. ●

2.3. Принцип на математичка индукција

❖ Изведувањето на заклучок според принципот на математичка индукција се состои во следните чекори:

1) Тврдењето $I(n)$ е точно за $n=p$ каде што p е фиксен природен број.

2) Ако тврдењето $I(n)$ важи за природен број $n=k\geq p$, тогаш важи и за $n=k+1$.

3) Заклучок: Тврдењето $I(n)$ важи за секој природен број $n\geq p$

.

Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека следниве тврдења се точни за секој $n\in\mathbf{N}$. (задачи 2.24.-2.30.)

2.24. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно, бидејќи имаме $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

3) Тогаш, за $n=k+1$ добиваме дека

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

од каде што според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

2.25. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи имаме дека $1=1^2$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$1+3+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

3) Тогаш, за $n=k+1$ добиваме дека

$$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2,$$

од каде што според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

2.26. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1^2=\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

3) Тогаш, за $n=k+1$ добиваме дека

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)\left(2k^2+k+6k+1\right)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)\left(2k^2+7k+1\right)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

од каде што според принципот на математичка индукција заклучуваме дека тврдењето е точно за секој природен број n. ●

2.27. $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\left(n+1\right)=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{3}$

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1\cdot 2=\dfrac{1\left(1+1\right)\left(1+2\right)}{3}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1,$ односно

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k\left(k+1\right)=\frac{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{3}.$$

3) Тогаш, за $n=k+1$ добиваме дека

$$1\cdot 2+\cdots+k\left(k+1\right)+(k+1)(k+2)=\frac{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{3}+(k+1)(k+2)=$$

$$=\frac{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{3}+\frac{3(k+1)(k+2)}{3}=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)}{3},$$

од каде што според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

2.28. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}=\dfrac{n}{2n+1}$

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи важи $\dfrac{1}{1\cdot 3}=\dfrac{1}{2\cdot 1+1}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{\left(2k-1\right)\left(2k+1\right)}=\frac{k}{2k+1}.$$

3) Тогаш, за $n=k+1$ добиваме дека

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{\left(2k-1\right)\left(2k+1\right)}+\frac{1}{\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)}=$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)}=\frac{2k^2+3k+1}{\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)}=$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1},$$

од каде што според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

2.29. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n = k \geq 1,$ односно

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

3) Тогаш, за $n = k+1$ добиваме дека

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4},$$

од каде што според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

2.30. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2n+2}$

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи важи $1-\dfrac{1}{4} = \dfrac{1+2}{2+2}.$

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n = k \geq 1,$ односно

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\left(k+1\right)^2}\right)=\frac{k+2}{2k+2}.$$

3) Тогаш, за $n=k+1$ добиваме дека

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\left(k+1\right)^2}\right)\left(1-\frac{1}{\left(k+2\right)^2}\right)=\frac{k+2}{2k+2}\left(1-\frac{1}{\left(k+2\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{\left(k+2\right)^2-1}{\left(2k+2\right)\left(k+2\right)}=\frac{\left(k+3\right)\left(k+1\right)}{(2k+2)\left(k+2\right)}=\frac{k+3}{2\left(k+2\right)}=\frac{\left(k+1\right)+2}{2\left(k+1\right)+2},$$

од каде што според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

Со помош на математичка индукција да се докажат идентитетите (задачи 2.31.- 2.32).

2.31. $x+x^2+x^3+\cdots+x^n=x\dfrac{x^n-1}{x-1},\quad x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи имеме $x=x\dfrac{x^1-1}{x-1}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$x+x^2+x^3+\cdots+x^k=x\frac{x^k-1}{x-1}.$$

3) Тогаш, за $n=k+1$ добиваме дека

$$x+x^2+x^3+\cdots+x^k+x^{k+1}=x\frac{x^k-1}{x-1}+x^{k+1}=x\frac{x^{k+1}-1}{x-1}.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

2.32. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\cdots+\dfrac{1}{x^n}=\dfrac{x^n-1}{x^n\left(x-1\right)},\quad x\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$

Решение. 1) За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи имаме $\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^1-1}{x\left(x-1\right)}$.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^k}=\frac{x^k-1}{x^k\left(x-1\right)}.$$

3) Тогаш, за $n=k+1$ добиваме дека

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+1}}=\frac{x^k-1}{x^k\left(x-1\right)}+\frac{1}{x^{k+1}}=\frac{x^{k+1}-1}{x^{k+1}\left(x-1\right)}.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n. ●

2.33. Со принципот на математичка индукција докажи дека докажи го неравенството $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$, за секој природен број $n>1$.

Решение. 1) За $n=2$ имаме дека $(2\cdot 2)!=4!=24<64=2^{2\cdot 2}(2!)^2$, што значи дека неравенството важи.

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 2,$ односно

$$(2k)!<2^{2k}(k!)^2.$$

3) Тогаш, за $n=k+1$ добиваме дека

$$[2(k+1)]!=(2k)!(2k+1)(2k+2)<2^{2k}(k!)^2(2k+1)2(k+1)<$$

$$<2^{2k+1}k!(k+1)k!2(k+1)=2^{2(k+1)}[(k+1)!]^2,$$

од каде што според принципот на математичка индукција заклучуваме дека неравенството важи за секое $n > 1$. ●

2.34. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека $35 \mid 6^{2n} - 1,$ за секое $n \in \mathbf{N}$.

Решение. 1) За $n = 1$ тврдењето е точно бидејќи $35 \mid 6^{2 \cdot 1} - 1,$ односно $35 \mid 35.$

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n = k \geq 1,$ односно

$$35 \mid 6^{2k} - 1.$$

Тоа значи дека постои $m \in \mathbf{N}$ таков што $6^{2k} - 1 = 35m.$

Тогаш за $n = k + 1$ добиваме дека

$$6^{2(k+1)} - 1 = 6^2 \cdot 6^{2k} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 1 = 35 \cdot 6^{2k} + 6^{2k} - 1 =$$

$$= 35 \cdot 6^{2k} + 35m = 35(6^{2k} + m),$$

од каде што според принципот на математичка индукција следува дека тврдењето е точно за секој природен број $n.$ ●

2.35. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека $3 \mid 2^n + 5^{n+1},$ за секое $n \in \mathbf{N}$.

Решение. 1) За $n = 1$ тврдењето е точно бидејќи $3 \mid 2^1 + 5^{1+1},$ односно $3 \mid 27.$

2) Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n = k \geq 1,$ односно

$$3 \mid 2^k + 5^{k+1},$$

Тоа значи дека постои $m \in \mathbf{N}$ таков што $2^k + 5^{k+1} = 3m.$

Тогаш за $n = k+1$ добиваме дека

$$2^{k+1} + 5^{k+2} = 2 \cdot 2^k + 5 \cdot 5^{k+1} = 2(2^k + 5^{k+1}) + 3 \cdot 5^{k+1} =$$

$$= 2 \cdot 3m + 3 \cdot 5^{k+1} = 3(2m + 5^{k+1}),$$

од каде што според принципот на матеатичка индукција следува дека тврдењето е точно за секој природен број n. ●

2.4. Биномна формула

❖ За $a, b \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$ важи *биномната формула*:

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

❖ Коефициентите $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$, $k = 0,1,2,\cdots n,$ се нарекуваат *биномни коефициенти.*

❖ Општиот член од развојот на биномот $\left(a+b\right)^n$ гласи

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad k = 0,1,\cdots,n .$$

2.36. Развиј го биномот според биномната формула.

1) $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{y}\right)^4$ 2) $\left(x^2 + x - 3\right)^4$

Решение. Според биномната формула имаме дека

1) $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{y}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4\left(\dfrac{3}{y}\right)^0 + \binom{4}{1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\left(\dfrac{3}{y}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(\dfrac{3}{y}\right)^2 +$

$$+\binom{4}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^1\left(\frac{3}{y}\right)^3+\binom{4}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^0\left(\frac{3}{y}\right)^4=$$

$$=\frac{x^4}{16}+\frac{3x^3}{2y}+\frac{27x^2}{2y^2}+\frac{54x}{y^3}+\frac{81}{y^4}.$$

2) $\left(x^2+x-3\right)^4=\left(x^2+(x-3)\right)^4=\binom{4}{0}^4\left(x^2\right)^4(x-3)^0+\binom{4}{1}\left(x^2\right)^3(x-3)^1+$

$$+\binom{4}{2}\left(x^2\right)^2(x-3)^2+\binom{4}{3}\left(x^2\right)^1(x-3)^3+\binom{4}{4}\left(x^2\right)^0(x-3)^4=$$

$$=x^8+4x^7-6x^6-32x^5+19x^4+96x^3-54x^2-108x+81.$$ ●

2.37. Со примена на биномната формула пресметај:

1) $1,03^{10}$ точно на четири децимални места.

2) $0,98^6$ точно на пет децимални места.

Решение. Според биномната формула имаме дека

1) $1,03^{10}=(1+0,03)^{10}=\binom{10}{0}0,03^0+\binom{10}{1}0,03^1+\binom{10}{2}0,03^2+\binom{10}{3}0,03^3+$

$$+\binom{10}{4}0,03^4+\binom{10}{5}0,03^5+\binom{10}{6}0,03^6+\binom{10}{7}0,03^7+\binom{10}{8}0,03^8+$$

$$+\binom{10}{9}0,03^9+\binom{10}{10}0,03^{10}=1,3439$$

2) $0,98^6=(1-0,02)^6=\binom{6}{0}0,02^0-\binom{6}{1}0,02^1+\binom{6}{2}0,02^2-\binom{6}{3}0,02^3+$

$$+\binom{6}{4}0,02^4-\binom{6}{5}0,02^5+\binom{6}{6}0,02^6=0,88584.$$ ●

2.38. Најди го седмиот член од развојот на биномот $\left(\frac{a\sqrt{3}}{b}+2\sqrt{b}\right)^{8}$.

Решение. Седмиот член од развојот на биномот изнесува

$$T_{6+1}=\binom{8}{6}\left(\frac{a\sqrt{3}}{b}\right)^{8-6}\left(2\sqrt{b}\right)^{6}=5376a^{2}b. \bullet$$

2.39. Најди го оној член од развојот на биномот $\left(x^{2}-\frac{1}{x}\right)^{9}$, што не го содржи x.

Решение. Општиот член од развојот на дадениот бином изнесува

$$T_{k+1}=\binom{9}{k}\left(x^{2}\right)^{9-k}\left(-\tfrac{1}{x}\right)^{k}=\binom{9}{k}(-1)^{k}\,x^{18-2k-k}.$$

Од равенството $18-3k=0$ следува дека $k=6,$ од каде што заклучуваме дека седмиот член од развојот не го содржи x, односно

$$T_{6+1}=84. \bullet$$

2.40. Најди го тринаесетиот член од развојот на биномот $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{n}$, ако биномниот коефициент пред третиот член од развојот изнесува 105.

Решение. Од равенството $\binom{n}{2}=105,$ односно $n\left(n+1\right)/2=105$ следува дека $n_{1}=15$ и $n_{2}=-14.$ Бидејќи степенот во биномната формула n е природен број, се земаат во предвид само позитивните решенија на равенката, односно $n=15.$ Според тоа, тринаесетиот член од развојот на биномот гласи

$$T_{12+1}=\binom{15}{12}(9x)^{15-12}\left(-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12}=455x^{-3}.\ \bullet$$

2.41. Во развиениот облик на биномот $\left(a\sqrt{a}-\sqrt[3]{2/a^2}\right)^n$ збирот на биномните коефициенти на вториот и третиот член изнесува 45. Определи го членот што го содржи a^7.

Решение. Од равенството $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=45$ имаме дека $n_1=9$ и $n_2=-10.$ Бидејќи n е природен број, се земаат во предвид само позитивните решенија на равенката, односно $n=9.$ Тогаш, членот што го содржи a^7 гласи

$$T_{k+1}=\binom{9}{k}\left(a\sqrt{a}\right)^{9-k}\left(-\sqrt[3]{2/a^2}\right)^k=\binom{9}{k}(-1)^k\left(\sqrt[3]{2}\right)^k a^{3(9-k)/2-2k/3}=$$

$$=\binom{9}{k}(-1)^k\left(\sqrt[3]{2}\right)^k a^{81-14k/6}.$$

Од равенството $\frac{81-13k}{6}=7$ следува дека $k=3,$ од каде што заклучуваме дека четвртиот член од развојот го содржи $a^7,$ односно

$$T_{3+1}=-168a^7.\ \bullet$$

2.42. Биномните коефициенти на четвртиот и шестиот член од развојот на биномот $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^n$ се однесува како $5:18$. Определи го членот од развојот којшто не зависи од x.

Решение. Од равенството $\binom{n}{3}:\binom{n}{5}=5:18$ добиваме дека $n_1=12$ и $n_2=-5$. Бидејќи n е природен број, се земаат во предвид само позитивните решенија на равенката, односно $n=12$. Тогаш, членот од развојот којшто не зависи од x гласи

$$T_{k+1}=\binom{12}{k}(1/x)^{12-k}\left(\sqrt{x}\right)^k=\binom{12}{k}x^{-12+k+k/2}=\binom{12}{k}x^{(-24+3k)/2}$$

Од равенството $\frac{-24+3k}{2}=0$ следува дека $k=8$, од каде што заклучуваме дека деветтиот член од развојот не зависи од x, односно

$$T_{8+1}=495.\ \bullet$$

2.43. Пресметај го x во изразот $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}+a\cdot\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^8$ ако четвртиот член од развојот е еднаков на $56a^{\frac{11}{2}}$.

Решение. Од условот во задачата имаме дека

$$T_{3+1}=T_4=56a^{11/2},$$

од каде што следува дека $\binom{8}{3}\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}\right)^{8-3}\left(a\cdot\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^3=56a^{11/2}$, што е еквивалентно со $56a^{(5-x)/x+6x/(x+1)}=56a^{11/2}$. Според тоа, имаме дека

$$\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}=\frac{11}{2},$$

од каде што добиваме дека $x_1=2$ и $x_2=-5$. $\bullet$

2.44. Определи ги вредностите на x, за кои што во развојот на биномот $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$, збирот на третиот и петтиот член е еднаков на 135, а збирот на биномните коефициенти пред првите три члена е еднаков на 22.

Решение. Од равенството $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=22$ следува дека $n_1=6$ и $n_2=-7$. Бидејќи n е природен број, се земаат во предвид само позитивните решенија на равенката, што значи дека $n=6$. Тогаш, за третиот и петтот член од развојот имаме

$$T_{2+1}=\binom{6}{2}\left(\sqrt{2^x}\right)^{6-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^2=15\cdot 2^x$$

$$T_{4+1}=\binom{6}{4}\left(\sqrt{2^x}\right)^{6-4}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^4=15\cdot 2^{2-x}.$$

Од условот на задачата имаме дека

$$T_3+T_5=135,$$

од каде што следува дека $15\cdot 2^{x+1}+15\cdot 2^{2-x}=135$, односно добиваме дека $x_1=2$ и $x_2=-1$. ●

2.5. Множество цели броеви

❖ Множеството $\mathbf{Z}=\mathbf{N}\cup\{0\}\cup\mathbf{N}^-$, каде што $\mathbf{N}^-=\{-n:n\in\mathbf{N}\}$, го нарекуваме *множество цели броеви*. Значи,

$$\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots,n,-n,n+1,-(n+1),\cdots\}$$

❖ Цел број n е *делив* со $m \in \mathbf{Z}$, означуваме $m \mid n$, ако постои $k \in \mathbf{N}$ таков што $n = mk$. Притоа велиме дека m е *делител* на n, односно дека n е *содржател* на m.

2.45. Ако $A = \{2k : k \in \mathbf{Z}\}$ и $B = \{2k - 1 : k \in \mathbf{Z}\}$, определи ги множествата:

1) $\mathbf{Z} \backslash A$ 2) $\mathbf{Z} \backslash B$ 3) $A \setminus \mathbf{Z}$ 4) $\mathbf{Z} \setminus A \cup \mathbf{Z} \setminus B$

Решение. Множеството A се состои од сите парни цели броеви, додека множеството B се состои од сите непарни цели броеви. Имаме

1) $\mathbf{Z} \backslash A = B$ 2) $\mathbf{Z} \backslash B = A$ 3) $A \setminus \mathbf{Z} = \varnothing$ 4) $\mathbf{Z} \backslash A \cup \mathbf{Z} \backslash B = \mathbf{Z}$. ●

2.46. Докажи дека ако бројот $a + \frac{1}{a}$ е цел број, тогаш:

1) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ е цел број 2) $a^4 + \frac{1}{a^4}$ е цел број.

Решение. 1) Од равенството $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$ следува дека

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2.$$

Оттука заради условот во задачата дека $a + \frac{1}{a}$ е цел број имаме дека $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$ е цел број, односно $a^2 + \frac{1}{a^2}$ е цел број.

2) Поаѓајќи од равенството $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = a^4 + 2 + \frac{1}{a^4}$ добиваме дека

$$a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2.$$

Бидејќи $a+\frac{1}{a}$ е цел број, од заклучотот во 1) имаме дека $a^2+\frac{1}{a^2}$ е цел број. Оттука добиваме дека $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2$ е цел број, односно $a^4+\frac{1}{a^4}$ е цел број. ●

2.47. Докажи дека бројот $a(a+1)(a+2)(a+3)+1,$ каде a е цел број е квадрат на цел број.

Решение. Заклучокот следува од равенството

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1=a^4+6a^3+11a^2+6a+1=\left(a^2+3a+1\right)^2,$$

бидејќи ако a е цел број, тогаш a^2+3a+1 е цел број. ●

2.48. Докажи дека ако збирот на два цели броеви е парен број, тогаш и нивната разлика е парен број.

Решение. Нека m и n се цели броеви чијшто збир е парен број, односно $m+n=2k,\ \ k\in\mathbf{Z}.$ Тогаш, нивната разлика

$$m-n=m-(2k-m)=2(m-k)$$

е парен број бидејќи имаме дека $m-k\in\mathbf{Z}$. ●

2.49. Докажи дека збирот на пет последователни цели броеви е делив со 5.

Решение. Од равенството

$$m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+(m+4)=5(m+2)$$

следува дека збирот на пет последователни цели броеви е делив со 5 бидејќи $m+2\in\mathbf{Z}$. ●

2.50. Докажи дека ако n е цел број, тогаш $\frac{n^3-n}{6}$ е цел број.

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\frac{n^3-n}{6}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6},$$

од трите множители барем еден е парен и барем еден е делив со 3, затоа што имаме производ на три последователни цели броеви. ●

2.51. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни цели броеви е делив со 9.

Решение. Од равенството

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n\left(n^2+2\right)$$

заклучуваме дека доволно е да докажеме дека $n\left(n^2+2\right)$ е делив со 3. За таа цел доволно е да го разгледаме случајот кога n не е делив со 3, односно кога $n=3k\pm1,\ k\in\mathbf{Z}.$ Тогаш имаме дека

$$n^2+2=(3k\pm1)^2+2=9k^2\pm6k+3. \text{ ●}$$

2.52. Докажи дека ако a и b се цели броеви такви што $31\,|\,(6a+11b)$, тогаш $31\,|\,(a+7b)$.

Решение. Од условот $31\,|\,(6a+11b)$ следува дека постои $m\in\mathbf{N}$ таков што $6a+11b=31m$. Тогаш, имаме дека $30a+55b=5(6a+11b)=5\cdot31m,$ од каде што заклучуваме дека

$$31\,|\,(30a+55b).$$

Од друга страна $31a+62b=31(a+2b)=31n,$ што значи дека

$$31 \mid (31a + 62b).$$

Конечно, добиваме дека

$$31 \mid [31a + 62b - (30a + 55b)] = a + 7b,$$

што требаше да се докаже. ●

2.6. Множество рационални броеви

❖ Секој број што може да се претстави во облик $\frac{m}{n}$ каде што $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ и $(m,n) = 1$, се нарекува р*ационален број.* Множеството рационални броеви ќе го означуваме со $\mathbf{Q}$. Запишуваме

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z},\, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

2.53. Да се рационализираат именителите во изразите:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ 4) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$

Решение. Имаме дека

1) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2^2}-1^2} = \sqrt{2}-1$

2) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[3]{2^3}} =$

$$=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$$

4) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[3]{2^3}}=$

$$=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3+2}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{5}. \bullet$$

2.54. Докажи дека следните броеви се рационални:

1) $B=\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$ 2) $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Решение. 1) Имаме дека

$$B^2=\left(\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}\right)^2-2\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}+\left(\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}\right)^2=$$

$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\frac{\sqrt{9-8}}{\sqrt{289-288}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=4,$$

од каде што следува дека $B=2$.

2) Имаме дека

$$A^3=\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)^3}+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)^2\left(20-14\sqrt{2}\right)}+$$

$$+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(20-14\sqrt{2}\right)^3}=$$

$$=20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+$$

$$+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=40+6A,$$

од каде што следува дека $A^3-6A-40=0,$ односно $A=4.$ ●

2.55. Ако $p,$ q и r се позитивни рационални броеви, докажи дека се точни неравенствата:

1) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{p+q}$ 2) $\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \geq pq$

3) $p^2+q^2+r^2 \geq pq+qr+rp$

Решение. 1) Бидејќи p и q се позитивни рационални броеви имаме дека $p<p+q,$ од каде следува дека

$$\frac{1}{p}>\frac{1}{p+q}.$$

Со аналогна дискусија добиваме дека

$$\frac{1}{q}>\frac{1}{p+q}.$$

Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме дека

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{2}{p+q}>\frac{1}{p+q},$$

што требаше да се докаже.

2) Од неравенството $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2 \geq 0$ добиваме дека $p-2\sqrt{pq}+q \geq 0$, односно $\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$. Со непосредно квадрирање на двете страни од неравенството добиваме дека

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \geq pq\ ,$$

што требаше да се докаже.

3) Користејќи го резултатот под 2) добиваме дека

$$p^2+q^2+r^2=\frac{p^2+q^2}{2}+\frac{p^2+r^2}{2}+\frac{r^2+q^2}{2}+\geq pq+qr+rp. \bullet$$

2.56. Ако p, q и $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ се рационални броеви, покажи дека $\sqrt{p}$ и $\sqrt{q}$ се рационални броеви.

Решение. Ако p, q и $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ се рационални броеви, тогаш бројот $\frac{p-q}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}=\sqrt{p}-\sqrt{q}$ е рационален број. Понатаму, имаме дека

$$\sqrt{p}=\frac{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)+\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}{2}$$

$$\sqrt{q}=\frac{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)-\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}{2},$$

се исто така рационални броеви, што требаше да се докаже. ●

2.57. Покажи дека не постои рационален број x со својството:

1) $x^2=2$ 2) $x^3=2$ 3) $x^2=3$ 4) $x^3=3$

Решение. 1) Претпоставуваме дека $x\in\mathbf{Q}$. Тогаш имаме дека $x=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}$ и $(p,q)=1$. Од $\frac{p^2}{q^2}=2$ следува дека $p^2=2q^2$, од каде што заклучуваме дека $2\left|p^2\right.$, а тоа значи дека $2|p$, односно $p=2k$, за $k\in\mathbf{Z}$. Тогаш имаме дека $2k^2=q^2$ од каде следува дека $2|q$. Според тоа, може да заклучиме дека 2 е заеднички делител на p и q што противречи на претпоставката дека $(p,q)=1$.

2) Претпоставуваме дека $x\in\mathbf{Q}$. Тогаш, имаме дека $x=\frac{p}{q},\ p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}$ и $(p,q)=1$. Од $\frac{p^3}{q^3}=2$ следува дека $p^3=2q^3$, од каде што заклучуваме дека $2\,|\,p^3$, а тоа значи дека $2\,|\,p$, односно $p=2k$, за $k\in\mathbf{Z}$. Тогаш имаме дека $4k^3=q^3$ од каде следува дека $2\,|\,q$. Според тоа, може да заклучиме дека 2 е заеднички делител на p и q што противречи на претпоставката дека $(p,q)=1$.

3) Претпоставуваме дека $x\in\mathbf{Q}$. Тогаш, имаме дека $x=\frac{p}{q},\ p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}$ и $(p,q)=1$. Од $\frac{p^2}{q^2}=3$ следува дека $p^2=3q^2$, од каде што заклучуваме дека $3\,|\,p^2$, а тоа значи дека $3\,|\,p$, односно $p=3k,\ k\in\mathbf{Z}$. Тогаш, имаме дека $3k^2=q^2$ од каде следува дека $3\,|\,q$. Според тоа, може да заклучиме дека 3 е заеднички делител на p и q што противречи на претпоставката дека $(p,q)=1$.

4) Претпоставуваме дека $x\in\mathbf{Q}$. Тогаш имаме дека $x=\frac{p}{q},\ p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}$ и $(p,q)=1$. Од $\frac{p^3}{q^3}=3$ следува дека $p^3=3q^3$, од каде што заклучуваме дека $3\,|\,p^3$, а тоа значи дека $3\,|\,p$, односно $p=3k,\ k\in\mathbf{Z}$. Тогаш,

имаме дека $9k^3 = q^3$, односно $3 \cdot 3k^3 = q^3$, од каде следува дека $3|q$. Според тоа, 3 е заеднички делител на p и q што противречи на претпоставката дека $(p,q)=1$. ●

2.7. Задачи за самостојна работа

1. Пресметај $2x \cdot |y+z| - y \cdot |x+z| + z \cdot |x+y|$ ако:

1) $x=\frac{1}{3},\ y=-\frac{1}{3}$ и $z=\frac{1}{6}$ 2) $x=-\sqrt{2},\quad y=2\sqrt{2}$ и $z=\sqrt{12}.$

2. Во множеството реални броеви реши ги следните равенки:

1) $|x-2|=x+1$ 2) $|x+3|=2x-3$

3) $|x-2|+|x-1|=|2x+3|$ 4) $x^2+2x-3|x+1|+3=0$

3. Во множеството реални броеви реши ги неравенките:

1) $\frac{1-x}{1+x} \le 0$ 2) $10-3x-x^2 \le 0$ 3) $x^2-x+1<0$

4) $\frac{x}{(x-1)^3} \ge 0$ 5) $\frac{x^3}{x+10} \ge 0$

4. Во множеството реални броеви реши ги неравенките:

1) $|x-2|>x+1$ 2) $|x-1|+|2-x|>3+x$

5. Докажи дека $(1-a)(1-b)(1-c) \ge 8abc$, ако $a+b+c=1$ и a, b и c се позитивни реални броеви.

6. Ако a, b, c и d се ненегативни реални броеви, докажи дека важи неравенството $(a+b+c+d)^4 \ge 256abcd$.

7. Докажи дека за секој природен број n важи:

1) $2 \mid \left(n^2+n\right)$ 2) $3 \mid \left(n^3+2n\right)$

3) $12 \mid \left(3^n+3^{n+1}\right)$ 4) $3 \mid n\left(2n^2+1\right)$

Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека следниве тврдења се точни за секое $n \in \mathbf{N}$ (задачи 8 - 13).

8. $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

9. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

10. $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

11. $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$

12. $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3=2n^2(n+1)^2$

13. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

Со принципот на математичка индукција докажи дека следните неравенства се точни за секој природен број n (задачи 14 - 17).

14. $2^n>n$

15. $2^n>2n+1$

16. $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{n-1}{n}$

17. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{14}$

18. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека

1) $n(n+1)$ е делив со 2, за секое $n \in \mathbf{N}$.

2) $n(n+1)(n+2)$ е делив со 3, за секое $n \in \mathbf{N}$.

19. Развиј го биномот според биномната формула:

1) $(2x-5)^4$ 2) $(x^2+x-3)^4$

20. Со примена на биномната формула пресметај $1,005^6$ точно на пет децимални места.

21. Најди го седмиот член од развојот на биномот $\left(\frac{3\sqrt[3]{a^2}}{4}-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^9$.

22. Најди го оној член од развојот на биномот:

1) $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{17}$ што не го содржи x.

2) $\left(\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{2\sqrt{a}}{3}\right)^{12}$ што го содржи x^7.

3) $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y}\right)^{14}$ што ги содржи x и y на еднаков степенов показател.

23. Најди го деветтиот член од развојот на биномот $\left(2x+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)^n$, ако биномниот коефициент на третиот член од развојот е 55.

24. Во развиениот облик на биномот $\left(x\sqrt[4]{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ биномните коефи-

циенти на петтиот и десеттиот член се еднакви. Најди го членот што не го содржи x.

25. Дадени се множествата $A=\{n : n\in \mathbf{Z} \text{ и } n\le 6\}$ и

$B=\{n : n\in \mathbf{Z} \text{ и } n\ge -7\}$. Најди ги множествата

1) $A\cap B$ 2) $A\cup B$ 3) $\mathbf{Z}\setminus A$ 4) $\mathbf{Z}\setminus B$

26. Определи ги сите цели броеви x и y коишто го задоволуваат равенството $x+y=xy$.

27. Пресметај ја вредноста на изразот $2\sqrt{75}-3\sqrt{48}+5\sqrt{108}-27\sqrt{3}$.

28. Дали $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$ се рационални броеви? Образложи го одговорот.

29. Докажи дека $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ не е рационален број.

3. Функции со една променлива

3.1. Дефиниција на функција и основни поими

❖ Нека E и F се две непразни подмножества од множеството реални броеви. Ако по некое правило на секој $x \in E$ е придружен единствен елемент $y \in F$, велиме дека е зададена *реална функција* f на множеството E со *вредности* во множството F. Симболички, запишуваме $f : E \to F$.

❖ Ако $f : E \to F$ е функција, тогаш велиме дека E е *домен* или *дефинициона област* (означуваме и со D_f), и F е кодомен на функцијата. Подмножеството $\{f(x) : x \in E\}$ од кодоменот F е *слика на функцијата или множество вредности на* f и го означуваме со R_f.

❖ За функциите f и g велиме дека се *еднакви,* и пишуваме $f = g$, ако и само ако се исполнети следните услови:

1. f и g се дефинирани на исто множество E, односно имаат

исти домени;

2. f и g примаат вредности во исто множество $F,$ односно имаат исти кодомени;

3. $f(x)=g(x),$ за секое $x\in E,$ односно f и g имаат исто дејство.

❖ *График* на функција е множеството од подредени двојки

$$G_f=\{(x,f(x)):x\in D_f\}.$$

Со други зборови, графикот на функцијата е подмножество од $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ кое што се состои од сите точки $(x,f(x)),$ $x\in D_f$.

3.1. Определи дали се еднакви функциите $f:E\to F$ и $g:G\to H$ ако:

1) $f(x)=\sqrt{x^2},\quad E=F=[0,\infty)$ и $g(x)=x,\quad G=H=[0,\infty)$

2) $f(x)=\sqrt{x^2},\quad E=F=\mathbf{R}$ и $g(x)=x,\quad G=H=\mathbf{R}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2},\quad E=F=\mathbf{R}$ и $g(x)=|x|,\quad G=\mathbf{R},\quad H=[0,\infty)$

4) $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x,\quad E=F=\mathbf{R}$ и $g(x)=\cos 2x,\quad G=H=\mathbf{R}$

Решение. 1) Да, бидејќи имаат исти домени, исти кодомени и имаат исто дејство.

2) Не, бидејќи имаат различно дејство. Попрецизно, $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|,$

за секое $x \in \mathbf{R}$, додека $g(x) = x$, за секое $x \in \mathbf{R}.$

3) Не, бидејќи имаат различни кодомени.

4) Да, бидејќи имаат исти домени, исти кодомени, и имаат исто дејство заради тригонометрскиот идентитет $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x.$ ●

Определи ги дефиниционите области на следните функции: (задачи 3.2.- 3.8.)

3.2. 1) $f(x) = x^2 + x + 1$ 2) $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$

3) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 8}$ 4) $f(x) = \dfrac{x^2}{2|x| - 3}$

Решение. 1) Аналитичкиот израз има смисла за секој реален број. Според тоа, заклучуваме дека $D_f = \mathbf{R}.$

2) Аналитичкиот израз има смисла за секој реален број. Според тоа, заклучуваме дека $D_f = \mathbf{R}.$

3) Бидејќи делење со нула не е допуштено, аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $x^2 - 6x + 8 \neq 0$. Од условот $x^2 - 6x + 8 = 0$ ако и само ако $x = 2$ или $x = 4,$ заклучуваме дека $x = 2$ и $x = 4$ не припаѓаат на дефиниционата област. Според тоа, имаме дека $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, \infty).$

4) Бидејќи делење со нула не е допуштено, аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $2|x| - 3 \neq 0.$ Од условот $2|x| - 3 = 0$ ако и само ако $x = -\dfrac{3}{2}$ или $x = \dfrac{3}{2}$, заклучуваме дека

наведените точки не припаѓаат на дефиниционата област. Затоа имаме дека $D_f = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. ●

3.3. 1) $f(x) = \sqrt{x+1}$ 2) $f(x) = \sqrt{-x^2}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{2-x}$ 4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Решение. 1) Поткоренова вредност мора да биде ненегативна па изразот има смисла за сите реални броеви за кои важи $x+1 \geq 0$, односно $x \geq -1$, од каде што заклучуваме дека $D_f = [-1, \infty)$.

2) Поткоренова вредност мора да биде ненегативна па аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $-x^2 \geq 0$. Според тоа, имаме дека $D_f = \{0\}$.

3) Поткоренова вредност на корен од парен ред мора да биде ненегативна па аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои што е исполнето неравенството $2 - x \geq 0$, што е еквивалентно со $x \leq 2$. Според тоа, имаме дека $D_f = (-\infty, 2]$.

4) Бидејќи делење со нула не е допуштено и поткоренова вредност мора да биде ненегативна, аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои што е исполнето неравенството $1 - x^2 > 0$, односно за секое $x \in (-1, 1)$. Според тоа, имаме дека $D_f = (-1, 1)$. ●

3.4. 1) $f(x) = 2^{x-1}$ 2) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

3) $f(x) = \frac{x-2}{e^{1/x}}$ 4) $f(x) = \sqrt{2-2^x}$

Решение. 1) Бидејќи експоненцијалната функција е дефинирана за секој реален број, аналитичкиот израз има смисла за секој реален број. Според тоа, заклучуваме дека $D_f = \mathbf{R}$.

2) Од неравенството $3^{x+1} > 0$, за секој реален број x, следува дека поткоренова вредност е ненегативна за секој реален број x. Тоа значи дека аналитичкиот израз има смисла за секој реален број. Според тоа, имаме дека $D_f = \mathbf{R}$.

3) Бидејќи делење со нула не е допуштено, аналитичкиот израз има смисла за секој реален број различнен од нула. Според тоа, имаме дека $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

4) Поткоренова вредност мора да биде ненегативна па аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои што важи $2 - 2^x \geq 0$, односно $x \leq 1$. Според тоа, имаме дека $D_f = (-\infty, 1]$. ●

3.5. 1) $f(x) = \log x^2$ 2) $f(x) = \log(3x+4)$

3) $f(x) = \log|x+1|$ 4) $f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)}$

Решение. 1) Бидејќи логаритамската функција е дефинирана само за позитивни вредности на независно променливата, аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за важи неравенството $x^2 > 0$, што е еквивалентно со $x \neq 0$. Според тоа, имаме дека $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

2) Бидејќи логаритамската функција е дефинирана само за позитивни вредности на независно променливата, аналитичкиот израз

има смисла за сите реални броеви за кои важи $3x+4>0,$ односно $x>-\frac{3}{4}$. Според тоа, имаме дека $D_f=\left(-\frac{4}{3},\infty\right).$

3) Бидејќи логаритамската функција е дефинирана само за позитивни вредности на независно променливата, аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои важи $|x+1|>0,$ односно сите реални броеви $x\neq-1.$ Според тоа, имаме дека $D_f=\mathbf{R}\setminus\{-1\}.$

4) Поткоренова вредност мора да биде ненегативна, аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за коишто $\log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)\geq 0,$ односно $\frac{5x-x^2}{4}\geq 1$. Според тоа, имаме дека $D_f=[1,4].$ ●

3.6. 1) $f(x)=\sqrt[4]{3-x}+\sqrt{x+1}$ 2) $f(x)=\log\left(16-x^2\right)+\frac{1}{1-\sin x}$

Решение. 1) Аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои што се исполнети неравенствата $3-x\geq 0$ и $x+1\geq 0$. Според тоа, имаме дека $D_f=[-1,3]$.

2) Аналитичкиот израз има смисла за сите реални броеви за кои што се исполнети неравенствата $16-x^2>0$ и $\sin x\neq 1.$ Бидејќи $16-x^2>0,$ за секое $x\in(-4,4)$ и $\sin x\neq 1,$ за секое $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\},$ добиваме дека $D_f=\left(-4,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},4\right).$ ●

3.7. Дадена е функцијата $f(x)=x^4-2x+4$. Најди ги вредностите:

1) $f(-1)$ 2) $f(0)$ 3) $f(2)$

Решение. Имаме дека

1) $f(-1)=(-1)^4-2(-1)+4=7$

2) $f(0)=0^4-2\cdot 0+4=4$

3) $f(2)=2^4-4+4=16$. ●

3.8. Дадена е функцијата

$$f(x)=\begin{cases} 3^{-x}-1, & -1\le x<0 \\ tg\dfrac{x}{2}, & 0\le x<\pi \\ \dfrac{x}{x^2-2}, & \pi\le x\le 6 \end{cases}$$

Определи ги вредностите:

1) $f(-1)$ 2) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 3) $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 4) $f(4)$

Решение. 1) Точката $x=-1$ припаѓа на интервалот $[-1,0)$, па според тоа имаме дека $f(-1)=3^{-(-1)}-1=2.$

2) Точката $x=\dfrac{\pi}{2}$ припаѓа на интервалот $[0,\pi)$, па според тоа имаме дека $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=tg\dfrac{\pi}{4}=1.$

3) Точката $x=\dfrac{2\pi}{3}$ припаѓа на интервалот $[0,\pi)$, па според тоа имаме дека $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=tg\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$

4) Точката $x=4$ припаѓа на интервалот $[\pi,6]$, па според тоа имаме

дека $f(4)=\dfrac{4}{4^2-2}=\dfrac{2}{7}$. ●

3.9. Дадена е функцијата $f(x)=\sqrt{x^2+4ab}$. Определи $f(a-b)$.

Решение. Имаме дека $f(a-b)=\sqrt{(a-b)^2+4ab}=\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|$. ●

3.10. Ако $f(x)=\dfrac{1}{x}$, докажи дека $f(a)f(b)=f(ab)$.

Решение. Имаме дека $f(a)f(b)=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{ab}=f(ab)$. ●

3.11. Ако $f(x)=e^x$, докажи дека $f(a)f(b)=f(a+b)$.

Решение. Имаме дека $f(a)f(b)=e^a\cdot e^b=e^{a+b}=f(a+b)$. ●

3.12. Ако $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$, докажи дека $f(a)+f(b)=f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

Решение. Имаме дека

$$f(a)+f(b)=\log\frac{1+a}{1-a}+\log\frac{1+b}{1-b}=$$

$$=\log(1+a)-\log(1-a)+\log(1+b)-\log(1-b)=$$

$$=\log\big((1+a)(1+b)\big)-\log\big((1-a)(1-b)\big)=$$

$$=\log(1+a+b+ab)-\log(1-a-b+ab)=$$

$$=\log\left(\frac{1+a+b+ab}{1-a-b+ab}\right)=\log\left(\frac{\dfrac{1+a+b+ab}{1+ab}}{\dfrac{1-a-b+ab}{1+ab}}\right)=$$

$$= \log\left(\frac{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}\right) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right). \bullet$$

3.13. Најди функција од облик $f\left(x\right) = ax + b,$ ако $f(0) = -2$ и $f(1) = 0.$

Решение. Од условот на задачата, $f(0) = -2$ и $f(1) = 0,$ го добиваме системот

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = -2 \\ \quad a + b = 0 \end{cases},$$

чие што решение е $a = 2,\ \ b = -2.$ Според тоа, бараната функција гласи $f\left(x\right) = 2x - 2.$ ●

3.14. Најди функција од обликот $f\left(x\right) = a + bc^x,\ \ c > 0,$ ако $f(0) = 15,$ $f(2) = 30$ и $f(4) = 90.$

Решение. Од условот на задачата $f(0) = 15,\ \ f(2) = 30$ и $f(4) = 90,$ го добиваме системот

$$\begin{cases} a + bc^0 = 15 \\ a + bc^2 = 30, \\ a + bc^4 = 90 \end{cases}$$

чиешто решение е $a = 10,\ \ b = 5$ и $c = 2.$ Според тоа, бараната функција гласи $f\left(x\right) = 10 + 5 \cdot 2^x.$ ●

3.15. Пресметај ја вредноста на функцијата $f\left(x\right) = \dfrac{48}{x^2} + x^2$ во сите точки x за кои што $x - \dfrac{4}{x} = 3.$

Решение. Од равенството $x-\frac{4}{x}=3$ добиваме дека бараните точки се $x=4$ и $x=-1$. Според тоа, имаме дека

$$f(4)=\frac{48}{4^2}+4^2=19 \text{ и } f(-1)=\frac{48}{1}+1=49. \bullet$$

3.2. Монотоност на функција

❖ Нека E_1 е подмножество од доменот на функцијата $f:E\to F$. Велиме дека функцијата $f:E\to F$

• *монотоно расте на множеството* E_1 ако

$$\forall x_1,x_2\in E_1: \quad x_1<x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1)\le f(x_2)$$

• *строго монотоно расте* на множеството E_1 ако

$$\forall x_1,x_2\in E_1: \quad x_1<x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1)< f(x_2)$$

• *монотоно опаѓа* на множеството E_1 ако

$$\forall x_1,x_2\in E_1: \quad x_1<x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1)\ge f(x_2)$$

• *строго монотоно опаѓа* на множеството E_1 ако

$$\forall x_1,x_2\in E_1,\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

3.16. Докажи дека следните функции монотоно растат:

1) $f(x)=x+3$ 2) $f(x)=x^3-1$

3) $f(x)=\ln(x-1)$ 4) $f(x)=e^{x+1}$

Решение. 1) Нека $x_1,x_2\in D_f=\mathbf{R}$. Од $x_1<x_2$ следува дека $x_1-x_2<0$. Тогаш, имаме дека

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+3-x_2-3=x_1-x_2<0,$$

од каде што следува дека $f(x_1)<f(x_2)$, што значи дека функцијата строго монотоно расте.

2) За секои $x_1,x_2\in D_f=\mathbf{R}$ од $x_1<x_2$ следува $x_1-x_2<0$. Тогаш, имаме

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-1-x_2^3+1=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)\leq$$

$$\leq(x_1-x_2)\left(\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}\right)<0$$

од каде што следува дека $f(x_1)<f(x_2)$, бидејќи множителот од десната страна на неравенството е секогаш позитивен. Оттука заклучуваме дека функцијата строго монотоно расте.

3) За секои $x_1,x_2\in D_f=(1,\infty)$, за $x_1<x_2$ имаме дека

$$f(x_1)-f(x_2)=\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)=\ln\left(\frac{x_1-1}{x_2-1}\right)=\ln\left(1+\frac{x_1-x_2}{x_2-1}\right)<0,$$

бидејќи $0<1+\dfrac{x_1-x_2}{x_2-1}<1$. Според тоа, добиваме дека $f(x_1)<f(x_2)$, што значи дека функцијата строго монотоно расте.

4) Нека $x_1,x_2\in D_f$. Од $x_1<x_2$ следува дека $x_1-x_2<0$. Тогаш, имаме

$$f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1+1}-e^{x_2+1}=e^{x_2+1}\left(\frac{e^{x_1+1}}{e^{x_2+1}}-1\right)=e^{x_2+1}\left(e^{x_1-x_2}-1\right)<0,$$

бидејќи $e^{x_1-x_2}<1$. Според тоа, добиваме дека $f(x_1)<f(x_2)$, што значи дека функцијата строго монотоно расте. ●

3.17. Докажи дека следните функции монотоно опаѓаат:

1) $f(x)=1-2x$ 2) $f(x)=1-x^3$

3) $f(x)=-\ln(x+3)$ 4) $f(x)=3^{-x}$

Решение. 1) Нека $x_1,x_2\in D_f=\mathbf{R}$. За $x_1<x_2$ имаме дека

$$f(x_1)-f(x_2)=1-2x_1-(1-2x_2)=2(x_2-x_1)>0,$$

од каде што следува дека $f(x_1)>f(x_2)$, што значи дека функцијата строго монотоно опаѓа.

2) Нека $x_1,x_2\in D_f=\mathbf{R}$. За $x_1<x_2$ имаме дека

$$f(x_1)-f(x_2)=1-x_1^3-\left(1-x_2^3\right)=-x_1^3+x_2^3=(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)\geq$$

$$\geq(x_2-x_1)\left(\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}\right)>0,$$

од каде што следува дека $f(x_1)>f(x_2)$, бидејќи множителот од десната страна на неравенството е секогаш позитивен. Оттука заклучуваме дека функцијата строго монотоно опаѓа.

3) Нека $x_1,x_2\in D_f=\mathbf{R}$ и $x_1<x_2$. Тогаш, имаме дека

$$f(x_1)-f(x_2)=-\ln(x_1+3)-\left(-\ln(x_2+3)\right)=\ln\left(\frac{x_2+3}{x_1+3}\right)=$$

$$=\ln\left(1+\frac{x_2-x_1}{x_1+3}\right)>0,$$

од каде што следува дека $f(x_1) > f(x_2)$, бидејќи $1+\frac{x_2-x_1}{x_1+3} > 1$. Оттука заклучуваме дека функцијата строго монотоно опаѓа.

4) Нека $x_1, x_2 \in D_f = \mathbf{R}$. За $x_1 < x_2$ имаме дека

$$f(x_1)-f(x_2) = 3^{-x_1} - 3^{-x_2} = 3^{-x_1}\left(1-\frac{3^{-x_2}}{3^{-x_1}}\right) = 3^{-x_1}\left(1-3^{-x_2+x_1}\right) > 0,$$

од каде што следува дека $f(x_1) > f(x_2)$, бидејќи важи неравенството $3^{x_1-x_2} < 1$. Според тоа, дадената функцијата строго монотоно опаѓа. ●

3.18. Испитај ја монотоноста на следните функции:

1) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $x \in [1,\infty)$ 2) $f(x) = x + \log x$

3) $f(x) = 2^{x+3}$ 4) $f(x) = 2x + e^{x+1}$

Решение. 1) За $x_1, x_2 \in D_f = [1,\infty)$ од $x_1 < x_2$ имаме дека

$$f(x_1)-f(x_2) = \frac{2x_1}{1+x_1^2} - \frac{2x_2}{1+x_2^2} = \frac{2(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} > 0,$$

од каде што следува дека $f(x_1) > f(x_2)$, бидејќи $1-x_1x_2 < 0$. Оттука заклучуваме дека функцијата строго монотоно опаѓа.

2) Нека $x_1, x_2 \in D_f = (0,\infty)$. Ако $x_1 < x_2$, тогаш имаме дека

$$f(x_1)-f(x_2) = x_1 + \log x_1 - x_2 - \log x_2 = x_1 - x_2 + \log\frac{x_1}{x_2} < 0,$$

од каде што следува дека $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$, бидејќи $\frac{x_1}{x_2}<1$. Оттука заклучуваме дека функцијата строго монотоно расте.

3) Нека $x_1, x_2 \in D_f=\mathbf{R}$. Ако $x_1<x_2$, тогаш имаме дека

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=2^{x_1+3}-2^{x_2+3}=2^{x_1-x_2}>0,$$

од каде што следува дека $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$. Оттука заклучуваме дека функцијата строго монотоно расте на целата реална права.

4) Нека $x_1, x_2 \in D_f=\mathbf{R}$. Ако $x_1<x_2$, тогаш имаме дека

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=2x_1+e^{x_1+1}-(2x_2+e^{x_2+1})=2(x_1-x_2)+e^{x_1+1}(1-e^{x_2-x_1})<0,$$

од каде што следува дека $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$, бидејќи $1-e^{x_2-x_1}<0$. Оттука заклучуваме дека функцијата строго монотоно расте на целата реална права. ●

3.19. Определи ги интервалите на монотоност на следните функции:

1) $f(x)=|x-2|$ 2) $f(x)=\frac{1}{|x|}$

3) $f(x)=\frac{x}{x^2+5}$ 4) $f(x)=\frac{1}{|2-x|}$

Решение. 1) Нека $x_1, x_2 \in(2, \infty)$. За $x_1<x_2$ имаме дека

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=x_1-2-(x_2-2)=x_1-x_2<0,$$

што значи дека $f(x_1)<f(x_2)$, од каде што заклучуваме дека функцијата строго монотоно расте на интервалот $(2, \infty)$.

Ако $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$, за $x_1 < x_2$ имаме дека

$$f(x_1) - f(x_2) = -x_1 + 2 - (-x_2 + 2) = -x_1 + x_2 > 0,$$

од каде што следува дека $f(x_1) > f(x_2)$, што значи дека функцијата строго монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty, 2)$.

Конечно, добиваме дека функцијата строго монотоно расте на интервалот $(2, \infty)$, и строго монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty, 2)$.

2) Нека $x_1, x_2 \in (0, \infty)$. За $x_1 < x_2$ имаме дека

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0,$$

од каде што следува дека $f(x_1) > f(x_2)$, што значи дека функцијата строго монотоно опаѓа на интервалот $(0, \infty)$.

Нека $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$. За $x_1 < x_2$ имаме дека

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} < 0,$$

што значи дека $f(x_1) < f(x_2)$, од каде што заклучуваме дека функцијата строго монотоно расте на интервалот $(-\infty, 0)$.

Конечно, добиваме дека функцијата строго монотоно расте на интервалот $(-\infty, 0)$, и строго монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty, 0)$.

3) Нека $x_1, x_2 \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$. За $x_1 < x_2$ имаме дека

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + 5} - \frac{x_2}{x_2^2 + 5} = \frac{(x_1 x_2 - 5)(x_2 - x_1)}{(x_1^2 + 5)(x_2^2 + 5)} \le 0,$$

што значи дека $f(x_1) \leq f(x_2)$, од каде што заклучуваме дека функцијата монотоно расте на интервалот $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$.

Ако $x_1, x_2 \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$, за $x_1 < x_2$ имаме дека

$$f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right) = \frac{x_1}{x_1^{\ 2} + 5} - \frac{x_2}{x_2^{\ 2} + 5} = \frac{(x_1 x_2 - 5)(x_2 - x_1)}{(x_1^{\ 2} + 5)(x_2^{\ 2} + 5)} > 0,$$

од каде што следува дека $f\left(x_1\right) \geq f\left(x_2\right)$, што значи дека функцијата монотоно опаѓа на интервалот $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$.

Конечно, добиваме дека функцијата монотоно расте на интервалот $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$, и монотоно опаѓа на $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$.

4) Нека $x_1, x_2 \in \left(2, \infty\right)$. За $x_1 < x_2$ имаме дека

$$f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right) = \frac{1}{2 - x_1} - \frac{1}{2 - x_2} = -\frac{x_1 - x_2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} > 0,$$

од каде што следува дека $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$, што значи дека функцијата строго монотоно опаѓа на интервалот $\left(2, \infty\right)$.

Нека $x_1, x_2 \in \left(-\infty, 2\right)$. За $x_1 < x_2$ имаме дека

$$f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right) = \frac{1}{-2 + x_1} - \frac{1}{-2 + x_2} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} < 0,$$

што значи дека $f(x_1) < f(x_2)$, од каде што заклучуваме дека функцијата строго монотоно расте на интервалот $\left(-\infty, 2\right)$.

3.3. Ограничени функции

❖ Функцијата f е *ограничена од горе* ако постои реален број M таков што $f(x) \leq M$, за секое $x \in D_f$.

❖ функцијата f е *ограничена од долу* ако постои реален број m таков што $f(x) \geq m$, за секое $x \in D_f$.

❖ Функцијата е *ограничена* ако е ограничена и од горе и од долу. Тогаш постои позитивен реален број K таков што $|f(x)| \leq K$, за секое $x \in D_f$.

❖ Функцијата е *неограничена* ако не е ограничена, односно ако за секој позитивен реален број a постои $x \in D_f$ таков, што $|f(x)| > a$.

3.20. Докажи дека следните функции се ограничени:

1) $f(x) = 2x + 3, \quad x \in [-1, 2]$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

3) $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{1+x^2}\right)$ 4) $f(x) = 10^{x+1}$

5) $f(x) = 3\sin^2 \dfrac{x}{2}$ 6) $f(x) = 3\cos 2x$

Решение. 1) Имајќи во вид дека $-1 \leq x \leq 2$ имаме дека

$$|f(x)| = |2x+3| \leq 2|x| + 3 \leq 2 \cdot 2 + 3 = 7,$$

од каде што следува дека функцијата е ограничена.

2) Од очигледното неравенство $x^2 \geq 0$, за секое $x \in D_f = \mathbf{R}$, следува дека $1 + x^2 \geq 1$, од каде што добиваме дека $\dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$. Понатаму,

заради $\frac{1}{1+x^2}>0$ имаме дека $\left|\frac{1}{1+x^2}\right|=\frac{1}{1+x^2}$. Според тоа, наоѓаме дека

$$\left|f(x)\right|=\left|\frac{1}{1+x^2}\right|=\frac{1}{1+x^2}\leq 1,$$

од каде што следува дека функцијата е ограничена.

3) За секој реален број x важи двојното неравенство $0<\frac{1}{1+x^2}\leq 1.$

Со додавање на 1 кон секоја страна наоѓаме дека $1<1+\frac{1}{1+x^2}\leq 2.$

Ако го логаритмираме двојното неравенство добиваме дека

$$\ln 1<\ln\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)\leq \ln 2,$$

што значи дека

$$\ln 1<f(x)\leq \ln 2,$$

од каде што заклучуваме дека функцијата е ограничена.

4) За секое $x\in D_f=[0,1]$ важи

$$\left|f(x)\right|=\left|10^{x+1}\right|=10\cdot 10^x\leq 10^2,$$

од каде што следува дека функцијата е ограничена.

5) За секое $x\in D_f=\mathbf{R}$, имаме дека

$$\left|f(x)\right|=\left|3\sin^2\frac{x}{2}\right|=\left|\frac{3(1-\cos x)}{2}\right|\leq\frac{3}{2}+\frac{3\left|\cos x\right|}{2}\leq 3,$$

од каде што следува дека функцијата е ограничена.

6) За секое $x \in D_f = \mathbf{R},$ имаме дека

$$\left|f\left(x\right)\right| = \left|3\cos 2x\right| = 3\left|\cos 2x\right| \leq 3 \cdot 1 = 3,$$

од каде што следува дека функцијата е ограничена. ●

3.21. Испитај дали се неограничени следните функции:

1) $f\left(x\right) = \left|x+2\right|$ 2) $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x}$

3) $f\left(x\right) = x\ln\left(3+x\right)$ 4) $f\left(x\right) = 2^{x+1}$

5) $f\left(x\right) = x + \sin x$ 6) $f\left(x\right) = \sqrt{x^2+1}$

Решение. 1) Нека M е произволен позитивен број. За $x = M$ имаме

$$\left|f\left(x\right)\right| = \left|f(M)\right| = \left|M+2\right| = M+2 > M,$$

од каде што следува дека функцијата е неограничена.

2) Нека M е произволен позитивен број. За $x = \dfrac{1}{M+1}$ имаме дека

$$\left|f\left(x\right)\right| = \left|f\left(\frac{1}{M+1}\right)\right| = \left|M+1\right| = M+1 > M,$$

од каде што следува дека функцијата е неограничена.

3) Нека M е произволен позитивен број. За $x = M$ имаме дека

$$\left|f\left(x\right)\right| = \left|f(M)\right| = \left|M\ln(3+M)\right| = M\left|\ln(3+M)\right| > M,$$

бидејќи од $3 + M > e$ следува $\ln\left(3+M\right) > \ln e = 1.$ Споре тоа, заклучуваме дека функцијата е неограничена.

4) Нека M е произволен позитивен број. За $x = \log_2 M$ имаме дека

$$\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(\log_2 M\right)\right|=\left|2^{\log_2 M+1}\right|=2M>M,$$

од каде што следува дека функцијата е неограничена.

5) Нека M е произволен позитивен број. За $x=M+2$ имаме дека

$$\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(M+2\right)\right|=\left|M+2+\sin\left(M+2\right)\right|\geq M+1>M,$$

бидејќи од $-1\leq\sin\left(M+2\right)$ имаме дека $0<M+2-1\leq M+2+\sin\left(M+2\right)$. Според тоа, дадената функција е неограничена.

6) Нека M е произволен позитивен број. За $x=M$ имаме дека

$$\left|f\left(x\right)\right|=\left|f(M)\right|=\sqrt{M^2+1}>M,$$

од каде што следува дека функцијата е неограничена.

Значи, во сите случаи функциите се неограничени. ●

3.4. Локални екстреми

❖ Функција f има *локален максимум* во точката $x_0\in D_f$ ако постои $\varepsilon>0$ такво што за секое $x\in\left(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon\right)\cap D_f$, $x\neq x_0$, имаме дека $f\left(x\right)<f\left(x_0\right)$.

❖ Функција f има *локален минимум* во точката $x_0\in D_f$ ако постои $\varepsilon>0$ такво што за секое $x\in\left(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon\right)\cap D_f$, $x\neq x_0$, имаме дека $f\left(x\right)>f\left(x_0\right)$.

❖ Ако во точката $x_0 \in D_f$ функцијата има локален максимум или локален минимум, велиме дека во таа точка функцијата има *локален екстрем*.

3.22. Определи ги локалните екстреми на следните функции:

1) $f(x)=2-x^2$ 2) $f(x)=|x-2|$

3) $f(x)=-x^2+x-4$ 4) $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$

5) $f(x)=|\ln x|$ 6) $f(x)=3^{\left(x^2-2\right)^3+8}$

Решение. 1) Од $2-x^2 \leq 2,$ за секое $x \in \mathbf{R},$ и $2-x^2=2$ ако и само ако $x=0,$ следува дека функцијата има максимум во точката $x_0=2.$

2) Од $|x-2| \geq 0$ и $|x-2|=0$ ако и само ако $x=2$, следува дека функцијата има минимум во точката $x_0=2$.

3) Бидејќи $f(x)=-x^2+x-6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{15}{4},$ следува дека функцијата има максимум во точката $x_0=\frac{1}{2}$.

4) Бидејќи $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}},$ следува дека функцијата има максимум во точката $x_0=\frac{1}{2}$.

5) Од неравенството $|\ln x| \geq 0$ следува дека функцијата има минимум во точката $x_0=1$.

6) Да го означиме степенскиот показател со $g(x)$, односно да ставиме $g(x)=\left(x^2-2\right)^3+8.$ Функцијата $f(x)$ прима најмала вредност во оние точки во кои функцијата $g(x)$ прима најмала вредност. Од

$$g(x)=\left(x^2-2\right)^3+8=x^6-6x^4+12x^2=x^2\left(\left(x^2-3\right)^2+7\right),$$

следува дека функцијата $g(x)$ има минимум во точката $x_0=0.$ ●

3.5. Сложени функции

❖ За две функции $f:E\to F$ и $g:F\to G$, функцијата $g\circ f:E\to G$ зададена со:

$$(g\circ f)(x)\overset{\text{деф.}}{=}g(f(x)),\quad x\in E$$

ја викаме *сложена функција* или *композиција на функциите* f и g.

3.23. Определи ги сложените функции $f\circ g$ и $g\circ f$, ако:

1) $f(x)=x^3,\quad g(x)=\sqrt[3]{x}$ 2) $f(x)=10^x,\quad g(x)=\log x$

Решение. 1) Имаме дека

$$f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\sqrt[3]{x}\right)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x, \text{ за секое } x\in\mathbf{R}, \text{ и}$$

$$g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)=g(x^3)=\sqrt[3]{x^3}=x, \text{ за секое } x\in\mathbf{R}.$$

2) Имаме дека

$$f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\log x\right)=10^{\log x}=x, \text{ за секое } x>0, \text{ и}$$

$$g\circ f(x)=\log(10^x)=x, \text{ за секое } x\in\mathbf{R}.$$ ●

3.24. Определи ги доменот и дејството на сложените функции $f \circ g$ и $g \circ f$, ако:

1) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=x^2-5x+6$ 2) $f(x)=\sqrt{9-x^2},\ g(x)=[x]$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x-1},\ g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 4) $f(x)=\sqrt{2-x},\ g(x)=x^2$

Решение. 1) Функцијата

$$f \circ g(x)=f(g(x))=f\left(x^2-5x+6\right)=\sqrt{x^2-5x+6}$$

е дефинирана за секој реален број x што го задоволува неравенството $x^2-5x+6\geq 0,$ односно за секое $x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty).$ Според тоа,

$$f \circ g(x)=\sqrt{x^2-5x+6},\ \text{за секое}\ x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty).$$

Функцијата $g \circ f(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x}\right)=(\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}+6$ е дефинирана за секој реален број $x\geq 0.$ Според тоа, имаме дека

$$g \circ f(x)=x-5\sqrt{x}+6,\ \text{за секое}\ x\in[0,+\infty).$$

2) Функцијата $f \circ g(x)=f(g(x))=f([x])=\sqrt{9-[x]^2}$ е дефинирана за секој реален број x што го задоволува неравенството $9-[x]^2\geq 0,$ односно за секое $x\in[-3,4).$ Според тоа,

$$f \circ g(x)=\sqrt{9-[x]^2},\ \text{за секое}\ x\in[-3,4).$$

Функцијата $g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(\sqrt{9-x^2}\right)=\left[\sqrt{9-x^2}\right]$ е дефинирана за секој реален број x што го задоволува неравенството $9-x^2\geq 0,$ односно за секое $x\in[-3,3]$. Според тоа,

$$g\circ f(x)=\left[\sqrt{9-x^2}\right],\text{ за секое } x\in[-3,3].$$

3) Функцијата $f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x+1}-1}=-\frac{x+1}{x}$ е дефинирана за секој реален број $x\neq 0$ и $x\neq -1,$ односно за $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$. Според тоа, имаме дека

$$f\circ g(x)=-\frac{x+1}{x},\text{ за секое } x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}.$$

Функцијата $g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-1}+1}=\frac{x-1}{x}$ е дефинирана за секој реален број $x\neq 1$ и $x\neq 0,$ односно за секое $x\in\mathbf{R}\setminus\{0,-1\}$. Според тоа, имаме дека

$$g\circ f(x)=\frac{x-1}{x},\text{ за секое } x\in\mathbf{R}\setminus\{0,-1\}.$$

4) Функцијата $f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(x^2\right)=\sqrt{2-x^2}$ е дефинирана секој реален број x што го задоволува неравенството $2-x^2\geq 0,$ односно за секое $x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. Според тоа, имаме дека

$$f\circ g(x)=\sqrt{2-x^2},\text{ за секое } x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right].$$

Функцијата $g\circ f(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{2-x}\right)=|2-x|$ е дефинирана за секое $x\in\mathbf{R}$. Според тоа, имаме дека

$$g\circ f(x)=|2-x|,\ \text{за секое } x\in\mathbf{R}.$$

3.25. Од кои функции е составена сложената функција:

1) $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ 2) $f(x)=\log\left(x^2+1\right)$

3) $f(x)=e^{\sin 2x}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

Решение. 1) Имаме дека $f(x)=h(g(x))$, каде што

$$h(x)=\sqrt{x}\ \text{ и }\ g(x)=5-x^2.$$

2) Имаме дека $f(x)=h(g(x))$, каде што

$$h(x)=\log x\ \text{ и }\ g(x)=x^2+1.$$

3) Имаме дека $f(x)=h(g(k(x)))$, каде што

$$h(x)=\frac{1}{x},\quad g(x)=\sqrt[3]{x}\ \text{ и }\ k(x)=x^2+1.$$

3.26. Покажи дека за секое $x\in D_f$, важи $f\circ f=1_{D_f}$, ако

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

Решение. 1) Имаме дека

$$f\circ f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x,\ \text{за секое } x\in D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\},$$

од каде што следува дека $f \circ f = 1_{D_f}$.

2) Имаме дека

$$f \circ f(x) = f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = \frac{2\frac{2x+1}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2} = \frac{\frac{5x}{x-2}}{\frac{5}{x-2}} = x, \text{ за } x \in D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\},$$

од каде што следува дека $f \circ f = 1_{D_f}$. ●

3.27. Докажи дека $f \circ g = 1_{D_g}$ ако $f(x) = \log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ и $g(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$.

Решение. Имаме дека

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right) = \log_a\left(\frac{a^x - a^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 + 1}\right) =$$

$$= \log_a\left(\frac{a^x - a^{-x}}{2} + \frac{a^x + a^{-x}}{2}\right) = \log_a\left(a^x\right) = x, \text{ за } x \in D_g = \mathbf{R},$$

од каде што следува дека $f \circ g = 1_{D_g}$. ●

3.6. Инверзни функции

Нека функцијата $y = f(x)$, со дефинициона област D_f и множество вредности R_f, е таква што различни елементи од D_f имаат различни елементи од R_f, односно

за $x_1, x_2 \in D_f$ и $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Тогаш за секој елемент $y \in R_f$ постои единствен елемент $x \in D_f$ таков што $f(x) = y$. Дефинираме функција $f^{-1} : R_f \to D_f$ така што на елементот y му го придружуваме единствениот елемент $x \in D_f$ таков што $x = f^{-1}(y)$. Вака дефинираната функција $f^{-1} : R_f \to D_f$ се вика *инверзна* на функцијата $f(x)$.

3.28. Најди инверзна функција на секоја од следните функции:

1) $f(x) = 2x - 3$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1},\ [0, +\infty)$ 4) $f(x) = 10^{x+1}$

5) $f(x) = 1 + \log(x + 2)$ 6) $f(x) = 2\sin x,\ \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Решение. 1) За да ја најдеме инверзната функција на дадената ја решаваме равенката $y = 2x - 3$ по $x,$ при што добиваме $x = \dfrac{y+3}{2}$. Потоа заменувајќи го x со y добиваме дека инверзната функција на дадената функција е $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$.

2) Со решавање на равенката $y = \dfrac{1}{x}$ по x добиваме $x = \dfrac{1}{y}$. Потоа заменувајќи го x со y добиваме дека инверзната функција на дадената функција е $y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$. Да забележиме дека функцијата е инверзна сама на себе.

3) Да ја решиме равенката $y=\sqrt[3]{x^2+1}$ по x. Добиваме $x=\sqrt{y^3-1}$, бидејќи $y\in[1,+\infty)$. Потоа, заменувајќи го x со y добиваме дека инверзната функција на дадената функција е $y=f^{-1}(x)=\sqrt{x^3-1}$.

4) Ако ја решиме равенката $y=10^{x+1}$ по x добиваме $x=\log y-1$. Потоа, заменувајќи го x со y добиваме дека инверзната функција на дадената функција е $y=f^{-1}(x)=\log x-1$.

5) Најнапред да ја решиме равенката $y=1+\log(x+2)$ по x. Добиваме дека $x=10^{y-1}-2$. Заменувајќи го x со y добиваме дека инверзната функција на дадената функција е $y=f^{-1}(x)=10^{x-1}-2$.

6) Да ја решиме равенката $y=2\sin x$ по x. Добиваме $x=\arcsin\frac{y}{2}$, бидејќи $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Потоа, заменувајќи го x со y добиваме дека инверзната функција на дадената функција е $y=f^{-1}(x)=\arcsin\frac{x}{2}$. ●

3.29. Покажи дека функцијата:

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{ax-b}{cx-a}$

е инверзна сама на себе.

Решение. 1) За да ја најдеме инверзната функција на дадената ја решаваме равенката $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ по x, при што добиваме $x=\dfrac{y+1}{x-1}$. Потоа заменувајќи го x со y добиваме дека инверзната функција на дадената функција е $y = f(x)^{-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$, од каде што заклучуваме дека дадената функција е инверзна сама на себе.

2) Најнапред да ја решиме равенката $y = \dfrac{ax-b}{cx-a}$ по x. Добиваме дека $x = \dfrac{ay-b}{cy-a}$. Заменувајќи го x со y добиваме дека инверзната функција на дадената функција е $y = f^{-1}(x) = \dfrac{ax-b}{cx-a}$, од каде што заклучуваме дека дадената функција е инверзна сама на себе. ●

3.30. Определи го множеството вредности на следните функции:

1) $f(x) = 3x-2$ 2) $f(x) = x^3 - 4$

3) $f(x) = e^{x+2}$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{1-2^{-x}}$

Решение. 1) Множеството на вредности R_f на дадената функција $f(x) = 3x-2$ можеме да го најдеме со помош на нејзината инверзна функција. Бидејќи имаме дека $R_f = D_{f^{-1}}$, множеството на вредности може да го определиме ако ја најдеме дефиниционата област на инверзната функција на $f(x)$.

Дадената функција е дефинирана на целата реална права, односно $D_f = \mathbf{R}$ и има инверзна функција бидејќи за $x_1 \neq x_2$ добиваме дека $f(x_1) = 3x_1 - 2 \neq 3x_2 - 2 = f(x_2)$.

Ако равенката $y=3x-2$ ја решиме по x добиваме дека $x=\dfrac{y+2}{3}$, па инверзната функција на дадената функција е $y=f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{3}$. Бидејќи $D_{f^{-1}}=\mathbf{R}$, заклучуваме дека $R_f=\mathbf{R}$.

2) Ако равенката $y=x^3-4$ ја решиме по x добиваме $x=\sqrt[3]{y+4}$, па инверзната функција е $y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+4}$. Бидејќи $D_{f^{-1}}=\mathbf{R}$, заклучуваме дека $R_f=\mathbf{R}$.

3) Решавајќи ја по x равенката $y=e^{x+2}$ добиваме дека $x=\ln y-2$, па инверзната функција е $y=f^{-1}(x)=\ln x-2$. Бидејќи $D_{f^{-1}}=(0,\infty)$, заклучуваме дека $R_f=(0,\infty)$.

4) Решавајќи ја по x равенката $y=\dfrac{1}{1-2^{-x}}$ добиваме $x=\log_2\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$, од каде што се добива дека инверзната функција на дадената е $y=f^{-1}(x)=\log_2\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$. Бидејќи $D_{f^{-1}}=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ заклучуваме дека $R_f=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$. ●

3.7. Парни и непарни функции

❖ Функцијата $f:E\to F$ е *парна* ако:

1. $x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f$ и
2. $f(-x)=f(x)$, за секое $x\in D_f$

❖ Функцијата $f:E\to F$ е *непарна* ако:

1. $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ и

2. $f(-x) = -f(x),$ за секое $x \in D_f$

3.31. Покажи дека се парни следните функции:

1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ 2) $f(x) = x^2 - \dfrac{\sin x}{x}$

3) $f(x) = 3\log\left(\dfrac{x^2+3}{4x^4}\right)$ 4) $f(x) = 3^{|ctgx|+1}$

Решение. 1) Имаме дека $D_f = \mathbf{R},$ и

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

од каде што заклучуваме дека функцијата е парна.

2) Имаме дека $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\},$ и

$$f(-x) = (-x)^2 - \frac{\sin(-x)}{-x} = x^2 - \frac{-\sin x}{-x} = x^2 - \frac{\sin x}{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

од каде што заклучуваме дека функцијата е парна.

3) Имаме дека $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\},$ и

$$f(-x) = 3\log\left(\frac{(-x)^2+3}{4(-x)^4}\right) = 3\log\left(\frac{x^2+3}{4x^4}\right) = f(x), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

од каде што заклучуваме дека функцијата е парна.

4) Имаме дека $D_f = \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\},$ и

$$f(-x) = 3^{|ctg(-x)|+1} = 3^{|-ctgx|+1} = 3^{|ctgx|+1} = f(x), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\},$$

од каде што заклучуваме дека функцијата е парна. ●

3.32. Покажи дека се непарни следните функции:

1) $f\left(x\right)=\dfrac{x^5-3x}{x^2+1}$ 2) $f\left(x\right)=x^3\left|x\right|$

3) $f\left(x\right)=\dfrac{\cos x}{x+\sin x}$ 4) $f\left(x\right)=\dfrac{tgx}{1+\cos x}$

Решение. 1) Имаме дека $D_f=\mathbf{R}$, и

$$f\left(-x\right)=\frac{(-x)^5-3(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{-x^5+3x}{x^2+1}=-\frac{x^5-3x}{x^2+1}=-f\left(x\right),\quad x\in\mathbf{R},$$

од каде што заклучуваме дека функцијата е непарна.

2) Имаме дека $D_f=\mathbf{R}$, и

$$f\left(-x\right)=(-x)^3\left|-x\right|=-x^3\left|x\right|=-f\left(x\right),\quad x\in\mathbf{R},$$

од каде што заклучуваме дека функцијата е непарна.

3) Имаме дека $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, и

$$f\left(-x\right)=\frac{\cos(-x)}{-x+\sin(-x)}=\frac{\cos x}{-x-\sin x}=-\frac{\cos x}{x+\sin x}=-f\left(x\right),\quad x\in\mathbf{R}\setminus\{0\},$$

од каде што заклучуваме дека функцијата е непарна.

4) Имаме дека $D_f=\mathbf{R}\setminus(\{(2k+1)\pi:k\in\mathbf{Z}\}\cup\{(2k+1)\frac{\pi}{2}:k\in\mathbf{Z}\})$, и

$$f\left(-x\right)=\frac{tg(-x)}{1+\cos(-x)}=\frac{-tgx}{1+\cos x}=-\frac{tgx}{1+\cos x}=-f\left(x\right),$$

за $x\in\mathbf{R}\setminus(\{(2k+1)\pi:k\in\mathbf{Z}\}\cup\{(2k+1)\frac{\pi}{2}:k\in\mathbf{Z}\})$,

од каде што заклучуваме дека функцијата е непарна. ●

3.33. Испитај ја парноста на следните функции:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{2-|x+1|}{|x+2|}$

3) $f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{2}\log(x+1)$

Решение. 1) Имаме дека

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-2}=-\frac{-x}{x^2-2}\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases},\quad x\in\mathbf{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\},$$

од каде што следува дека функцијата не е ниту парна ниту непарна.

2) Функцијата е дефинирана за $x\in\mathbf{R}\setminus\{-2\},$ што не е симетрично множество, според тоа дадената функција не е ниту парна ниту непарна.

3) Имаме дека

$$f(-x)=\frac{2^{-x}+1}{2^{-x}}=\frac{\frac{1}{2^x}+1}{\frac{1}{2^x}}=\frac{\frac{1+2^x}{2^x}+1}{\frac{1}{2^x}}=1+2^x\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases},\quad x\in\mathbf{R},$$

од каде што следува дека функцијата не е ниту парна ниту непарна.

4) Функцијата е дефинирана за $x+1>0,$ односно на интервалот $(-1,+\infty),$ што не е симетрично множество, па според тоа дадената функција не е ниту парна ниту непарна. ●

3.8. Периодични функции

❖ За функцијата $f:E\to F$ велиме дека е *периодична* ако постои реален број $\omega\neq 0$ таков, што за секое $x\in D_f,$ важи $x+\omega\in D_f$ и

$f(x+\omega)=f(x)$. Најмалиот позитивен број (ако постои) ω со ова својство се вика *период* на функцијата.

3.34. Испитај ја периодичноста на следните функции:

1) $f(x)=\cos(4x+3)$ 2) $f(x)=\cos\sqrt{x}$

3) $f(x)=\sin^2 x$ 4) $f(x)=2\sin\frac{x}{2}+\cos 2x+\sin 3x$

Решение. 1) Имаме дека

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3\right)=\cos(4x+2\pi+3)=$$

$$=\cos((4x+3)+2\pi)=\cos(4x+3)=f(x),\ x\in\mathbf{R},$$

од каде што следува дека функцијата е периодична функција со период $\omega=\frac{\pi}{2}$.

2) Претпоставуваме дека ω е период на функцијата. Тогаш имаме

$$\cos\sqrt{x+\omega}=\cos\sqrt{x}=\cos\left(\sqrt{x}+2\pi\right), \text{ за } x\in[0,+\infty),$$

од каде што следува дека $\sqrt{x+\omega}=\sqrt{x}+2\pi$. Оттука со квадрирање добиваме дека $x+\omega=x+4\pi\sqrt{x}+4\pi^2$, што е еквивалентно со $\omega=4\pi\left(\sqrt{x}+\pi\right)$, односно ω зависи од x, што значи дека функцијата не е периодична.

3) Бидејќи $f(x)=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ имаме дека

$$f(x+\pi)=\frac{1-\cos 2(x+\pi)}{2}=\frac{1-\cos(2x+2\pi)}{2}=\frac{1-\cos 2x}{2}=f(x),\ x\in\mathbf{R},$$

од каде што следува дека функцијата е периодична функција со период $\omega=\pi$.

4) Може да се провери дека функцијата $f_1(x)=2\sin\frac{x}{2}$ има период $\omega_1=4\pi$, функцијата $f_2(x)=\cos 2x$ има период $\omega_2=\pi$, и функцијата $f_3(x)=\sin 3x$ има период $\omega_3=\frac{2\pi}{3}$. Оттука добиваме дека дадената функција има период $\omega=\text{НЗС}\left(4\pi,\pi,\frac{2\pi}{3}\right)=4\pi$. ●

3.35. Определи го периодот на следите функции:

1) $f(x)=|\sin 2x|$ 2) $f(x)=[x]-x$

3) $f(x)=2\sin\frac{x}{2}+2$ 4) $f(x)=\cos x+2\sin 2x+3\cos 3x$

Решение. 1) Бидејќи функцијата $f(x)=|\sin x|$ е периодична со период π, имаме дека

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=\left|\sin(2x+\pi)\right|=|\sin 2x|=f(x),\ x\in\mathbf{R},$$

од каде што следува дека функцијата е периодична функција со период $\omega=\frac{\pi}{2}$.

2) Имаме дека

$$f(x+1)=[x+1]-(x+1)=[x]+1-x-1=[x]-x=f(x),\ x\in\mathbf{R},$$

од каде што следува дека функцијата е периодична функција со период $\omega=1$.

3) Имаме дека

$$f\left(x+4\pi\right)=2\sin\frac{x+4\pi}{2}+2=2\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)+2=$$

$$=2\sin\frac{x}{2}+2=f\left(x\right),\ x\in\mathbf{R},$$

од каде што следува дека функцијата е периодична функција со период $\omega=4\pi$.

4) Може да се провери дека функцијата $f_1\left(x\right)=\cos x$ има период $\omega_1=2\pi$, функцијата $f_2\left(x\right)=2\sin 2x$ има период $\omega_2=\pi$, и функцијата $f_3\left(x\right)=3\cos 3x$ има период $\omega_3=\dfrac{2\pi}{3}$. Оттука добиваме дека дадената функција има период $\omega=\text{НЗС}\left(2\pi,\pi,\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\pi$. ●

3.9. Нули на функција

❖ *Нули на функција* $f:E\to F$ се елементите на множеството $N_f=\left\{x\in E:\left(x,0\right)\in G_f\right\}$. Графикот на функцијата ја сече $x-$оската во точките чии што апсциси се нулите на функцијата f.

3.36. Најди ги нулите на следните функции:

1) $f\left(x\right)=x^2+2x+1$ 2) $f\left(x\right)=\ln\left(1-2x\right)$

3) $f\left(x\right)=\cos\left(2x+1\right)$ 4) $f\left(x\right)=3^{x+3}$

Решение. 1) Функцијата е дефинирана на множеството реални броеви и има нули за оние вредности на x, за кои што $x^2+2x+1=0$. Квадратната равенка $x^2+2x+1=0$ има еден двоен корен $x_{1/2}=-1$, па според тоа, функцијата има една нула $x=-1$.

2) Дефиниционата област на функцијата може да ја определиме од условот $1-2x>0,$ од каде што добиваме дека $D_f=\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right).$ Од равенката $\ln(1-2x)=0,$ односно на равенката $1-2x=1,$ добиваме дека $x=0$ е единствената нула на функцијата.

3) Функцијата е дефинирана на множеството реални броеви и има нули за оние вредности на $x,$ кои што се решенија на равенката $\cos(2x+1)=0,$ односно на равенката $2x+1=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}$. Оттука добиваме $x_k=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z},$ се нули на функцијата.

4) Функцијата е дефинирана на целото множество реални броеви и бидејќи $3^{x+3}>0$ за секој реален број $x,$ следува дека функцијата нема нули. ●

3.37. Определи ги пресечните точки на графикот на секоја од следните функции со $x-$оската:

1) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+x+1}$ 2) $f(x)=\ln\left(x^2-8\right)$

3) $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ 4) $f(x)=e^{3x-3}$

Решение. 1) Од равенката $\dfrac{x^4-1}{x^2+x+1}=0$, која што е еквивалентна со равенката $\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=0$ ги определуваме нулите на функцијата $x_1=-1$ и $x_2=1,$ од каде што заклучуваме дека пресечни точки на графикот на функцијата со $x-$оската се $(-1,0)$ и $(1,0)$.

2) Од равенката $\ln\left(x^2-8\right)=0,$ која што е еквивалентна со равенката $x^2-8=1,$ ги определуваме нулите на функцијата $x_1=-3$ и $x_2=3,$ од каде што заклучуваме дека пресечни точки на графикот на функцијата со $x-$оската се $(-3,0)$ и $(3,0)$.

3) Од равенката $\sin\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=0$ која што е еквивалентна со равенката $\dfrac{x}{x-1}=k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z},$ ги определуваме нулите на функцијата $x_k=\dfrac{k\pi}{k\pi-1},$ $k\in\mathbf{Z},$ од каде што заклучуваме дека пресечни точки на графикот на функцијата со $x-$оската се точките $\left(\dfrac{k\pi}{k\pi-1},0\right),\ \ k\in\mathbf{Z}.$

4) Функцијата е дефинирана на целото множество реални броеви и бидејќи $e^{3x-3}>0$ за секој реален број $x,$ следува дека функцијата нема нули, па според тоа нејзиниот график нема пресечни точки со $x-$оската. ●

3.10. Посредна конструкција на графици

❖ Ако се познати графиците на основните елементарни функции

$$y=x^n,\ \ y=a^x,\ \ y=e^x,\ \ y=\log x,\ \ y=\ln x,$$

$$y=\sin x,\ \ y=\cos x,\ \ y=tgx,\ \ y=ctgx,$$

$$y=\arcsin x,\ \ y=\arccos x,\ \ y=arctgx \text{ и } y=arcctgx$$

може да ги скицираме графиците на сите елементарни функции, со нивно „ратегнување“, „стегање“ или поместување.

1) Графикот на функцијата $y=-f(x)$, ако е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, се добива со конструкција на симетрична крива во однос на $x-$оската на кривата $y=f(x)$.

2) Графикот на функцијата $y=f(-x)$, ако е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, се добива со конструкција на симетрична крива во однос на $y-$оската на кривата $y=f(x)$.

3) Графикот на функцијата $y=f(x)+c,\ c\in\mathbf{R}$, ако е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, се добива со конструкција на крива поместена за c во правец на $y-$оската на криватс $y=f(x)$. Притоа, ако $c>0$ поместувањето е во позитивна насока на $y-$оската, а ако $c<0$ поместувањето е во негативната насока на $y-$оската.

4) Графикот на функцијата $y=f(x+c), c\in\mathbf{R}$, ако е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, се добива со конструкција на крива поместена за c во правец на $x-$оската на кривата $y=f(x)$. При тоа, за $c>0$ поместувањето е во негативната насока на $x-$оската, а за $c<0$ поместувањето е во позитивната насока на $x-$оската.

5) Графикот на функцијата $y=cf(x),\ \ c>0$, ако е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, се добива со „растегнување“ или „стегање“ на кривата $y=f(x)$ во правец на $y-$оската во зависност дали $c>1$ или $0<c<1$.

6) Графикот на функцијата $y=f(cx),\ \ c>0$, ако е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, се добива со „стегање“ или „растегнување“

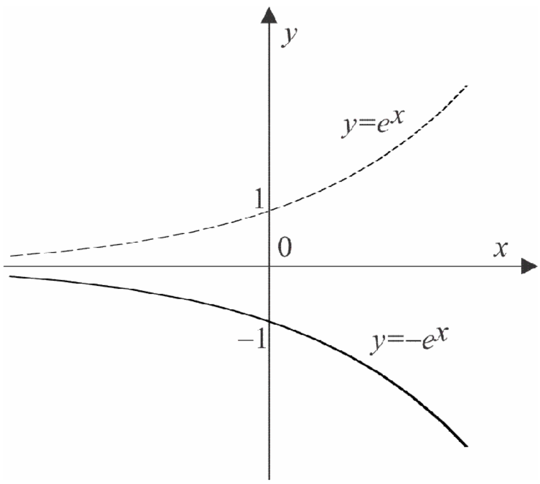
на кривата $y = f(x)$ во правец на $x -$оската во зависност дали $c > 1$ или $0 < c < 1$.

7) Графикот на функцијата $y = f(x) + g(x)$, ако се познати графиците на функциите $y = f(x)$ и $y = g(x)$, се добива со собирање на вторите компоненти на графиците на функциите $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

Скицирај ги графиците на следните функции: (3.38 – 3.46)

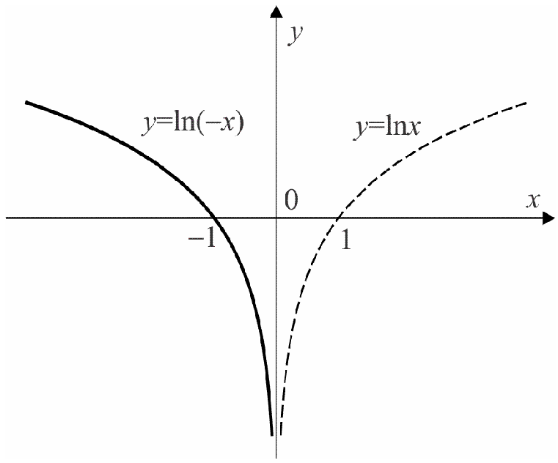
3.38. 1) $y = -e^x$ 2) $y = \ln(-x)$

Решение. 1) Графикот на функцијата $y = -e^x$ се добива со конструкција на симетрична крива во однос на $x -$оската на кривата определена со графикот на функцијата $y = e^x$ (слика 1.).



Слика 1.

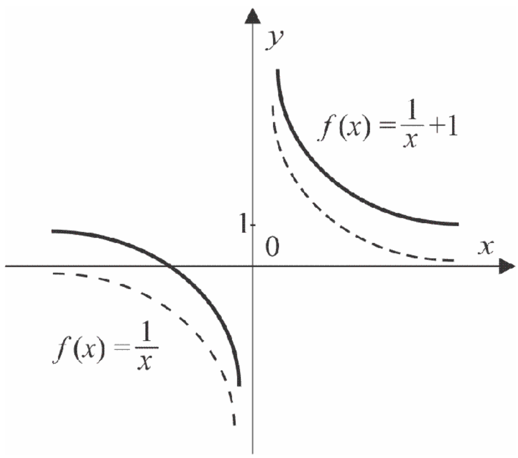
2) Графикот на функцијата $y = \ln(-x)$ се добива со конструкција на симетрична крива во однос на $y -$оската на кривата определена со графикот на функцијата $y = \ln x$ (слика 2.).



Слика 2.

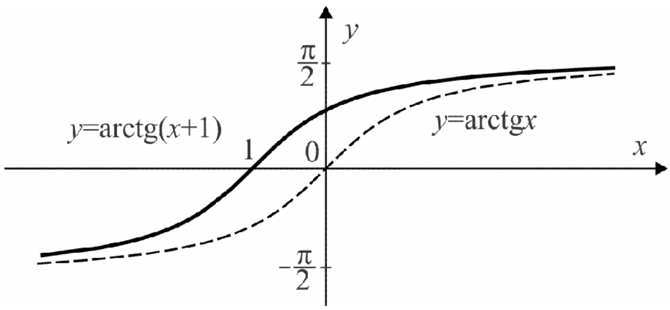
3.39. 1) $y=\frac{1}{x}+1$ $y=arctg\left(x+1\right)$

Решение. 1) Графикот на функцијата $y=\frac{1}{x}+1$ го добиваме со конструкција на кривата определена со функцијата $y=\frac{1}{x}$ поместена за 1 единица во позитивната насока на y – оската на (слика 3.).

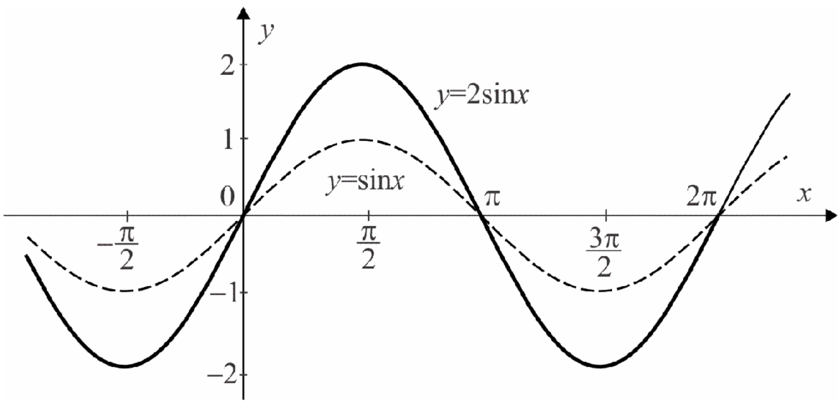


Слика 3.

2) Графикот на функцијата $y = arctg(x+1)$ се добива со конструкција на кривата определена со функцијата $y = arctgx$ поместена за 1 единици во негативна насока на x – оската (слика 4.).



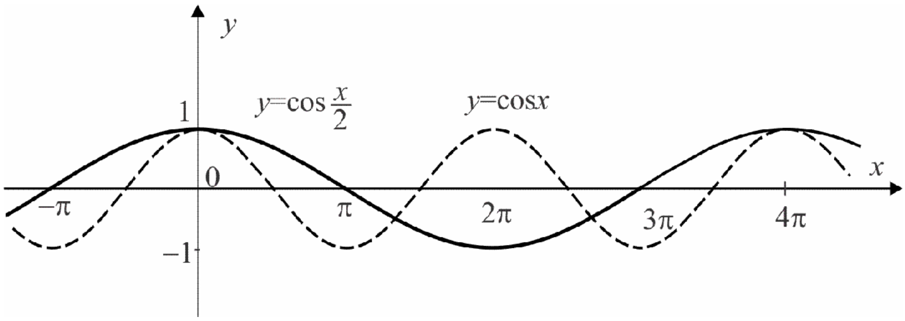
Слика 4.



Слика 5.

3.40. 1) $y = 2\sin x$ $\qquad\qquad$ $y = \cos\dfrac{x}{2}$

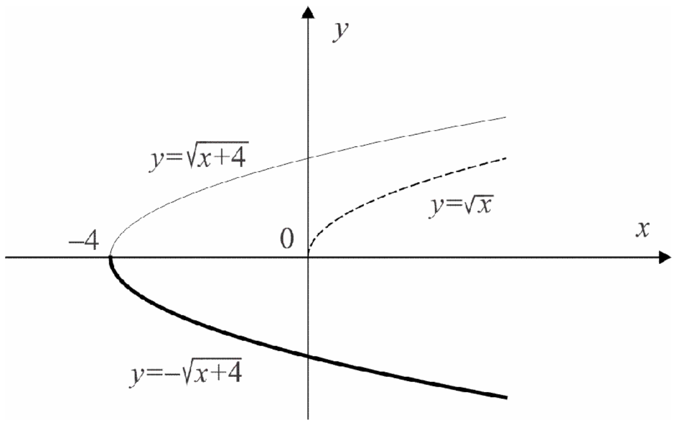
Решение. 1) Графикот на функцијата $y = 2\sin x$ се добива со „растегнување“ на кривата определена со графикот на функцијата $y = \sin x$ во правец на y – оската (слика 5).



Слика 6.

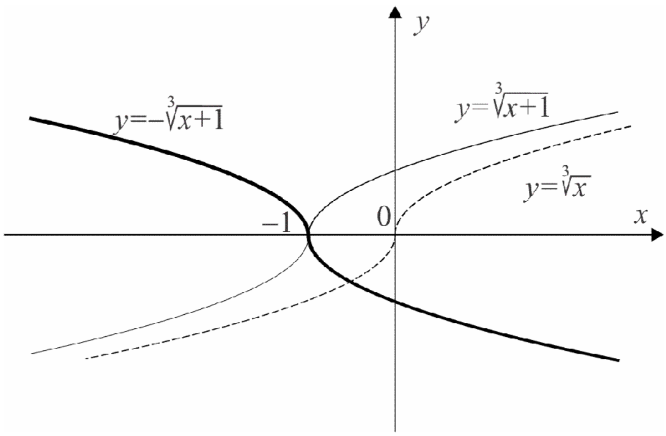
2) Графикот на функцијата $y=\cos\frac{x}{2}$ се добива со „растегнување“ на кривата определена со графикот на функцијата $y=\cos x$ во правец на $x-$ оската (слика 6.).

3.41. 1) $y=-\sqrt{x+4}$ 2) $y=-\sqrt[3]{x+1}$



Слика 7.

Решение. 1) Прво го скицираме графикот на функцијата $y=\sqrt{x+4}$, со конструкција на кривата определена со функцијата $y=\sqrt{x}$, поместена за 4 единици во негативната насока на $x-$оската. Потоа, графикот на функцијата $y=-\sqrt{x+4}$ го добиваме со конструкција на симетрична крива во однос на $x-$оската на кривата определена со графикот на функцијата $y=\sqrt{x+4}$ (слика 7.).

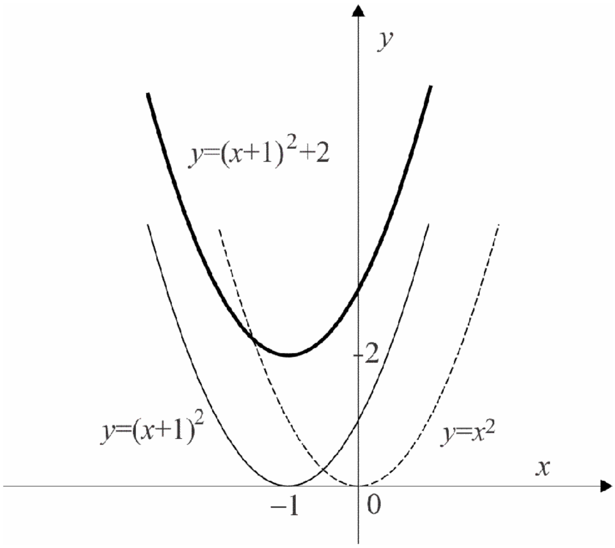


Слика 8.

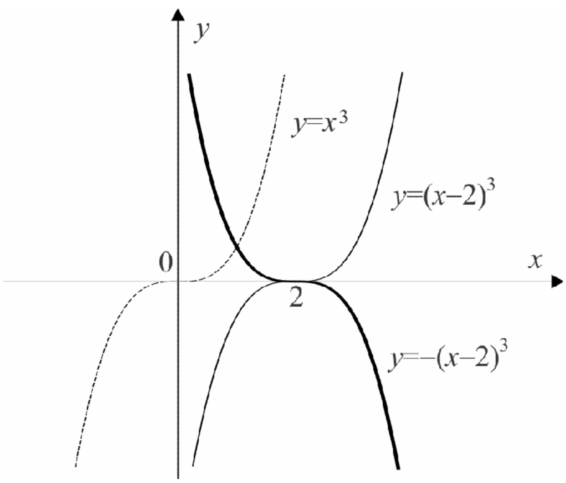
2) Прво го скицираме графикот на функцијата $y=\sqrt[3]{x+1}$, со конструкција на кривата определена со функцијата $y=\sqrt{x}$, поместена за 1 единици во негативната насока на $x-$оската. Потоа, графикот на функцијата $y=-\sqrt[3]{x+1}$ го добиваме со конструкција на симетрична крива во однос на $x-$оската на кривата определена со графикот на функцијата $y=\sqrt{x+4}$ (слика 8.).

3.42. 1) $y=(x+1)^2+2$ 2) $y=-(x-2)^3$

Решение. 1) Го скицираме графикот на функцијата $y=(x+1)^2$, со конструкција на кривата определена со графикот на функцијата $y=x^2$, поместена за 1 единици во негативната насока на $x-$оската. Потоа, графикот на функцијата $y=(x+1)^2+2$ го добиваме со конструкција на крива определена со графикот на функцијата $y=(x+1)^2$ поместена за 2 единици во позитивната насока на y – оската (слика 9.).



Слика 9.



Слика 10.

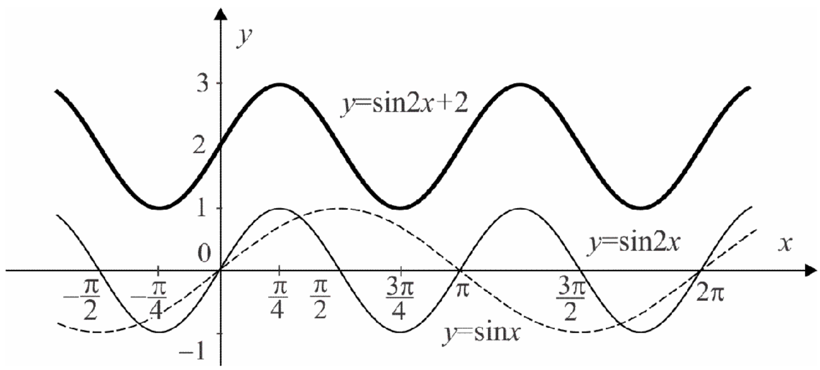
2) Прво го скицираме графикот на функцијата $y=(x-2)^3$, со конст-

рукција на кривата определена со функцијата $y=x^2$, поместена за 2 единици во позитивната насока на $x-$оската. Потоа, графикот на функцијата $y=-(x-2)^3$ го добиваме со конструкција на симетрична крива во однос на $x-$оската на кривата определена со графикот на функцијата $y=(x-2)^3$ (слика 10.).

3.43. 1) $y=\sin 2x+2$ 2) $y=2\sin 2x$

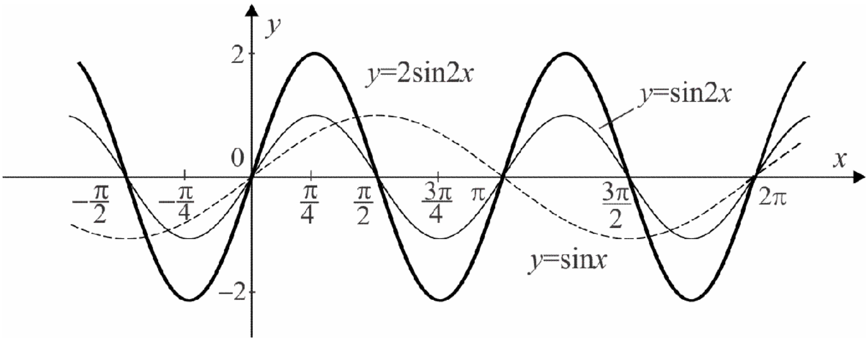
Решение. 1) Графикот на функцијата $y=\sin 2x$ се добива со „стегање" на кривата определена со графикот на функцијата $y=\sin x$ во правец на $x-$оската. Потоа, графикот на функцијата $y=\sin 2x+2$ се добива со поместување на кривата определена со графикот на функцијата $y=\sin 2x$ за 2 единици во позитивната насока на $y-$оската (слика 11.)

2) Графикот на функцијата $y=\sin 2x$ се добива со „стегање" на



Слика 11.

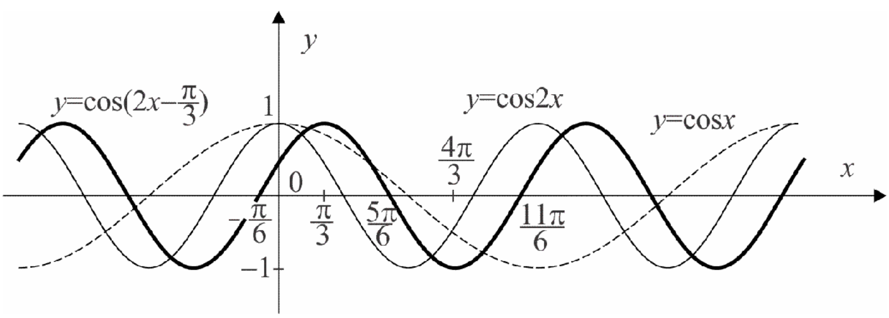
кривата определена со графикот на функцијата $y=\sin x$ во правец на $x-$оската. Потоа, графикот на функцијата $y=2\sin 2x$ се добива со „растегнување" на кривата определена со графикот на функцијата $y=\sin 2x$ во правец на $y-$оската (слика 12.)



Слика 12.

3.44. 1) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 2) $y=\frac{1}{2}\sin x+1$

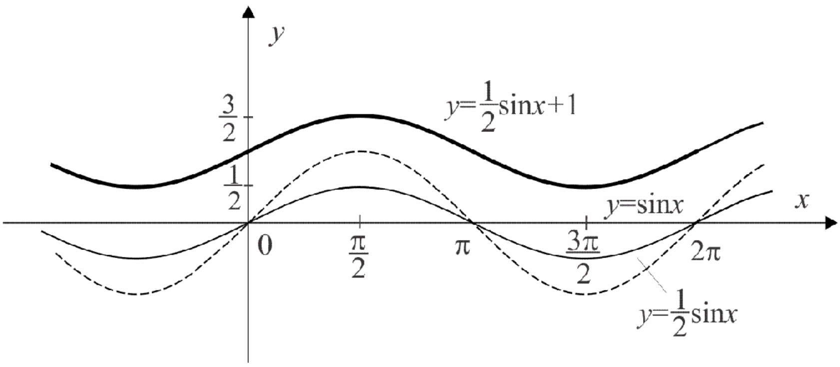
Решение. 1) Графикот на функцијата $y=\cos 2x$ се добива со „стегање“ на кривата определена со графикот на функцијата $y=\cos x$ во правец на $x-$оската. Графикот на функцијата $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ се добива со поместување на кривата определена со графикот на функцијата $y=\cos 2x$ за $\frac{\pi}{3}$ единици во позитивната насока на $x-$оската (слика 13.)



Слика 13.

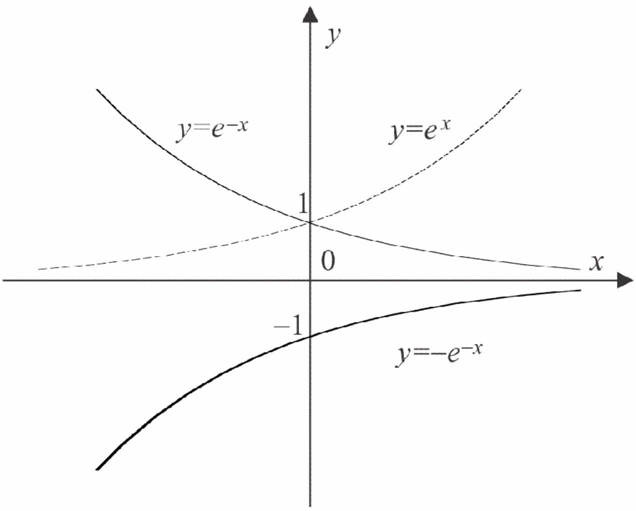
2) Графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}\sin x$ се добива со „стегање“на крива-

та определена со графикот на функцијата $y = \sin x$ во правец на $y-$ оската. Потоа, графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}\sin x + 1$ се добива со поместување за 1 единица во правец на $y-$оската на кривата определена со графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}\sin x$ (слика 14.)



Слика 14.

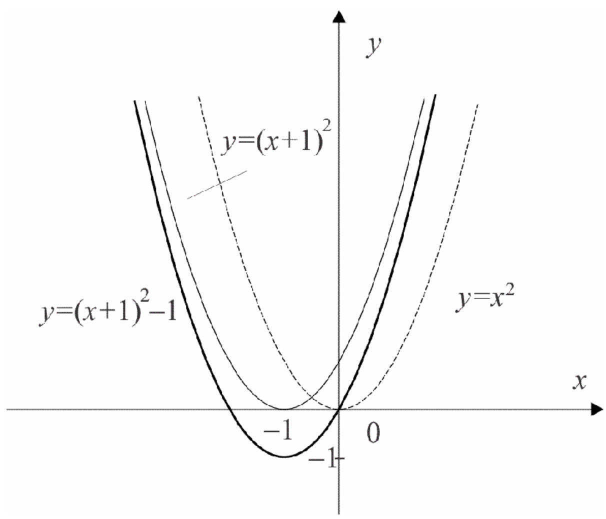
3.45. 1) $y = -e^{-x}$ 2) $y = x(x+2)$



Слика 15.

Решение. 1) Графикот на функцијата $y=e^{-x}$ се добива со конструкција на симетрична крива во однос на $y-$оската на кривата определена $y=e^{x}$. Понатаму, графикот на функцијата $y=-e^{-x}$ се добива со конструкција на симетрична крива во однос на $x-$оската на кривата определена со графикот на функцијата $y=e^{-x}$ (слика 15.).

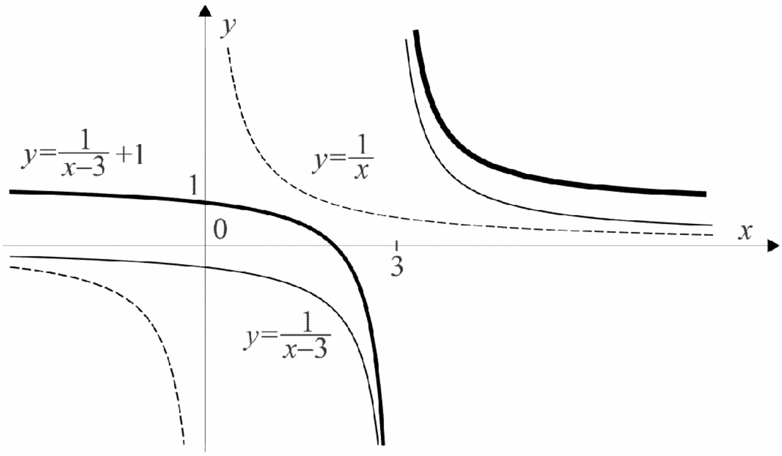
2) Функцијата $y=x(x+2)$ можеме да ја презапишеме во обликот $y=(x+1)^2-1$. Прво го скицираме графикот на функцијата $y=(x+1)^2$, со конструкција на кривата определена со функцијата $y=x^2$, поместена за 1 единици во негативната насока на $x-$оската. Потоа, график на функција $y=(x+1)^2-1$ го добиваме со поместување на кривата определена со графикот на функцијата $y=(x+1)^2$ за 1 единица во негативната насока на $y-$оската (слика 16.).



Слика 16.

3.46. 1) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ 2) $y=\log_2\left(2x^2+4x+2\right)$

Решение. 1) Функцијата $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ можеме да ја презапишеме во облик $y=\dfrac{1}{x-3}+1$. Прво го скицираме графикот на функцијата $y=\dfrac{1}{x-3}$ со

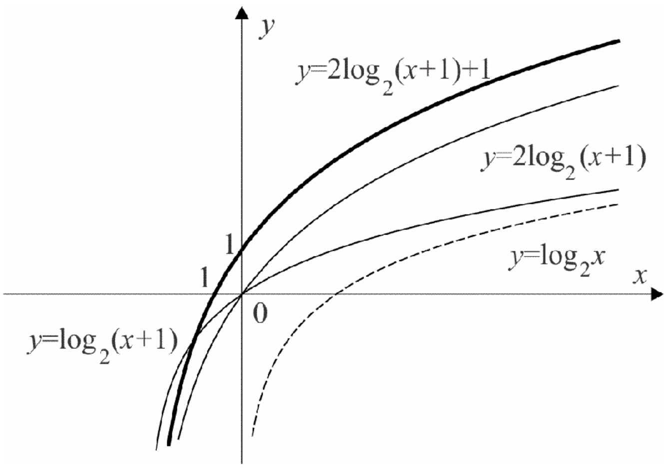


Слика 17.

конструкција на кривата определена со функцијата $y=\dfrac{1}{x}$ поместена за 3 единици во позитивната насока на $x-$оската. Потоа, график на функција $y=\dfrac{1}{x-3}+1$ го добиваме со поместување на кривата определена со графикот на функцијата $y=\dfrac{1}{x-3}$ за 1 единица во позитивната насока на $y-$оската (слика 17.).

2) Функцијата $y=\log_2\left(2x^2+4x+2\right)$ може да ја презапишеме во облик $y=2\log_2(x+1)+1$. Најнапред го скицираме графикот на функцијата $y=\log_2(x+1)$ со конструкција на кривата определена со функцијата $y=\log_2 x$ поместена за 1 единица во негативната насока на $x-$оска-

та. Понатаму, график на функција $y = 2\log_2(x+1)$ го добиваме со „растегнување“ на кривата определена со графикот на функцијата $y = \log_2(x+1)$ во насока на $y-$оската. На крајот, графикот на функцијата $y = 2\log_2(x+1)+1$ го добиваме со поместување на кривата определена со функцијата $y = 2\log_2(x+1)$ за 1 единица во позитивната насока на $y-$оската (слика 18.).



Слика 18.

3.7. Задачи за самостојна работа

1. Дали се еднакви функциите $f : E \to F$ и $g : G \to H$ ако:

1) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad E = F = \mathbf{R}, \qquad g(x) = 1, \quad G = H = \mathbf{R}$

2) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}, \quad E = F = \mathbf{R}, \qquad g(x) = x - 1, \quad G = H = \mathbf{R}$

3) $f(x)=\ln\frac{x}{e},\ E=(0,\infty),\ F=\mathbf{R},\quad g(x)=\ln x-1,\ G=(0,\infty),\ H=\mathbf{R}$

Најди ги дефиниционите области на следните функции: (задачи 2.- 5.)

2. 1) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^3-4x}$ 2) $f(x)=\frac{|x+1|}{|2x+2|-2}$

3. 1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ 2) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}$

4. 1) $f(x)=\sqrt{3-3^{-x}}$ 2) $f(x)=\frac{1}{2^x-3^x}$

5. 1) $f(x)=\log\left(x^2-9\right)$ 2) $f(x)=\ln\sqrt{x}$

6. Дадена е функцијата $f(x)=\begin{cases} x-4, & x\le 0 \\ x^2-3, & x>0 \end{cases}$. Најди ги вредностите:

1) $f(-3)$ 2) $f(0)$ 3) $f(4)$

7. Ако $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ и $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, покажи дека важи

1) $f(a)g(b)+g(a)f(b)=f(a+b)$

2) $f(a)f(b)+g(a)g(b)=g(a+b)$

3) $f(a)g(b)-g(a)f(b)=f(a-b)$

4) $f(a)f(b)-g(a)g(b)=g(a-b)$

5) $(g(x))^2-(f(x))^2=1$

8. Испитај ја монотоноста на следните функции:

1) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x^{2}}$, $x\in\left(0,\infty\right)$ 2) $f\left(x\right)=4x+3^{x}$

3) $f\left(x\right)=2-x-|x|$ 4) $f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$

9. Најди ги интервалите на монотоност на функциите:

1) $f\left(x\right)=\left|x^{2}-4\right|$ 2) $f\left(x\right)=e^{1-x^{2}}$

10. Испитај ја ограниченоста на функциите:

1) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x^{2}}$ 2) $f\left(x\right)=x+\sin x$

3) $f\left(x\right)=3^{\sin x}$ 4) $f\left(x\right)=\log\left(1+\dfrac{1}{1+x^{2}}\right)$

11. Најди ги екстремните вредности на следните функции:

1) $f\left(x\right)=x^{4}-2x^{2}+1$ 2) $f\left(x\right)=\left|\log\left(x+5\right)\right|$

12. Најди ги сложените функции $g\circ f\left(x\right)$ и $f\circ g\left(x\right)$, ако:

1) $f\left(x\right)=4x-1$, $g\left(x\right)=x^{3}-3$ 2) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=2x^{2}+3$

3) $f\left(x\right)=\ln x$, $g(x)=e^{x+1}$ 4) $f\left(x\right)=\sin x$, $g\left(x\right)=3x+2$

13. Најди инверзна функција на секоја од следните функции:

1) $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x+1}$ 2) $f\left(x\right)=\sqrt{x-1}$

3) $f\left(x\right)=\ln\left(1-3x\right)$ 4) $f\left(x\right)=e^{x-1}$

14. Најди го множеството вредности на следните функции:

1) $f(x)=x^3-1$ 2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

3) $f(x)=4^{-x}$ 4) $f(x)=\log\left(x+10\right)$

14. Покажи дека функцијата $f(x)=\dfrac{x^4-3x^2+4}{2x^2+1}$ е парна.

15. Покажи дека функцијата $f(x)=\dfrac{x^3-8x+7}{x^5-1}$ е непарна.

16. Испитај ја периодичноста на функциите:

1) $f\left(x\right)=\sin\sqrt{x+\pi}$ 2) $f\left(x\right)=\left|\cos x\right|$

3) $f\left(x\right)=tg\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 4) $f\left(x\right)=3\sin 4x+2\cos 3x$

17. Најди ги нулите на следните функции:

1) $f\left(x\right)=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ 2) $f\left(x\right)=\sqrt[5]{x-1}$

3) $f\left(x\right)=\log\left(x+1\right)$ 4) $f\left(x\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Скицирај ги графиците на следните функции: (задачи 18 – 35)

21. $f\left(x\right)=-x^3$ **22.** $f\left(x\right)=\sqrt[3]{-x}$

23. $f\left(x\right)=1+\dfrac{1}{x}$ **24.** $f\left(x\right)=1+\cos x$

25. $f\left(x\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ **26.** $f\left(x\right)=\dfrac{x}{2}$

27. $f\left(x\right)=3\cos x$ **28.** $f\left(x\right)=\cos\left(3x\right)$

29. $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

30. $f(x)=3-2x$

31. $f(x)=|2x-1|$

32. $f(x)=x^2-2x-1$

33. $f(x)=\frac{x+1}{2-x}$

34. $f(x)=-2^x+1$

35. $f(x)=3\cos 2x$

4. Низи од реални броеви

4.1. Дефиниција на низа и примери

❖ Секоја функција $a : n \mapsto a_n$ од множеството природни броеви во множество реални броеви ја викаме *низа од реални броеви.* Членот a_n се вика $n-$ти член или *општ* член на низата, додека n е *индекс* на членот a_n.

4.1. Определи ги првите пет члена на следните низи зададени со нивниот општ член:

1) $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$

2) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

3) $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ е парен број} \\ \dfrac{1}{n+1}, & n \text{ е непарен број} \end{cases}$

4) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$

5) $a_n = \dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$

6) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)(n+2)}$

Решение. Со непосредна замена добиваме

1) $a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{3}{5},\ a_3 = \frac{5}{7},\ a_4 = \frac{7}{9},\ a_5 = \frac{9}{11}$

2) $a_1 = 2,\ a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2,\ a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3,\ a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4,\ a_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5$

3) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = 2,\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = 4,\ a_5 = \frac{1}{6}$

4) $a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{3!},\ a_3 = \frac{1}{5!},\ a_4 = -\frac{1}{7!},\ a_5 = \frac{1}{9!}$

5) $a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{3},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{5}$

6) $a_1 = \frac{1}{6},\ a_2 = -\frac{1}{6},\ a_3 = \frac{3}{20},\ a_4 = \frac{-2}{15},\ a_5 = \frac{5}{42}$. ●

4.2. Определи го општиот член на следните низи:

1) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

2) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

3) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

4) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$

5) $4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \ldots$

6) $\frac{1}{2}, -\frac{4}{9}, \frac{9}{28}, -\frac{16}{65}, \ldots$

7) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

8) $3, \frac{5}{8}, \frac{7}{27}, \frac{9}{64}, \frac{11}{125}, \ldots$

Решение. 1) Забележуваме дека членови на низата се непарните природни броеви. Според тоа, имаме дека $a_n = 2n-1$.

2) Членовите на низата се реципрочни броеви на природните броеви. Според тоа, имаме дека $a_n = \frac{1}{2n-1}$.

3) Имаме дека членовите на низата се реципрочни броеви на квадрати на природните броеви, односно $a_n = \frac{1}{n^2}$.

4) Членовите на низата се дропки, во кои што броителот е следбеник на именителот. Според тоа, имаме дека $a_n = \frac{n+2}{n+1}$.

5) Може да забележиме дека членовите на низата се дропки, во кои што броителот е три пати по именителот и зголемен за едицица, а во именителите се природните броеви. Според тоа, имаме $a_n = \frac{3n+1}{n}$.

6) Да забележиме дека знакот на членовите на низата алтернативно се менува. Освен тоа, членовите низата се дропки во кои броителите се квадрати на природните броеви, а именителите се кубови на природните броеви зголемени за единица. Според тоа, за општиот член имаме $a_n = \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^3+1}$.

7) Членовите на низата се природните броеви. Освен тоа членовите на низата алтернативно го менуваат знакот, притто знак минус има пред непарните броеви. Имаме дека $a_n = \left(-1\right)^n n$.

8) Може да забележиме дека членовите на низата се дропки, во кои што броителот е два пати по именителот и зголемен за едицица, а

именителите се кубови на природните броеви. Според тоа, имаме дека $a_n = \frac{2n+1}{n^3}$. ●

Аритметичка прогресија

❖ *Аритметичка прогресија* е низа зададена со рекурентната формула $a_{n+1} = a_n + d,\ n \in \mathbf{N}$, каде што d е константа.

❖ Општиот член на аритметичка прогресија се пресметува според формулата

$$a_{n+1} = a_1 + nd.$$

❖ Збирот на првите n членови од аритметичка прогресија се пресметува според формулите

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right) \text{ и } S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right).$$

4.3. Определи ги првите пет члена на аритметичка прогресија, ако:

1) $a_1 = 5, \quad d = 2$ 2) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad d = -2$ 3) $a_1 = 0, \quad d = -\frac{1}{2}$

Решение. Од дефиницијата за аритметичка прогресија, имаме дека

1) $a_1 = 5,\ a_2 = 5 + 2 = 7,\ a_3 = 7 + 2 = 9,\ a_4 = 9 + 2 = 11,\ a_5 = 11 + 2 = 13$

2) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2},\ a_3 = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2},\ a_4 = -\frac{7}{2} - 2 = -\frac{11}{2},\ a_5 = -\frac{15}{2}$

3) $a_1 = 0,\ a_2 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},\ a_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1,\ a_4 = -\frac{3}{2},\ a_5 = -2$ ●

4.4. Определи го a_n во аритметичка прогресија, ако:

1) $a_1 = -2, \quad d = 3, \quad n = 7$ 2) $a_1 = \frac{3}{2}, \quad d = -2, \quad n = 6$

Решение. 1) Според формулата за општ член на аритметичка прогресија $a_n = a_1 + (n-1)d,$ имаме дека

$$a_7 = -2 + (7-1)3 = 16.$$

2) Слично, добиваме дека $a_6 = -\frac{17}{2}.$ ●

4.5. Најди го десеттиот член на аритметичката прогресија 7,10,13,16,..

Решение. Имаме дека првиот член $a_1 = 7,$ разликата на аритметичката прогресија е $d = 10 - 7 = 13 - 10 = 3,$ па десеттиот член изнесува

$$a_{10} = 7 + (10-1)3 = 34.$$ ●

4.6. Најди ја разликата d во аритметичката прогресија, ако $a_1 = 6$ и $a_7 = -5.$

Решение. Според формулата за општ член на аритметичка прогресија $a_n = a_1 + (n-1)d,$ имаме дека $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}.$ Со непосредна замена добиваме дека

$$d = \frac{a_7 - a_1}{7-1} = \frac{-5-6}{6} = -\frac{11}{6}.$$ ●

4.7. Определи го првиот член a_1 во аритметичката прогресија, ако $a_5 = 0$ и $d = 2.$

Решение. Според формулата за општ член на аритметичка прогресија $a_n = a_1 + (n-1)d,$ имаме дека $a_1 = a_n - (n-1)d.$ Со непосредна замена добиваме дека

$$a_1 = a_5 - (5-1)d = -8.$$ ●

4.8. Определи ја аритметичката прогресија, ако:

$$a_3 + a_6 = 20, \quad a_9 - a_2 = 14.$$

Решение. Од условот на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 5d = 20 \\ a_1 + 8d - a_1 - d = 14 \end{cases},$$

од каде што следува дека $d = 2$ и $a_1 = 3$. Според тоа, бараната прогресија гласи: 3, 5, 7, 9,…. ●

4.9. Определи ги a_{31} и d во аритметичката прогресија, ако $a_1 = -45$ и $S_{31} = 0$.

Решение. Од формулата за збир кај аритметичка прогресија

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$$

со непосредна замена добиваме дека $\frac{31}{2}\left(2(-45) + (31-1)d\right) = 0$, од каде што следува дека $d = 3$. Од формулата за општ член на аритметичка прогресија имаме $a_n = a_1 + (n-1)d = -45 + (31-1)3 = 45$. ●

4.10. Определи ги a_1 и d во аритметичката прогресија ако:

1) $a_n = 21, \quad n = 7, \quad S_n = 105$ 2) $a_2 + a_5 - a_3 = 10, \; a_1 + a_6 = 17$

Решение. 1) Од условот на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} \frac{7}{2}\left(2a_1 + (7-1)d\right) = 105 \\ a_1 + (7-1)d = 21 \end{cases},$$

од каде следува дека $d = 2$ и $a_1 = 9$.

2) Од условот на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 10 \\ 2a_1 + 5d = 17 \end{cases},$$

од каде следува дека $d = 3$ и $a_1 = 1$. ●

4.11. Реши ги следните равенки:

1) $3 + 7 + 11 + \cdots + x = 210$

2) $4 + 7 + 10 + \cdots + x = 209$

3) $(x+2) + (x+5) + (x+8) + \cdots + (x+32) = 242$

Решение. 1) Според формулата за збир кај аритметичка прогресија

$$S_n = \frac{n\big(2a_1 + (n-1)d\big)}{2}$$

со непосредна замена добиваме дека $210 = \frac{n}{2}\big(2 \cdot 3 + (n-1)4\big)$, од каде што следува дека $n = 10$ и $x = a_{10} = 39$.

2) Со непосредна замена во формулата за збир кај аритметичка прогресија добиваме $209 = \frac{n}{2}\big(2 \cdot 4 + (n-1)3\big)$. Оттука следува дека $n = 11$ и $x = a_{10} = 34$.

3) Според формулата за наоѓање на општ член кај аритметичка прогресија $a_n = a_1 + (n-1)d$, со замена за $a_1 = x + 2$, $d = 3$ и $a_n = x + 32$, имаме дека $x + 32 = x + 2 + (n-1)3$, од каде што наоѓаме дека $n = 11$. Сега, со непосредна замена во формулата за збир кај аритметичка прогресија $S_n = \frac{n\big(2a_1 + (n-1)d\big)}{2}$, добиваме $242 = \frac{11\big(2(x+2) + (11-1)3\big)}{2}$, од каде што следува дека $x = 5$. ●

4.12. Збирот на првите три члена на аритметичка прогресија е еднаков на 36, а збирот на квадратите на првите три члена е еднаков на 482. Најди ја прогресијата!

Решение. Од условот на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 36 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 482 \end{cases},$$

кој што е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 \\ 3a_1^2 + 5d^2 + 6a_1 d = 482 \end{cases},$$

чиишто решенија се $d = \pm 5,\ a_1 = 7$ или $a_1 = 17.$ Според тоа, за бараната низа имаме две решенија

$7, 12, 17, 22, \cdots$ или $17, 12, 7, 2, -3, \cdots$. ●

4.13. Определи ја аритметичката прогресија, ако $S_n = 3n^2.$

Решение. Според формулата за збир кај аритметичка прогресија добиваме, од условот на задачата имаме дека $3n^2 = \dfrac{n\left(2a_1 + (n-1)d\right)}{2}$, од каде што добиваме $a_1 = 3$ и $d = 6.$ Бараната низа гласи

$3, 9, 15, 21, \cdots$. ●

4.14. Ако броевите $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ формираат аритметичка прогресија, докажи дека:

1) $\dfrac{1}{a_1 a_2} + \dfrac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1} a_n} = \dfrac{n-1}{a_1 a_n}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$

Решение. 1) Бидејќи дадените броеви формираат аритметичка прогресија имаме дека

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1} = d.$$

Ако $d = 0,$ тогаш членовите на низата се еднакви меѓу себе, па тврдењето е очигледно.

Ако $d \neq 0,$ тогаш имаме дека

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{d}\frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} =$$

$$= \frac{1}{d}\frac{(n-1)d}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

2) Бидејќи броеви формираат аритметичка прогресија имаме

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1} = d.$$

Со собирање на идентитетите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} \cdot \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} = \frac{1}{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}} \cdot \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}} = \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} = \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d},$$

добиваме дека

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}\cdot\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}=\frac{a_n-a_1}{d\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)}=\frac{(n-1)d}{d\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)}=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}},$$

при што ја користевме фрормулата $a_n = a_1 + (n-1)d$. ●

4.15. Колку членови треба да се вметнат меѓу броевите 0 и 12 за да се добие аритметичка прогресија чијшто збир е еднаков на 150.

Решение. Од условот во задачата имаме $a_1 = 0,\ a_{r+2} = 12$ и $S_{r+2} = 150.$ Тогаш, за збирот на првите $r+2$ членови добиваме дека

$$S_{r+2} = \frac{(r+2)(2a_1 + a_{r+2})}{2},$$

следува дека $r = 23.$ ●

Геометриска прогресија

❖ *Геометриска прогресија* е низа зададена со рекурентната формула $a_{n+1} = a_n \cdot q,\ n \in \mathbf{N},$ каде што q е константа.

❖ Општиот член на аритметичка прогресија се пресметува според формулата

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

❖ Збирот на првите n членови од аритметичка прогресија се пресметува според формулата

$$s_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}.$$

4.16. Определи ги првите четири члена на геометриската прогресија, ако:

1) $a_1 = 3, \quad q = 2$ 2) $a_1 = -2, \quad q = \frac{1}{2}$ 3) $a_1 = \frac{1}{3}, \quad q = -3$

4) $a_1 = 0, \quad q = -2$ 5) $a_1 = -8, \quad q = -4$

Решение. 1) Од условите во задачата, според формулата за општ член на геометриска прогресија $a_n = a_1 q^{n-1}$, добиваме дека

$$a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 12,\ a_4 = 24.$$

2) Слично, според формулата за општ член на геометриска прогресија добиваме дека

$$a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ a_3 = -\frac{1}{2},\ a_4 = -\frac{1}{4}.$$

3) Според формулата за општ член на геометриска прогресија имаме

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = -1,\ a_3 = 3,\ a_4 = -9.$$

4) Според формулата за општ член на геометриска прогресија имаме

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0.$$

5) Слично, добиваме дека

$$a_1 = -8,\ a_2 = 32,\ a_3 = -128,\ a_4 = 512.$$ ●

4.17. Определи го a_n во геометриската прогресија, ако:

1) $a_1 = 6, \quad q = -\frac{1}{2}, \quad n = 3$ 2) $a_1 = -2, \quad q = -\frac{1}{8}, \quad n = 5$

3) $a_1 = \frac{5}{2}, \quad q = -2, \quad n = 9$ 4) $a_1 = -\frac{3}{2}, \quad q = -2, \quad n = 4$

5) $a_1 = 1, \quad a_6 = 1024, \quad n = 7$ 6) $a_1 = 5, \quad a_4 = 135, \quad n = 6$

Решение. Од условите во задачата, според формулата за општ член на геометриска прогресија $a_n = a_1 q^{n-1}$, добиваме дека

1) $a_3 = \frac{3}{2}$ 2) $a_5 = -\frac{1}{2048}$ 3) $a_9 = 1280$

4) $a_3 = -24$ 5) $a_7 = 4096$ 6) $a_6 = 15625$ ●

4.18. Определи ги a_1 и q во геометриската прогресија, ако:

1) $a_7 = 5, \quad a_9 = 45$ 2) $a_6 - a_3 = -72, \quad a_4 - a_2 = -12$

Решение. 1) Од $\frac{a_9}{a_7} = q^2$ и $\frac{a^7}{q^6} = a_1$ следува дека $q = \pm 3$ и $a_1 = \frac{5}{729}$.

2) Од условот во задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} a_1 q^5 - a_1 q^2 = -72 \\ a_1 q^3 - a_1 q = -12 \end{cases}$$

чиешто решение е $a_1 = 3 \quad q = -2.$ ●

4.19. Збирот на првите осум члена на геометриска прогресија е 6560. Пресметај ги a_1 и a_8 ако количникот $q = 3$.

Решение. Според условот во задачата, со замена од формулата за збир на првите $n -$ членови на геометриска прогресија

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

добиваме $6560 = a_1 \dfrac{3^n - 1}{3 - 1}$ од каде што наоѓаме дека $a_1 = 2.$ Понатаму, со замена во формулата за општ член на геометриска прогресија

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

добиваме дека $a_8 = 2\dfrac{3^8 - 1}{3 - 1}$ од каде што наоѓаме дека $a_8 = 4374$. ●

4.20. Пресметај ги n и S_n во геометриската прогресија, ако

$$a_1 = 3, \quad q = -2, \quad a_n = -1536 .$$

Решение. Според условот во задачата, со замена во формулата за општ член на геометриска прогресија

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

добиваме дека $-1536 = 3(-2)^{n-1},$ од каде што наоѓаме дека $n = 9.$ Тогаш со замена од формулата за збир на првите $n-$ членови на геометриска прогресија

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

наоѓаме дека $S_9 = 3\dfrac{(-2)^9 - 1}{(-2) - 1} = 513.$ ●

4.21. Пресметај ги q и S_5 во геометриската прогресија, ако $a_1 = 3$ и $a_5 = 12288.$

Решение. Од $q^4 = \frac{a_5}{a_1}$ следува дека $q = \pm 8.$ Со замена од формулата за збир на првите $n-$членови на геометриска прогресија, за $q = 8$ добиваме дека $S_5 = 122883\frac{8^5 - 1}{8 - 1} = 10043,$ додека за $q = -8$ добиваме дека $S_5 = 122883\frac{(-8)^5 - 1}{(-8) - 1} = 10925$. ●

4.22. Пресметај ги a_{10} и S_{10} во геометриската прогресија, ако $a_1 = 3,$ $q = 2.$

Решение. Според условот во задачата, со замена во формулата за општ член на геометриска прогресија добиваме дека

$$a_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 1536.$$

Со замена од формулата за збир на првите првите $n-$членови на геометриска прогресија наоѓаме дека

$$S_{10} = 3\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 341. \quad ●$$

4.23. Пресметај ги n и q во геометриската прогресија, ако $a_1 = -2,$ $a_n = 2048$ и $S_n = 2730.$

Решение. Од условот на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} a_1 q^{n-1} = 2048 \\ a_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 2730 \end{cases},$$

чиешто решение е $q = 4$ и $n = 6.$ ●

4.24. Три броја со збир 57 формираат геометриска прогресија. Средниот член е $\frac{6}{13}$ од збирот на соседните. Определи ги тие броеви.

Решение. Од условите во задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 57 \\ \frac{6}{13}\left(a + aq^2\right) = aq \end{cases},$$

чиишто решенија се $q = \frac{3}{2}$ и $q = \frac{2}{3}$, и $a_1 = 12$ и $a_1 = 27$, соодветно. Бараните броеви се 12, 18, 27 или 27,18,12. ●

4.25. Збирот на три броја кои формираат геометриска прогресија е еднаков на збирот на нивните реципрочни вредности и изнесува $\frac{7}{2}$. Кои се тие броеви?

Решение. Од условите во задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = \frac{7}{2} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + \frac{1}{aq^2} = \frac{7}{2} \end{cases},$$

чиишто решенија се $q = 2$ и $a = \frac{1}{2}$. Бараните броеви се $\frac{1}{2}, 1, 2.$ ●

4.26. Пресметај го збирот $1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \underbrace{1111\cdots1}_{n \text{ пати}}$.

Решение. Од формулата за збир на првите $n-$членови на геометриска прогресија наоѓаме дека

$$S_n = \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \cdots + \frac{10^n-1}{9} =$$

$$=\frac{10}{9}\left(1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}\right)-\frac{n}{9}=\frac{10}{9}\frac{10^{n-1}-1}{10-1}-\frac{n}{9}=\frac{10^n-10-9n}{81}. \bullet$$

4.27. Определи го општиот член на низата:

1) $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \cdots$ 2) $0.3, 0.34, 0.344, 0.3444, \cdots$

Решение. 1) Општиот член на дадената низа изнесува

$$a_n=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots\frac{9}{10^n}=\frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}=1-\frac{1}{10^n}.$$

2) Општиот член на дадената низа изнесува

$$a_n=\frac{3}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\cdots\frac{4}{10^n}=\frac{3}{10}+\frac{4}{10^2}\frac{1-\frac{1}{10^{n-1}}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}+\frac{4}{90}\left(1-\frac{1}{10^{n-1}}\right). \bullet$$

4.28. Помеѓу броевите 47 и 1269 вметни два броја кои со дадените формираат геометриска прогресија.

Решение. Од условот во задачата имаме дека

$$q=\sqrt[3]{\frac{1269}{47}}=3.$$

Бараните броеви се 141 и 423. ●

4.29. Три броја чиј што збир е 26 формираат геометриска прогресија. Ако тие броеви се зголемат по ред за 1, 6 и 3, се добиваат три броја кои формираат аритметичка прогресија. Кои се тие броеви?

Решение. Бидејќи бараните броеви формираат геометриска прогресија, тие се од облик

$$a,\ aq,\ aq^2.$$

Освен тоа, $a+aq+aq^2=26.$ Од условот во задачата, броевите

$$a+1,\ aq+6,\ aq^2+3$$

формираат аритметичка прогресија, од каде што следува дека

$$2(aq+6)=a+1+aq^2+3.$$

Оттука добиваме дека $a=2$ и $q=3.$ Бараните броеви се 2,6 и 18. ●

4.30. Четири броја формираат аритметичка прогресија. Ако тие броеви се намалат по ред за 2, 7, 9 и 5, се добиваат четири броја кои формираат геометриска прогресија. Кои се тие броеви?

Решение. Бидејќи бараните броеви формираат аритметичка прогресија, тие се од облик

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d.$$

Од условот на задачата, броевите

$$a-2,\ a+d-7,\ a+2d-9,\ a+3d-5$$

формираат геометриска прогресија, од каде го добиваме системот:

$$\begin{cases}(a+d-7)^2=(a-2)(a+2d-9)\\(a+2d-9)^2=(a+d-7)(a+3d-5)\end{cases}.$$

Бараните броеви се: 5, 13, 21, 29. ●

4.2. Монотони низи

- ❖ Низата $\{a_n\}$ *монотоно расте* ако $a_{n+1}\geq a_n$, за секое $n\in\mathbf{N}$.
- ❖ Низата $\{a_n\}$ *строго монотоно расте* ако $a_{n+1}>a_n$, за секое $n\in\mathbf{N}$.

- Низата $\{a_n\}$ *монотоно опаѓа* ако $a_{n+1} \le a_n$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

- Низата $\{a_n\}$ *строго монотоно опаѓа* ако $a_{n+1} < a_n$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

- Низите што растат или опаѓаат се викаат *монотони низи.*

4.31. Покажи дека следните низи се строго монотоно растечки:

1) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ 2) $a_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$

3) $a_n = \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$ 4) $a_n = n - \sqrt{n}$

Решение. 1) За било кој природен број n имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0,$$

од каде што следува $a_n < a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно расте.

2) За било кој природен број n имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n+3}{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0,$$

од каде што следува $a_n < a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно расте.

3) Општиот член на дадената низа може да го презапишеме во облик

$$a_n = \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2} = \frac{6n^2 + 2}{4n} = \frac{3n^2 + 1}{2n}.$$

За било кој природен број n имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n^2+1}{2n} - \frac{3n^2+6n+4}{2n+2} = \frac{-3n^2-3n+1}{2n(n+1)} < 0,$$

од каде што следува $a_n < a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно расте.

4) За било кој природен број n имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \left(n - \sqrt{n}\right) - \left(n+1-\sqrt{n+1}\right) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1 < 0,$$

бидејќи $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1.$

Според тоа, имаме дека $a_n < a_{n+1}$, од каде што заклучуваме дека дадената низа строго монотоно расте. ●

4.32. Покажи дека следните низи се строго монотоно опаѓачки:

1) $a_n = \frac{1}{n}$ 2) $a_n = \frac{1}{n^2}$

3) $a_n = \frac{3n+5}{6n-5}$ 4) $a_n = \frac{3n+4}{n+1}$

Решение. 1) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

од каде што следува $a_n > a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно опаѓа.

2) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\left(n+1\right)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0,$$

од каде што следува $a_n > a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно опаѓа.

3) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n+5}{6n-5} - \frac{3n+8}{6n+1} = \frac{45}{(6n-5)(6n+1)} > 0,$$

од каде што следува $a_n > a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно опаѓа.

4) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n+4}{n+1} - \frac{3n+7}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Според тоа, $a_n > a_{n+1}$, па дадената низа строго монотоно опаѓа. ●

4.43. Покажи дека следните низи се монотони:

1) $a_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$

2) $a_n = 2+4+6+\cdots+2n$

3) $a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

4) $a_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+2)}$

5) $a_n = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots 3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdots(5n-4)}$

6) $a_n = \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}$

7) $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n n!}$

8) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Решение. 1) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \left(1+3+5+\cdots+(2n-1)\right) - \left(1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)\right) =$$

$$= -\left(2n+1\right) < 0,$$

од каде што следува $a_n < a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно расте.

2) Низата строго монотоно расте бидејќи за произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме

$$a_n - a_{n+1} = \left(2+4+6+\cdots+2n\right) - \left(2+4+6+\cdots+\left(2n+2\right)\right) = -\left(2n+2\right) < 0,$$

што значи дека $a_n < a_{n+1}$.

3) Низата строго монотоно расте бидејќи за произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме

$$a_n - a_{n+1} = \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\left(2n+1\right)\left(2n+3\right)} < 0,$$

што значи дека $a_n < a_{n+1}$.

4) Низата строго монотоно расте бидејќи за произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме

$$a_n - a_{n+1} = \left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\left(3n+1\right)\left(3n+4\right)} < 0,$$

што значи дека $a_n < a_{n+1}$.

5) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}}{\dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)(5n+1)}} = \frac{5n+1}{3n+2} > 1.$$

Според тоа, имаме дека $a_n > a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно опаѓа.

6) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}}{\dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)(4n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)(4n+2)}} = \frac{4n+2}{4n+1} > 1.$$

Според тоа, имаме дека $a_n > a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно опаѓа.

7) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{3^n \, n!}}{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!}} = \frac{3n+3}{2n+1} > 1.$$

Според тоа, имаме дека $a_n > a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно опаѓа.

8) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{2^n}{n!}}{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{n+1}{2} \geq 1.$$

Според тоа, имаме дека $a_n > a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно опаѓа. ●

4.34. Да се испита дали се монотони следниве низи:

1) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 2) $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

3) $a_n = 2^n$ 4) $a_n = \sqrt[n]{5}$

5) $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ 6) $a_n = \cos(n\pi)$

7) $a_n = (-1)^n$

Решение. 1) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)} \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} \frac{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 1,$$

бидејќи $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$. Според тоа, имаме дека $a_n > a_{n+1}$, па дадената низа строго монотоно опаѓа.

2) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$a_n - a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3^{n+1}} < 0.$$

Според тоа, имаме дека $a_n < a_{n+1}$, па низата строго монотоно расте.

3) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1,$$

од каде што следува $a_n < a_{n+1}$, што значи дека низата строго монотоно расте.

4) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt[n]{5}}{\sqrt[n+1]{5}} = \sqrt[n(n+1)]{5} > 1.$$

Според тоа, имаме $a_n > a_{n+1}$, па дадената низа строго монотоно опаѓа.

5) За произволно $n \in \mathbf{N}$ имаме дека

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{3^n n!}{n^n}}{\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{e}{3} < 1.$$

Според тоа, имаме $a_n < a_{n+1}$, па дадената низа строго монотоно расте.

6) Општиот член на низата е

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ е парен број} \\ -1, & n \text{ е непарен број} \end{cases}$$

Тогаш разликата

$$a_n - a_{n-1} = \begin{cases} 2, & n \text{ е парен број} \\ -2, & n \text{ е непарен број} \end{cases}$$

алтернативно го менува знакот од каде заклучуваме дека низата не е монотона.

7) Општиот член на низата е

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ е парен број} \\ -1, & n \text{ е непарен број} \end{cases}.$$

Тогаш разликата

$$a_n - a_{n-1} = \begin{cases} 2, & n \text{ е парен број} \\ -2, & n \text{ е непарен број} \end{cases}$$

алтернативно го менува знакот од каде заклучуваме дека низата не е монотона. ●

4.3. Ограничени низи

❖ Низа $\{a_n\}$ е *ограничена од горе* ако постои реален број M таков што $a_n \le M$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

❖ Низа $\{a_n\}$ е *ограничена од долу* ако постои реален број m таков што $a_n \ge m$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

❖ Низата е *ограничена* ако е ограничена и од горе и од долу, односно ако постојат реални броеви m и M такви што важи дека $m \le a_n \le M$, за секое $n \in \mathbf{N}$. Алтернативно, низа $\{a_n\}$ е ограничена ако сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[m, M]$, за некои реални броеви m и M.

❖ Низа $\{a_n\}$ е неограничена ако за секој позитивен реален број K, постои $n \in \mathbf{N}$ таков што $|a_n| > K$.

4.35. Покажи дека следните низи се ограничени:

1) $a_n = \dfrac{1}{n}$ 2) $a_n = (-1)^n$ 3) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

4) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ 5) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ 6) $a_n = \dfrac{2n+1}{2n+2}$

Решение. 1) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \frac{1}{n} \le 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$.

2) Низата е ограничена, бидејќи таа осцилира меѓу -1 и 1. Имаме

$$|a_n| = \left|(-1)^n\right| = 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$.

3) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \le 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$.

4) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \frac{1}{n^2} \le 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$.

5) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\frac{n-1}{n}\right| = 1 - \frac{1}{n} < 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$.

6) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\frac{2n+1}{2n+2}\right| = 1 - \frac{1}{2n+2} < 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$. ●

4.36. Покажи дека следните низи се неограничени:

1) $a_n = (-1)^n n$ 2) $a_n = n^2 - n$

Решение. 1) За произволен реален број $M > 0$ имаме дека

$$\left|a_{[M]+1}\right| = \left|(-1)^{[M]+1}([M]+1)\right| = [M]+1 > M,$$

Според тоа, низата не е ограничена.

2) За произволен реален број $M > 0$ имаме дека

$$\left|a_{[M]+2}\right| = \left|([M]+2)^2 - ([M]+2)\right| \geq [M]^2 + 3[M] + 2 > M,$$

од каде што следува дека низата е неограничена. ●

4.37. Испитај ја ограниченоста на следните низи:

1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ 2) $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$ 3) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+4n+8}$

4) $a_n = \sqrt[n]{3}$ 5) $a_n = \sqrt{n}$ 6) $a_n = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$

7) $a_n = \frac{\sin n}{n}$ 8) $a_n = \frac{n}{n+\sin n}$ 9) $a_n = \frac{2^n}{2^n+1}$

Решение. 1) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right| < 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$.

2) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}\right| < 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$.

3) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\frac{(n+1)^2}{n^2+4n+8}\right| < 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$.

4) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\sqrt[n]{3}\right| \le 3, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-3,3]$.

5) За произволен реален број $M > 0$ имаме дека

$$\left|a_{([M]+1)^2}\right| = \left|\sqrt{([M]+1)^2}\right| = [M]+1 > M,$$

од каде што следува дека низата е неограничена.

6) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\right| \le 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$.

7) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \le 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$.

8) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\frac{n}{n+\sin n}\right| \le \left|\frac{n}{n-1}\right| = \left|1+\frac{1}{n-1}\right| \le 2, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-2,2]$.

9) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left|\frac{2^n}{2^n+1}\right| = \frac{1}{1+\frac{1}{2^n}} \le 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1,1]$. ●

4.38. Испитај ја ограниченоста на следните низи:

1) $0,1;\ 0,11;\ \ 0,111;\ldots$ 2) $0,4;\ \ 0,41;\ \ 0,411;\ \ 0,4111;\ldots$

3) $a_n = 2+4+6+\cdots+(2n)$

Решение. 1) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$a_n = \frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n} = \frac{1-\frac{1}{10^n}}{9} < \frac{1}{9}, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $\left[0,\frac{1}{9}\right]$.

2) Низата е ограничена, бидејќи важи

$$|a_n| = \left| \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} \right| =$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{1}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-2}}}{9} < \frac{37}{90}. \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

односно сите членови на низата се наоѓаат во сегментот $\left[0, \frac{37}{90}\right]$.

3) За произволен реален број $M > 0$ имаме дека

$$\left| a_{[M]+1} \right| = \left| ([M]+1)([M]+1+1) \right| > M.$$

Според тоа, низата е неограничена. ●

4.4. Гранична вредност на низа

❖ Бројот a_0 е *гранична вредност (лимес) на низата* $\{a_n\}$ *кога* n *тежи кон бесконечност* ако за секој произволно мал позитивен број ε постои природен број n_0 таков што за секое $n \geq n_0$ $a_n \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$.

Користиме ознака $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ и велиме дека „бројот a_0 е лимес (гранична вредност) на низата $\{a_n\}$, кога n се стреми кон бесконечност" или „низата $\{a_n\}$ *конвергира* кон бројот a_0 кога n се стреми кон бесконечност". Накратко може да запишеме:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}: \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_0| < \varepsilon .$$

❖ Ако за низата реални броеви $\{a_n\}$ не постои граница или ако границата е $a = \pm\infty$, тогаш велиме дека низата *дивергира*.

4.39. Дадена е низата $a_n = \dfrac{n+1}{n+3}$. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, а потоа определи n_0, ако:

1) $\varepsilon = 0{,}1$ 2) $\varepsilon = 0{,}01$ 3) $\varepsilon = 0{,}001$

Решение. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно дадено. Избираме $n_0 = \left[\dfrac{2-3\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1.$

Тогаш имаме дека

$$|a_n - a| = \left|\frac{n+1}{n+3} - 1\right| = \frac{2}{n+3} < \varepsilon, \text{ за секое } n \geq n_0,$$

од каде што следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1.$

1) Со замена за $\varepsilon = 0{,}1$ добиваме дека $n_0 = \left[\dfrac{2-0{,}3}{0{,}1}\right] + 1 = 18.$

2) За $\varepsilon = 0{,}01$ имаме дека $n_0 = \left[\dfrac{2-0{,}03}{0{,}01}\right] + 1 = 198.$

3) За $\varepsilon = 0{,}001$ $n_0 = \left[\dfrac{2-0{,}003}{0{,}001}\right] + 1 = 1998.$ ●

4.40. Определи го општиот член a_n на низата $0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ldots$ и покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Започнувајќи од кое n важи $|a_n - 1| < 0{,}0001$?

Решение. Општиот член на дадената низа е

$$a_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно дадено. Избираме $n_0 = \left[-\log\varepsilon\right]+1$. Тогаш

$$\left|a_n - a\right| = \left|1 - \frac{1}{10^n} - 1\right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon, \text{ за секое } n \geq n_0,$$

од каде што следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Имаме дека $\left|a_n - 1\right| = \dfrac{1}{10^n} < 0,0001$, за $n > -\log\dfrac{1}{10000}$, односно

$$n_0 = \left[-\log\frac{1}{10000}\right]+1 = \left[\log 10^4\right]+1 = 4+1 = 5. \;\bullet$$

4.41. Дадена е низата $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

Започнувајќи од кое n е исполнето $\left|a_n - \dfrac{1}{2}\right| < 0,001$?

Решение. Општиот член на низата е

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Избираме $n_0 = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]+1$. Тогаш имаме дека

$$\left|a_n - a\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon, \text{ за секое } n \geq n_0,$$

Имаме дека $\left|a_n - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2n} < \varepsilon$, за $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Оттука имаме дека

$$n_0 = \left[\frac{1}{2\cdot 0,001}\right]+1 = 501. \;\bullet$$

4.5. Својства на конвергентни низи

- Конвергентна низа има само една гранична вредност.
- Секоја конвергентна низа е ограничена.
- Секоја неограничена низа е дивергентна.
- **Сендвич теорема.** Ако низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни со иста граница a_0, тогаш и низата $\{c_n\}$ со својство $a_n \le c_n \le b_n$, за секое $n \in \mathbf{N}$, е конвергентна и притоа важи $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a_0$.
- Нека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни со гранични вредности a_0 и b_0 соодветно.

1. Тогаш и низата со општ член $\{a_n + b_n\}$ е конвергентна и важи:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n .$$

2. Тогаш и низата со општ член $\{a_n \cdot b_n\}$ е конвергентна и важи:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n .$$

3. Нека $b_0 \neq 0$ и $b_n \neq 0,$ за секое $n \in \mathbf{N}$, тогаш и низата $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ е конвергентна и важи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} .$$

- Секоја ограничена и монотона низа е конвергентна.

Определи ги следните граници: (4.42.- 4.67.)

4.42. $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}\right)$

Решение. Со примена на правилата за збир и производ со константа на конвергентни низи имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}=2+0-0=2.$$

4.43. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-1}{5n^2+n-1}$

Решение. Со примена на правилата за збир, производ и количник на конвергентни низи имаме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-1}{5n^2+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(5+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0-0}{5+0-0}=\frac{3}{5}.\ \bullet$$

4.44. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2}$

Решение. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=3.$ $\bullet$

4.45. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)}=0\cdot\dfrac{1}{1}=0.$ ●

4.46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+4n-1}{7n^3+3n^2-4n+2}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+4n-1}{7n^3+3n^2-4n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(5-\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(7+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}\right)}=$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}\right)}=\frac{5}{7}.$$ ●

4.47. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3=$

$$\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{7}{n^3}\right)}\right]^3=\left[\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{7}{n^3}\right)}\right]^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}.$$ ●

4.48. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^{10}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^{10}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^{10}=$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(4+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}\right]^{10}=\left[\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}\right]^{10}=\frac{1}{2^{10}}. \bullet$$

4.49. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n+2)(5n-7)}{n^3}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n+2)(5n-7)}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(5-\frac{7}{n}\right)}{n^3}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(5-\frac{7}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{7}{n}\right)$$

$$=1\cdot 3\cdot 5=15\,. \bullet$$

4.50. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+2}-\frac{n^2}{n-1}\right)$

Решение. Дадената низа е разлика на две дивергентни низи, па не можеме директно да го примениме правилото за збир на конвергентни низи. Затоа претходно ќе ги сведиме дропките на заеднички именител. Добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+2}-\frac{n^2}{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n-1)-n^2\left(n^2+2\right)}{\left(n^2+2\right)(n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3-2n^2}{n^3-n^2+2n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(-1-\frac{2}{n}\right)}{n^3\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1-\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)}=-1.\ \bullet$$

4.51. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+2)^2-(n-2)^2}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+2)^2-(n-2)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1)-(n^2-2n+1)}{(n^2+4n+4)-(n^2-4n+4)}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{8n}=\frac{1}{2}.\ \bullet$$

4.52. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!(1+n+1)}{n!(n+2)(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{(n+2)(n+1)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.\ \bullet$$

4.53. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.\bullet$

4.54. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{n\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}}=\dfrac{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}}}{\sqrt[3]{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}}=1.$ ●

4.55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

Решение. И во овој случај дадената низа е разлика на две дивергентни низи, па не можеме директно да го примениме правилото за збир на конвергентни низи. Затоа претходно ќе рационализираме. Добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0. \quad ●$$

4.56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}\right)$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}\right)\dfrac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(2n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}=0. \quad ●$$

4.57. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)\dfrac{\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+n\right)}{\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+n\right)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)-n^2}{\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}+1\right)}=\frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\sqrt{(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n})}+1}=\frac{3}{2}. \bullet$$

4.58. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)\frac{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2+n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+3n-1\right)-\left(n^2+n+1\right)}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n^2+n+1}}=$$

$$=\frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}}=1. \bullet$$

4.59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+1}=0 \quad \bullet$$

4.60. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)\left(\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2\right)}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1}=\frac{1}{3}. \quad \bullet$$

4.61. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{1+2^n}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{1+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n\left(\dfrac{1}{2^n}+1\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{2^n}+1}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}+1}=1.$ ●

4.62. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3^{n+1}}{2+3^n}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3^{n+1}}{2+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\left(\dfrac{1}{3^n}-3\right)}{3^n\left(\dfrac{2}{3^n}+1\right)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}-3\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3^n}+1\right)}=\dfrac{-3}{1}=-3\,.$ ●

4.63. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-4}{1+2^n}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-4}{1+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\left(2-\dfrac{4}{2^n}\right)}{2^n\left(\dfrac{1}{2^n}+1\right)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{4}{2^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+1\right)}=2.$ ●

4.64. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1\right]}{5^n\left[2\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+5\right]}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1\right]}{2\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+5\right]}=\dfrac{1}{5}.$ ●

4.65. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{2n}=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$ (види задача 2.24.) ●

4.66. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6n^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$ (види задача 2.26.). ●

4.67. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)}=$

$$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{2}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{4}$$ (види задачи 2.21. и 2.29.) ●

4.68. Определи ја границата на низата:

1) $0,3;\quad 0,33;\quad 0,333;\quad 0,3333;\ldots$

2) $0,4;\quad 0,43;\quad 0,433;\quad 0,4333;\ldots$

3) $0,5;\quad 0,51;\quad 0,511;\quad 0,5111;\ldots$

4) $0,31;\quad 0,312;\quad 0,3122;\quad 0,31222;\ldots$

Решение. 1) Општиот член на низата е

$$a_n = \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}=\frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots\frac{1}{10^{n-1}}\right)=\frac{3}{10}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}},$$

од каде што следува дека

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{10}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\frac{10}{9}=\frac{1}{3}.$$

2) Општиот член на низата е

$$a_n = \frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}=\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-2}}\right)=$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{10}}.$$

За границата на низата имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{10}}\right]=\frac{4}{10}+\frac{3}{10^2}\frac{10}{9}=\frac{13}{30}.$$

3) Општиот член на низата е

$$a_n = \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots \frac{1}{10^{n-2}}\right) =$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{10}}.$$

Оттука за границата на низата добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n \left[\frac{5}{10} + \frac{1}{10^2}\frac{10}{9}\right] = \frac{46}{90}.$$

4) Општиот член на низата е

$$a_n = \frac{31}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \cdots + \frac{2}{10^n} = \frac{31}{10^2} + \frac{2}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots \frac{1}{10^{n-3}}\right) =$$

$$= \frac{31}{10^2} + \frac{2}{10^3}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{10}}.$$

За границата на низата добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{31}{10^2} + \frac{2}{10^3}\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{10}}\right] = \frac{31}{10^2} + \frac{2}{10^3}\frac{10}{9} = \frac{281}{900}. \quad \bullet$$

4.69. Дали се конвергентни низите:

1) $a_n = \frac{1}{n}$ 2) $a_n = \frac{n}{n+5}$ 3) $a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$

Решение. 1) Имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

од каде што следува дека $a_n > a_{n+1}$, што значи дека низата е монотоно опаѓачка. Освен тоа, од

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

следува дека низата е ограничена. Според тоа, дадената низа е конвергентна.

2) Имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+5} - \frac{n+1}{n+6} = \frac{-5}{(n+5)(n+6)} < 0, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

од каде што следува дека $a_n < a_{n+1}$, што значи дека низата е монотоно растечка. Освен тоа, заради

$$|a_n| = \left|\frac{n}{n+5}\right| = \frac{n}{n+5} < 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

следува дека низата е ограничена. Според тоа, добиваме дека дадената низа е конвергентна.

3) Имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{-5}{(3n+1)(3n+4)} < 0, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

од каде што следува дека $a_n < a_{n+1}$, што значи дека низата е монотоно растечка. Освен тоа, имаме дека

$$|a_n| = \left|\frac{2n-1}{3n+1}\right| = 1 - \frac{n+2}{3n+1} < 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

од каде што следува дека низата е ограничена. Според тоа, добиваме дека дадената низа е конвергентна.

4.70. Испитај ја конвергенцијата на низите:

1) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$

2) $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

3) $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$

4) $0,3;\quad 0,31;\quad 0,311;\quad 0,3111;\ldots$

5) $0,42;\quad 0,423;\quad 0,4233;\quad 0,42333;\ldots$

Решение. 1) Имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < 0, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

од каде што следува дека $a_n < a_{n+1}$, за секое $n \in \mathbf{N}$, што значи дека низата е монотоно растечка. Освен тоа, од

$$|a_n| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right| \le \frac{n}{n+1} < 1, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

следува дека низата е ограничена. Според тоа, дадената низа е конвергентна.

2) Имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{3^{n+1}} < 0, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

од каде што следува дека $a_n < a_{n+1}$, за секое $n \in \mathbf{N}$, што значи дека низата е монотоно растечка. Освен тоа, од

$$|a_n| = \left|1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right| = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \le \frac{3}{2}, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

следува дека низата е ограничена. Според тоа, може да заклучиме дека низата е конвергентна.

3) Имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{3^{n+1} + 1} < 0, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

од каде што следува дека $a_n < a_{n+1}$, за секое $n \in \mathbf{N}$, што значи дека низата е монотоно растечка. Освен тоа, од

$$|a_n| = \left|\frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}\right| \le 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{1 - \frac{1}{3}} \le \frac{3}{2}, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

следува дека низата е ограничена. Според тоа, може да заклучиме дека низата е конвергентна.

4) Општиот член на низата е

$$a_n = \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2}\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} + \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{90}.$$

Имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3}{10} + \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{90} - \frac{3}{10} - \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{90} = -\frac{1}{10^{n+2}} < 0, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

од каде што следува дека $a_n < a_{n+1}$, за секое $n \in \mathbf{N}$, што значи дека низата е монотоно растечка. Освен тоа, од

$$|a_n| = \frac{3}{10} + \frac{1-\frac{1}{10^n}}{90} \le \frac{28}{90}, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

следува дека низата е ограничена. Според тоа, може да заклучиме дека низата е конвергентна.

5) Општиот член на низата е

$$a_n = \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} = \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3}\frac{1-\frac{1}{10^{n-1}}}{1-\frac{1}{10}} =$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1-\frac{1}{10^{n-1}}}{300}.$$

Имаме дека

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1-\frac{1}{10^{n-1}}}{300} - \frac{1-\frac{1}{10^n}}{300} = -\frac{3}{10^{n+2}} < 0, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

од каде што следува дека $a_n < a_{n+1}$, за секое $n \in \mathbf{N}$, што значи дека низата е монотоно растечка. Освен тоа, од

$$|a_n| = \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1-\frac{1}{10^{n-1}}}{300} \le \frac{127}{300}, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

следува дека низата е ограничена. Според тоа, може да заклучиме дека низата е конвергентна. ●

4.71. Докажи дека следните низи се конвергентни. Најди ја нивната граница, ако

1) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ 2) $a_n = a + \dfrac{(-1)^n}{n}$

3) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ 4) $a_n = \dfrac{n \sin n!}{n^2+1}$

Решение. 1) Од двојното неравенство

$$0 \le \frac{1+(-1)^n}{n} \le \frac{2}{n}, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

заради $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0,$ за секое $n \in \mathbf{N},$ заради сендвич теоремата следува дека

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0.$$

2) Од двојното неравенство

$$a - \frac{1}{n} \le a + \frac{(-1)^n}{n} \le a + \frac{1}{n}, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

заради фактот дека $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a - \dfrac{1}{n}\right) = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a + \dfrac{1}{n}\right) = a,$ заради сендвич теоремата следува дека

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = a.$$

3) Од двојното неравенство

$$-\frac{1}{n+1} \le \frac{(-1)^n}{n+1} \le \frac{1}{n+1}, \text{ за секое } n \in \mathbf{N},$$

и фактот дека $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0,$ заради сендвич теоремата следува дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0.$$

4) Од двојното неравенство

$$-\frac{n}{n^2+1}\le\frac{n\sin n!}{n^2+1}\le\frac{n}{n^2+1},\ \text{за секое } n\in\mathbf{N},$$

и фактот дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0,$ заради сендвич теоремата имаме дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}=0. \ ●$$

4.6. Бројот „e“

❖ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

❖ Ако $a_n\to\pm\infty$, кога $n\to\infty$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$

4.72. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=e^2.$ ●

4.73. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^2=e^2$. ●

4.74. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1-1}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e\cdot 1=e.$$ ●

4.75. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+k}\right)^{n}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+k}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+k}\right)^{n+k-k}=$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{-k}=e\cdot 1=e.$$ ●

4.76. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1+2}{n-1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{(n-1)/2}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot 2+1}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(n-1)/2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n-1)/2}\right)=e^2\cdot 1=e^2.$$ ●

4.77. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{n}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1+4}{2n-1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{4}}\right)^n =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{2n-1}{4}\cdot 2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{2n-1}{4}}\right]^2 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^2\cdot 1 = e^2. \ \bullet$$

4.78. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2-2}\right)^{n^2}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2-2}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2+4}{n^2-2}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-2}{4}}\right)^{\frac{n^2-2}{4}\cdot 4+2} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-2}{4}}\right)^{\frac{n^2-2}{4}}\right]^4 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-2}{4}}\right)^2 = e^4\cdot 1 = e^4. \ \bullet$$

4.79. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1-1}{n+1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{e}. \ ●$$

4.80. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{2n-1}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1-3}{n+1}\right)^{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{\frac{n+1}{3}\cdot 6-1} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{\frac{n+1}{3}\cdot 6} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{-1} = e^{-6}\cdot 1 = \frac{1}{e^{6}}. \ ●$$

4.81. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+k}{n}\right)^{mn}$

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+k}{n}\right)^{mn} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{mn} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}\cdot km} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^{km} = e^{km}. \ ●$$

4.6. Геометриски ред

❖ Нека a и q се дадени реални броеви. Изразот

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + ... + aq^n + ... \qquad (1)$$

се вика *геометриски ред* со коефициент q и прв член a.

Збировите

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

. . . .

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

. . . .

се нарекуваат *парцијални суми* на геометрискиот ред (1).

Низата $\{S_n\}$ од парцијални суми на геометрискиот ред (1) се нарекува *низа од парцијални суми* на геометрискиот ред.

❖ Ако низата од парцијални суми $\{S_n\}$ на редот $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ конвергира, односно ако постои границата

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \ -\infty < S < +\infty,$$

тогаш велиме дека редот *конвергира*, а бројот S се нарекува *збир* или *сума* на геометрискиот ред и запишуваме $S = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$. Во спротивно велиме дека редот *дивергира.*

4.82. Најди ја низата од парцијални суми S_n и сумата S на следниве редови:

1) $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{4}{3^n} + \cdots$ 2) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) + \cdots$

Решение. 1) За низата од парцијални суми на редот имаме

$$S_n = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{4}{3^n} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = 2\left(1-\frac{1}{3^n}\right),$$

од каде што следува дека

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = 2.$$

2) За низата од парцијални суми на разгледуваниот ред имаме

$$S_n = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}\right) + \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{5}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right).$$

Тогаш за неговата сума имаме

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\right] = \frac{3}{4}. \bullet$$

4.83. Докажи дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n}$ конвергира и најди ја неговата сума.

Решение. Општиот член на дадениот ред е $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n} = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Низата од парцијални суми има општ член

$$S_n = 2\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 4 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

од каде што добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(4 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 4.$$

Разгледуваниот ред конвергира и неговата сума е $S = 4$. ●

4.84. Најди ја низата од парцијални суми S_n и сумата S на редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(a^n + b^n\right)$, ако $|a| < 1$ и $|b| < 1$.

Решение. За низата парцијални суми S_n на дадениот ред имаме

$$S_n = 1 + 1 + (a+b) + (a^2 + b^2) + \ldots + (a^{n-1} + b^{n-1}) =$$

$$= (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}) + (1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}) = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{1-b^n}{1-b}.$$

Тогаш за сумата на разгледуваниот ред добиваме

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{1-b^n}{1-b}\right) = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} = \frac{2-a-b}{(1-a)(1-b)}.$$ ●

4.84. Реши ја равенката $\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \ldots + \log_8^n x + \cdots = \dfrac{1}{2}, \quad x < 8$

Решение. Изразот на левата страна е геометриски ред со прв член $a=\log_8 x$ и количник $q=\log_8 x,$ за кој што $|\log_8 x|<1,$ за $x<8.$ Според тоа, имаме дека

$$\log_8 x+\log_8^2 x+\log_8^3 x+...+\log_8^n+\cdots=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\log_8 x}{1-\log_8 x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_8 x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2. \bullet$$

4.85. Најди ја вредноста на следниве изрази:

1) $\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7....}}}}$ 2) $\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3...}}}}$

1) Имаме дека

$$\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7....}}}}=7^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{3^2}}\cdot 7^{\frac{1}{3^3}}\cdots=7^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots}=7^{\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}}=7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}.$$

2) Имаме дека

$$\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3...}}}}=5^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2^2}}\cdot 5^{\frac{1}{2^3}}\cdot 3^{\frac{1}{2^4}}\cdot 5^{\frac{1}{2^5}}\cdots=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots}\cdot 3^{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots}=$$

$$=5^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}}\cdot 3^{\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}}=5^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{75}. \bullet$$

4.86. Во кружница со радиус r впишан е рамностран триаголник, во триаголникот е впишана кружница, во кружницата е вписан триагол-ник, итн. Пресметај го збирот на плоштините на сите кругови.

За плоштините на круговите имаме дека

$$P_0=\pi r^2,\ P_1=\frac{\pi r^2}{4},\ P_2=\frac{\pi r^2}{4^2},\ldots,P_{n-1}=\frac{\pi r^2}{4^{n-1}}.$$

Забележуваме дека добиените вредности за плоштините на круговите се членови на геометриски ред со коефициент $q=\frac{1}{4}$. Низата

парцијални суми на добиениот геометриски ред е

$$P_n=\pi r^2+\frac{\pi r^2}{4}+\frac{\pi r^2}{4^2}+\cdots+\frac{\pi r^2}{4^{n-1}}=\pi r^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+..+\frac{1}{4^{n-1}}\right)=$$

$$=\pi r^2\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4\pi r^2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

Тогаш збирот на геометрискиот ред, односно збирот на плоштините на сите кругови е

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi r^2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{4\pi r^2}{3}. \bullet$$

4.7. Задачи за самостојна работа

1. Најди ги првите пет члена на следните низи со општ член:

1) $a_n=\frac{2n}{1+n^2}$ 2) $a_n=(-1)^n$ 3) $a_n=\frac{\cos(n\pi)}{2^n}$

4) $a_n=\frac{n+1}{n+2}$ 5) $a_n=\frac{(-1)}{n^2}$ 6) $a_n=2^n$

2. Најди го општиот член на следните низи:

1) $1, 4, 9, 16, 25,\ldots$ 2) $1, 3, 7, 15, 31,\ldots$

3) $1, -1, 1, -1, 1,\ldots$ 4) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4},\ldots$

3. Најди ги првите пет члена на аритметичка прогресија, ако:

1) $a_1=-4,\quad d=4$,   2) $a_1=-3,\quad d=-2$

4. Најди го a_n во аритметичка прогресија, ако:

1) $a_1=3,\quad d=1,\quad n=5$ 2) $a_1=-3,\quad d=-2,\quad n=9$

5. Најди го десеттиот член на аритметичката прогресија -2, -6, -10,…

6. Најди ја разликата d во аритметичката прогресија ако $a_5=13$ и $a_9=19.$

7. Најди го првиот член a_1 во аритметичката прогресија, ако $a_7=5$ и $d=-1.$

8. Најди ја аритметичката прогресија, ако $a_1+a_4=-20$ и $a_5=-17.$

9. Најди ги a_n и d во аритметичката прогресија, ако $a_1=16,\ n=9$ и $S_n=0.$

10. Најди ги a_1 и d во аритметичката прогресија, ако $a_n=105,\ n=16,$ и $S_n=840.$

11. Најди ги n и S_n во аритметичката прогресија, ако $a_1=4,\ d=5$ и $a_n=49.$

12. Најди го збирот на првите 78 членови на аритметичка прогресија, ако

1) $a_1=5$ и $d=3,$ 2) $a_1=-2$ и $d=2$

13. Пресметај го збирот на првите 46 членови на аритметичка прогресија ако $a_2=6$ и $a_{45}=74.$

14. Колку членови на аритметичка прогресија треба да се соберат за да се добие збир 54 ако четвртиот член е еднаков на 9 а деветтиот член е еднаков на –6?

15. Пресметај ги q и S_n во геометриската прогресија ако $a_1 = -\frac{1}{64}$ и $a_5 = -16.$

16. Пресметај ги a_n и S_n во геометриската прогресија, ако $a_1 = \frac{1}{2},$ $q = 4$ и $n = 6.$

17. Пресметај ги a_1 и S_n во геометриската прогресија, ако $a_n = 243,$ $q = -\frac{1}{3}$ и $n = 4.$

18. Пресметај ги n и q во геометриската прогресија, ако $a_1 = 3,$ $a_n = 1875$ и $S_n = 2343.$

19. Најди ја геометриската прогресија, ако:

1) $a_1 + a_3 = 15, \quad a_2 + a_4 = 30$

2) $a_2 + a_5 - a_4 = 10, \quad a_3 + a_6 - a_5 = 20$

3) $a_1 + a_5 = 1285, \quad a_2 a_4 = 6400$

20. Четири броја формираат геометриска прогресија. Најди ги броевите ако првиот е поголем од вториот за 36, а третиот е поголем од четвртиот за 4.

21. Најди ги $a_1,$ q и n на геометриската прогресија, ако $a_7 - a_5 = 48,$ $a_6 - a_4 = 48$ и $S_n = 1023$.

22. Три броја со збир 7 чинат геометриска прогресија, а збирот на нивните квадрати е 21. Кои се тие броеви?

23. Најди ја x така што броевите $10 + x,$ $17 + x,$ $31 + x$ да формираат геометриска прогресија.

24. Пресметај го збирот:

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^n}$ 2) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}$

25. Помеѓу броевите 4 и 1024 вметни три броја кои со дадените чинат геометриска прогресија.

26. Помеѓу броевите 3 и 192 вметни пет члена кои со дадените чинат геометриска прогресија, а потоа пресметај го нивниот збир.

27. Четири броја формираат геометриска прогресија. Ако на вториот број му додадеме 1, а четвртиот го намалиме за 5, се добиваат четири броја кои формираат аритметичка прогресија. Кои се тие броеви?

28. Три броја формираат геометриска прогресија. Ако вториот член се наголеми за 2 се добива аритметичка прогресија, а ако тртиот член на аритметичката прогресија се наголеми за 16, се добива геометриска прогресија. Кои се тие броеви?

29. Испитај дали се монотони следните низи:

1) $a_n = \sin(n\pi)$ 2) $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$

3) $a_n = (-1)^n \cos(n\pi)$ 4) $a_n = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$

5) $a_n = n\sin\frac{n\pi}{2}$ 6) $a_n = \frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}$

7) $a_n = \frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

30. Испитај која од следните низи е ограничена а која е неограничена:

1) $a_n = \sqrt[k]{n}, \quad k>0$ 2) $a_n = (-1)^n \cos(n\pi)$

3) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ 4) $a_n = 1 - \dfrac{1}{3^n}$

5) $a_n = \dfrac{1}{n^2 + (-1)^{n+1}}$ 6) $a_n = 2^n - 5$

31. Покажи дека низата $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ конвергира кон бројот $\dfrac{1}{2}$.

32. Дадена е низтата $a_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Почнувајќи од кое n е исполнето $|a_n - 2| < 0{,}01$?

33. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{9n+4} = \dfrac{1}{3}$. Почнувајќи од кое n сите членови на низата се наоѓаат на растојание од границата помало од $\varepsilon = 0{,}01$.

Најди ги следните граници: (задачи 34. - 51.)

34. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^3+n+1}$ **35.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3+2n^2-3n+7}{4n^3-2n+11}$

36. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n+1)^3-(n-1)^3}$ **37.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

38. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$ **39.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n-1} - n\right)$

40. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-n^3} + n\right)$ **41.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$

42. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 5^n}{(-2)^{n+1} + 5^{n+1}}$ **43.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(1+2+\cdots+n)}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$

44. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$ **45.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n+4}\right)^n$

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{6n-1}\right)^n$

47. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{3n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}}$

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

51. Дали се конвергентни низите:

1) $a_n=\frac{n^2-1}{n^2}$

2) $a_n=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}$

3) $a_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\cdots+\frac{1}{5^n+1}$

4) $0,3;\ 0,31;\ 0,311;\ 0,3111;\ldots$

52. Покажи дека следните низи се конвергентни и најди ја нивната граница:

1) $a_n=(-1)^n\frac{3n-1}{2n^2+1}$

2) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

53. Испитај ја конвергенцијата на следниве геометриски редови:

1) $1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^n}+\ldots$

2) $1+4+4^2+\ldots+4^n+\ldots$

54. Реши ја равенката

$$1+\log_2\cos x+\log_2^2\cos x+\log_2^3\cos x+\ldots+\log_2^n\cos x+\ldots=\frac{2}{3},$$

каде што $x\in\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$

55. Најди ја вредноста на следниве изрази:

1) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}$

2) $\sqrt{7\sqrt{11\sqrt{7\sqrt{11\ldots}}}}$

56. Во рамностран триаголник со страна a е вписана кружница, во кружницата е вписан рамностран триаголникот, а во новиот триаголник повторно е вписана кружница, итн. Пресметај го збирот на:

1) периметрите на сите кружници

2) плоштините на сите кругови

5. Гранична вредност на функција. Непрекинатост

5.1. Дефиниција на гранична вредност и примери

Нека е зададена функција $f : E \to F$ и нека $a, b \in \mathbf{R}$.

❖ Велиме дека бројот b е *гранична вредност* (лимес) на функцијата f кога x се стреми кон a ако се исполнети следните два услови:

(*i*) $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap D_f \neq \emptyset,$ за секое $\varepsilon > 0,$

(*ii*) за секое $\varepsilon > 0,$ постои $\delta > 0$ такво што ако $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D_f,$ тогаш $f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, освен можеби за $x = a.$ Запишуваме

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

❖ Велиме дека *бројот* b *е гранична вредост на функијата* $f(x)$ *кога* x *се стреми кон* $+\propto$ ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $M > 0$ така што важи $\left|f(x)-b\right| < \varepsilon,$ за секое $x \in D_f$ такво што $x > M$. Запишуваме

$$\lim_{x\to\propto} f(x) = b.$$

❖ Велиме дека *бројот* b *е гранична вредост на функцијата* $f(x)$ *кога* x *се стреми кон* $-\propto$, ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $M < 0$ така што важи $\left|f(x)-b\right| < \varepsilon,$ за секое $x \in D_f$ такво што $x < M$. Запишуваме

$$\lim_{x\to-\propto} f(x) = b.$$

❖ Велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $+\propto$ *кога* x *се стреми кон* a, ако за секое $N > 0$ постои $\delta > 0$ така што $f(x) > N,$ за секое $x \in D_f$ такво што $\left|x-a\right| < \delta$, освен можеби за точката $x = a.$ Запишуваме

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\propto .$$

❖ Велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $-\propto$ *кога* x *се стреми кон* a, ако за секое $N < 0$ постои $\delta > 0$ така што $f(x) < N,$ за секое $x \in D_f$ такво што $\left|x-a\right| < \delta$, освен можеби за точката $x = a.$ Запишуваме

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\propto .$$

❖ Велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $+\propto$ *кога* x *се стреми кон* $+\propto$, ако за секое $N > 0$ постои $M > 0$ така што $f(x) > N,$ за секое $x \in D_f$ такво што $x > M.$ Запишуваме

$$\lim_{x\to\propto} f(x) = +\propto .$$

❖ Велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $+\propto$ *кога* x *се стреми кон* $-\propto$, ако за секое $N>0$ постои $M<0$ така што $f(x)>N$, за секое $x\in D_f$ такво што $x<M$. Запишуваме

$$\lim_{x\to-\propto} f(x)=\propto.$$

❖ Велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $-\propto$ *кога* x *се стреми кон* $-\propto$, ако за секое $N<0$ постои $M<0$ така што $f(x)<N$, за секое $x\in D_f$ такво што $x<M$. Запишуваме

$$\lim_{x\to-\propto} f(x)=-\propto.$$

❖ Велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $-\propto$ *кога* x *се стреми кон* $\propto$, ако за секое $N<0$ постои $M>0$ така што $f(x)<N$, за секое $x\in D_f$ такво што $x>M$. Запишуваме

$$\lim_{x\to\propto} f(x)=-\propto.$$

❖ Променливата x се стреми кон бројот a на произволен начин, односно за произволна бројна низа $\{x_n\}\subset D_f$, $x_n\neq a$, која конвергира кон a, соодветната низа од вредности на функцијата $\{f(x_n)\}$ конвергира кон истиот број b. Во спротивно, ако постојат барем две низи кои што конвергираат кон бројот a, додека соодветните низи од вредностите на функцијата немаат иста граница, тогаш велиме дека функцијата $f(x)$ нема гранична вредност во точката a.

5.1. Користејќи ја дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

1) $\lim_{x\to2}(4x-3)=5$ 2) $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$

3) $\lim_{x\to0}(x-1)=-1$ 4) $\lim_{x\to1}(x+2)=3$

5) $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$

6) $\lim_{x\to -1}(5x-3)=-8$

7) $\lim_{x\to \frac{1}{3}} 9x=3$

8) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$

9) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x-4}=0$

Колку ќе изнесува $\delta,$ ако $\varepsilon=0,01?$

Решение. 1) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta=\frac{\varepsilon}{4}.$ Тогаш, за секое $x\in D_f=\mathbf{R}$ такво што $|x-2|<\delta$ следува дека

$$\left|f(x)-5\right|=|4x-3-5|=4|x-2|<4\delta=\varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim_{x\to 2}(4x-3)=5.$

За $\varepsilon=0,01$ имаме дека $\delta=0,0025.$

2) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta=\varepsilon.$ Тогаш, за секое $x\in D_f=\mathbf{R}$ такво што $|x-(-1)|<\delta$ следува дека

$$\left|f(x)-0\right|=|x+1|<\delta=\varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim_{x\to -1}(x+1)=0.$

За $\varepsilon=0,01$ имаме дека $\delta=0,01.$

3) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta=\varepsilon.$ Тогаш, за секое $x\in D_f=\mathbf{R}$ такво што $|x-0|=|x|<\delta$ следува дека

$$\left|f(x)-(-1)\right|=|x-1+1|=|x|<\delta=\varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim_{x\to 0}(x-1)=-1.$

За $\varepsilon = 0,01$ имаме дека $\delta = 0,01.$

4) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \varepsilon.$ Тогаш, за секое $x \in D_f = \mathbf{R}$ такво што $1-\delta < x < \delta + 1$ следува дека

$$\left|f(x)-3\right| = \left|x+2-3\right| = \left|x-1\right| < \delta = \varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim_{x\to 1}(x+2) = 3.$

За $\varepsilon = 0,01$ имаме дека $\delta = 0,01.$

5) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \frac{\varepsilon}{3}.$ Тогаш, за секое $x \in D_f = \mathbf{R}$ такво што $2-\delta < x < 2+\delta$ имаме дека

$$\left|f(x)-5\right| = \left|3x-1-5\right| = 3\left|x-2\right| < 3\delta = \varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim_{x\to 2}(3x-1) = 5.$

За $\varepsilon = 0,01$ имаме дека $\delta = 0,0033.$

6) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \frac{\varepsilon}{5}.$ Тогаш, за секое $x \in D_f = \mathbf{R}$ такво што $-1-\delta < x < -1+\delta$ имаме дека

$$\left|f(x)-(-8)\right| = \left|5x-3+8\right| = 5\left|x+1\right| < 5\delta = \varepsilon$$

Според дефиницијата за граница на функција $\lim_{x\to -1}(5x-3) = -8.$

За $\varepsilon = 0,01$ имаме дека $\delta = 0,002.$

7) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \frac{\varepsilon}{9}.$ Тогаш, за секое $x \in D_f = \mathbf{R}$ такво што $\left|x-\frac{1}{3}\right| < \delta$ имаме дека

$$\left|f(x)-3\right|=\left|9x-3\right|=3\left|3x-1\right|=9\left|x-\frac{1}{3}\right|<9\delta=\varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} 9x=3.$

За $\varepsilon=0{,}01$ имаме дека $\delta=0{,}0011.$

8) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta=\dfrac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}.$

Тогаш, за секое $x\in D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$ такво што $3-\delta<x<3+\delta$ имаме дека

$$\left|f(x)-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3-x}{3x}\right|<\frac{\delta}{9-3\delta}=\varepsilon\ .$$

Последното неравенство следува од неравенствата $\left|3-x\right|=\left|x-3\right|<\delta$ и $9-3\delta<3x<9+3\delta,$ што е еквивалентно со $\dfrac{1}{9+3\delta}<\dfrac{1}{3x}<\dfrac{1}{9-3\delta}.$ Според тоа, имаме дека $\left|\dfrac{3-x}{3x}\right|<\dfrac{\delta}{9-3\delta}=\varepsilon.$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}.$

Во овој случај за $\varepsilon=0{,}01$ имаме дека $\delta=0{,}008.$

9) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta=\varepsilon^2.$ Тогаш, за секое $x\in D_f=[4,+\infty)$ такво што $\left|x-4\right|<\delta$ имаме дека

$$\left|f(x)-0\right|=\left|\sqrt{x-4}\right|<\sqrt{\delta}=\varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x-4}=0.$

За $\varepsilon=0{,}01$ имаме дека $\delta=0{,}0001.$ ●

5.2. Користејќи ја дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

1) $\lim\limits_{x\to 4} x^2 = 16$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 - 4x\right) = -4$

3) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$ 4) $\lim\limits_{x\to 0} 2^x = 1$

Решение. 1) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = -4 + \sqrt{16+\varepsilon}$. Тогаш, за секое $x \in D_f = \mathbf{R}$ такво што $|x-4| < \delta$, следува дека

$$\left|f\left(x\right) - 16\right| = \left|x^2 - 16\right| = \left|(x-4)(x+4)\right| < \delta(\delta+8) = \varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to 4} x^2 = 16$.

2) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Тогаш, за секое $x \in D_f = \mathbf{R}$ такво што $|x-2| < \delta$ следува дека

$$\left|f\left(x\right) + 4\right| = \left|x^2 - 4x + 4\right| = \left|\left(x-2\right)^2\right| = \left|x-2\right|^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 - 4x\right) = -4$.

3) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \varepsilon$. Тогаш, за секое $x \in D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$ такво што $|x+2| < \delta$ следува дека

$$\left|f\left(x\right) + 4\right| = \left|\frac{x^2-4}{x+2} + 4\right| = \left|x+2\right| < \delta = \varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$.

4) Нека ε е произволен позитивен реален број. Да избереме

$$\delta = \min\left\{-\log_2\left(1-\varepsilon\right), \log_2\left(1+\varepsilon\right)\right\}.$$

Ако $|x| < \delta,$ тогаш го добиваме двојното неравенство

$$1-\varepsilon = 2^{\log_2(1-\varepsilon)} \le 2^{-\delta} < 2^x < 2^{\delta} \le 2^{\log_2(1+\varepsilon)} = 1+\varepsilon,$$

од каде што следува дека $1-\varepsilon < 2^x < 1+\varepsilon,$ односно $-\varepsilon < 2^x - 1 < \varepsilon.$ Последното двојно неарвенство е еквивалентно со неравенството

$$\left|f(x)-1\right| = \left|2^x - 1\right| < \varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме дека $\lim\limits_{x\to 0} 2^x = 1.$ ●

5.3. Користејќи ја дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+3}{x+1} = 1$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{2x^2+5} = \frac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x^2-1} = 1$

Решение. 1) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $M = \frac{2}{\varepsilon}.$ Тогаш, за секое $x \in D_f$ такво што $x > M$ важи

$$\left|f(x)-1\right| = \left|\frac{x+3}{x+1} - 1\right| = \left|\frac{2}{x+1}\right| < \frac{2}{M+1} < \frac{2}{M} = \varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+3}{x+1} = 1.$

2) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $M = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.$

Тогаш, за секое $x \in D_f$ такво што $x > M$ важи

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x^2+3}{2x^2+5} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2(2x^2+5)}\right| < \frac{1}{4M^2+10} < \frac{1}{4M^2} = \varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^2+5}=\frac{1}{2}.$

3) Нека ε е произволен позитивен реален број. Треба да избереме $M>0$ така што за секое $x>M$ да важи неравенството

$$\left|f(x)-1\right|=\left|\frac{x+1}{x-1}-1\right|<\varepsilon.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенствата $\left|\frac{2}{x-1}\right|<\varepsilon$

и $\left|x-1\right|>\frac{2}{\varepsilon}.$ Бидејќи $\left|x-1\right|=x-1$ за $x>1,$ имаме дека

$$\left|f(x)-1\right|=\left|\frac{x+1}{x-1}-1\right|=\left|\frac{2}{x-1}\right|=\frac{2}{x-1}<\varepsilon,\text{ за секое } x>\frac{2}{\varepsilon}+1.$$

Според тоа, ако избереме $M=\frac{2}{\varepsilon}+1,$ тогаш за секое $x>M$ важи

$$\left|f(x)-1\right|=\left|\frac{x+1}{x-1}-1\right|<\varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1.$

4) Нека ε е произволен позитивен реален број. Треба да избереме $M>0$ така што за секое $x>M$ да важи неравенството

$$\left|f(x)-1\right|=\left|\frac{x^2+x}{x^2-1}-1\right|<\varepsilon.$$

Заради претпоставката дека $x>0,$ од неравенството

$$\left|f(x)-1\right|=\left|\frac{x^2+x}{x^2-1}-1\right|=\left|\frac{x^2+x-x^2+1}{x^2-1}\right|=\left|\frac{1}{x-1}\right|<\varepsilon$$

добиваме дека $|x-1| > \frac{1}{\varepsilon}$. Сега, може да претпоставиме дека $x > 1$. Во спротивно, од неравенството $|x-1| > \frac{1}{\varepsilon}$ се добива дека $x < 1 - \frac{1}{\varepsilon}$, што е контрадикција. Ако избереме $M = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ тогаш за секое $x \in D_f$ такво што $x > M$ важи

$$\left|f(x) - 1\right| = \left|\frac{x^2+x}{x^2-1} - 1\right| = \left|\frac{1}{x-1}\right| < \frac{1}{M-1} = \frac{1}{1+\frac{1}{\varepsilon}-1} = \varepsilon.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x^2-1} = 1$. ●

5.4. Користејќи ја дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{(x-2)^2} = \infty$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \ln|x-1| = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x}{(x+2)^2} = -\infty$

Решение. 1) Нека A е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \sqrt{\frac{2}{A}}$. Тогаш, за секое $x \in D_f$ такво што $|x-2| < \delta$ следува дека

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)^2} > \frac{2}{\delta^2} = A.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{(x-2)^2} = \infty$.

2) Нека A е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = e^{-A}$. Тогаш, за секое $x \in D_f$ такво што $|x-1| < \delta$ следува дека

$$f(x)=\ln|x-1|<\ln\delta=-A.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to 1}\ln|x-1|=-\infty.$

3) Нека A е произволен позитивен реален број. Да избиреме $\delta=\dfrac{-1+\sqrt{1+4A}}{A}$. Тогаш, за секое $x\in D_f$ такво што $|x+2|<\delta$ следува

$$f(x)=\frac{2x}{(x+2)^2}<2\frac{(\delta-2)}{\delta^2}=-A.$$

Од дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x}{(x+2)^2}=-\infty.$ ●

5.5. Користејќи ја дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2-2\right)=\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)=\infty$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-x^3\right)=-\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-1\right)=-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{-x}=\infty$

Решение. 1) Нека N е произволен позитивен реален број. Избираме $M=\sqrt{\dfrac{N+2}{3}}$. Тогаш, за секое $x\in D_f$ такво што $x>M$ следува дека

$$f(x)=3x^2-2>3M^2-2=N.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2-2\right)=\infty.$

2) Нека N е произволен позитивен реален број. Избираме $M=\sqrt{e^N}$. Тогаш, за секој $x\in D_f$ таков што $x<-M$ следува дека

$$f\left(x\right)=\ln(x^2+1)>\ln(M^2+1)>\ln M^2=N.$$

Од дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)=\infty.$

3) Нека N е произволен позитивен реален број. Да избереме $M=\sqrt[3]{2+N}$. Тогаш, за секое $x\in D_f$ такво што $x>M$ следува дека

$$f(x)=2-x^3<2-M^3=-N.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-x^3\right)=-\infty.$

4) Нека N е произволен позитивен реален број. Избираме $M=\sqrt[5]{N}$. Тогаш, за секое $x\in D_f$ такво што $x<-M$ следува дека

$$f\left(x\right)=x^5-1<-M^5-1<-M^5=-N.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-1\right)=-\infty.$

5) Нека $f\left(x\right)=3^{-x}$. За произволно $N>1$ избираме $M=-\log_3 N<0.$ Ако $x<M$, тогаш имаме дека

$$f(x)=\frac{1}{3^x}>\frac{1}{3^M}=3^{\log_3 N}=N.$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{-x}=\infty.$ ●

5.6. Провери дали постојат границите:

1) $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\sin\frac{1}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$

5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ каде што $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}.$

Решение. 1) Функцијата $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ нема граница во точката $a=0.$ Навистина, низите $\left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{(2n-1)\pi}\right\}$ конвергираат кон нулата, но, забележуваме дека

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi)=1 \quad \text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{(2n-1)\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos(2n-1)\pi=-1.$$

Според тоа, заклучуваме дека функцијата $f(x)$ нема граница во точката $a=0.$

2) Избираме две низи $x_n=1+\frac{1}{n\pi}$ и $y_n=1+\frac{2}{(4n+1)\pi}$. Тогаш имаме дека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=1$. За соодветните низи од вредности на функцијата имаме

$$f(x_n)=\sin\frac{1}{1+\frac{1}{n\pi}-1}=\sin(n\pi)=0,,$$

$$f(y_n)=\sin\frac{1}{1+\frac{2}{(4n+1)\pi}-1}=\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}=1.$$

Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0,$ додека $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=1,$ од каде што заклучуваме дека функцијата нема граница во точката $x=1.$

3) Избираме две низи $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = -\frac{1}{n}$. Тогаш $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. За соодветните низи од вредности на функцијата имаме дека $f(x_n) = 2^n$ $f(y_n) = 2^{-n}$. Според тоа, имаме дека $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ и $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0$, од каде што следува дека функцијата нема граница во точката $x = 0$.

4) Избираме две низи $x_n = n\pi$ и $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Тогаш имаме дека $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Соодветните низи од вредности на функцијата се $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$ и $f(x_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Оттука добиваме $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1$, од каде што заклучуваме дека функцијата нема граница кога x се стреми кон бесконечност.

5) За функцијата

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ги разгледуваме низите $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$. Двете низи конвергираат кон нулата. Но, забележуваме дека

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n} - 1) = -1.$$

Според тоа, заклучуваме дека функцијата $f(x)$ нема гранична вредност во точката $a = 0$. ●

5.2. Аритметички операции со гранични вредности

❖ Нека f и g се реални функции и нека $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B.$

1. Граничната вредност на збирот $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ е еднаква на збирот од граничните вредности на функциите:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$$

2. Граничната вредност на производот $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ е еднаква на производот од граничните вредности на функциите:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = A\cdot B$$

3. Ако $B\neq 0$, граничната вредност на количникот $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ е еднаква на количникот од граничните вредности на функциите:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}, \quad g(x)\neq 0.$$

❖ Ако постои $\varepsilon > 0$ така што важи $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ за секое $x\in(a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$, тогаш

$$A \leq \lim_{x\to a} h(x) \leq B\ .$$

Истите правила важат и ако $x\to\pm\propto$. Последното тврдење е познато како *сендвич теорема за граница на функција*. Како последица имаме дека ако $A=B=L$, тогаш имаме дека $\lim_{x\to a} h(x) = L.$

5.7 Пресметај $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}.$

Решение. Нека x_n е произволна низа таква што $x_n \neq -1$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = 2.$

Тогаш за соодветната низа вредности на функцијата $f(x_n) = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$, добиваме дека $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 1} = \frac{1}{3}.$ ●

Определи ги следните граници (5.8-5.37.)

5.8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^7 + 5x^6 + 4x^3}{x^7 + 2x^3}$

Решение. Со примена на својствата за граница на збир, производ и количник на функции, имаме дека

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 + 5x^6 + 4x^3}{x^7 + 2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(x^4 + 5x^3 + 4)}{x^3(x^4 + 2)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^4 + 5x^3 + 4)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^4 + 2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x^4 + \lim\limits_{x\to 0} 5x^3 + \lim\limits_{x\to 0} 4}{\lim\limits_{x\to 0} x^4 + \lim\limits_{x\to 0} 2} = \frac{0 + 0 + 4}{0 + 2} = 2. \; \bullet$$

5.9. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)} = \frac{1}{2}. \; \bullet$$

5.10. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 3x + 2}$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-5}{x-1} = -3. \; \bullet$$

5.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-6x+8}$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)}=0. \quad \bullet$$

5.12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$

Решение. Дадената функција е разлика на две функции кои немаат конечна граница во точката $x=1,$ па не можеме директно да го примениме правилото за збир на гранични вредности. Затоа претходно ќе го трансформираме аналитичкиот израз на функцијата. Добиваме

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}+\frac{1}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1. \quad \bullet$$

5.13. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a},\ a>0$

Решение. Со рационализација на аналитичкиот израз на функцијата имаме дека

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}{(x-a)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}. \quad \bullet$$

5.14. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}. \bullet$$

5.15. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[6]{a}}. \bullet$$

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}{x\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+5)-5}{x\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\,. \bullet$$

5.17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+a^2}-a}{\sqrt{x+b^2}-b}$

Решение. Со двојна рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+a^2}-a}{\sqrt{x+b^2}-b}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+a^2}-a\right)}{\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)}{\left(\sqrt{x+b^2}-b\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+b^2}+b\right)}{\left(\sqrt{x+b^2}+b\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(x+a^2-a^2\right)\left(\sqrt{x+b^2}+b\right)}{\left(x+b^2-b^2\right)\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{x+b^2}+b\right)}{x\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+b^2}+b}{\sqrt{x+a^2}+a}=\frac{b}{a}\,. \bullet$$

5.18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=\frac{1}{3}. \bullet$$

5.19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}},\quad a,b>0$

Решение. Со двојна рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+b}-\sqrt{b}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x+b}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{x+b}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{x+b}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+a-a)\left(\sqrt{x+b}+\sqrt{b}\right)}{(x+b-b)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+b}+\sqrt{b}\right)}{x\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+b}+\sqrt{b}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}\,.\ \bullet$$

5.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+m}-\sqrt{m}}{x^2},\quad m>0$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+m}-\sqrt{m}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+m}-\sqrt{m}\right)\left(\sqrt{x^2+m}+\sqrt{m}\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+m}+\sqrt{m}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+m}+\sqrt{m}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+m}+\sqrt{m}}=\frac{1}{2\sqrt{m}}\,.\ \bullet$$

5.21. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\ \bullet$$

5.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-\sqrt{x}\right)\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(x^2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x^2+\sqrt{x}}=3.\ \bullet$$

5.23. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}.\ \bullet$$

5.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-5x-10}{3x^2-9x+6}$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-5x-10}{3x^2-9x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{5}{x}-\frac{10}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{9}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{5}{x}-\frac{10}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{9}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10}{x^2}}{3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}=\frac{5}{3}.\ \bullet$$

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-1}{5x^2+x-1}$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-1}{5x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{5}.\ \bullet$$

5.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+4x-1}{x^3+3x^2-4x+2}$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+4x-1}{x^3+3x^2-4x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$\frac{=\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}=4.\ \bullet$$

5.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0. \bullet$$

5.28. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x-x^2-x^3)$

Решение. Непосредно добиваме дека

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x-x^2-x^3)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right)=\infty\cdot(-1)=-\infty\ . \bullet$$

5.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^3\left(9+\dfrac{6}{x}-\dfrac{12}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(9+\dfrac{6}{x}-\dfrac{12}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}{9+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^3}}=\frac{2}{9}.\ \bullet$$

5.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-1\right)=\infty.\ \bullet$$

5.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1+0}=1.\ \bullet$$

5.32. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}=-1.\ \bullet$$

5.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a-x)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0. \quad \bullet$$

5.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right)}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)+\frac{ab}{x}}{\sqrt{1+\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}}+1}=\frac{(a+b)+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ab}{x}}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+b}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ab}{x^2}}+1}=\frac{a+b}{2}. \quad \bullet$$

5.35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}{\sqrt{x^2+ax}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)}=$$

$$=\frac{a}{\left(\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}}+1\right)}=\frac{a}{2}. \quad \bullet$$

5.36. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right).$

Решение. Со рационализација добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)\left(\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}\right)}{\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-c)x+b-d}{\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-c)+\frac{b-d}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}}}=$$

$$=\frac{(a-c)+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b-d}{x}}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x^2}}+\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{d}{x^2}}}=\frac{a-c}{2}. \quad \bullet$$

5.3. Лева и десна граница

Нека е зададена функција $f: E\to F$ и нека $a,b\in\mathbf{R}$.

❖ Велиме дека b *е гранична вредност на функцијата* f *кога* x *се стреми кон* a *од десно*, ако за секое $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ така што $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon,$ за секое $x\in D_f$ такво што $0<x-a<\delta.$ Запишуваме

$$\lim_{x\to a+} f(x)=b.$$

❖ Велиме дека b *е гранична вредност на функцијата* f *кога* x *се стреми кон* a *од лево*, ако за секое $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ така што $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon,$ за секое $x\in D_f$ такво што $-\delta<x-a<0.$ Запишуваме

$$\lim_{x\to a-} f(x)=b.$$

❖ Велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $+\propto$ *кога* x *се стреми кон* a *од десно,* ако за секое $N>0$ постои $\delta>0$ така што $f(x)>N,$ за секое $x\in D_f$ такво што $0<x-a<\delta.$ Запишуваме

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\propto .$$

❖ Велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $+\propto$ *кога* x *се стреми кон* a *од лево*, ако за секое $N>0$ постои $\delta>0$ така што $f(x)>N,$ за секое $x\in D_f$ такво што $-\delta<x-a<0.$ Запишуваме

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\propto .$$

❖ Велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $-\propto$ *кога* x *се стреми кон* a *од десно*, ако за секое $N<0$ постои $\delta>0$ така што $f(x)<N,$ за секое $x\in D_f$ такво што $0<x-0<\delta.$ Запишуваме

$$\lim_{x\to a+} f(x)=-\propto .$$

❖ Велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $-\propto$ *кога* x *се стреми кон* a *од лево*, ако за секое $N<0$ постои $\delta>0$ така што $f(x)<N,$ за $x\in D_f$ такво што $-\delta<x-a<0.$ Запишуваме

$$\lim_{x\to a-} f(x)=-\propto .$$

❖ Функцијата f има гранична вредност во точката a ако и само ако постојат левата и десната граница, и тие се еднакви, односно

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x).$$

5.37. Нека е дадена функцијата

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\geq 1 \\ x+1, & x<1 \end{cases}.$$

Користејќи ја дефиницијата за граница на функција, докажи дека

1) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ 2) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

Решение. 1) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \varepsilon.$ Тогаш за секое $x \in D_f = \mathbf{R}$ такво што $1 - \delta < x < 1$ имаме дека

$$|f(x) - 2| = |x + 1 - 2| = |x - 1| = 1 - x < \delta = \varepsilon.$$

2) Нека ε е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$ За секое $x \in D_f = \mathbf{R}$ такво што $1 < x < 1 + \delta$ имаме дека

$$|f(x) - 1| = |2x - 1 - 1| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon. \bullet$$

5.38. Докажи дека $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0.$

Решение. Дадената функцијата $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ е дефинирана за секое $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$ Доволно е да ги разгледаме вредностите $x \in D_f$ за кои што $1 < x < 2.$ Тогаш имаме $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x-1)(x+1)} < \sqrt{3(x-1)}.$ Ако ставиме $\sqrt{3(x-1)} < \varepsilon$ добиваме дека $x - 1 < \frac{\varepsilon^2}{3}.$ Бидејќи истовремено треба да бидат задоволени условите $|x - 1| = x - 1 < 2 - 1 = 1$ и $x - 1 < \frac{\varepsilon^2}{3},$ избираме $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon^2}{3}\right\}.$

Според тоа, за произволно $\varepsilon > 0,$ ако избереме $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon^2}{3}\right\} > 0$ тогаш за секое x што го исполнува условот $1 < x < 1 + \delta,$ следува дека

$$|f(x) - 0| = \left|\sqrt{x^2 - 1} - 0\right| < \varepsilon.$$

Оттука заклучуваме дека $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}=0.$ ●

5.39. Нека е дадена функцијата

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le\frac{\pi}{2}\\ \left|x-\frac{\pi}{2}\right|, & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

Најди ги границите:

1) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$

Решение. 1) Имаме дека

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|=\pi \text{ и } \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\cos x=0.$$

Бидејќи левата и десната граница на функцијата $f(x)$ во точката $-\frac{\pi}{2}$ се различни, следува дека $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)$ не постои.

2) Бидејќи левата и десната граница на функцијата $f(x)$ во точката $\frac{\pi}{2}$ се еднакви, односно имаме дека

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x=0 \text{ и } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

заклучуваме дека $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=0.$ ●

5.40. Со помош на дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$,   2) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x} = \infty$,

3) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2}{4-x} = -\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$.

Решение. 1) Нека A е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \dfrac{1}{A}$. Тогаш, за секое $x \in D_f$ такво што $2 < x < 2+\delta$ следува дека

$$f(x) = \frac{1}{x-2} > \frac{1}{\delta} = A.$$

2) Нека A е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \dfrac{1}{A}$. Тогаш, за секое $x \in D_f$ такво што $1-\delta < x < 1$ следува дека

$$f(x) = \frac{1}{1-x} > \frac{1}{\delta} = A.$$

3) Нека A е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \dfrac{2}{A}$. Тогаш, за секое $x \in D_f$ такво што $4 < x < 4+\delta$ следува дека

$$f(x) = \frac{2}{4-x} < -\frac{2}{\delta} = -A.$$

4) Нека A е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = e^{-A}$. Тогаш, за секое $x \in D_f$ такво што $1-\delta < x < 1$ следува дека

$$f(x) = \ln(1-x) < \ln\delta = -A. \quad \bullet$$

Определи ги следните граници: (задачи 5.42 - 5.53)

5.41. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{x-2}$

Решение. Воведуваме смена $t = x - 2.$ Тогаш, ако $x \to 2^+$ имаме дека $t = x - 2 > 0,$ па затоа $t \to 0^+.$ Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2+t}{t} = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{2}{t} + 1 \right) = \infty. \ \bullet$$

5.42. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{x-2}$

Решение. Воведуваме смена $t = x - 2.$ Тогаш, ако $x \to 2^-$ имаме дека $t = x - 2 < 0,$ па затоа $t \to 0^-.$ Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x-2} = \lim_{t \to 0^-} \frac{2+t}{t} = \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{2}{t} + 1 \right) = -\infty. \ \bullet$$

5.43. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1}$

Решение. Воведуваме смена $t = x - 1.$ Тогаш, ако $x \to 1^+$ имаме дека $t = x - 1 > 0,$ па затоа $t \to 0^+.$ Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2+t}{t} = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{2}{t} + 1 \right) = \infty \ . \ \bullet$$

5.44. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1}$

Решение. Воведуваме смена $t = x - 1.$ Тогаш, ако $x \to 1^-$ имаме дека $t = x - 1 < 0,$ па затоа $t \to 0^-.$ Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{t \to 0^-} \frac{2+t}{t} = \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{2}{t} + 1 \right) = -\infty. \ \bullet$$

5.45. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

Решение. Ако $x \to 1^-$, тогаш $x-1<0$, па имаме дека $|x-1| = -(x-1)$. Оттука следува дека

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = -1. \bullet$$

5.46. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

Решение. Ако $x \to 1^+$, тогаш $x-1>0$, па имаме дека $|x-1| = x-1$. Оттука следува дека

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1. \bullet$$

5.47. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-|x|}{2x}$

Решение. Ако $x \to 0^-$, тогаш $x<0$, па имаме дека $|x| = -x$. Според тоа, наоѓаме дека

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-|x|}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x+x}{2x} = 1. \bullet$$

5.48. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-|x|}{2x}$

Решение. Ако $x \to 0^+$, тогаш $x>0$, па имаме дека $|x| = x$. Според тоа, наоѓаме дека

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x-|x|}{2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-x}{2x} = 0. \bullet$$

5.49. $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

Решение. Воведуваме смена $t=\frac{1}{x}$. Ако $x\to 0^+$ тогаш имаме $t\to\infty$. Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty\,.\ \bullet$$

5.50. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

Решение. Воведуваме смена $t=\frac{1}{x}$. Ако $x\to 0^-$ тогаш имаме $t\to -\infty$. Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0.\ \bullet$$

5.51. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Решение. Воведуваме смена $t=\frac{1}{x}$. Ако $x\to 0^-$ тогаш имаме $t\to -\infty$. Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to -\infty} \frac{1}{1+e^t} = 1.\ \bullet$$

5.52 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Решение. Воведуваме смена $t=\frac{1}{x}$. Ако $x\to 0^+$ тогаш имаме $t\to\infty$. Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+e^t} = 0. \bullet$$

5.53. Дали постои граница на функцијата $f(x)$ во дадена точка x_0?

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ во точката $x_0 = 1$

2) $f(x) = \dfrac{5}{(x-2)^3}$ во точката $x_0 = 2$

Решение. 1) За левата и десната граница на дадената функција во точката $x_0 = 1$ имаме дека

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = -2 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2.$$

Бидејќи левата и десната граница се различни, следува дека дадената функцијата нема граница во точката $x_0 = 1$.

2) За левата и десната граница на функцијата во точката $x_0 = 0$ имаме дека

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{5}{(x-2)^3} = -\infty \text{ и } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{5}{(x-2)^3} = \infty.$$

Бидејќи левата и десната граница се различни, следува дека дадената функцијата нема граница во точката $x_0 = 2$. ●

5.4. Асимптоти на функции

❖ *Асимптота* на графикот на функцијата f е секоја права p за која што важи

$$\lim_{x\to\propto}\left(f\left(x\right)-p\right)=0 \text{ или } \lim_{x\to-\propto}\left(f\left(x\right)-p\right)=0 .$$

❖ Ако $\left|f\left(x\right)\right|\to\propto$ кога $x\to a,$ тогаш асимптотата $x=a$ ја викаме *вертикална асимптота*.

❖ Ако асимптотата е паралелна со $x-$ оската, нејзината равенка е од облик $y=b,\ \ b\in\mathbf{R}$. Тогаш имаме дека $\left|f\left(x\right)-b\right|\to 0$ кога $x\to\propto$ (или $x\to-\propto$), односно важи барем еден од двата услови

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b .$$

Асимптотата $y=b$ ја викаме *хоризонтална асимптота.*

❖ *Коса асимптота* за функцијата f е правата $y=mx+n$ ако постои и е еднаква на нула барем една од границите

$$\lim_{x\to\propto}\left(f\left(x\right)-\left(mx+n\right)\right) \text{ или } \lim_{x\to-\propto}\left(f\left(x\right)-\left(mx+n\right)\right).$$

Да се определат асимптотите на следните криви: (задачи 5.54 - 5.64.)

5.54. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x-1}$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1,$$

следува дека правата $y=1$ е хоризонтална асимптота.

Заради

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \text{ и } \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \infty,$$

следува дека правата $x=1$ е вертикална асимптота.

Заради

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0,$$

следува дека дадената крива нема коса асимптота. ●

5.55. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty,$$

следува дека дадената крива нема хоризонтална асимптота.

Заради

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty \text{ и } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \infty,$$

следува дека правата $x=0$ е вертикална асимптота.

Бидејќи имаме дека

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1 \text{ и } k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1,$$

$$n_1 = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - k_1 x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = 0 \text{ и}$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - k_2 x \right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = 0,$$

заклучуваме дека правата $y = x$ е коса асимптота. ●

5.56. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2 - 4x + 3} = 0 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2 - 4x + 3} = 0,$$

следува дека правата $y = 0$ е хоризонтална асимптота.

Заради

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-3)(x-1)} = \infty \text{ и } \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-3)(x-1)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{(x-3)(x-1)} = -\infty \text{ и } \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x}{(x-3)(x-1)} = \infty$$

следува дека правите $x = 1$ и $x = 3$ се вертикални асимптоти.

Заради

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-3)(x-1)} = 0 \text{ и}$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-3)(x-1)} = 0,$$

заклучуваме дека дадената крива нема коса асимптота. ●

5.57. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 9}$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2 + 9} = \infty \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2 + 9} = -\infty,$$

следува дека дадената крива нема хоризонтална асимптота. Исто така дадената крива нема вертикална асимптота.

Заради

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \text{ и } k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1,$$

$$n_1 = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - k_1 x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0 \text{ и}$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - k_2 x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0,$$

заклучуваме дека правата $y = x$ е коса асимптота. ●

5.58. $f(x) = \dfrac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^2+1}$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^2+1} = \infty \text{ и}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^2+1} = -\infty$$

следува дека дадената крива нема хоризонтална асимптота.

Исто така дадената крива нема вертикална асимптота.

Заради

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^3+x} = 2 \text{ и } k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$n_1 = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - k_1 x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^2+1} - 2x \right) = 3 \text{ и}$$

$$n_1 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+3x^2+2x+4}{x^2+1}-2x\right) = 3$$

заклучуваме дека правата $y = 2x+3$ е коса асимптота. ●

5.59. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1} = \infty \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1} = \infty,$$

следува дека дадената крива нема хоризонтална асимптота.

Исто така дадената крива нема вертикална асимптота.

Заради

$$k_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 \text{ и } k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -1,$$

$$n_1 = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-k_1x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = 0 \text{ и}$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = 0,$$

заклучуваме дека правите $y = x$ и $y = -x$ се коси асимптоти. ●

5.60. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = 1 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = 1,$$

следува дека правата $y = 1$ е хоризонтална асимптота.

Дадената крива нема вертикална асимптота.

Заради

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = 0 \text{ и } k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

заклучуваме дека дадената крива нема коса асимптота. ●

5.61. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1-x^3} = -\infty \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x^3} = \infty,$$

следува дека дадената крива нема хоризонтална асимптота.

Исто така, дадената крива нема вертикална асимптота.

Заради

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = -1 \text{ и } k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1,$$

$$n_1 = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - k_1 x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right) = 0 \text{ и}$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - k_2 x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right) = 0,$$

заклучуваме дека правата $y = -x$ е коса асимптота. ●

5.62. $f(x) = e^{-x^2} + 2$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} + 2 = 2 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} + 2 = 2,$$

следува дека правата $y = 2$ е хоризонтална асимптота.

Дадената крива нема вертикална асимптота.

Заради

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}+2}{x} = 0 \text{ и } k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}+2}{x} = 0,$$

заклучуваме дека дадената крива нема коса асимптота. ●

5.63. $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-e^x} = 0 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-e^x} = 1$$

следува дека правите $y=0$ и $y=1$ се хоризонтални асимптоти.

Заради

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-e^x} = \infty \text{ и } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-e^x} = -\infty,$$

следува дека правата $x=0$ е вертикална асимптота.

Бидејќи

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\left(1-e^x\right)} = 0 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x\left(1-e^x\right)} = 0,$$

заклучуваме дека дадената крива нема коса асимптота. ●

5.64. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Решение. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

следува дека правата $y=1$ е хоризонтална асимптота.

Заради

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ и } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

следува дека правата $x=0$ е вертикална асимптота.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0,$$

заклучуваме дека дадената крива нема коса асимптота. ●

5.5. Непрекинати функции

❖ За функцијата $f: E \to F$ велиме дека е *непрекината* во точката $a \in D_f$, ако е исполнето $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Симболички,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D_f, \quad |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

❖ Функцијата f е *прекината* (*има прекин*) во точката a ако таа не е непрекината во a, односно ако важи

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0: \quad |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon .$$

❖ Можеме да класифицираме точно три вида прекини на функција.

1. Ако постои граница на функцијата кога $x \to a$, но таа е различна од $f(a)$, односно ако важи $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, или ако $a \notin D_f$, тогаш функцијата има *отконлив прекин* в точката a.

2. Ако левата и десната граница постојат но се различни меѓу себе, односно $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, тогаш функцијата има *прекин од прв вид во точката* a .

3. Ако барем една од границите $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ не постои, тогаш функцијата има *прекин од втор вид во точката* a .

5.64. Определи ги точките на прекин и нивниот вид за функциите:

1) $f(x)=(\operatorname{sgn} x)^2$ 2) $f(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$ 3) $f(x)=[x]$

Решение. 1) Дадената функција може да ја запишеме во облик

$$f(x)=(\operatorname{sgn} x)^2=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Таа е дефинирана на целата реална права. При тоа, таа е константа на множеството $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ од каде следува дека таа е непрекината во секоја точка $x\neq 0.$

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\operatorname{sgn} x)^2=1 \text{ и } f(0)=0$$

заклучуваме дека функцијата има отклонлив прекин од прв вид во точката $x=0.$

2) Дадената функција може да ја запишеме во облик

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{cases}1, & x>1\\ 0, & x=1.\\ -1, & x<1\end{cases}$$

Таа е дефинирана на целата реална права. При тоа, таа е константа на множествата $(-\infty,1)\cup(1,\infty),$ од каде што следува дека таа е непрекината во секоја точка $x\neq 1$.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\operatorname{sgn}(x-1)=-1 \text{ и } \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\operatorname{sgn}(x-1)=1,$$

може да заклучиме дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=1$, кој што не може да се отклони.

3) Дадената функција може да ја запишеме во облик

$$f(x)=[x]=\begin{cases} n-1, & n-1\leq x<n \\ n, & n\leq x<n+1 \end{cases},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Дадената функција е дефинирана на целата реална права. При тоа, таа е константа на множествата $(n-1,\, n),\ n\in\mathbf{Z},$ од каде следува дека таа е непрекината во секоја точка $x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$.

Нека $n\in\mathbf{Z}$. Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to n^-} f(x)=\lim_{x\to n^-}[x]=n \text{ и } \lim_{x\to n^+} f(x)=\lim_{x\to n^+}[x]=n+1,$$

може да заклучиме дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=n,\ n\in\mathbf{Z},$ кој што не е отклонлив. ●

5.65. Определи ги точките на прекин и нивниот вид за функциите:

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x<0 \\ (x+1)^2 & 0\leq x\leq 2 \\ 1-x, & x>2 \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|-x}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Решение. 1) Дадената функција е дефинирана на целата реална права. Таа е непрекината во секоја точка од множеството $\mathbf{R}\setminus\{0,2\}$, како збир, разлика, производ и количник од непрекинати функции.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x-1}=-1 \text{ и } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)^2=1,$$

може да заклучиме дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=0,$ кој што не може да се отклони.

Понатаму, заради

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+1)^2=9 \text{ и } \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(1-x)=-1$$

следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=2,$ којшто не може да се отклони.

2) Дадената функција може да ја презапишеме во облик

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{x}, & x<0\\ 0, & x\geq 0\end{cases}.$$

Таа е дефинирана на целата реална права. Притоа, таа е константа на интервалот $(0,+\infty),$ од каде заклучуваме дека е непрекината во секоја точка од споменатиот интервал. Исто така, функцијата е непрекината во секоја точка од интервалот $(-\infty,0),$ како количник од непрекинати функции.

Понатаму, заради

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{x^2} = \infty$$

следува дека функцијата има бесконечен прекин од втор вид во точката $x=0$.

3) Дадената функција може да ја презапишеме во облик

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x^2}, & x \in (0,1) \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Таа е дефинирана на целата реална права и е непрекината во секоја точка од множеството $R \setminus \{0,1\}$, како количник од непрекинати функции.

Понатаму, заради

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

следува дека функцијата има бесконечен прекин од втор вид во точката $x=0$. Бидејќи

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2} = 1 \text{ и } \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x^2} = -1,$$

следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=1$, кој што не може да се отклони. ●

5.66. Докажи дека следните функции се непрекинати во секоја точка од својата дефинициона област.

1) $f(x)=3x^5+\dfrac{1}{x^3}$ 2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-6x^3}$ 4) $f(x)=\cos\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$

Решение. 1) Функцијата е непрекината во секоја точка од дефиниционата област $D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, како збир, производ и количник на непрекинати функции.

2) Функцијата е непрекината во секоја точка од $D_f=\mathbf{R}$, како збир, количник и композиција на непрекинати функции.

3) Функцијата е непрекината во секоја точка од $D_f=\mathbf{R}$, како разлика, производ и композиција на непрекинати функции.

4) Функцијата е непрекината во секоја точка од $D_f=[-1,1]$, како разлика и композиција на непрекинати функции. ●

5.67. Испитај ја непрекинатоста на композициите $f\circ g$ и $g\circ f$, во секоја точка од дефиниционата област.

1) $f(x)=\operatorname{sgn}x,\qquad g(x)=1+x^2$

2) $f(x)=\operatorname{sgn}x,\qquad g(x)=1+x$

Решение. 1) Имаме дека

$f\circ g(x)=f(g(x))=\operatorname{sgn}\left(1+x^2\right)=1,$ за секое $x\in D_{f\circ g}=\mathbf{R},$ и

$g\circ f(x)=g(f(x))=1+(\operatorname{sgn}x)^2=\begin{cases}2, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases},$ за секое $x\in D_{g\circ f}=\mathbf{R}.$

Функцијата $f\circ g$ е непрекината во секоја точка од $D_{f\circ g}$.

Функцијата $g\circ f$ е непрекината во секоја точка од $D_{g\circ f}\setminus\{0\}$.

Заради

$$\lim_{x\to 0^-} g\circ f(x)=2,\quad \lim_{x\to 0^+} g\circ f(x)=2 \text{ и } g\circ f(0)=1,$$

следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=0$ којшто може да се отклони.

2) Имаме дека

$$f\circ g(x)=f(g(x))=\operatorname{sgn}(1+x)=\begin{cases}1, & x>-1\\ 0, & x=-1,\\ -1 & x<-1\end{cases} \text{ за секое } x\in D_{f\circ g}=\mathbf{R},$$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=1+\operatorname{sgn} x=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x=0,\\ 2, & x>0\end{cases} \text{ за секое } x\in D_{g\circ f}=\mathbf{R}.$$

Функцијата $f\circ g$ е непрекината во секоја точка од $D_{f\circ g}\setminus\{-1\}$.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to -1^-} f\circ g(x)=-1 \text{ и } \lim_{x\to -1^+} f\circ g(x)=1$$

може да заклучиме дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=-1$, којшто не може да се отклони.

Функцијата $g\circ f$ е непрекината во секоја точка од $D_{g\circ f}\setminus\{0\}$.

Заради

$$\lim_{x\to 0^-} g\circ f(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to 0^+} g\circ f(x)=2$$

следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=0$ којшто не може да се отклони. ●

5.68. Најди ги точките на прекин и нивниот вид за дадените функции:

1) $f(x)=\begin{cases} 1, & x<-1 \\ 1-x^2, & -1\le x\le 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\le x<1 \\ 1, & x=1 \\ x-1, & 1<x\le 4 \end{cases}$

Решение. 1) Функцијата е непрекината во секоја точка од $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, како збир и разлика на непрекинати функции.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=1 \text{ и } \lim_{x\to -1^+} f(x)=0$$

може да заклучиме дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=-1$ којшто не може да се отклони.

Заради

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to 1^+} f(x)=2$$

следува дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=1,$ којшто не е отклонлив.

2) Функцијата е непрекината во секоја точка од $[-1,4]\setminus\{1\},$ како разлика на непрекинати функции.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2 \text{ и } \lim_{x\to 1^+} f(x)=0$$

може да заклучиме дека функцијата има прекин од прв вид во точката $x=1,$ којшто не е отклонлив. ●

5.69. Најди ги вредностите на реалниот параметер $a,$ за којшто дадената функција е непрекината:

1) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$

Решение. 1) Функцијата е непрекината во секоја точка од множеството $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, како количник и композиција од непрекинати функции.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

следува дека функцијата е непрекината во точката $x=0$ за $a=0$.

2) Функцијата е непрекината во секоја точка од множеството $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, како количник и композиција од непрекинати функции.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n-1}{x}=n,$$

следува дека функцијата е непрекината во точката $x=0$ за $a=n$. ●

5.70. Провери дали постои реален број a таков што дадената функција е непрекината во секоја точка од дефиниционата област:

1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} ax^2+1, & x>0 \\ -x, & x\leq 0 \end{cases}$

Решение. 1) Функцијата е непрекината во секоја точка од множеството $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, како производ, количник и композиција од непрекинати функции.

Од неравенството $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq |x|$ следува дека

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0,$$

од каде што заклучуваме дека функцијата е непрекината во точката $x=0$ за $a=0$.

2) Функцијата е непрекината во секоја точка од множеството $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, како збир и производ од непрекинати функции.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0^+}(ax^2+1)=1,$$

можеме да заклучиме дека независно од вредноста на a, функцијата има прекин во точката $x=0$. ●

5.71. За кои реални броеви a и b функцијата

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & x\le 0\\ ax+b, & 0<x<1\\ \sqrt{x}, & x\ge 1\end{cases}$$

е непрекината во секоја точка од дефинициoната област?

Решение. Функцијата е непрекината во секоја точка од множеството $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, како збир, разлика, производ и композиција од непрекинати функции.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to 0^-}(x-1)^3=-1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b,$$

следува дека функцијата е непрекината во точката $x=0$ за $b=-1$. Заради

$$\lim_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1,$$

следува дека функцијата е непрекината и во точката $x=1$ за $a+b=1,$ односно $a=2.$ ●

5.72. Дополни ја дефиницијата за функцијата

1) $f\left(x\right)=\sin x\cos\frac{1}{x}$ 2) $g\left(x\right)=\sin^2 x\cos\frac{1}{x}$

за да биде непрекината во точката $x=0.$

Решение. 1) Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to0} f\left(x\right)=\lim_{x\to0}\sin x\cos\frac{1}{x}=0,$$

дадената функција ќе биде непрекината за $g\left(0\right)=0$.

2) Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to0} g\left(x\right)=\lim_{x\to0}\sin^2 x\cos\frac{1}{x}=0,$$

дадената функција ќе биде непрекината за $f\left(0\right)=0$. ●

5.73. Провери дали е непрекината функцијата

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-2a, & x\leq -a^2\\ \dfrac{2x}{a}, & |x|<a^2\\ 2a, & x\geq a^2\end{cases}$$

Решение. Дадената функцијата е непрекината на секој од интервалите $(-\infty,-a^2),$ $(-a^2,a^2)$ и $(a^2,\infty).$

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to(-a^2)^-} f(x)=\lim_{x\to-a^2}(-2a)=-2a \text{ и } \lim_{x\to(-a^2)^+} f(x)=\lim_{x\to-a^2}\frac{2x}{a}=-2a,$$

следува дека функцијата е непрекината во точката $x=-a^2$.

Функцијата е непрекината и во точката $x=a^2$, бидејќи важи

$$\lim_{x\to(a^2)^-} f(x)=\lim_{x\to a^2}\frac{2x}{a}=2a \text{ и } \lim_{x\to(a^2)^+} f(x)=\lim_{x\to a^2}2a=2a,$$

Значи, функцијата е непрекината во секоја точка од $\mathbf{R}$. ●

5.74. Да се определат a и b така што функцијата

$$f(x)=\begin{cases}-2\sin x, & x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ a\sin x+b, & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x, & x\ge \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

да биде непрекината на целата реална права.

Решение. Дадената функцијата е непрекината на секој од интервалите $(-\infty,-\frac{\pi}{2})$ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2},\infty)$.

За да ја провериме непрекинатоста на функцијата во точките $x=-\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{\pi}{2}$, ќе ги пресметаме левите и десните граници на функцијата во тие точки. Имаме дека

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(-2\sin x)=2,$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b)=-a+b,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b)=a+b,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$

Функцијата е непрекината во точките $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$, ако, и само ако важи $-a+b=2$ и $a+b=0$, односно $a=-1$ и $b=1$. ●

5.6. Гранична вредност на некои функции – специјални граници

1. $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}$ **2.** $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$ **3.** $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$

4. $\boxed{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$ **5.** $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$ **6.** $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}}$

7. $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1}$ **8.** $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$

Определи ги следните граници: (задачи 5.75. - 5.109.)

5.75. $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=ax$, добиваме дека $t\to0$ кога $x\to0$. Тогаш имаме дека

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to0}\frac{a\sin ax}{ax} = a\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax} = a\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = a\cdot1 = a. \bullet$$

5.76. $\lim_{x\to0}\frac{x}{\mathrm{tg}2x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=2x$, имаме дека $t\to0$ кога $x\to0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{tg}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{2\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{t\to 0}\cos t}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}.\ \bullet$$

5.77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$

Решение. Ако воведеме нови променливи $t=ax$ и $u=bx$, имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$, и $u\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\dfrac{\sin ax}{ax}}{b\dfrac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\frac{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}}{\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}}=\frac{a\cdot 1}{b\cdot 1}=\frac{a}{b}.\ \bullet$$

5.78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}kx}{\sin x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=kx$, имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}kx}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin kx}{\cos kx}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{k\dfrac{\sin kx}{kx}}{\cos kx\cdot\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{k\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos kx\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=$$

$$=\frac{k\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\cos t\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{k\cdot 1}{1\cdot 1}=k\,.\ \bullet$$

5.79. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}$

Решение. Непосредно наоѓаме дека

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1.\ \bullet$$

5.80. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}$

Решение. Непосредно наоѓаме дека

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1. \quad \bullet$$

5.81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{\sin x}}$

Решение. Имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}}=\frac{0}{1}=0. \quad \bullet$$

5.82. $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}5x$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=5x$, имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}x\operatorname{ctg}5x=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x}{\dfrac{5\sin 5x}{5x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{\dfrac{5\sin t}{t}}=\frac{1}{5}. \quad \bullet$$

5.83. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}ax\cdot\operatorname{ctg}bx\right)$

Решение. Ако воведеме нови променливи $t=ax$ и $u=bx$, имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$, и $u\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}ax\cdot\operatorname{ctg}bx=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax\cdot\cos bx}{\cos ax\cdot\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\dfrac{\sin ax}{ax}\cos bx}{b\cos ax\dfrac{\sin bx}{bx}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{t\to 0} a\dfrac{\sin t}{t}\cos u}{\lim\limits_{u\to 0} b\cos t\dfrac{\sin ux}{u}}=\frac{a}{b}.\ \bullet$$

5.84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\dfrac{x}{2}$, имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш со примена на тригонометриски трансформации добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.\ \bullet$$

5.85. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\dfrac{x}{2}$, имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш со примена на тригонометриски трансформации добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\lim_{t\to 0}\sqrt{\frac{t^2}{2\sin^2 t}}=\sqrt{2}.\ \bullet$$

5.86. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\dfrac{x-a}{2}$, имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш со примена на тригонометриски трансформации добиваме дека

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=$$

$$=-\lim_{x\to a}\sin\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=-\sin a\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=$$

$$=-\sin a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=-\sin a\cdot 1=-\sin a. \bullet$$

5.87. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\text{tg}x-\text{tg}a}{x-a}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=x-a$, имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш со примена на тригонометриски трансформации добиваме дека

$$\lim_{x\to a}\frac{\text{tg}x-\text{tg}a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin a}{\cos a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin x\cos a-\sin a\cos x}{(x-a)\cos x\cos a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x\cos a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\cos x\cos a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 a}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{\cos^2 a}. \bullet$$

5.88. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=x-\pi$, имаме дека $t\to 0$ кога $x\to\pi$. Тогаш со примена на тригонометриски трансформации добиваме дека

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{(x-\pi)(x+\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\pi)}{t(t+2\pi)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos\pi+\cos t\sin\pi}{t\left(t+2\pi\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t\left(t+2\pi\right)}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+2\pi}=-\frac{1}{2\pi}. \bullet$$

5.89. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\frac{1}{x}$ имаме дека $t\to 0$ кога $x\to\infty$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1. \bullet$$

5.90. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\frac{x}{5}$ имаме дека $t\to\infty$ кога $x\to\infty$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{5}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{5}=e^{5}. \bullet$$

5.91. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\frac{x}{k}$ имаме дека $t\to\infty$ кога $x\to\infty$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{kt}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{k}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{k}=e^{k}. \bullet$$

5.92. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\dfrac{x}{2}$ имаме дека $t\to\infty$ кога $x\to\infty$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}\cdot 1=e^{2}.\ \bullet$$

5.93. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=x-3$ имаме дека $t\to\infty$ кога $x\to\infty$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+3}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3}=e\cdot 1=e.\ \bullet$$

5.94. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\dfrac{x-3}{3}$ имаме дека $t\to\infty$ кога $x\to\infty$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3+3}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-3}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3\cdot t+3}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3\cdot t+3}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3}=e^3.\ \bullet$$

5.95. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\frac{x-3}{5}$ имаме дека $t\to\infty$ кога $x\to\infty$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-5+5}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^x=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5\cdot t+3}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3}=e^5.\ \bullet$$

5.96. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\frac{2x-1}{4}$ имаме дека $t\to\infty$ кога $x\to\infty$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3-4+4}{2x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}=e^2.\ \bullet$$

5.97. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t = x+1$ имаме дека $t \to \infty$ кога $x \to \infty$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{1+x}-1\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{x+1-1} = \frac{1}{e} \quad \bullet$$

5.98. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)^x$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t = -\frac{x+1}{2}$ добиваме дека $t \to -\infty$ кога $x \to \infty$. Тогаш имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{1+x}-1\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{1+x}\right)^x =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-(2t+1)} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}\cdot\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}\cdot\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = \left[\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2}\cdot\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{e^2}. \quad \bullet$$

5.99. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Ако воведеме нова променлива $t = \frac{1}{2x}$ имаме дека $t \to \infty$ кога $x \to 0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2. \quad \bullet$$

5.100. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\right)^{\frac{1}{x}}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=-\dfrac{1}{x}$ имаме дека $t\to-\infty$ кога $x\to 0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\left[\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-1}=\frac{1}{e}.\ \bullet$$

5.101. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=x-1$ имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 1$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.\ \bullet$$

5.102. $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\frac{1}{x-1}}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=x+1$ имаме дека $t\to 0$ кога $x\to -1$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to -1}(2+x)^{\frac{1}{x+1}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.\ \bullet$$

5.103. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\dfrac{1}{2x}$ имаме дека $t\to\infty$ кога $x\to 0$. Тогаш заради непрекинатоста на логаритамската функција добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}\right)=$$

$$= \ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\right] = \ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^2 = \ln e^2 = 2. \bullet$$

5.104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\dfrac{1}{kx}$ имаме дека $t\to\infty$ кога $x\to 0$. Тогаш заради непрекинатоста на логаритамската функција добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}\right) =$$

$$= \ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{kt}\right] = \ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^k = \ln e^k = k. \bullet$$

5.105. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\dfrac{x}{a}$ имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)}{a\dfrac{x}{a}} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{at} = \frac{1}{a}. \bullet$$

5.106. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\dfrac{x-e}{e}$ имаме дека $t\to 0$ кога $x\to e$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{et}=\frac{1}{e}. \quad \bullet$$

5.107. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=\sin x$ имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1. \quad \bullet$$

5.108. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_2(1+3x)}{x}$

Решение. Ако воведеме нова променлива $t=3x$ имаме дека $t\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+3x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_2(1+t)}{\frac{t}{3}}=3\lim_{t\to 0}\frac{\log_2(1+t)}{t}=3. \quad \bullet$$

5.109. Најди ги вредностите на реалниот параметар a, за кои што дадената функција е непрекината во секоја точка од дефиниционата област.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}.$$

Решение. Функцијата е непрекината во секоја точка од множеството $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, како разлика и количник од непрекинати функции.

Бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

следува дека функцијата е непрекината во точката $x=0$ за $a=1$. ●

5.7. Задачи за самостојна работа

1. Користејќи ја дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-x^3\right)=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=2$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^4}=\infty$

2. Провери дали постојат границите:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

Најди ги следните граници: (задачи 3. - 16.)

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3+x+1}$ **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^2+x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$ **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+px+q}-x\right)$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$ **8.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$ **10.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+16}-4}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+4}-2}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+8}-2}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x}}{x+x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

Најди ги границите: (задачи 17. - 44.)

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{\sin x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos a}{x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$

22. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$

23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)tgx$

24. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$

25. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^x$

26. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{k}{mx}\right)^x, \quad k,m\in \mathbf{N}$

27. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{4}{3x}\right)^{x+5}$

28. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{3x+1}\right)^x$

29. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{4}{3x}\right)^x$

30. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)^{x+2}$

31. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^x$

32. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{x+1}$

33. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

34. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{4}{x}}$

35. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$

36. $\lim\limits_{x\to \infty}x\left(\ln(x+a)-\ln x\right)$

37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(a+x)-\log a}{x}$

38. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\log x-\log a}{x-a}$

39. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\log x-1}{x-10}$

40. $\lim\limits_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)$

41. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$

42. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

43. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{3x}-1}{2x}$

44. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^{ax}-10^{bx}}{x}$

Најди ги следните еднострани граници: (задачи 45. - 46.)

45. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

46. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

47. Дали постои граница на функцијата

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x\le 1\\ 3x-5, & x>1\end{cases}$$

во точката $x_0=1$?

Најди ги асимптотите на следните криви: (задачи 48. - 53.)

48. $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

49. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

50. $f(x)=\frac{4x^3-3x^2+2x-1}{x^2-x+1}$

51. $f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

52. $f(x)=1+e^{-x}$

53. $f(x)=x-1+e^{-x}$

6. ИЗВОДИ НА ФУНКЦИИ

6.1. Дефиниција на извод на функција

❖ Функцијата $y=f(x)$ е *диференцијабилна* во точка $x\in(a,b)$ ако постои граничната вредност

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Границата (ако постои) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ се вика *прв извод* на функцијата $y=f(x)$ во точката x и се означува со y' или со $f'(x)$.

Ако граничната вредност не постои, тогаш велиме дека функцијата не е диференцијабилна во точката x.

❖ *Лев извод на функција* f во точка x се нарекува левата гранична вредност (ако постои)

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

❖ *Десен извод на функција* f во точка x се нарекува граничната вредност (ако постои)

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

❖ Функција f има извод во точката x ако и само ако постојат левиот и десниот извод на функцијата во точката x и тие се еднакви, односно важи условот $f'_-(x) = f'_+(x)$. Тогаш, имаме дека

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x).$$

6.1. За функцијата $f(x) = x^2 - 5x + 6$ да се определат $\Delta x, \Delta y$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ за соодветна промена на аргументот:

1) од $x_1 = 1$ до $x_2 = 1{,}1$ 2) од $x_1 = 3$ до $x_2 = 2$

Решение. 1) Според условите во задачата имаме дека

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$$

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2^2 - 5x_2 + 6\right) - \left(x_1^2 - 5x_1 + 6\right) =$$

$$= 1{,}1^2 - 5 \cdot 1{,}1 + 6 - \left(1^2 - 5 \cdot 1 + 6\right) = -0{,}29 \quad \text{и}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{0{,}29}{0{,}1} = -2{,}9.$$

2) Со аналогна постапка добиваме дека

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 3 = -1$$

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2^2 - 5x_2 + 6\right) - \left(x_1^2 - 5x_1 + 6\right) =$$

$$= \left(2^2 - 5 \cdot 2 + 60\right) - \left(3^2 - 5 \cdot 3 + 60\right) = 0 \text{ и}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{-1} = 0. \quad \bullet$$

6.2. Определи го нараснувањето Δy на следните функции за соодветна промена на аргументот:

1) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1, \;\; x = 1, \;\; \Delta x = 0{,}1$

2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 - 1}, \;\; x = 2, \;\; \Delta x = 0{,}2$

3) $f(x) = \log x,$ од $x_1 = 1$ до $x_2 = 1000$

Решение. 1) Според условите во задачата имаме дека

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f(1 + 0{,}1) - f(1) = f(1{,}1) - f(1) = 5{,}752 - 5 = 0{,}752.$$

2) Слично, добиваме дека

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f(2 + 0{,}2) - f(2) = f(2{,}2) - f(2) = \frac{5{,}4}{3{,}84} - \frac{5}{3} = -\frac{25}{96}.$$

3) Со аналогна постапка добиваме дека

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f(1000) - f(1) = \log 1000 - \log 1 = \log 10^3 = 3. \quad \bullet$$

6.3. Ако променливата x добива нараснување $\Delta x,$ определи го нараснувањето на функцијата:

1) $f(x) = ax + b$ 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ 3) $f(x) = a^x$

Решение. 1) Имаме дека

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a(x + \Delta x) + b - (ax + b) = a\Delta x$$

2) Имаме дека

$$\Delta y = f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=$$

$$=\left[a(x+\Delta x)^2+b\left(x+\Delta x\right)+c\right]-\left[ax^2+bx+c\right]=$$

$$=2ax\Delta x+a\Delta x^2+b\Delta x=\Delta x\left(2ax+a\Delta x+b\right)$$

3) Имаме дека

$$\Delta y = f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\left(a^{\Delta x}-1\right). \bullet$$

Најди лев и десен извод на следните функции: (задачи 6.4. - 6.19.)

6.4. $f\left(x\right)=x\left|x\right|$, во точката $x=0$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f\left(0+\Delta x\right)-f\left(0\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x\left|\Delta x\right|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\left|\Delta x\right|=0.$$

За десниот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f\left(0+\Delta x\right)-f\left(0\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x\left|\Delta x\right|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\Delta x=0. \bullet$$

6.5. $f\left(x\right)=\left|3x-6\right|$, во точката $x=2$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=2$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f\left(2+\Delta x\right)-f\left(2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{3\left|\Delta x\right|}{\Delta x}=-3.$$

За десниот извод на функцијата во точката $x = 2$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{3|\Delta x|}{\Delta x}=3. \bullet$$

6.6. $f(x)=x^2-2|x|+1,$ во точката $x=0$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(\Delta x)^2-2|\Delta x|}{\Delta x}=2.$$

За десниот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^2-2|\Delta x|}{\Delta x}=-2. \bullet$$

6.7. $f(x)=\sqrt[3]{x},$ во точката $x=0$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\infty.$$

За десниот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\infty. \bullet$$

6.8. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$ во точката $x=0$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\dfrac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=1.$$

За десниот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\dfrac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0.$$ ●

6.9. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, во точката $x=0$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x}=0.$$

За десниот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x}=\infty.$$ ●

6.10. $f(x)=\begin{cases} (x-2)arctg\dfrac{1}{x-2}, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$, во точката $x=2$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=2$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x arctg\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-} arctg\frac{1}{\Delta x}=-\frac{\pi}{2}.$$

За десниот извод на функцијата во точката $x=2$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x arctg\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+} arctg\frac{1}{\Delta x}=\frac{\pi}{2}.$$ ●

6.11. $f(x)=|\ln x|$, во точката $x=1$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=1$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\ln(1+\Delta x)|}{\Delta x}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=-1.$$

За десниот извод на функцијата во точката $x=1$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\ln(1+\Delta x)|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=1.$$ ●

6.12. $f(x)=\ln|x|$, во точката $x=1$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=1$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\ln|1+\Delta x|}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=\lim_{t\to 0}\ln(1-t)^{\frac{1}{-t}}=\ln\lim_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{-t}}=\ln\frac{1}{e}=-1,$$

каде што заменивме $t=-\Delta x$.

За десниот извод на функцијата во точката $x=1$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln|1+\Delta x|}{|\Delta x|}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}=\ln\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\ln e=1,$$

каде што заменивме $t=\Delta x$. ●

6.13. $f(x)=|\sin 2x|,$ во точката $x=0$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2|\sin\Delta x||\cos\Delta x|}{|\Delta x|}=-2.$$

За десниот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2|\sin\Delta x||\cos\Delta x|}{|\Delta x|}=2.\ ●$$

6.14. $f(x)=|tgx|,$ во точката $x=0$

Решение. За левиот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|tg\Delta x|}{\Delta x}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\sin\Delta x|}{|\Delta x|}\frac{1}{|\cos\Delta x|}=-1.$$

За десниот извод на функцијата во точката $x=0$ имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|tg\Delta x|}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\sin\Delta x|}{|\Delta x|}\frac{1}{|\cos\Delta x|}=1.\ \bullet$$

Најди извод по дефиниција на следните функции (задачи 6.15. - 6.19.)

6.15. $f(x)=3|x+1|,$ во точката $x=-2$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција во точка имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3|-2+\Delta x+1|-3|-2+1|}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(1-\Delta x)-3}{\Delta x}=-3.\ \bullet$$

6.16. $f(x)=\dfrac{1}{x},$ во точката $x=-1$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција во точка имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{-1+\Delta x}+1}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\Delta x - 1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x - 1} = -1. \bullet$$

6.17. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, во точката $x = 1$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција во точка имаме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(1+\Delta x)^2} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x(\Delta x + 1)^2} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2+\Delta x}{(\Delta x + 1)^2} = -2. \bullet$$

6.18. $f(x) = 1 + \ln 2x,$ во точката $x = 2$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција во точка имаме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + \ln(4 + 2\Delta x) - 1 - \ln 4}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{2\Delta x}{2}} = \frac{1}{2} \ln \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right)^{\frac{2}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}. \bullet$$

6.19. $f(x) = 2\sin 3x,$ во точката $x = \frac{\pi}{6}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција во точка имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+\Delta x\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\Delta x\right)-2}{\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(3\Delta x)-1}{\Delta x}=$$

$$=-4\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\frac{3\Delta x}{2}\cdot\frac{2}{3}}=$$

$$=-6\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\frac{3\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)=-6\cdot 1\cdot 0=0.$$

Најди извод по дефиниција на следните функции: (задачи 6.20. - 6.32.)

6.20. $f(x)=ax^2+bx+c$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2ax\Delta x+a\Delta x^2+b\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2ax+a\Delta x+b)}{\Delta x}=$$

$$=2ax+b.$$ ●

6.21. $f(x)=3x-x^2$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-x^2-2x\Delta x-\Delta x^2+3x+3\Delta x+x^2-3x}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x\Delta x - \Delta x^2 + 3\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(-2x - \Delta x + 3\right)}{\Delta x} = -2x + 3. \; \bullet$$

6.22. $f\left(x\right) = \sqrt[3]{x}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{\left(x + \Delta x\right)^2} + \sqrt[3]{\left(x + \Delta x\right)x} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{\Delta x\left(\sqrt[3]{\left(x + \Delta x\right)^2} + \sqrt[3]{\left(x + \Delta x\right)x} + \sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{\left(x + \Delta x\right)^2} + \sqrt[3]{\left(x + \Delta x\right)x} + \sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(x + \Delta x\right)^2} + \sqrt[3]{\left(x + \Delta x\right)x} + \sqrt[3]{x^2}\right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

●

6.23. $f\left(x\right) = \dfrac{p}{x}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{p}{x + \Delta x} - \frac{p}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-p\Delta x}{\Delta x\left(x + \Delta x\right)x} = -\frac{p}{x^2}. \; \bullet$$

6.24. $f\left(x\right) = \dfrac{2}{x^3}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2}{\left(x+\Delta x\right)^3}-\frac{2}{x^3}}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6x^2+6x\Delta x+2\Delta x^2}{x^3\left(x+\Delta x\right)^3}=-\frac{6}{x^4}. \bullet$$

6.25. $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+1}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x+\Delta x-1}{x+\Delta x+1}-\frac{x-1}{x+1}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x\left(x+\Delta x+1\right)\left(x+1\right)}=$$

$$=\frac{2}{\left(x+1\right)^2}. \bullet$$

6.26. $f\left(x\right)=e^{ax+b}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{a(x+\Delta x)+b}-e^{ax+b}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{ae^{ax+b}\left(e^{a\Delta x}-1\right)}{a\Delta x}=$$

$$=ae^{ax+b}. \bullet$$

6.27. $f\left(x\right)=\sqrt{ax+b}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{a(x+\Delta x)+b}-\sqrt{ax+b}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{a(x+\Delta x)+b}+\sqrt{ax+b}\right)}=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}. \bullet$$

6.28. $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{a(x+\Delta x)+b}-\dfrac{1}{ax+b}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-a\Delta x}{\Delta x\big(a(x+\Delta x)+b\big)(ax+b)}=-\frac{a}{(ax+b)^2}.\ \bullet$$

6.29. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{a(x+\Delta x)+b}{c(x+\Delta x)+d}-\dfrac{ax+b}{cx+d}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(ad-bc)\Delta x}{\Delta x\big(c(x+\Delta x)+d\big)(cx+d)}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.\ \bullet$$

6.30. $f(x)=\sqrt[3]{ax+b}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{a(x+\Delta x)+b}-\sqrt[3]{ax+b}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{a(x+\Delta x)+b}-\sqrt[3]{ax+b}\right)\left(\sqrt[3]{\left(a(x+\Delta x)+b\right)^2}+\sqrt[3]{(a(x+\Delta x)+b)(ax+b)}+\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right)}{\Delta x\left(\sqrt[3]{\left(a(x+\Delta x)+b\right)^2}+\sqrt[3]{(a(x+\Delta x)+b)(ax+b)}+\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right)}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{\left(a\left(x+\Delta x\right)+b\right)^2}+\sqrt[3]{(a\left(x+\Delta x\right)+b)\left(ax+b\right)}+\sqrt[3]{\left(ax+b\right)^2}\right)} =$$

$$= \frac{a}{3\sqrt[3]{(ax+b)^2}}. \bullet$$

6.31. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x\left(x\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\left(x+\Delta x\right)\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\left(x+\Delta x\right)} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}. \bullet$$

6.32. $f\left(x\right)=x\sqrt{x}$

Решение. Според дефиницијата за извод на функција имаме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x+\Delta x\right)\sqrt{x+\Delta x}-x\sqrt{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x+\Delta x\right)\sqrt{x+\Delta x}-x\sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\left(x+\Delta x\right)\sqrt{x+\Delta x}+x\sqrt{x}}{\left(x+\Delta x\right)\sqrt{x+\Delta x}+x\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x+\Delta x\right)^3-x^3}{\Delta x\left(\left(x+\Delta x\right)\sqrt{x+\Delta x}+x\sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x+3x\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta x\right)^3}{\Delta x\left(\left(x+\Delta x\right)\sqrt{x+\Delta x}+x\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2}{(x + \Delta x)\sqrt{x + \Delta x} + x\sqrt{x}} = \frac{3x^2}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}}. \bullet$$

6.33. Покажи дека функцијата $f(x) = \sqrt[5]{x}$ во точката $x = 0$ има бесконечен извод.

Решение. За изводот на функцијата во точката $x = 0$ имаме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{\Delta x}}{\Delta x} = \infty. \bullet$$

6.34. Дали следните функции имаат извод:

1) $f(x) = x|x|$, во точката $x = 0$

2) $f(x) = |\ln x|$, во точката $x = 1$

Решение. 1) Функција во точката $x = 0$ има лев извод $f'_-(0) = 0$, и десен извод $f'_+(0) = 0$, (види задача 6.4.). Бидејќи левиот и десниот извод на функцијата во $x = 0$ се еднакви, односно $f'_-(0) = f'_+(0)$, следува дека дадената функција има извод во точката $x = 0$. Уште повеќе, имаме дека

$$f'(0) = f'_-(0) = f'_+(0) = 0. \bullet$$

2) Заради задача 6.12. имаме дека левиот извод на функцијата во точката $x = 1$ изнесува $f'_-(1) = -1$, додека десниот извод на функцијата во точката $x = 1$ изнесува $f'_+(1) = 1$. Бидејќи левиот и десниот извод на функцијата во точката $x = 1$ се различни, односно

$$f'_-(1) \neq f'_+(1),$$

заклучуваме дека дадената функција нема извод во точката $x = 1$. $\bullet$

6.2. Правила за пресметување на извод

❖ Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни во точка x од интервалот (a,b), тогаш важат следните правила:

1. Правило за извод на збирот на функциите во точка x

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x),\ \ x\in(a,b).$$

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x),\ \ x\in(a,b).$$

2. Правило за извод од производ на функциите во точка x

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x),\ \ x\in(a,b).$$

3. Правило за извод на производ на функцијата со константа во точка x

$$(cf)'(x)=cf'(x),\ \ x\in(a,b).$$

4. Правилото за извод на количник на функциите во точка x

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2},\ \ g(x)\neq 0,\ \ x\in(a,b).$$

Најди извод на следните функции: (задачи 6.35. - 6.68.)

6.35. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир и производ со константа, имаме дека

$$f'(x)=\left(ax^3\right)'+\left(bx^2\right)'+(cx)'+(d)'=a\left(x^3\right)'+b\left(x^2\right)'+c(x)'+(d)'=$$

$$=3ax^2+2bx+c+0=3ax^2+2bx+c.\ \ \bullet$$

6.36. $f(x)=7x^{13}+13x^{-7}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир и производ со константа, имаме дека

$$f'(x)=\left(7x^{13}\right)'+\left(13x^{-7}\right)'=7\left(x^{13}\right)'+13\left(x^{-7}\right)'=91x^{12}-91x^{-8}. \quad \bullet$$

6.37. $f(x)=\dfrac{\ln 3}{x}+e^2$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир и производ со константа, имаме дека

$$f'(x)=\left(\frac{\ln 3}{x}\right)'+\left(e^2\right)'=\ln 3\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(e^2\right)'=-\frac{\ln 3}{x^2}+0=-\frac{\ln 3}{x^2}. \quad \bullet$$

6.38. $f(x)=\dfrac{\pi}{x}+\ln 2$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир и производ со константа, имаме дека

$$f'(x)=\left(\frac{\pi}{x}\right)'+\left(\ln 2\right)'=-\frac{\pi}{x^2}. \quad \bullet$$

6.39. $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^3}+\dfrac{c}{x^4}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир и производ со константа, имаме дека

$$f'(x)=\left(\frac{a}{x^2}\right)'+\left(\frac{b}{x^3}\right)'+\left(\frac{c}{x^4}\right)'=-\frac{2a}{x^3}-\frac{3b}{x^4}-\frac{4c}{x^5}. \quad \bullet$$

6.40. $f(x)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}+\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир и производ со константа, имаме дека

$$f'(x)=\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{a}{x}\right)+\left(\frac{x^2}{a^2}\right)+\left(\frac{a^2}{x^2}\right)=\frac{1}{a}-\frac{a}{x^2}+\frac{2x}{a^2}-\frac{2a^2}{x^3}.$$ ●

6.41. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир имаме дека

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'+\left(\sqrt[3]{x}\right)'+\left(\sqrt[4]{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$ ●

6.42. $f(x)=x^3\sqrt[3]{x^2}+x^7\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод на збир и производ имаме дека

$$f'(x)=\left(x^3\sqrt[3]{x^2}\right)'+\left(x^7\sqrt[3]{x}\right)'+\left(\sqrt[3]{3}\right)'=$$

$$=3x^2\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{x^2}+7x^6\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}x^6\sqrt[3]{x}=\frac{11}{3}x^2\sqrt[3]{x^2}+\frac{22}{2}x^6\sqrt[3]{x}.$$ ●

6.43. $f(x)=x\sqrt{x\sqrt{x}}$

Решение. Со трансформирање на аналитичкиот израз на функцијата од таблицата за наоѓање на извод имаме дека $f(x)=x^{\frac{7}{4}}$, од каде што следува дека

$$f'(x)=\frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}.$$ ●

6.44. $f(x)=x^2\sin x$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од производ, имаме

$$f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x.$$ ●

6.45. $f(x) = arctg^2 x$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од производ, имаме

$$f'(x) = (arctgx \cdot arctgx)' = arctgx(arctgx)' + (arctgx)' arctgx =$$

$$= \frac{arctgx}{1+x^2} + \frac{arctgx}{1+x^2} = \frac{2arctgx}{1+x^2}. \bullet$$

6.46. $f(x) = e^x (a\sin x - b\cos x)$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир, производ со константа и производ, имаме дека

$$f'(x) = f(x) = \left(e^x\right)' (a\sin x - b\cos x) + e^x (a\sin x - b\cos x)' =$$

$$= e^x (a\sin x - b\cos x) + e^x (a\cos x + b\sin x) =$$

$$= e^x \left(a(\sin x + \cos x) + b(\sin x - \cos x)\right). \bullet$$

6.47. $f(x) = \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right)$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир, производ со константа и производ, имаме дека

$$f'(x) = \left(1+\sqrt{x}\right)' \left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right) + \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)' \left(1+\sqrt{3x}\right) +$$

$$+ \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right)' =$$

$$= \left(1+\sqrt{x}\right)' \left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right) + \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{2}\sqrt{x}\right)' \left(1+\sqrt{3x}\right) +$$

$$+ \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3}\sqrt{x}\right)' =$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})}{2\sqrt{x}}+\frac{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{3x})}{\sqrt{2x}}+\frac{3(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})}{2\sqrt{3x}}. \bullet$$

6.48. $f(x)=x\sin x\ln x$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од производ, имаме

$$f'(x)=(x)'\sin x\ln x+x(\sin x)'\ln x+x\sin x(\ln x)'=$$

$$=\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x. \bullet$$

6.49. $f(x)=x^n\ln x$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од производ, имаме

$$f'(x)=nx^{n-1}+\frac{x^n}{x}=x^{n-1}(n\ln x+1). \bullet$$

6.50. $f(x)=\begin{cases}1-x, & -2<x<1\\(1-x)(1+x), & 1\le x\le 2\\-(2-x), & 2<x<4\end{cases}$

Решение. Дадената функција е дефинирана по интервали, па нејзиниот извод го наоѓаме со барање на извод во секој интервал поодделно. Имаме дека

$$f'(x)=\begin{cases}(1-x)', & -2<x<1\\((1-x)(1+x))', & 1\le x\le 2\\(-(2-x))', & 2<x<4\end{cases}=\begin{cases}-1, & -2<x<1\\-2x, & 1\le x\le 2\\1, & 2<x<4\end{cases}. \bullet$$

6.51. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\ne 0\\1, & x=0\end{cases}$

Решение. Дадената функција е дефинирана по интервали, па нејзиниот извод го наоѓаме со барање на извод во секој интервал поодделно. Имаме дека

$$f'(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)', & x\neq 0\\ (1)', & x=0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}. \bullet$$

6.52. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{tgx}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод на количник, имаме

$$f'(x)=\frac{\dfrac{tgx}{2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}}{tg^2 x}=\frac{1}{2\sqrt{x}tgx}-\frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}. \bullet$$

6.53. $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир и количник, имаме дека

$$f'(x)=\frac{(1-\ln x)'(1+\ln x)-(1-\ln x)(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2}=$$

$$=\frac{-\dfrac{1+\ln x}{x}-\dfrac{1-\ln x}{x}}{(1+\ln x)^2}=\frac{-2}{x(1+\ln x)^2}. \bullet$$

6.54. $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{(m+n)x}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир, производ со константа и количник, имаме дека

$$f'(x)=\frac{\left(ax^2+bx+c\right)'(m+n)x-\left(ax^2+bx+c\right)(m+n)(x)'}{(m+n)^2x^2}=$$

$$=\frac{(2ax+b)(m+n)x-\left(ax^2+bx+c\right)(m+n)}{(m+n)^2x^2}=\frac{ax^2-c}{(m+n)x^2}. \bullet$$

6.55. $f(x)=\dfrac{3}{\left(1-x^2\right)\left(1-2x^3\right)}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир, производ со константа и количник, имаме дека

$$f'(x)=\frac{-3\left(\left(1-x^2\right)\left(1-2x^3\right)\right)'}{\left(1-x^2\right)^2\left(1-2x^3\right)^2}=\frac{-3\left(-2x\left(1-2x^3\right)-6x^2\left(1-x^2\right)\right)}{\left(1-x^2\right)^2\left(1-2x^3\right)^2}=$$

$$=\frac{8x-6x^3-12x^4}{\left(1-x^2\right)^2\left(1-2x^3\right)^2}. \bullet$$

6.56. $f(x)=\dfrac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир, производ и количник, имаме дека

$$f'(x)=\frac{-a^2b^2c^2\left((x-a)(x-b)(x-c)\right)'}{\left((x-a)(x-b)(x-c)\right)^2}=$$

$$=\frac{-a^2b^2c^2\left((x-a)'(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)'(x-c)+(x-a)(x-b)(x-c)'\right)}{\left((x-a)(x-b)(x-c)\right)^2}=$$

$$=\frac{-a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}\right). \bullet$$

6.57. $f(x)=\frac{\ln x}{x^n}$

Решение: $f'(x)=\dfrac{\frac{x^n}{x}-nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}}=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$. ●

6.58. $f(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{x}{\sin x}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод на збир и количник, имаме дека

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}. \bullet$$

6.59. $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод на збир и количник, имаме дека

$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}. \bullet$$

6.60. $f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод од збир и количник, имаме дека

$$f'(x)=\frac{(\cos x+\sin x)'(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)(\sin x-\cos x)'}{(\sin x-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{(-\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{-(\sin x-\cos x)^2-(\cos x+\sin x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}. \bullet$$

Определи ја вредноста на изводот на дадените функции во соодветните точки: (задачи 6.64. - 6.47.)

6.61. $f(x)=3x-2\sqrt{x},$ во точките $x=1$ и $x=4$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод имаме дека

$f'(x)=3-\frac{1}{\sqrt{x}},$ од каде што добиваме дека

$$f'(1)=3-1=2 \text{ и } f'(4)=3-\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}. \bullet$$

6.62. $f(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right),$ во точките $x=0$ и $x=1$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод имаме дека

$f'(x)=2x\left(x^2+1\right),$ од каде што добиваме дека

$$f'(0)=0 \text{ и } f'(1)=4. \bullet$$

6.63. $f(x)=\frac{x-a}{x-b},$ во точката $x=a$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод имаме дека

$f'(x)=\frac{a-b}{(x-b)^2},$ од каде што добиваме дека

$$f'(a)=\frac{1}{a-b}. \bullet$$

6.64. $f(x)=\left(1+ax^{b}\right)\left(1+bx^{a}\right),$ во точката $x=1$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод имаме дека

$f'(x)=abx^{b-1}\left(1+bx^{a}\right)+abx^{a-1}\left(1+ax^{b}\right),$ од каде што добиваме дека

$$f'(1)=ab(1+b)+ab(1+a)=ab(2+a+b). \bullet$$

6.65. $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x},$ во точката $x=0$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод имаме дека

$f'(x)=\dfrac{x^{2}}{(\cos x+x\sin x)^{2}},$ од каде што добиваме дека

$$f'(0)=0. \bullet$$

6.66. $f(x)=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x,$ во точката $x=0$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод имаме дека

$f'(x)=a\cos x-(ax+b)\sin x+c\sin x+(cx+d)\cos x,$ од каде што следува

$$f'(0)=a+d. \bullet$$

6.67. $f(x)=\dfrac{x^{2}}{\ln x},$ во точката $x=e$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод имаме дека

$f'(x)=\dfrac{2x\ln x-x}{\ln^{2}x},$ од каде што добиваме дека

$$f'(e)=e. \bullet$$

6.68. $f(x)=x^{5}e^{-x},$ во точката $x=5$

Решение. Според правилата за наоѓање на извод имаме дека

$f'(x)=\dfrac{5x^4-x^5}{e^x}$, од каде што добиваме дека

$$f'(5)=0. \quad \bullet$$

6.3. Извод на сложена функција

❖ Ако функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0 и $z=g(y)$ е диференцијабилна во точката $y_0=f(x_0)$, тогаш композицијата $z=(g\circ f)(x)$ е диференцијабилна функција во точката x_0 и важи

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0).$$

❖ Ако $y=f(x)$ е позитивна функција на интервалот (a,b) и диференцијабилна во точката x од интервал (a,b), тогаш, изводот на функцијата $z(x)=\ln y=\ln f(x)$ во точката x,

$$z'(x)=\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)},$$

се вика *логаритамски извод* на функцијата $y=f(x)$ во точката x, а постапка за негово наоѓање се вика *логаритамско диференцирање.*

❖ Ако $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни функци во точката x, и $f(x)$ е позитивна функција на интервалот (a,b), тогаш за функцијата $y=\left(f(x)\right)^{g(x)}$ важи $\ln y=g(x)\ln f(x)$, па имаме дека

$$\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)},$$

односно

$$y' = (f(x))^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\right].$$

Најди извод на следните функции: (задачи 6.69. - 6.113.)

6.69. $f(x) = (ax+b)^n$

Решение. Ако замениме $ax+b=u,$ тогаш имаме дека $f(u)=u^n.$ Бидејќи $f'(u)=nu^{n-1}$ и $u'(x)=a,$ добиваме дека

$$f'(x) = f'(u)\cdot u'(x) = an(ax+b)^{n-1}. \text{ ●}$$

6.70. $f(x) = \left(\dfrac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$

Решение. Ако замениме $\dfrac{a+bx^n}{a-bx^n}=u,$ тогаш имаме дека $f(u)=u^m.$

Бидејќи $f'(u)=mu^{m-1}$ и $u'(x)=\dfrac{2nabx^{n-1}}{\left(a-bx^n\right)^2},$ добиваме дека

$$f'(x) = f'(u)\cdot u'(x) = \frac{2mnabx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}}{\left(a-bx^n\right)^{m+1}}. \text{ ●}$$

6.71. $f(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Решение. Ако замениме $\frac{x-1}{x+1}=u,$ тогаш имаме $f(u)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{u}.$ Бидејќи

$f'(u)=\frac{4}{3}\frac{1}{4}u^{\frac{-3}{4}}=\frac{1}{3\sqrt[4]{u^3}}$ и $u'(x)=\frac{2}{(x+1)^2},$ имаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{2}{3(x+1)\sqrt[4]{(x+1)(x-1)^3}}. \bullet$$

6.72. $f(x)=\left(a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

Решение. Ако замениме $a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=u,$ тогаш имаме $f(u)=u^{\frac{3}{2}}.$ Бидејќи

$f'(u)=\frac{3}{2}\sqrt{u}$ и $u'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$ добиваме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}}. \bullet$$

6.73. $f(x)=\left(1+2\sqrt{x}\right)^{10}$

Решение. Ако замениме $1+2\sqrt{x}=u,$ тогаш имаме $f(u)=u^{10}.$ Бидејќи

$f'(u)=10u^9$ и $u'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},$ имаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{10(1+2\sqrt{x})^9}{\sqrt{x}}. \bullet$$

6.74. $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$

Решение. Ако замениме $\dfrac{x}{1-x}=u,$ тогаш имаме $f(u)=u^{n}$. Бидејќи $f'(u)=nu^{n-1}$ и $u'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, добиваме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{nx^{n-1}}{(1-x)^{n+1}}.\ \bullet$$

6.75. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Решение. Ако замениме $a^2-x^2=u,$ тогаш имаме $f(u)=u^{-\frac{1}{2}}$. Бидејќи $f'(u)=-\dfrac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}$ и $u'(x)=-2x,$ имаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{x}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}.\ \bullet$$

6.76. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$

Решение. Ако замениме $\dfrac{1}{1+x^2}=u,$ тогаш имаме $f(u)=\sqrt[3]{u}$. Бидејќи $f'(u)=\dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}$ и $u'(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, имаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=-\frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^8}}.\ \bullet$$

6.77. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-x^8}}$

Решение. Ако замениме $1-x^2-x^8=u$, тогаш имаме $f(u)=\frac{1}{\sqrt{u}}$. Бидејќи $f'(u)=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}$ и $u'(x)=-2x-8x^7$, имаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=-\frac{-2x-8x^7}{2\sqrt{\left(1-x^2-x^8\right)^3}}=\frac{4x^7+x}{\sqrt{\left(1-x^2-x^8\right)^3}}. \bullet$$

6.78. $f(x)=\sin 3x$

Решение. Ако замениме $3x=u$, тогаш $f(u)=\sin u$. Бидејќи имаме дека $f'(u)=\cos u$ и $u'(x)=3$, наоѓаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=3\cos 3x. \bullet$$

6.79. $f(x)=a\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

Решение. Ако замениме $\frac{x}{3}=u$, тогаш $f(u)=a\cos u$. Бидејќи имаме дека $f'(u)=-a\sin u$ и $u'(x)=\frac{1}{3}$, наоѓаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=-\frac{a}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right). \bullet$$

6.80. $f(x)=3\sin(3x+5)$

Решение. Ако замениме $3x+5=u$, тогаш $f(u)=3\sin u$. Бидејќи имаме дека $f'(u)=3\cos u$ и $u'(x)=3$, наоѓаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=9\cos(3x+5). \bullet$$

6.81. $f(x)=tg\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Решение. Ако замениме $\frac{x+1}{2}=u,$ тогаш $f(u)=tgu.$ Бидејќи имаме дека $f'(u)=\frac{1}{\cos^2 u}$ и $u'(x)=\frac{1}{2},$ наоѓаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}\frac{1}{2}=\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}. \bullet$$

6.82. $f(x)=tg^2x$

Решение. Ако замениме $tgx=u,$ тогаш $f(u)=u^2.$ Бидејќи $f'(u)=2u$ и $u'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},$ имаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{2tgx}{\cos^2 x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}. \bullet$$

6.83. $f(x)=\sin(\sin x)$

Решение. Ако замениме $\sin x=u,$ тогаш $f(u)=\sin u.$ Бидејќи имаме дека $f'(u)=\cos u$ и $u'(x)=\cos x,$ добиваме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\cos(\sin x)\cos x. \bullet$$

6.84. $f(x)=\sqrt{1+2tgx}$

Решение. Ако замениме $1+2tgx=u,$ тогаш $f(u)=\sqrt{u}.$ Бидејќи имаме дека $f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$ и $u'(x)=\frac{2}{\cos^2 x},$ добиваме дека

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+2tgx}} \cdot \frac{2}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2tgx}}.$$ ●

6.85. $f(x) = tg\left(\frac{x+1}{x}\right)$

Решение. Ако замениме $\frac{x+1}{x} = u,$ тогаш $f(u) = tgu.$ Оттука имаме дека $f'(u) = \frac{1}{\cos^2 u}$ и $u'(x) = -\frac{1}{x^2},$ од каде што добиваме дека

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{-1}{x^2 \cos^2\left(\frac{x+1}{x}\right)}.$$ ●

6.86. $f(x) = \cos^2 x$

Решение. Ако замениме $\cos x = u,$ тогаш $f(u) = u^2.$ Од $f'(u) = 2u$ и $u'(x) = -\sin x,$ имаме дека

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x.$$ ●

6.87. $f(x) = -\frac{1}{6(1-3\cos x)^2}$

Решение. Ако замениме $u = 1-3\cos x,$ тогаш имаме дека $f(u) = -\frac{1}{6u^2}.$

Од $f'(u) = \frac{1}{3u^3}$ и $u'(x) = 3\sin x,$ добиваме дека

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{3\sin x}{3(1-3\cos x)^3} = \frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}.$$ ●

6.88. $f(x) = \cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$

Решение. Ако замениме $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=u,$ тогаш $f\left(u\right)=\cos^2 u.$ Бидејќи имаме $f'\left(u\right)=-2\cos u\sin u=-\sin 2u$ и $u'\left(x\right)=\frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2},$ добиваме дека

$$f'\left(x\right)=f'\left(u\right)\cdot u'\left(x\right)=\frac{\sin\left(\frac{2-2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}. \bullet$$

6.89. $f\left(x\right)=arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Решение. Ако замениме $\frac{1+x}{1-x}=u,$ тогаш имаме дека $f\left(u\right)=arctgu.$ Од $f'\left(u\right)=\frac{1}{1+u^2}$ и $u'\left(x\right)=\frac{2}{\left(1-x\right)^2},$ добиваме дека

$$f'\left(x\right)=f'\left(u\right)\cdot u'\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}. \bullet$$

6.90. $f\left(x\right)=\ln^2 x$

Решение. Ако замениме $\ln x=u,$ тогаш имаме $f(u)=u^2,$ $f'\left(u\right)=2u$ и $u'\left(x\right)=\frac{1}{x},$ па наоѓаме дека

$$f'\left(x\right)=f'\left(u\right)\cdot u'\left(x\right)=\frac{2\ln x}{x}. \bullet$$

6.91. $f\left(x\right)=\ln\left(\sin x\right)$

Решение. Ако замениме $\sin x=u,$ тогаш имаме дека $f\left(u\right)=\ln u.$ Бидејќи $f'\left(u\right)=\frac{1}{u}$ и $u'\left(x\right)=\cos x,$ имаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=ctgx.$$ ●

6.92. $f(x)=\ln(\ln x)$

Решение. Ако замениме $\ln x=u,$ тогаш имаме дека $f(u)=\ln u.$ Оттука наоѓаме дека $f'(u)=\frac{1}{u}$ и $u'(x)=\frac{1}{x},$ па имаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{1}{x\ln x}.$$ ●

6.93. $f(x)=\sqrt{1+e^x}$

Решение. Ако замениме $1+e^x=u,$ тогаш $f(u)=\sqrt{u}.$ Од $f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$ и $u'(x)=e^x,$ добиваме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}.$$ ●

6.94. $f(x)=3^{\sin x}$

Решение. Ако замениме $\sin x=u,$ тогаш $f(u)=3^u.$ Оттука имаме дека $f'(u)=3^u\ln 3$ и $u'(x)=\cos x,$ па добиваме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=3^{\sin x}\cos x\ln 3.$$ ●

6.95. $f(x)=e^{x^3+x}$

Решение. Ако замениме $x^3+x=u,$ тогаш имаме дека $f(u)=e^u.$ Заради $f'(u)=e^u$ и $u'(x)=3x^2+1,$ имаме дека

$$f'(x)=f'(u)\cdot u'(x)=\left(3x^2+1\right)\cdot e^{x^3+x}.$$ ●

6.96. $f\left(x\right)=2x+5\cos^2 x$

Решение. Со помош на правилата за наоѓање на извод на функција и правилото за извод на сложена функција добиваме дека

$$f'\left(x\right)=2-5\cdot 2\cos x\sin x=2-5\sin 2x. \bullet$$

6.97. $f\left(x\right)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

Решение. Со помош на правилото за извод на количник и правилото за извод на сложена функција добиваме дека

$$f'\left(x\right)=\frac{\left(1+x\right)'\sqrt{1-x}-\left(1+x\right)\left(\sqrt{1-x}\right)'}{\sqrt{(1-x)^2}}=\frac{\sqrt{1-x}-\dfrac{1+x}{2\sqrt{1-x}}\left(-1\right)}{1-x}=\frac{3-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}. \bullet$$

6.98. $f\left(x\right)=x^2\sqrt{a^2+x^2}$

Решение. Со помош на правилата за извод на функција и правилото за извод на сложена функција, добиваме дека

$$f'\left(x\right)=2x\sqrt{a^2+x^2}+x^2\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{3x^3+2xa^2}{\sqrt{a^2+x^2}}. \bullet$$

6.99. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Решение. Со помош на правилата за извод на функција и правилото за извод на сложена функција, добиваме дека

$$f'\left(x\right)=\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}. \bullet$$

6.100. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Решение. Со помош на правилата за извод на функција и правилото за извод на сложена функција, добиваме дека

$$f'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{x}{1+x^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \bullet$$

6.101. $f(x) = \dfrac{1}{x-\sqrt{a^2+x^2}}$

Решение. Со помош на правилата за извод на функција и правилото за извод на сложена функција, добиваме дека

$$f'(x) = \frac{-\left(1-\dfrac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right)}{\left(x-\sqrt{a^2+x^2}\right)^2} = \frac{1}{\left(x-\sqrt{a^2+x^2}\right)\sqrt{a^2+x^2}}. \bullet$$

6.102. $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)$

Решение. Со помош на правилата за извод на функција и правилото за извод на сложена функција, добиваме дека

$$f'(x) = f'(u)\cdot u'(x) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}-x}{\left(\sqrt{a^2-x^2}+x\right)\sqrt{a^2-x^2}}. \bullet$$

6.103. $f(x) = \sqrt{1+tg\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}$

Решение. Ако замениме $\frac{x+1}{x}=u$ и $g=1+tgu$, тогаш $f(g)=\sqrt{g}$. Оттука имаме $f'(g)=\frac{1}{2\sqrt{g}}$, $g(u)=\frac{1}{\cos^2 u}$ и $u'(x)=-\frac{1}{x^2}$, па добиваме дека

$$f'(x)=f'(g)\cdot g'(u)\cdot u'(x)=-\frac{1}{2x^2\sqrt{1+tg\left(\frac{x+1}{x}\right)}\cdot\cos^2\left(\frac{x+1}{x}\right)}. \bullet$$

6.104. $f(x)=arctg\left(tg^2x\right)$

Решение. Ако замениме $tgx=u$ и $g=u^2$, добиваме $f(g)=arctg(g)$. Имаме дека $f'(g)=\frac{1}{1+g^2}$, $g(u)=2u$ и $u'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, од каде што добиваме дека

$$f'(x)=f'(g)\cdot g'(u)\cdot u'(x)=\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}. \bullet$$

6.105. $f(x)=\sqrt{1+\ln^2 x}$

Решение. Ако замениме $\ln x=u$ и $g=1+u^2$, имаме $f(g)=\sqrt{g}$. Имаме дека $f'(g)=\frac{1}{2\sqrt{g}}$, $g(u)=2u$ и $u'(x)=\frac{1}{x}$, од каде што добиваме дека

$$f'(x)=f'(g)\cdot g'(u)\cdot u'(x)=\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}. \bullet$$

6.106. $f(x)=\ln^4(\sin x)$

Решение. Ако замениме $\sin x = u$ и $g = \ln u$, имаме $f(g) = g^4$. Оттука имаме дека $f'(g) = 4g^3$, $g(u) = \frac{1}{u}$ и $u'(x) = \cos x$, од каде што добиваме дека

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(u) \cdot u'(x) = 4\ln^3(\sin x) ctgx. \bullet$$

6.107. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

Решение. Ако замениме $\ln x = u$ и $g = \ln u$, имаме $f(g) = \ln g$. Оттука имаме дека $f'(g) = \frac{1}{g}$, $g(u) = \frac{1}{u}$ и $u'(x) = \frac{1}{x}$, од каде што добиваме

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}. \bullet$$

6.108. $f(x) = 2^{tg\left(\frac{1}{x}\right)}$

Решение. Ако замениме $\frac{1}{x} = u$ и $g = tgu$, тогаш имаме $f(g) = 2^g$. Од $f'(g) = 2^g \ln 2$, $g'(u) = \frac{1}{\cos^2 u}$ и $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$, следува дека

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(u) \cdot u'(x) = -\frac{2^{tg\frac{1}{x}} \ln 2}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}. \bullet$$

6.109. $f(x) = e^{e^e} + e^{e^{e^x}}$

Решение. Ако замениме $e^x = u$ и $g = e^u$, тогаш имаме $f(g) = e^{e^e} + e^g$. Бидејќи $f'(g) = e^g$, $g'(u) = e^u$ и $u'(x) = e^x$, добиваме дека

$$f'(x)=f'(g)\cdot g'(u)\cdot u'(x)=e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x}\cdot e^x. \bullet$$

6.110. $f(x)=\sin\left(e^{x^2+3x-2}\right)$

Решение. Ако замениме $x^2+3x-2=u$ и $g=e^u$, тогаш добиваме дека $f(g)=\sin g$. Бидејќи $f'(g)=\cos g$, $g'(u)=e^u$ и $u'(x)=2x+3$, имаме

$$f'(x)=f'(g)\cdot g'(u)\cdot u'(x)=(2x+3)\cdot e^{x^2+3x-2}\cos\left(e^{x^2+3x-2}\right). \bullet$$

6.111. $f(x)=\sqrt{e^{\sin x}}$

Решение. Ако замениме $\sin x=u$ и $g=e^u$, добиваме дека $f(g)=\sqrt{g}$. Бидејќи $f'(g)=\dfrac{1}{2\sqrt{g}}$, $g'(u)=e^u$ и $u'(x)=\cos x$, имаме

$$f'(x)=f'(g)\cdot g'(u)\cdot u'(x)=\frac{\cos x e^{\sin x}}{2\sqrt{e^{\sin x}}}. \bullet$$

6.112. $f(x)=a^{\sin^3 x}$

Решение. Ако замениме $\sin x=u$ и $g=u^3$, добиваме дека $f(g)=a^g$. Бидејќи $f'(g)=a^g\ln a$, $g'(u)=3u^2$ и $u'(x)=\cos x$, имаме

$$f'(x)=f'(g)\cdot g'(u)\cdot u'(x)=a^{\sin^3 x}\ln a\cdot 3\sin^2 x\cos x. \bullet$$

6.113. $f(x)=\cos^2(\cos 3x)$

Решение. Ако замениме $3x=u$, $g=\cos u$ и $h=\cos g$. Тогаш $f(h)=h^2$. Оттука имаме дека $f'(h)=2h$, $h'(g)=-\sin g$, $g'(u)=-\sin u$ и $u'(x)=3$, па добиваме дека

$$f'(x) = f'(h)\cdot h'(g)\cdot g'(u)\cdot u'(x) = 6\sin 3x\,\sin(\cos 3x)\,\cos(\cos 3x). \bullet$$

Со примена на методот на логаритмирање, најди извод на следните функции: (задачи 6.114. - 6.121.)

6.114. $f(x) = (\sin x)^x$

Решение. Левата и десната страна на равенката ги логаритмираме, а потоа бараме извод по x. Добиваме дека

$$\ln(f(x)) = x\ln(\sin x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (x)'\ln(\sin x) + x(\ln(\sin x))'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\sin x) + \frac{x\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = (\sin x)^x\left(\ln(\sin x) + \frac{x\cos x}{\sin x}\right). \bullet$$

6.115. $f(x) = (x+1)(2x+1)(3x+1)$

Решение. Левата и десната страна на равенката ги логаритмираме, а потоа бараме извод по x. Добиваме дека

$$\ln(f(x)) = \ln(x+1) + \ln(2x+1) + \ln(3x+1)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1}$$

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1}\right)$$

$$f'(x) = (x+1)(2x+1)(3x+1)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1}\right). \bullet$$

6.116. $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$

Решение. Левата и десната страна на равенката ги логаритмираме, а потоа бараме извод по x. Добиваме дека

$$\ln(f(x))=2\ln(x+2)-3\ln(x+1)-4\ln(x+3)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x+3}$$

$$f'(x)=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+1}-\frac{4}{x+3}\right). \bullet$$

6.117. $f(x)=x^x$

Решение. Левата и десната страна на равенката ги логаритмираме, а потоа бараме извод по x. Добиваме дека

$$\ln(f(x))=x\ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1$$

$$f'(x)=x^x(\ln x+1). \bullet$$

6.118. $f(x)=x^{x^x}$

Решение. Левата и десната страна на равенката ги логаритмираме, а потоа бараме извод по x. Добиваме дека

$$\ln(f(x))=x^x\ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\left(x^x\right)'\ln x+x^x(\ln x)'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}$$

$$f'(x) = x^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right). \bullet$$

6.119. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Решение. Левата и десната страна на равенката ги логаритмираме, а потоа бараме извод по x. Добиваме дека

$$\ln(f(x)) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right). \bullet$$

6.120. Реши ја равенката $f'(x) = 0$, ако $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 12.$

Решение. Имаме дека $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$ Решенијата на равенката $3x^2 - 12x + 9 = 0$ се $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. $\bullet$

6.121. Пресметај го изводот на функцијата

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x, \text{ во точката } x = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Левата и десната страна на равенката ги логаритмираме, а потоа бараме извод по x. Добиваме дека

$$\ln(f(x)) = x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = x(\ln(\sin x) - \ln x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(\sin x)-\ln x+xctgx-1$$

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\left(\ln(\sin x)-\ln x+xctgx-1\right)$$

Вредноста на изводот на функцијата во точката $x=\frac{\pi}{2}$ изнесува

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right).$$ ●

6.4. Равенка на тангента и нормала на рамнинска крива

❖ Коефициентот на правецот на тангентата на кривата определена со функцијата $y=f(x)$ во точка од кривата со апсциса x_0, е еднаков на вредноста на изводот на функцијата во точката x_0.

❖ Равенката на тангентата на кривата $y=f(x)$ во точка $(x_0, y_0(x_0))$ гласи

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0).$$

❖ Равенката на нормалата на кривата $y=f(x)$ во точка $(x_0, y_0(x_0))$ гласи

$$y=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y(x_0).$$

6.122. Запиши ги равенките на тангентата и нормалата на параболата $y=x^2$ во точката $x=1$.

Решение. Бидејќи $y(1)=1$ и $y'(1)=2$, равенката на тангентата низ точката (1,1) гласи $y-1=2(x-1)$, односно $y=2x-1$, додека равенката на нормалата низ истата точка гласи $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$, односно $y=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$. ●

Запиши ги равенките на тангента и нормала на следните криви во точката $x=1$: (задачи 6.123. - 6.125.)

6.123. $y=x^3-3x^2+2x+1$

Решение. Имаме дека $y(1)=1$, $y'=3x^2-6x+2$ и $y'(1)=-1$.

Равенката на тангентата низ точката (1,1) гласи $y-1=-1(x-1)$, односно $y=-x+2$.

Равенката на нормалата низ точката (1,1) гласи $y-1=1(x-1)$, односно $y=x$. ●

6.124. $y=\frac{1}{x^2}$

Решение. Имаме дека $y(1)=1$, $y'=-\frac{2}{x^3}$ и $y'(1)=-2$.

Равенката на тангентата низ точката (1,1) гласи $y-1=-2(x-1)$, односно $y=-2x+3$.

Равенката на нормалата низ точката (1,1) гласи $y-1=\frac{1}{2}(x-1)$, односно $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. ●

6.125. $y=\ln x$

Решение. Имаме дека $y(1)=0,\ y'=\dfrac{1}{x}$ и $y'(1)=1$.

Равенката на тангентата низ точката (1,0) гласи $y-0=1(x-1)$, односно $y=x-1$.

Равенката на нормалата низ точката (1,0) гласи $y-0=-1(x-1)$, односно $y=-x+1$. ●

6.126. Запиши ја равенката на тангентата на кривата $y=x^2+2$ која е паралелна со правата $y=x-2$.

Решение. Равенката на тангентата на кривата $y=x^2+2$ низ точката (x_0,y_0) гласи $y-(x_0^2+2)=2x_0(x-x_0)$, односно $y=2x_0x+2-x_0^2$. Бидејќи тангентата е паралелна со правата $y=x-2$, добиваме $2x_0=1$, односно $x_0=\dfrac{1}{2}$. Значи, бараната тангента е $y=x+\dfrac{7}{4}$. ●

6.127. Од координатниот почеток се повлечени тангенти на кривата $y=x^2-2x+1$. Определи ги координатите на допирните точки.

Решение. Равенката на тангентата на кривата $y=x^2-2x+1$ која што минува низ точката (x_0,y_0) гласи $y-(x_0^2-2x_0+1)=(2x_0-2)(x-x_0)$, односно $y=2(x_0-1)x-x_0^2+1$. Бидејќи тангентата минува низ координатниот почеток имаме дека $-x_0^2+1=0$, односно $|x_0|=1$. Значи, бараните тангенти се добиваат ако x_0 прими вредности 1 и –1. Добиваме дека $y=0$ и $y=-4x$. ●

6.128. На параболата $y=x^2-2x+1$ да се определи точка во која нормалата е паралелна со правата $x+2y-3=0$.

Решение. Равенката на нормалата на кривата $y=x^2-2x+1$ која што минува низ точката (x_0,y_0) гласи $y-(x_0^2-2x_0+1)=-\frac{1}{2x_0-2}(x-x_0)$, односно $2y(x_0-1)+x-2x_0^3+6x_0^2-7x_0-2=0$. Бидејќи нормалата е паралена со правата $x+2y-3=0$, имаме дека $x_0-1=1$, односно $x_0=2$. Тогаш $y_0=2^2-2\cdot 2+1=1$. Во точката (2,1) нормалата на параболата $y=x^2-2x+1$ е паралелна со правата $x+2y-3=0$. ●

6.129. На кривата $y=x^2+1$ да се повлече тангента која што минува низ координатниот почеток.

Решение. Равенката на тангентата на кривата $y=x^2+1$ низ точката (x_0,y_0) гласи $y-(x_0^2+1)=2x_0(x-x_0)$, односно $y=2x_0x-x_0^2+1$. Бидејќи тангентата минува низ координатниот почеток, имаме $-x_0^2+1=0$, односно $|x_0|=1$ Значи, бараните тангенти се добиваат ако x_0 прими вредности 1 и –1. Добиваме дека $y=2x$ и $y=-2x$. ●

6.130. Запиши ги равенките на тангентите на кривата $y=x-\frac{1}{x}$ во пресечните точки со апсцисната оска.

Решение. Кривата $y=x-\frac{1}{x}$ ја сече апсцисната оска во точките со апсциси $x_1=1$ и $x_2=-1$. Равенките на тангентите на кривата $y=x-\frac{1}{x}$ низ точките (1,0) и (-1,0) се $y=2x-2$ и $y=2x+2$, соодветно. ●

6.131. Запиши ја равенката на нормалата на кривата $y=\sqrt{x+2}$ во пресечната точка со кривата $y=x$.

Решение. Кривата $y=\sqrt{x+2}$ се сече со правата $y=x$ во точките со апсциси $x_1=2$ и $x_2=-1$. Равенките на нормалите на дадената низ точките (2,2) и (-1,-1) се $y=-4x+10$ и $y=-2x-3$, соодветно. ●

6.132. Запиши ја равенката на нормалата на кривата $y=x\ln x$ паралелна со правата $2x-2y+3=0$.

Решение. Имаме дека $y'=\ln x+1$. Равенка на нормалата низ точката $(x_0,x_0\ln x_0)$ гласи $y-x_0\ln x_0=-\dfrac{1}{\ln x_0+1}(x-x_0)$. Бидејќи таа е паралелна со правата $2x-2y+3=0$, имаме $\dfrac{1}{\ln x_0+1}=-1$ од каде што добиваме $x_0=e^{-2}$. Равенката на бараната нормала е $y-x+3e^{-2}=0$. ●

6.5. Извод од инверзна функција и извод на имплицитна функција

❖ Ако функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во точката x и ако постои инверзна функција $x=f^{-1}(y)$ која е диференцијабилна во точката x_0 и $f'(x)\neq 0$, тогаш функцијата $f^{-1}(x)$ е диференцијабилна во точката $y_0=f(x_0)$ и притоа важи

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

❖ Ако функцијата $y=f(x)$ дефинирана на интервалот (a,b) е зададена со равенката $F(x,y)=0$ тогаш велиме дека функцијата е *имплицитно* зададена.

❖ Нека со равенката $F(x,y)=0$ имплицитно е зададена диференцијабилна функција $y=y(x)$. Ако во равенката $F(x,y)=0$ замениме $y=y(x)$ добиваме дека $F(x,y(x))=0$, за секој $x\in(a,b)$. Ако последното равенство го диференцираме по x, при што сметаме дека y е функција од $x,$ добиваме нова равенка по $x,$ y и y'. Со решавање на равенката по y' го наоѓаме изводот на функција $y=f(x)$.

Најди извод на инверзните функции на: (задачи 6.133. - 6.135.)

6.133. $f(x)=2x+1$

Решение. Бидејќи $f'(x)=2>0,$ за секое $x\in\mathbf{R},$ постои единствена инверзна функција f^{-1} на функцијата $f.$ Според правилото за наоѓање на извод на инверзна функција имаме дека

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{2}. \ \bullet$$

6.134. $f(x)=x+\ln x$

Решение. Бидејќи $f'(x)=\frac{x+1}{x}>0,$ за секое $x>0,$ постои единствена инверзна функција f^{-1} на функцијата $f.$ Според правилото за наоѓање на извод на инверзна функција имаме дека

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{x}{x+1}. \ \bullet$$

6.135. $f(x)=x+e^{x}$

Решение. Бидејќи $f'(x) = 1 + e^x > 0,$ за секое $x \in \mathbf{R},$ постои единствена инверзна функција f^{-1} на функцијата $f.$ Според правилото за наоѓање на извод на инверзна функција имаме дека

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+e^x}. \quad \bullet$$

Најди го изводот на имплицитните функции: (задачи 6.136. - 6.150.)

6.136. $2x - 5y - 10 = 0$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$2x - 5y - 10 = 0 \;\Rightarrow\; 2 - 5y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = \frac{2}{5}. \quad \bullet$$

6.137. $y - xe^y + 1 = 0$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$y - xe^y + 1 = 0 \;\Rightarrow\; y' - e^y - xe^y y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}. \quad \bullet$$

6.138. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad \bullet$$

6.139. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; \frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}y'=0 \;\Rightarrow\; y'=\frac{b^2x}{a^2y}. \; \bullet$$

6.140. $y^2-2px=0$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$y^2-2px=0 \;\Rightarrow\; 2yy'-2p=0 \;\Rightarrow\; y'=\frac{p}{y}. \; \bullet$$

6.141. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{3}+\frac{2y^{-\frac{1}{3}}}{3}y'=0 \;\Rightarrow\; y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}. \; \bullet$$

6.142. $x^2+y^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$x^2+y^2=a^2\left(x^2-y^2\right) \;\Rightarrow\; 2x+2yy'=a^2\left(2x-2yy'\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y'y\left(a^2+1\right)=x\left(a^2-1\right) \;\Rightarrow\; y'=\frac{x\left(a^2-1\right)}{y\left(a^2+1\right)}. \; \bullet$$

6.143. $y^4-2y^2x-1=0$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$y^4 - 2y^2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 4y^3y' - 4yy'x - 2y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y' = \frac{y}{2\left(y^2 - x\right)}. \; \bullet$$

6.144. $y^2 = 1 + e^{xy}$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$y^2 = 1 + e^{xy} \;\Rightarrow\; 2yy' = e^{xy}\left(y + xy'\right) \;\Rightarrow\; y' = \frac{y \cdot e^{xy}}{2y - x \cdot e^{xy}}. \; \bullet$$

6.145. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}. \; \bullet$$

6.146. $y = \sin\left(x + y\right)$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$y = \sin\left(x + y\right) \;\Rightarrow\; y' = \cos\left(x + y\right)\left(1 + y'\right) \;\Rightarrow\; y' = \frac{\cos\left(x + y\right)}{1 - \cos\left(x + y\right)}. \; \bullet$$

6.147. $x = ye^{\sin y}$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$x = ye^{\sin y} \Rightarrow 1 = y'e^{\sin y} + ye^{\sin y}\cos y \cdot y' \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{e^{\sin y}\left(1 + y\cos y\right)}. \bullet$$

6.148. $x^2 y - xy^2 = a$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$x^2 y - xy^2 = a \;\Rightarrow\; 2xy + x^2 y' - y^2 - 2xyy' = 0 \;\Rightarrow\; y' = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy}. \; \bullet$$

6.149. $x\sin y - y\cos x = 1$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$x\sin y - y\cos x = 1 \;\Rightarrow\; \sin y + x\cos yy' - y'\cos x + y\sin x = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sin y + y\sin x}{\cos x - x\cos y}. \; \bullet$$

6.150. $y = e^{x^2+y^2}$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$y = e^{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; y' = e^{x^2+y^2}\left(2x + 2yy'\right) \;\Rightarrow\; y' = \frac{2xe^{x^2+y^2}}{1 - 2ye^{x^2+y^2}}. \; \bullet$$

6.151. Најди го изводот на функцијата $2y = 1 + xy^3$ во точката (1,1).

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$2y = 1 + xy^3 \;\Rightarrow\; 2y' = y^3 + 3xy^2 y' \;\Rightarrow\; y' = \frac{y^3}{2 - 3xy^2},$$

од каде што следува дека $y'_{(1,1)} = -1$. ●

6.152. Покажи дека функцијата $xy - \ln y = 1$ ја задоволува релацијата $y^2 + (xy-1)y' = 0.$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$xy - \ln y = 1 \;\Rightarrow\; y + xy' - \frac{y'}{y} = 0 \;\Rightarrow\; y^2 + (xy-1)y' = 0. \; \bullet$$

6.6. Изводи од повисок ред

❖ Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна во интервалот (a,b). Нејзиниот извод $f'(x)$ е функција од променливата $x,$ дефинирана на тој интервал. Ако таа функција е диференцијабилна во некоја точка x од интервалот (a,b), тогаш изводот на $\left(f'(x)\right)'$, се нарекува *извод од втор ред* на функцијата $f(x)$ во точката x и се означува со $y'' = f''(x)$ или со $y^{(2)} = f^{(2)}(x).$ Значи

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x).$$

❖ Ако постои изводот за функцијата $f''(x)$ во точката x, тогаш тој е извод од трет ред за функцијата и го означуваме со $y'' = f'''(x)$ или со $y^{(3)} = f^{(3)}(x).$ Ако е дефиниран $(n-1)$-виот извод $f^{(n-1)}(x)$ на функцијата $f(x)$ за некое $n \in \mathbf{N},$ тогаш $n-$тиот извод на функцијата $f(x)$ се дефинира како извод на функцијата $f^{(n-1)}(x)$, односно

$$\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x)$$

и се означува со $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$. Функција која има $n-$ти извод се вика n *пати диференцијабилна*. Притоа важи $y^{(0)} = f^{(0)}(x) = f(x)$.

Најди втор извод на функциите: (задачи 6.153. - 6.162.)

6.153. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Решение. Имаме дека

$$f'(x) = 2x - 3 \text{ и } f''(x) = 2. \bullet$$

6.154. $f(x) = tgx$

Решение. Имаме дека

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ и } f''(x) = \frac{2\cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}. \bullet$$

6.155. $f(x) = xe^{\sin x}$

Решение. Имаме дека

$$f'(x) = e^{\sin x} + xe^{\sin x}\cos x \text{ и}$$

$$f''(x) = e^{\sin x}\cos x + e^{\sin x}\cos x + xe^{\sin x}\cos^2 x - xe^{\sin x}\sin x. \bullet$$

6.156. $f(x) = \sin^2 x$

Решение. Имаме дека

$$f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x \text{ и } f''(x) = 2\cos 2x. \bullet$$

6.157. $f(x) = x\ln x$

Решение. Имаме дека

$$f'(x) = \ln x + 1 \text{ и } f''(x) = \frac{1}{x}. \bullet$$

6.158. $f(x) = arctgx$

Решение. Имаме дека

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ и } f''(x) = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}. \bullet$$

6.159. $f(x) = xe^{2x}$

Решение. Имаме дека

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} \text{ и } f''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x} = 4e^{2x}(1+x). \bullet$$

6.160. $f(x) = e^{2x-1}$

Решение. Имаме дека

$$f'(x) = 2e^{2x-1} \text{ и } f''(x) = 4e^{2x-1}. \bullet$$

6.161. $f(x) = x^x$

Решение. Со логаритамско диференцирање добиваме дека

$f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ (види задача 6.117.)

$$f''(x) = \left(x^x\right)'(\ln x + 1) + x^x \frac{1}{x} = x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}. \bullet$$

6.162. $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

Решение. Со логаритамско диференцирање добиваме дека

$$\ln f(x) = x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = x(\ln 1 - \ln x) = -x\ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln x - 1.$$

Тогаш имаме дека

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{x}\right)^{x}(\ln x + 1)$$

$$f''(x) = -\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{x}\right)'(\ln x + 1) - \left(\frac{1}{x}\right)^{x}\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{x}\left((\ln x + 1)^{2} - \frac{1}{x}\right). \bullet$$

Најди трет извод на функциите: (задачи 6.163. - 6.166.)

6.163. $f(x) = \cos^{2} x$

Решение. Имаме дека

$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$ и $f''(x) = -2\cos 2x$ и $f'''(x) = 4\sin 2x.$ ●

6.164. $f(x) = (x-2)e^{x}$

Решение. Имаме дека

$f'(x) = e^{x} + (x-2)e^{x} = (x-1)e^{x},\ \ f''(x) = e^{x} + (x-1)e^{x} = xe^{x}$ и

$f'''(x) = e^{x} + xe^{x} = (x+1)e^{x}.$ ●

6.165. $f(x) = \frac{x}{2}\left(\ln^{2} x - 2\ln x + 2\right)$

Решение. Имаме дека

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\ln^{2} x - 2\ln x + 2\right) + \frac{x}{2}\left(\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right) = \frac{\ln^{2} x}{2},$$

$f''(x) = \frac{2\ln x}{2x} = \frac{\ln x}{x}$ и $f'''(x) = \frac{1-\ln x}{x^{2}}.$ ●

6.166. $f(x) = \ln(ax+b)$

Решение. Имаме дека

$$f'(x)=\frac{a}{ax+b},\quad f''(x)=-\frac{a^2}{(ax+b)^2} \text{ и } f'''(x)=\frac{2a^3}{(ax+b)^3}. \; \bullet$$

Најди четврти извод на функциите: (задачи 6.167. - 6.168.)

6.167. $f(x)=x^3\ln x$

Решение. Имаме дека

$$f'(x)=3x^2\ln x+x^2=x^2(3\ln x+1),\quad f''(x)=x(6\ln x+5),$$

$$f'''(x)=6\ln x+11 \text{ и } f^{iv}(x)=\frac{6}{x}. \; \bullet$$

6.168. $f(x)=e^x\cos x$

Решение. Имаме дека

$$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x),$$

$$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x,$$

$$f'''(x)=-2e^x(\sin x+\cos x) \text{ и } f^{iv}(x)=-4e^x\cos x=-4f(x). \; \bullet$$

Најди n – ти извод на функциите: (задачи 6.169. - 6.176.)

6.169. $f(x)=x^n$

Решение. Имаме дека

$$f'(x)=nx^{n-1},$$

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2},$$

$$f'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))x^{n-n}=n!. \bullet$$

6.170. $f(x)=e^x$

Решение. Имаме дека

$$f'(x)=e^x,\ \ f''(x)=e^x,\ \ f'''(x)=e^x,\ \ldots\ f^{(n)}(x)=e^x. \bullet$$

6.171. $f(x)=a^x$

Решение. Имаме дека

$$f'(x)=a^x\ln a,\ \ f''(x)=a^x\ln^2 a,\ \ f'''(x)=a^x\ln^3 a,\ldots f^{(n)}(x)=a^x\ln^n a. \bullet$$

6.172. $f(x)=xe^x$

Решение. Имаме дека

$$f'(x)=e^x(1+x),\ \ f''(x)=e^x(2+x),\ldots\ f^{(n)}(x)=e^x(n+x). \bullet$$

6.173. $f(x)=e^{ax}$

Решение. Имаме дека

$$f'(x)=ae^{ax},\ \ f''(x)=a^2e^{ax},\ \ldots\ f^{(n)}(x)=a^ne^{ax}. \bullet$$

6.174. $f(x)=e^{-x}$

Решение. Имаме дека

$$f'(x)=-e^{-x},\ \ f''(x)=e^{-x},\ \ f'''(x)=-e^{-x},\ \ldots\ f^{(n)}(x)=(-1)^ne^x. \bullet$$

6.175. $f(x)=\sin x$

Решение. Имаме дека

$$f'(x)=\cos x,\ \ f''(x)=-\sin x,\ \ f'''(x)=-\cos x,\ \ f^{iv}(x)=\sin x=f(x).$$

Индуктивно заклучуваме за секое $x \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, важи

$f^{(4n)}(x) = \sin x,\ \ f^{(4n+1)}(x) = \cos x,\ \ f^{(4n+2)}(x) = -\sin x,$

$f^{(4n+3)}(x) = -\cos x,$ односно

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \ \bullet$$

6.176. $f(x) = \cos x$

Решение. Имаме дека

$f'(x) = -\sin x,\ \ f''(x) = -\cos x,\ \ f'''(x) = \sin x,\ \ f^{iv}(x) = \cos x = f(x).$

Индуктивно заклучуваме за секое $x \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, важи

$f^{(4n)}(x) = \cos x,\ \ f^{(4n+1)}(x) = -\sin x,\ \ f^{(4n+2)}(x) = -\cos x,$

$f^{(4n+3)}(x) = \sin x,$ односно

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \ \bullet$$

Провери дали следните функции ги задоволуваат релациите:
(задачи 6.177. - 6.181.)

6.177. $y = xe^{-x}$ $\boxed{xy' = (1-x^2)y}$

Одговор. Не, бидејќи имаме дека

$$y' = (x+1)e^x, \text{ и}$$

$$xy' = x(x+1)e^x \neq (1-x^2)xe^x. \ \bullet$$

6.178. $y = (x-1)e^x$ $\boxed{y''' = y'' + y' - y}$

Решение. Да, бидејќи имаме дека

$$y' = xe^x, \quad y'' = (x+1)e^x, \quad y''' = (x+2)e^x, \text{ и}$$

$$y'' + y' - y = (x+1)e^x + xe^x - (x-1)e^x = (x+2)e^x = y'''. \; \bullet$$

6.179. $y = e^x \sin x$ $\boxed{y'' - 2y' + 2y = 0}$

Решение. Да, бидејќи имаме дека

$$y' = e^x(\sin x + \cos x), \quad y'' = 2e^x \cos x, \text{ и}$$

$$y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 2\sin x - 2\cos x + 2\sin x) = 0. \; \bullet$$

6.180. $y = \sin x + \cos x$ $\boxed{y^{iv} + y''' + y' + y = 0}$

Решение. Да, бидејќи имаме дека

$$y^{iv} + y''' + y' + y = \sin x - \cos x - \cos x - \sin x + \cos x - \sin x + \sin x + \cos x = 0. \; \bullet$$

6.181. $y = a + b\ln x$ $\boxed{xy'' + y' = 0}$

Решение. Да, бидејќи имаме дека

$$y' = \frac{b}{x}, \quad y'' = -\frac{b}{x^2}, \text{ и}$$

$$xy'' + y' = 0. \; \bullet$$

Најди втор извод на имплицитните функции: (задачи 6.182. - 6.186.)

6.182. $x^2 + y^2 = r^2$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$x^2 + y^2 = r^2 \;\Rightarrow\; 2x + 2yy' = 0 \;\Rightarrow\; x + yy' = 0 \;\Rightarrow\; 1 + (y')^2 + yy'' = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{1+y'^2}{y} = -\frac{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}{y} = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3}. \bullet$$

6.183. $y^3 - y + x = 0$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$y^3 - y + x = 0 \Rightarrow 3y^2y' - y' + 1 = 0 \Rightarrow 6yy'^2 + 3y^2y'' - y'' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{6yy'^2}{1-3y^2} = -\frac{6y}{\left(1-3y^2\right)^3}. \bullet$$

6.184. $y + x + e^y = 0$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$y + x + e^y = 0 \Rightarrow y' + 1 + e^y y' = 0 \Rightarrow y'' + e^y y'^2 + e^y y'' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-e^y y'^2}{1+e^y} = -\frac{e^y}{\left(1+e^y\right)^3}. \bullet$$

6.185. $x - y + e^y = 0$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$x - y + e^y = 0 \Rightarrow 1 - y' + e^y y' = 0 \Rightarrow -y'' + e^y y'^2 + e^y y'' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{e^y y'^2}{1-e^y} = \frac{e^y}{\left(1-e^y\right)^3}. \bullet$$

6.186. $y^2 = 2px$

Решение. Според правилото за наоѓање на извод на имплицитно зададена функција имаме дека

$$y^2 = 2px \;\Rightarrow\; 2yy' = 2p \;\Rightarrow\; yy' = p \;\Rightarrow\; y'^2 + yy'' = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y'' = \frac{-y'^2}{y} = -\frac{p^2}{y^3}. \;\bullet$$

6.7. Диференцијал на функција

❖ Нека $y = f(x)$ е диференцијабилна функција во точката x. Производот $f'(x)\Delta x$ се нарекува *прв диференцијал* на функцијата $f(x)$ во точката x и се означува со $df(x) = f'(x)\Delta x$. Бидејќи $d(x) = \Delta x$ може да запишеме

$$dy = f'(x)dx.$$

6.187. Најди ги нараснувањето и диференцијалот на функцијата:

1) $f(x) = 3x^2 - x$

2) $f(x) = 3x^2 - x,$ за $x = 1,\ \Delta x = 0{,}01$

3) $f(x) = 5x + x^2,$ за $x = 2,\ \Delta x = 0{,}001$

4) $f(x) = 2x^3 - x + 2,$ ако x се менува од $x = 1$ до $x = 1{,}02$

Решение. 1) Имаме дека

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 3x^2 + x =$$

$$= (6x - 1)\Delta x + 3(\Delta x)^2, \text{ и}$$

$$dy = f'(x)dx = (6x-1)dx.$$

2) За нараснувањето и за диференцијалот на функцијата имаме

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) - 3x^2 + x =$$

$$= (6x-1)\Delta x + 3(\Delta x)^2 = (6\cdot 1-1)\cdot 0,01 + 3\cdot 0,01^2 = 0,0503, \text{ и}$$

$$dy = (6x-1)\Delta x = (6\cdot 1-1)\cdot 0,01 = 0,0500.$$

Точната вредност на нараснувањето е $\Delta y = 0,0503.$ Нараснувањето на функцијата може приближно да се пресмета со помош на диференцијалот, односно $\Delta y \approx dy = 0.05,$ и притоа апсолутната грешка на оценката е $|\Delta y - dy| = 0,0003.$

3) За нараснувањето и за диференцијалот на функцијата имаме

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 5(x+\Delta x) + (x+\Delta x)^2 - 5x - x^2 =$$

$$= (5+2x)\Delta x + (\Delta x)^2 = (5+2\cdot 2)\cdot 0,001 + (0,001)^2 = 0,009001, \text{ и}$$

$$dy = (5+2x)\Delta x = (5+2\cdot 2)\cdot 0,001 = 0,009000.$$

Апсолутната грешка на оценката е $|\Delta y - dy| = 0,000001.$

4) За нараснувањето и за диференцијалот на функцијата имаме

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 2(x+\Delta x)^3 - (x+\Delta x) + 2 - 2x^3 + x - 2 =$$

$$= \left(6x^2-1\right)\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 =$$

$$= \left(6\cdot 1^2 - 1\right)0,02 + 6\cdot 1\cdot 0,02^2 + 2\cdot 0,02^3 = 0,102416, \text{ и}$$

$$dy = \left(6x^2-1\right)\Delta x = \left(6\cdot 1^2-1\right)0,02 = 0,1, \text{ каде што } \Delta x = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Апсолутната грешка на оценката е $|\Delta y - dy| = 0,02416.$ ●

6.188. Најди го диференцијалот на функцијата:

1) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}},$ за $x = 9,\ \Delta x = -0.01$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^m}$

3) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

4) $f(x) = e^{-x^2}$

5) $f(x) = x\ln x - x$

6) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

7) $f(x) = arctg\left(\dfrac{x}{a}\right)$

Решение. 1) За диференцијалот на функцијата имаме дека

$$dy = f'(x)dx = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = -\frac{1}{27}\cdot(-0.01) = 0.00037.$$

2) Имаме дека $dy = f'(x)dx = \dfrac{-m}{x^{m+1}}dx.$

3) Имаме дека $dy = f'(x)dx = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2}dx = \dfrac{1}{(1-x)^2}dx.$

4) Имаме дека $dy = f'(x)dx = -2xe^{-x^2}dx.$

5) Имаме дека $dy = f'(x)dx = (\ln x + 1 - 1)dx = \ln x dx.$

6) Имаме дека $dy = f'(x)dx = \dfrac{1+x}{1-x}\cdot\dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}dx = -\dfrac{2}{1-x^2}dx.$

7) Имаме дека $dy = f'(x)dx = \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}\cdot\dfrac{1}{a}dx = \dfrac{a}{x^2+a^2}dx.$ ●

6.189. Најди ги диференцијалите на имплицитните функции:

1) $(x+y)^2(2x+y)^3=1$ 2) $y=e^{-\frac{x}{y}}$

3) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 4) $x^2+2xy-y^2=a^2$

Решение. 1) Со непосредна примена на дефиницијата за диференцијал и правилото за диференцирање на имплицитна функција имаме

$$2(x+y)(dx+dy)(2x+y)^3+3(x+y)^2(2dx+dy)(2x+y)^2=0,$$

$$(x+y)(2x+y)^2\left(2(dx+dy)+3(x+y)(2dx+dy)(2x+y)^2\right)=0,$$

$$(10x+8y)dx+(7x+5y)dy=0,$$

$$dy=-\frac{10x+8y}{7x+5y}dx.$$

2) Со непосредна примена на дефиницијата за диференцијал и правилото за диференцирање на имплицитна функција имаме дека

$$dy=e^{-\frac{x}{y}}\left(-\frac{ydx-xdy}{y^2}\right),$$

$$y^2dy=e^{-\frac{x}{y}}(-ydx+xdy),$$

$$\left(y^2-x\cdot e^{-\frac{x}{y}}\right)dy=-y\cdot e^{-\frac{x}{y}}dx,$$

$$dy = \frac{-y \cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y^2 - x \cdot e^{-\frac{x}{y}}} dx,$$

$$dy = \frac{-y^2}{y^2 - x \cdot y} dx = \frac{y}{x - y} dx.$$

3) Со непосредна примена на дефиницијата за диференцијал и правилото за диференцирање на имплицитна функција имаме дека

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = arctg \frac{y}{x},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2xdx + 2ydy}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

$$\left(x + y \right) dx = \left(x - y \right) dy,$$

$$dy = \frac{x - y}{x + y} dx.$$

4) Со непосредна примена на дефиницијата за диференцијал и правилото за диференцирање на имплицитна функција имаме дека

$$2xdx + 2ydx + 2xdy - 2ydy = 0,$$

$$2(x + y)dx + 2(x - y)dy = 0,$$

$$dy = \frac{x + y}{y - x} dx. \ \bullet$$

6.190. Пресметај приближно $\sqrt[3]{64,1}$ со помош на диференцијал на функција.

Решение. Ја разгледуваме функцијата $f(x)=\sqrt[3]{x},$ во точката $x+\Delta x,$ каде што $x=64$ и $\Delta x=0,1$. Бидејќи $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$ имаме дека

$$\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Delta x.$$

Ставајќи во последната формула $x=64$ и $\Delta x=0,1,$ го добиваме приближното равенство

$$\sqrt[3]{64,1}\approx\sqrt[3]{64}+\frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}0,01=4,0020833. \bullet$$

6.191. Пресметај приближно $\sqrt[4]{17}$.

Решение. Ја разгледуваме функцијата $f(x)=\sqrt[4]{x}$ во точката $x+\Delta x,$ каде што $x=16$ и $\Delta x=1$. Бидејќи $f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}},$ имаме дека

$$\sqrt[4]{x+\Delta x}\approx\sqrt[4]{x}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\Delta x.$$

Ставајќи во последната формула $x=16$ и $\Delta x=1,$ го добиваме приближното равенство

$$\sqrt[4]{17}\approx\sqrt[4]{16}+\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{16^3}}\cdot 1=2+\frac{1}{4\cdot 8}\cdot 1=2.031. \bullet$$

6.192. Најди приближна вредност на функцијата:

1) $\sin 31^0$ 2) $\cos 61^0$

3) $e^{0,2}$ 4) $\sqrt{1+0,2}$

5) $tg44^0$ 6) $arctg1,5$

Решение. 1) Претворено во радијани $31^0=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}rad.$ Ја разгледуваме функцијата $f(x)=\sin x$ во точката $x+\Delta x,$ за $x=\frac{\pi}{6}$ и $\Delta x=\frac{\pi}{180}.$ Бидејќи $f'(x)=\cos x,$ имаме

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\approx\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{180}=0,5+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0,017=0,515.$$

2) Претворено во радијани $61^0=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}rad.$ Ја разгледуваме функцијата $f(x)=\cos x$ во точката $x+\Delta x,$ каде што $x=\frac{\pi}{3}$ и $\Delta x=\frac{\pi}{180}.$ Бидејќи $f'(x)=-\sin x,$ имаме

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)\approx\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\pi}{180}=0,5-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0,017=0,485.$$

3) Ја разгледуваме функцијата $f(x)=e^x$ во точката $x+\Delta x,$ каде што $x=0$ и $\Delta x=0,2.$ Бидејќи $f'(x)=e^x,$ го добиваме приближното равенство

$$e^{0,2}=e^{0+0,2}\approx e^0+e^0\cdot 0,2=1+0,2=1,2.$$

4) Ја разгледуваме функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ во точката $x+\Delta x,$ каде што $x=1$ и $\Delta x=0,2.$ Бидејќи $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},$ го добиваме приближното равенство

$$\sqrt{1+0.2} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0,2 = 1 + 0,1 = 1,1.$$

5) Претворено во радијани $44^0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\, rad.$ Ја разгледуваме функцијата $f(x) = tgx$ во точката $x + \Delta x,$ каде што $x = \frac{\pi}{4}$ и $\Delta x = \frac{\pi}{180}.$ Бидејќи $f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)},$ го добиваме приближното равенство

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) \approx tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 - \frac{1}{\frac{2}{4}} \cdot 0,017 =$$

$$= 1 - 0,034 = 0,966.$$

6) Ја разгледуваме функцијата $f(x) = arctgx$ во точката $x + \Delta x,$ каде што $x = 1$ и $\Delta x = 0,5.$ Бидејќи $f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$ го добиваме приближното равенство

$$arctg(1 + 0,05) \approx arctg1 + \frac{1}{2} \cdot 0,05 = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,81.$$ ●

6.8. Основни теореми во диференцијалното сметање

❖ *Теорема на Ферма.* Ако функцијата $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ има локален максимум (минимум) во точката $x_0 \in (a,b)$ и ако функцијата е диференцијабилна во таа точка, тогаш $f'(x_0) = 0$.

❖ *Теорема на Рол*. Ако функцијата $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ е тогаш постои точка $x_0 \in (a,b)$ таква што $f'(x_0) = 0$. непрекината на $[a,b]$ и диференцијабилна во интервалот (a,b) и $f(a) = f(b)$.

❖ *Теорема на Лагранж* (*Теорема за средна вредност*) Ако функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е непрекината на $[a,b]$ и диференцијабилна во интервалот (a,b), тогаш постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

❖ *Теорема на Коши*. Ако функциите $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ се непрекинати на $[a,b]$, диференцијабилни во интервалот (a,b) и $g'(x)\neq 0$ за секое $x\in(a,b)$, тогаш постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

6.193. Провери дали функцијата $f(x)=5x^4+1$ ги исполнува условите од теоремата на Ферма на интервалот $[1,2]$.

Решение. Функцијата $f(x)=5x^4+1$ е монотоно растечка на интервалот $[1,2]$. Тогаш, таа ја достигнува својата најмала, односно најголема вредност во точките $x_1=1$ и $x_2=2$. Според тоа, функцијата нема екстрем во внатрешна точка од интервалот $[1,2]$, па затоа не ги исполнува условите од теоремата на Ферма. ●

6.194. Покажи дека меѓу нулите на функцијата $f(x)=x^2-4x+3$ се наоѓа нула на нејзиниот извод.

Решение. Нули на функцијата $f(x)=x^2-4x+3$ се $x_1=1$ и $x_2=3$. Функцијата е непрекината на интервалот $[1,3]$ и диференцијабилна во секоја точка од интервалот $(1,3)$ и $f(1)=0=f(3)$. Од теоремата на

Рол следува дека постои точка $x_0 \in (1,3)$ таква што $f'(x_0)=0.$ Понатаму, имаме дека $f'(x)=2x-4,$ па од $f'(x)=0$ наоѓаме дека $x_0=2.$ ●

6.195. Покажи дека за функцијата $f(x)=x^3+x^2-2x$ се наоѓа нула на нејзиниот втор извод во интервалот $[-2,1].$

Решение. Нули на функцијата $f(x)=x^3+x^2-2x$ се $x_1=-2,$ $x_2=0$ и $x_3=1.$ Функцијата е непрекината и диференцијабилна од било кој ред во секоја точка и $f(-2)=f(0)=f(1)=0.$ Ги разгледуваме интервалите $[-2,0]$ и $[0,1].$ Од теоремата на Рол следува дека постојат точки $c_1 \in (-2,0)$ и $c_2 \in (0,1)$ такви што $f'(c_i)=0,$ $i=1,2.$ Понатаму, имаме дека функцијата f' ги исполнува условите на теоремата на Рол, односно е непрекината на интервалот $[c_1,c_2],$ диференцијабилна во интервалот (c_1,c_2) и $f'(c_1)=f'(c_2)=0,$ па според тоа постои точка $c \in (c_1,c_2) \subset [-2,1]$ за која важи $f''(c)=0.$ ●

6.196. Покажи дека равенката $4x^3+3x^2+2x-3=0$ има барем едно решение во интервалот $(0,1).$

Решение. Ги разгледуваме функциите

$$f(x)=4x^3+3x^2+2x-3 \text{ и } g(x)=x^4+x^3+x^2-3x+C.$$

Со проверка може да заклучиме дека $g'(x)=f(x).$ Функцијата $g(x)$ е непрекината на $[0,1]$ и диференцијабилна во секоја точка од интервалот $(0,1)$ и $g(0)=C=g(1).$ Од теоремата на Рол следува дека постои точка $x_0=(0,1)$ таква што $f(x_0)=g'(x_0)=0.$ ●

6.197. Провери дали функцијата $f(x)=5x^2-2$ ги исполнува условите од теоремата на Лагранж на интервалот $[-2,0]$.

Решение. Дадената функција е непрекината на интервалот $[-2,0]$ и диференцијабилна во интервалот $(-2,0)$, од каде што следува дека таа ги исполнува условите од теоремата на Лагранж на разгледуваниот интервал. За точката x_0 од теоремата на Лагранж имаме

$$f'(x_0)=10x_0 \text{ и } f'(x_0)=\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=-10,$$

од каде што добиваме дека $10x_0=-10,$ односно $x_0=-1.$ ●

6.198. Определи ги сите точки x_0 кои што ја задоволуваат теоремата за средна вредност за функцијата $f(x)=x^3+2x^2-x$ на $[-1,2]$.

Решение. Дадената функција е непрекината на интервалот $[-1,2]$ и диференцијабилна во интервалот $(-1,2)$ од каде што следува дека таа ги исполнува условите од теоремата на Лагранж на разгледуваниот интервал. За точката x_0 од теоремата на Лагранж имаме

$$f'(x_0)=3x_0^2+4x_0-1 \text{ и } f'(x_0)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{14-2}{3}=4,$$

од каде што добиваме дека $3x_0^2+4x_0-1=4,$ односно $3x_0^2+4x_0-5=0.$ Оттука имаме дека

$$x_0'=\frac{-4+\sqrt{16+60}}{6}\approx 0,7863\in[-1,2], \text{ и}$$

$$x_0''=\frac{-4-\sqrt{16+60}}{6}\approx -2.1196\notin[-1,2].$$

Значи, бараната точка е $x_0=0.7863.$ ●

6.199. Нека функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $[6,15]$, диференцијабилна во интервалот $(6,15)$. Ако $f(6)=-2$ и $f'(x)\le 10$, која е најголемата можна вредност за $f(15)$?

Решение. Од теоремата на Лагранж имаме дека

$f(15)-f(6)=f'(x_0)(15-6)$, односно

$$f(15)=f(6)+9f'(x_0)\le -2+9\cdot 10=88.$$

Значи, најголемата можна вредност за $f(15)$ е 88. ●

6.200. Со примена на теоремата на Лагранж докажи дека

$\sin(x+h)-\sin x=h\cos x_0$ каде што $x<x_0<x+h.$

Решение. Функцијата $f(x)=\sin x$ е непрекината на $[x,x+h]$ и диференцијабилна во $(x,x+h)$, па заради теоремата на Лагранж, постои точка $x_0\in(x,x+h)$ таква што

$f(x+h)-f(x)=f'(x_0)(x+h-x)$, односно

$\sin(x+h)-\sin x=h\cos x_0$. ●

6.201. За отсечокот од параболата $f(x)=x^2$ затворен меѓу точките $A(1,1)$ и $B(3,9)$, најди точка во која тангентата е паралелна со тетивата AB.

Решение. Треба да најдеме точка $x_0\in(1,3)$ така што

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(x_0). \qquad (*)$$

Бидејќи функцијата $f(x)=x^2$ ги исполнува условите на теоремата на Лагранж на сегментот $[1,3]$, постои точка $x_0 \in (1,3)$ со својство $(*)$, односно $\frac{9-1}{3-1}=2x_0$, од каде добиваме дека $x_0=2$. Точката $C(2,4)$ од параболата го има бараното својство. ●

6.202. Провери дали се исполнети условите на теоремата на Коши за функциите:

1) $f(x)=x^2+2$ и $g(x)=x^3-1$ на интервалот $[1,2]$

2) $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$ на интервалот $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Решение. 1) Функциите $f(x)=x^2+2$ и $g(x)=x^3-1$ ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на интервалот $[1,2]$ бидејќи се непрекинати на интервалот $[1,2]$, диференцијабилни во интервалот $(1,2)$ и $g'(x)\neq 0$ за секое $x\in(1,2)$. Тогаш постои точка $x_0 \in (1,2)$ таква што

$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, односно $\frac{2^2+2-(1^2+2)}{2^3-1-(1^3-1)}=\frac{2x_0}{3x_0^2}$, од каде што добиваме дека $x_0=\frac{14}{9}$.

2) Аналогно се покажува дека дадените функции ги исполнуваат условите на теоремата на Коши. Може да се утврди дека $x_0=\frac{\pi}{4}$. ●

6.9. Лопиталово правило

❖ Нека функциите $f,g:[a,b]\to \mathbf{R}$ се непрекинати на интервалот $[a,b]$, диференцијабилни во интервалот (a,b) и за некое $x_0 \in (a,b)$ важи $f(x_0)=g(x_0)=0$. Исто така, нека $g'(x)\neq 0$, за секое $x\neq x_0$. Ако постои $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, тогаш постои и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ и важи

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Со примена на Лопиталовото правило, определи ги следните гранични вредности: (задачи 6.203. – 6.221.)

6.203. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+3x-1}{2x}$

Решение. Функциите $f(x)=\cos x+3x-1$ и $g(x)=2x$ се диференцијабилни во интервал што ја содржи нулата. Изразот е од облик $\frac{0}{0}$, кога $x\to 0$, па со примена на Лопиталовото правило имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+3x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3}{2}=\frac{3}{2}. \bullet$$

6.204. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx},\quad a,b\neq 0$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{a\sin ax}{\cos ax}}{-\frac{b\sin bx}{\cos bx}}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax\cdot\cos bx}{b\sin bx\cdot\cos ax}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^2\sin ax}{ax}\cdot\cos bx}{\frac{b^2\sin bx}{bx}\cdot\cos ax}=\frac{a^2}{b^2}. \bullet$$

6.205. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}}{1}=n. \bullet$$

6.206. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=\ln a. \bullet$$

6.207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1. \bullet$$

6.208. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{\cos x}}{e^x-e^{-x}}$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{\cos x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-x\sin xe^{\cos x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e}{2}. \bullet$$

6.209. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-e^{\sin x}}$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-e^{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-\cos x\cdot e^{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x+\sin x\cdot e^{\sin x}-\cos^2 x\cdot e^{\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x+\cos x\cdot e^{\sin x}+3\cos x\sin x\cdot e^{\sin x}-\cos^3 xe^{\sin x}}=1. \bullet$$

6.210. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3\cos x}$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2\cos x-x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\left(6x+x^3\right)\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{(6+3x^2)\cos x-(6x+x^3)\sin x}=\frac{1}{6}. \bullet$$

Определи ги следните гранични вредности: (задачи 6.211.-6.215.)

6.211. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}$

Решение. Изразот е од облик $\frac{\infty}{\infty}$, кога $x\to\infty$, па со примена на Лопиталовото правило имаме дека

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x+2}{2x}=\frac{6}{2}=3. \bullet$$

6.212. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3\ln x}{x^b},\quad b>0$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x^b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{bx^{b-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{bx^b}=0. \bullet$$

6.213. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0. \bullet$$

6.214. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x+e^x}$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0. \bullet$$

6.215. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(ae^x+b)}{\ln(ce^x+d)}$

Решение. Исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ae^x+b)}{\ln(ce^x+d)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ae^x}{ae^x+b}}{\frac{ce^x}{ce^x+d}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ace^x}{ace^x}=1. \bullet$$

Определи ги следните гранични вредности (6.216.-6.221.)

6.216. $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}$

Решение. Изразот е од облик $\infty \cdot 0,$ кога $x \to \infty.$ Делејќи ги броителот и именителот со $e^{-x},$ изразот ќе добие облик $\frac{\infty}{\infty}.$ Сега се исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0. \bullet$$

6.217. $\lim_{x\to 0} x\ln x$

Решение. Изразот е од облик $0\cdot(-\infty),$ кога $x \to 0.$ Делејќи ги броителот и именителот со $x,$ изразот ќе добие облик $\frac{-\infty}{\infty}.$ Сега се исполнети се условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln x}{1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0. \bullet$$

6.218. $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$

Решение. Изразот е од облик $\infty \cdot 0,$ кога $x \to \infty.$ Делејќи ги броителот и именителот со $x,$ изразот ќе добие облик $\frac{0}{0}.$ Тогаш се исполнети условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-a}{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)}}{\frac{-1}{x^2}} = a. \bullet$$

6.219. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{a}{x}}-1\right)$

Решение. Изразот е од облик $\infty\cdot 0,$ кога $x\to\infty.$ Делејќи ги броителот и именителот со $x,$ изразот ќе добие облик $\frac{0}{0}.$ Тогаш се исполнети условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{a}{x}}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{a}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-a}{x^2}e^{\frac{a}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}=a. \quad \bullet$$

6.220. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

Решение. Изразот е од облик $\infty-\infty,$ кога $x\to 1.$ $x\to 1.$ Со сведување на заеднички именител изразот добива облик $\frac{0}{0}.$ Тогаш се исполнети условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}. \quad \bullet$$

6.221. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

Решение. Изразот е од облик $\infty-\infty$, кога $x\to 1$. Со сведување на заеднички именител изразот добива облик $\frac{0}{0}$. Тогаш се исполнети условите за примена на Лопиталовото правило, па имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0. \bullet$$

6.10. Растење и опаѓање на функција

Нека $y=f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a,b). Тогаш, функцијата

- расте во интервалот (a,b) ако и само ако $y'(x)\geq 0,$ за $x\in(a,b)$
- опаѓа во интервалот (a,b) ако и само ако $y'(x)\leq 0,$ за $x\in(a,b).$

Определи ги интервалите на монотоност на следните функции:
(задачи 6.222. – 6.231.)

6.222. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x-4$

Решение. Имаме дека $y'(x)=x^2-3x+2.$ Тогаш наоѓаме дека

$y'(x)>0,$ за секое $x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty),$ што значи дека функцијата монотоно расте во $(-\infty,1)\cup(2,\infty);$

$y'(x)<0,$ за секое $x\in(1,2),$ што значи дека функцијата монотоно опаѓа во интервалот $(1,2).$ $\bullet$

6.223. $y=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Решение. Имаме дека $y'(x)=\dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$. Тогаш наоѓаме дека

$y'(x)>0,$ за секое $x\in(-\infty,0)$, што значи дека функцијата монотоно расте во интервалот $x\in(-\infty,0)$;

$y'(x)<0,$ за секое $x\in(0,\infty)$, што значи дека функцијата монотоно опаѓа во интервалот $(0,\infty)$. ●

6.224. $y=\dfrac{1}{x^2}$

Решение. Имаме дека $y'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$. Тогаш наоѓаме дека

$y'(x)>0,$ за секое $x\in(-\infty,0)$, што значи дека функцијата монотоно расте во интервалот $(-\infty,0)$;

$y'(x)<0,$ за секое $x\in(0,\infty)$, што значи дека функцијата монотоно опаѓа во интервалот $(0,\infty)$. ●

6.225. $y=\ln x$

Решение. Имаме дека $y'(x)=\dfrac{1}{x}$. Тогаш имаме дека $y'(x)>0,$ за секое $x\in D_f=(0,\infty)$, што значи дека функцијата монотоно расте на интервалот $(0,\infty)$. ●

6.226. $y=x^2-2x+1$

Решение. Имаме дека $y'(x)=2(x-1)$. Тогаш наоѓаме дека

$y'(x)>0,$ за секое $x\in(1,\infty),$ што значи дека функцијата монотоно расте во интервалот $(1,\infty)$;

$y'(x)<0,$ за секое $x\in(-\infty,1),$ што значи дека функцијата монотоно опаѓа во интервалот $(-\infty,1)$. ●

6.227. $y=x-\dfrac{1}{x}$

Решение. Имаме дека $y'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0,$ за секое $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty),$ од каде што заклучуваме дека дадената функција монотоно расте на интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$. ●

6.228. $y=\sqrt{x+2}$

Решение. Имаме дека $y'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}>0,$ за секое $x\in(-2,\infty),$ од каде што заклучуваме дека дадената функција монотоно расте на целата дефинициона област. ●

6.229. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$

Решение. Бидејќи имаме дека $y'(x)=\dfrac{16x}{(3+x^2)^2}>0,$ за секое $x>0,$ и $y'(x)=\dfrac{16x}{(3+x^2)^2}<0,$ за секое $x<0,$ заклучуваме дека функцијата расте во интервалот $(0,\infty)$ и опаѓа во интервалот $(-\infty,0)$. ●

6.230. $y=x\ln x$

Решение. Имаме дека $y'(x)=\ln x+1$. Тогаш наоѓаме дека

$y'(x)>0,$ за секое $x>e^{-1},$ односно за секое $x\in\left(\frac{1}{e},\infty\right),$ што значи дека функцијата монотоно расте во интервалот $\left(\frac{1}{e},\infty\right);$

$y'(x)>0,$ за секое $x<e^{-1},$ односно за секое $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right),$ што значи дека функцијата монотоно опаѓа во интервалот $\left(0,\frac{1}{e}\right).$ ●

6.231. $y=-\dfrac{x-\sin x\cos x}{2}$

Решение. Имаме дека $y'(x)=-\dfrac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{2}=-\sin^2 x\le 0,$ за секое $x\in\mathbf{R},$ од каде што заклучуваме дека дадената функција опаѓа на целата реална права. ●

6.11. Конвексност и конкавност

❖ Нека $y=f(x)$ е два пати диференцијабилна во интервалот (a,b). Тогаш таа е

- конвексна во интервалот (a,b) ако и само ако $y''(x)\ge 0,$ за секое $x\in(a,b).$
- конкавна во интервалот (a,b) ако и само ако $y''(x)\le 0,$ за секое $x\in(a,b).$

Испитај ја конвексноста и конкавноста на функциите:

(задачи 6.232. – 6.239.)

6.232. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+2x-4$

Решение. Имаме дека $y'(x)=x^2-3x+2$ и $y''(x)=2x-3.$ Тогаш

$y''(x)>0,$ за секое $x\in\left(\dfrac{3}{2},\infty\right),$ што значи дека функцијата е конвексна во интервалот $\left(\dfrac{3}{2},\infty\right);$

$y''(x)<0,$ за $x\in\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right),$ што значи дека функцијата е конкавна во интервалот $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right).$ ●

6.233. $y=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Решение. Имаме дека $y'(x)=\dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ и $y''(x)=\dfrac{e^x(e^{2x}-4e^x+1)}{(e^x+1)^4}>0,$ за секое $x\in\mathbf{R},$ што значи, функцијата е конвексна на целата реална права. ●

6.234. $y=\dfrac{1}{x^2}$

Решение. Од $y'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$ и $y''(x)=\dfrac{6}{x^4}>0,$ за секое $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty),$ може да заклучиме дека функцијата е конвексна на интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty).$ ●

6.235. $y=\ln x$

Решение. Од $y'(x)=\frac{1}{x}$ и $y''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$ за секое $x\in(0,\infty),$ може да заклучиме дека функцијата е конкавна на целата дефинициона област. ●

6.236. $y=x^2-2x+1$

Решение. Од $y'(x)=2x-2$ и $y''(x)=2>0,$ за секое $x\in\mathbf{R},$ може да заклучиме дека функцијата е конвексна на целата реална права. ●

6.237. $y=x-\frac{1}{x}$

Решение. Имаме дека $y'(x)=1+\frac{1}{x^2}$ и $y''(x)=-\frac{2}{x^3}.$ Тогаш

$y'(x)>0,$ за секое $x\in(-\infty,0),$ што значи, функцијата е конвексна на интервалот $(-\infty,0);$

$y'(x)<0,$ за секое $x\in(-\infty,0),$ што значи, функцијата е конкавна на интервалот $(0,\infty).$ ●

6.238. $y=\sqrt{x+2}$

Решение. Имаме дека $y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ и $y''(x)=-\frac{1}{4(x+2)\sqrt{x+2}}.$ Бидејќи $y''(x)<0,$ за секое $x\in(-2,\infty),$ функцијата е конкавна на целата дефиниционата област. ●

6.239. $y=x\ln x$

Решение. Имаме дека $y'(x)=\ln x+1$ и $y''(x)=\frac{1}{x}$. Бидејќи $y''(x)>0$, за секое $x\in(0,\infty)$, функцијата е конвексна на целата дефинициона област. ●

6.12. Екстремни вредности на функција. Превојни точки

❖ Нека $y=f(x)$ е два пати диференцијабилна функција во околина на точката $x_0\in(a,b)$ и $y'(x_0)=0$.

- Ако $y''(x_0)>0$, тогаш функцијата во таа точка има минимум.
- Ако $y''(x_0)<0$, тогаш функцијата во таа точка има максимум.

❖ Екстремните вредности на функцијата $y=f(x)$ ги наоѓаме по следниот редослед:

1. Најнапред го определуваме првиот извод на функцијата $y'(x)$.
2. Потоа ја решаваме равенката $y'(x)=0$, чиишто реални корени се апсцисите на стационарните точки (потенцијални екстреми).
3. За реалните корени на равенката го испитуваме знакот на вториот извод на функцијата $y''(x)$, за секој корен поодделно.

❖ Нека $y=f(x)$ е три пати диференцијабилна функција во околина на точката $x_0\in(a,b)$. Ако $f''(x_0)=0$ и $f'''(x_0)\neq 0$, тогаш точката x_0 е превојна точка.

❖ Превојните точки на функцијата $f(x)$ ги наоѓаме по следниот редослед:

1. Најнапред го определуваме вториот извод $f''(x)$.

2. Потоа ја решаваме равенката $f''(x)=0$, чиишто реални корени се потенцијалните превојни точки.

3. За реалните корени на равенката испитуваме дали $f'''(x)$ е различно од нула, за секој корен поодделно.

Најди ги екстремните вредности на функциите: (задачи 6.240. –6.250.)

6.240. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x-4$

Решение. Со анулирање на првиот извод

$$y'(x)=x^2-3x+2$$

на функцијата, односно со решавање на равенката $x^2-3x+2=0$ ги добиваме апсцисите на стационарните точки $x_1=1$ и $x_2=2.$ За да испитаме дали во тие точки функцијата има минимум или максимум го определуваме вториот извод на функцијата $y''(x)=2x-3$ во тие точки. Од $y''(1)=2\cdot 1-3=-1<0,$ заклучуваме дека функцијата во точката $x_1=1$ има локален максимум $y=-\frac{19}{6};$ од $y''(2)=2\cdot 2-3=1>0,$ заклучуваме дека функцијата во точката $x_2=2$ има локален минимум $y=-\frac{10}{3}.$ ●

6.241. $y=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Решение. Со анулирање на првиот извод

$$y'(x)=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

на функцијата, односно со решавање на равенката $\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}=0$ ја добиваме апсцисата на стационарната точка $x=0.$ За вториот извод на функцијата $y''(x)=\frac{2e^x(-e^{2x}+e^x-1)}{(e^x+1)^4}$ во стационарната имаме дека

$y''(0)=\frac{2e^0(-e^{2\cdot 0}+e^0-1)}{(e^0+1)^4}=-\frac{1}{8}<0,$ од каде што заклучуваме дека во точката $x=0$ функцијата има локален максимум $y=\frac{1}{4}.$ ●

6.242. $y=\frac{1}{x^2}$

Решение. Бидејќи

$$y'(x)=-\frac{2}{x^3}\neq 0, \text{ за секое } x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty),$$

заклучуваме дека функцијата нема екстрем во ниту една точка од дефиниционата област. ●

6.243. $y=\ln x$

Решение. Заради

$$y'(x)=\frac{1}{x}\neq 0, \text{ за секое } x\in(0,\infty),$$

имаме дека функцијата нема екстрем во ниедна точка од дефиниционата област. ●

6.244. $y=x^2-2x+1$

Решение. Со анулирање на првиот извод на функцијата

$$y'(x)=2x-2\ ,$$

односно со решавање на равенката $2x-2=0$ ја добиваме апсцисата на стационарната точка $x=1.$ За вториот извод $y''(x)=2$ во стационарната имаме дека $y''(1)=2>0,$ од каде што заклучуваме дека во точката $x=1$ функцијата има локален минимум $y=0.$ ●

6.245. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$

Решение. Со анулирање на првиот извод

$$y'(x)=\frac{16x}{(3+x^2)^2},$$

односно со решавање на равенката $\dfrac{16x}{(3+x^2)^2}=0,$ ја добиваме апсцисата на стационарната точка $x=0.$ За вториот извод на функцијата $y''(x)=\dfrac{48(1-x^2)}{(3+x^2)^3}$ во стационарната имаме дека $y''(0)=\dfrac{48}{3^3}>0,$ од каде што заклучуваме дека во точката $x=0$ функцијата има локален минимум $y=\dfrac{1}{3}.$ ●

6.246. $y=x\ln x$

Решение. Со анулирање на првиот извод

$$y'(x)=\ln x+1,$$

односно со решавање на равенката $\ln x+1=0$ ја добиваме апсцисата на стационарната точка $x=\dfrac{1}{e}.$ За вториот извод $y''(x)=\dfrac{1}{x}$ во стационарната имаме дека $y''\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^{-1}}=e>0,$ од каде што заклучуваме дека во точката $x=\frac{1}{e}$ функцијата има локален минимум $y=-\frac{1}{e}.$ ●

6.247. $y=e^{x}+e^{-x}$

Решение. Со анулирање на првиот извод

$$y'(x)=e^{x}-e^{-x},$$

односно со решавање на равенката $e^{x}-e^{-x}=0,$ ја добиваме апсцисата на стационарната точка $x=0.$ За вториот извод $y''(x)=e^{x}+e^{-x}$ во стационарната имаме дека $y''(0)=2>0,$ од каде што заклучуваме дека во точката $x=0$ функцијата има локален минимум $y=2.$ ●

6.248. $y=2\sin x+\sin 2x$

Решение. Со анулирање на првиот извод на функцијата

$$y'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2(2\cos^{2}x+\cos x-1),$$

ја добиваме равенката $2\cos^{2}x+\cos x-1=0.$ Со воведување на смената $\cos x=t,$ ја добиваме квадратната равенка $2t^{2}+t-1=0$ чиишто решенија се $t_1=\frac{1}{2}$ и $t_2=-1.$ Од $\cos x=\frac{1}{2}$ и $\cos x=-1,$ следува дека екстремите ќе ги бараме во точките

$$x_k=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad z_k=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad u_k=(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$$

За вториот извод $y''(x)=-2\sin x-4\sin 2x$ во стационарните точки имаме дека

$y''(x_k) < 0,\ \ k \in \mathbf{Z},$ од каде што заклучуваме дека во точките $x_k,\ k \in \mathbf{Z}$ функцијата има локален максимум $y(x_k) = 3\sqrt{3};$

$y''(z_k) > 0,\ \ k \in \mathbf{Z},$ од каде што заклучуваме дека во точките $z_k,\ k \in \mathbf{Z}$ функцијата има локален минимум во точките $y(z_k) = -3\sqrt{3};$

$y''(u_k) = 0,\ \ k \in \mathbf{Z},$ па за наведените точки немаме одговор, односно потребни се дополнителни испитувања. ●

6.249. $y = e^x \sin x$

Решение. Со анулирање на првиот извод на

$$y'(x) = e^x (\sin x + \cos x)$$

ја добиваме равенката $\cos x + \sin x = 0,$ од каде што следува дека апсцисите на стационарните точки се

$$x_k = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad z_k = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Бидејќи $y''(x) = e^x \cos x,$ имаме дека

$y''(x_k) > 0,\ \ k \in \mathbf{Z},$ од каде што заклучуваме дека во точките $x_k,\ k \in \mathbf{Z}$ функцијата има локален минимум $y(x_k) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi},\ \ k \in \mathbf{Z};$

$y''(z_k) < 0,\ \ k \in \mathbf{Z},$ од каде што заклучуваме дека во точките $z_k,\ k \in \mathbf{Z}$ функцијата има локален максимум $y(z_k) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi},\ \ k \in \mathbf{Z}.$ ●

6.250. $y = x^3 + x^4$

Решение. Со анулирање на првиот извод

$$y'(x) = 3x^2 + 4x^3,$$

односно со решавање на равенката $3x^2 + 4x^3 = 0$ ги добиваме апсцисите на стационарните точки $x = 0$ и $x = -\frac{3}{4}$. За вториот извод $y''(x) = 6x + 12x^2$, во стационарните точки имаме дека $y''\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} > 0$, од каде што заклучуваме дека во точката $x = -\frac{3}{4}$ функцијата има локален минимум $y = -\frac{27}{256}$. ●

6.251. Одреди ги превојните точки на функцијата $y = x^4 - 6x^2 + 5x + 3$.

Решение. Со анулирање на вториот извод

$$y''(x) = 12(x^2 - 1),$$

односно со решавање на равенката $12(x^2 - 1) = 0$ ги добиваме апсцисите на потенцијалните превојни точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. За третиот извод на функцијата $y'''(x) = 24x$, имаме $y'''(-1) = -24 \neq 0$ и $y'''(1) = 24 \neq 0$, од каде што следува дека $x = -1$ и $x = 1$ се превојни точки. ●

6.252. Меѓу правоаголниците со дадена обиколка $2s$, најди го правоаголникот со максимална плоштина.

Решение. Нека x и y се страните на правоаголникот. Обиколката на правоаголникот е $2x + 2y = 2s$, од каде што имаме $y = s - x$. Плоштината на правоаголникот е

$$P(x) = xy = x \cdot (s - x) = sx - x^2.$$

Нејзиниот извод

$$P'(x) = s - 2x$$

се анулира за $x = \frac{s}{2}$. Бидејќи имаме $P''(x) = -2 < 0$, следува дека квадратот со страна $x = \frac{s}{2}$ има максимална плоштина $P_{\max} = \frac{s^2}{4}$. ●

6.253. Над страните на правоаголник со дадена обиколка $2s$ конструирани се полукругови нанадвор. Определи кога плоштината на така добиената фигура е минимална?

Решение. Нека x и y се страните на правоаголникот. Обиколката на правоаголникот е $2x + 2y = 2s$, од каде што имаме дека $y = s - x$.

Плоштината на добиената фигура е

$$P(x) = xy + 2\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2 \pi\right] = xs - x^2 + (s^2 - 2xs + 2x^2)\frac{\pi}{4}.$$

Нејзиниот извод

$$P'(x) = s - 2x + \frac{\pi}{4}(-2s + 4x)$$

се анулира за $x = \frac{s}{2}$. Бидејќи $P''(x) = -2 + \pi > 0$, следува дека за квадрат со страна $x = \frac{s}{2}$ добиената фигура има минимална плоштина која што изнесува $P_{\min} = \frac{s^2(\pi + 2)}{8}$. ●

6.254. Над дадена хипотенуза c да конструирај правоаголен триаголник со максимална плоштина.

Решение. Нека x и y се катетите на триаголникот. Од условот во задачата имаме дека $y=\sqrt{c^2-x^2}$. Плоштината на триаголникот е

$$P(x)=\frac{xy}{2}=\frac{x\sqrt{c^2-x^2}}{2}.$$

Нејзиниот извод

$$P'(x)=\frac{1}{2}\frac{c^2-2x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}$$

се анулира за $x=\frac{\sqrt{2}}{2}c.$ Бидејќи $P''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)<0,$ следува дека за триаголник со катета $x=\frac{\sqrt{2}}{2}c$ има максимална плоштина $P_{\max}=\frac{c^2}{4}.$ ●

6.255. Определи го правоаголникот со периметар $4a$ којшто има максимална плоштина.

Решение. Нека x и y се страните на правоаголникот. Обиколката на правоаголникот е $2x+2y=4a,$ од каде што имаме $y=2a-x.$ Плоштината на правоаголникот е

$$P(x)=xy=x(2a-x)=2ax-x^2.$$

Нејзиниот извод

$$P'(x)=2(a-x)=0$$

се анулира за $x=a.$ Бидејќи имаме дека $P''(a)=-2<0,$ следува дека квадратот со страна $x=a$ има максимална плоштина $P_{\max}=a^2.$ ●

6.256. Кој позитивен реален број собран со својата реципрочна вредност дава најмал збир?

Решение. Нека x е позитивен реален број. Од условот во задачата збирот е определен со функцијата

$$y(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Нејзиниот извод

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

се анулира за $x = 1$. Од вториот извод $y''(x) = \frac{2}{x^3}$, заради $y''(1) = 2 > 0$ следува дека бројот 1 собран со својата реципрочна вредност дава најмал збир $y_{\min} = 2$. ●

6.257. Определи ги димензиите на правоаголен плац, ако со ограда долга $200\,m$ треба да се загради двор со максимална плоштина.

Решение. Нека x и y се страните на правоаголниот плац. Обиколката на правоаголникот е $2x + 2y = 200$, од каде што имаме $y = 100 - x$. Плоштината на правоаголникот е

$$P(x) = xy = x(100 - x) = 100x - x^2.$$

Нејзиниот извод

$$P'(x) = 100 - 2x$$

се анулира за $x = 50$. Бидејќи имаме дека $P''(50) = -2 < 0$, плац во форма на квадрат со страна $50\,m$ има максимална плоштина која што изнесува $P_{\max} = 2500\,m^2$. ●

6.13. Графичко прикажување на функции

Испитај го текот и скицирај го графикот на функциите:
(задачи 6.258. – 6.267.)

6.258. $y = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$

Решение. 1. Функцијата е дефинирана на целата реална права, односно $D_f = \mathbf{R}$.

2. Функцијата не е ниту парна ниту непарна. Не е периодична.

3. За $x = 0$ имаме $y = -12$. Со разложување на аналитичкиот израз на множители добиваме $2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 2(x-1)(x-2)(x-3)$, од каде што заклучуваме дека $y = 0$ за $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. Според тоа, графикот ја сече $y-$оската во точката $(0,-12)$, и $x-$оската во точките $(1,0)$, $(2,0)$ и $(3,0)$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^3 - 12x^2 + 22x - 12\right) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3 - 12x^2 + 22x - 12\right) = -\infty$,

па функцијата нема хоризонтална, вертикална, ниту коса асимптота.

5. Првиот извод на функцијата

$$y'(x) = 6x^2 - 24x + 22 = 6\left(x - 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

се анулира во точките $x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. $y'(x) > 0$, за секое $x \in \left(-\infty, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$, функцијата монотоно расте во интервалите $\left(-\infty, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$;

$y'(x) < 0,$ за секое $x \in \left(2-\frac{\sqrt{3}}{3}, 2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$ функцијата монотоно опаѓа во интервалот $\left(2-\frac{\sqrt{3}}{3}, 2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$

7. Вториот извод на функцијата е $y''(x) = 12x - 24 = 12(x-2).$

$y''\left(2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -4\sqrt{3} < 0,$ во точката $x = 2-\frac{\sqrt{3}}{3}$ има максимум;

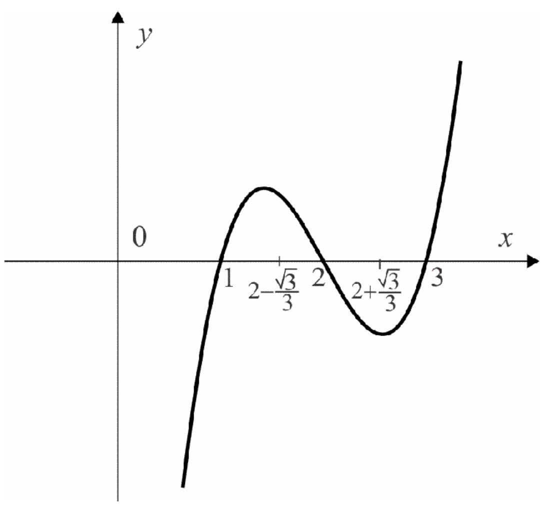
$y''\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 4\sqrt{3} > 0,$ во точката $x = 2+\frac{\sqrt{3}}{3}$ има минимум.

8. Бидејќи $y''(2) = 0$ и $y'''(2) = 12 \neq 0,$ функцијата има превој во $x = 2.$

$y''(x) < 0,$ за секое $x \in (-\infty, 2),$ функцијата е конкавна во $(-\infty, 2);$

$y''(x) > 0,$ за секое $x \in (2, \infty),$ функцијата е конвексна во $(2, \infty).$

9. Графикот е прикажан на слика 20. ●



Слика 20.

6.259. $y = x\left(x^2 - 12\right)$

Решение. 1. Функцијата е дефинирана на целата реална права, односно $D_f = \mathbf{R}$.

2. Функцијата е непарна, па нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток. Функцијата не е периодична.

3. За $x = 0$ имаме дека $y = 0$. За $y = 0$ имаме дека $x = -\sqrt{12}$ и $x = \sqrt{12}$. Според тоа, графикот минува низ координатниот почеток, односно низ точката $(0,0)$, и ја сече $x-$оската во точките $\left(-\sqrt{12},0\right)$ и $\left(\sqrt{12},0\right)$.

4. За однесувањето на функцијата на краиштата на дефиниционата област имаме дека

$$\lim_{x\to\infty} x\left(x^2 - 12\right) = \infty \text{ и } \lim_{x\to-\infty} x\left(x^2 - 12\right) = -\infty,$$

па функцијата нема хоризонтална, вертикална, ниту коса асимптота.

5. Првиот извод на функцијата

$$y'(x) = \left(x^2 - 12\right) + 2x^2 = 3(x-2)(x+2)$$

се анулира во точките $x = 2$ и $x = -2$.

6. $y'(x) > 0$, за секое $x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$, па затоа функцијата монотоно расте во интервалите $(-\infty,-2)$ и $(2,\infty)$;

$y'(x) < 0$, за секое $x \in (-2,2)$, па затоа функцијата монотоно опаѓа во интервалот $(-2,2)$.

7. Вториот извод на функцијата е $y''(x) = 6x$. Бидејќи

$y''(-2) = -12 < 0,$ заклучуваме дека во точката $x = -2$ функцијата има локален максимум; и

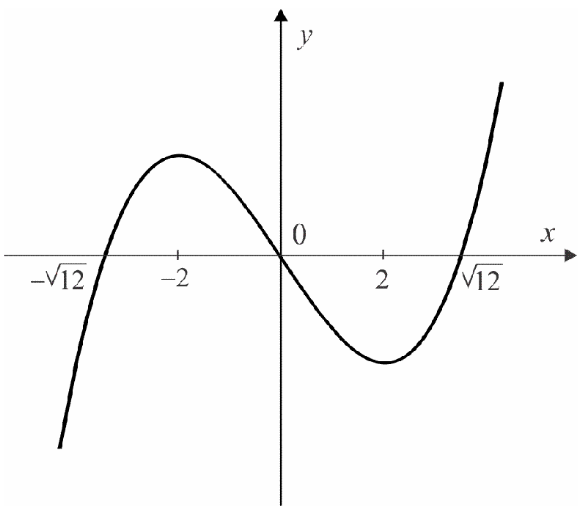
$y''(2) = 12 > 0,$ заклучуваме дека во точката $x = 2$ функцијата има локален минимум.

8. Бидејќи вториот извод на функцијата $y''(x) = 6x$ се анулира во точката $x = 0,$ односно $y''(0) = 0$ и $y'''(0) = 6 \neq 0,$ заклучуваме дека функцијата има превој во точката $x = 0.$ За интервалите на конвексност имаме дека

$y''(x) < 0,$ за секое $x \in (-\infty, 0),$ па според тоа функцијата е конкавна во интервалот $(-\infty, 0);$

$y''(x) > 0,$ за секое $x \in (0, \infty),$ па според тоа функцијата е конвексна во интервалот $(0, \infty).$

9. Графикот е прикажан на слика 21. ●



Слика 21.

6.260. $y = 2x^2 - x^4$

Решение. 1. Функцијата е определена на целата реална права, односно $D_f = \mathbf{R}$.

2. Функцијата е парна, па нејзиниот график е симетричен во однос на y – оската. Функцијата не е периодична.

3. За $x = 0$ имаме дека $y = 0$. За $y = 0$ имаме дека $x = -\sqrt{2}$ и $x = \sqrt{2}$. Според тоа, графикот минува низ координатниот почеток, односно низ точката $(0,0)$, и ја сече x – оската во точките $\left(-\sqrt{2},0\right)$ и $\left(\sqrt{2},0\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^2 - x^4\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(2 - x^2\right) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^2 - x^4\right) = -\infty$,

па функцијата нема хоризонтална, вертикална, ниту коса асимптота.

5. Првиот извод на функцијата

$$y'(x) = 4x\left(1 - x^2\right)$$

се анулира во точките $x = 0$, $x = -1$ и $x = 1$.

6. $y'(x) > 0$, за секое $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$, функцијата монотоно расте во интервалите $(-\infty,-1)$ и $(0,1)$;

$y'(x) < 0$, за секое $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$, функцијата монотоно опаѓа во интервалите $(-1,0)$ и $(1,\infty)$.

7. Вториот извод на функцијата е $y''(x) = 4 - 12x^2$. Бидејќи

$y''(-1) = -8 < 0$, во точката $x = -1$ функцијата има локален максимум;

$y''(0) = 4 > 0$, во точката $x = 0$ функцијата има локален минимум; и

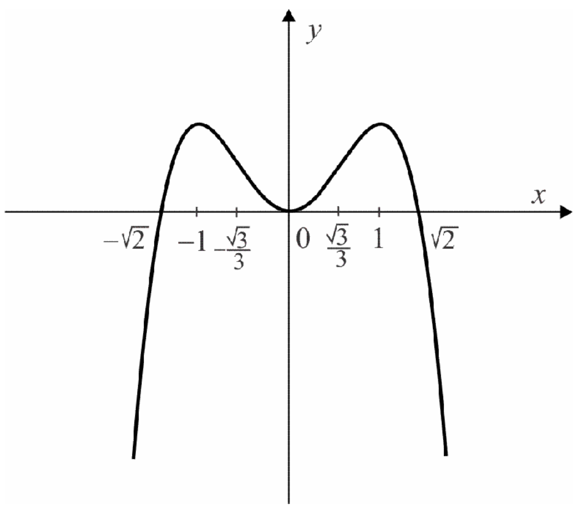
$y''(1) = -8 < 0,$ во точката $x = 1$ функцијата има локален максимум.

8. Бидејќи вториот извод на функцијата $y''(x) = 4 - 12x^2$ се анулира во точките $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x = \frac{\sqrt{3}}{3},$ и $y'''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 8\sqrt{3} \neq 0,$ $y'''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -8\sqrt{3} \neq 0,$ функцијата има превој во точките $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$y''(x) > 0,$ за секое $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$ па функцијата е конвексна во интервалот $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right);$

$y''(x) < 0,$ за секое $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right),$ па функцијата е конкавна во интервалите $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right).$

9. Графикот е прикажан на слика 22. ●



Слика 22.

6.261. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

Решение. 1. Функцијата е определена на целата реална права, односно $D_f = \mathbf{R}$.

2. Функцијата е парна, па нејзиниот график е симетричен во однос на $y-$оската.

3. За $x=0$ имаме $y=1$. Имаме дека $y(x)>0$, за секое $x\in\mathbf{R}$. Графикот ја сече $y-$оската во точката $(0,1)$, и не ја сече $x-$оската.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$

Правата $y=0$ е хоризонтална асимптота. Функцијата нема вертикална асимптота и нема коса асимптота.

5) Првиот извод на функцијата

$$y' = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

се анулира во точката $x=0$.

6. $y'(x)>0$, за секое $x\in(-\infty,0)$, функцијата монотоно расте во интервалот $(-\infty,0)$;

$y'(x)<0$, за секое $x\in(0,\infty)$, функцијата монотоно опаѓа во интервалот $(0,\infty)$.

7. Вториот извод на функцијата е $y''(x)=\dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$. Бидејќи

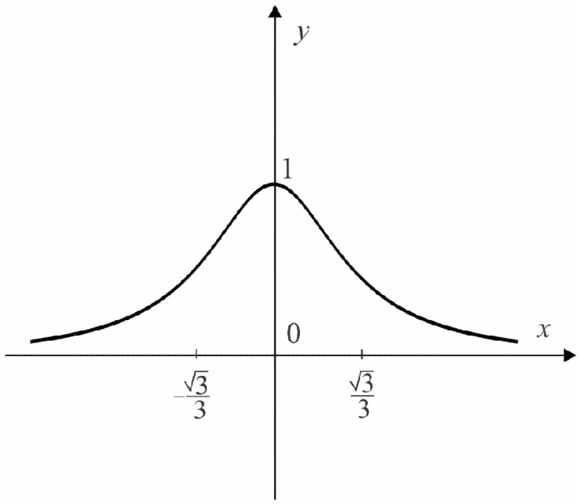
$y''(0) = -2 < 0,$ во точката $x = 0$ функцијата има локален максимум.

8. Бидејќи вториот извод на функцијата се анулира во точките $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, и $y'''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \neq 0$, $y'''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \neq 0,$ функцијата има превој во точките $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. За интервалите на конвексност имаме

$y''(x) < 0,$ за секое $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$ па според тоа функцијата е конкавна во интервалот $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$y''(x) > 0,$ за секое $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right),$ па според тоа функцијата е конвексна во интервалите $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$.

9. Графикот е прикажан на слика 23.



Слика 23.

6.262. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

Решение. 1. Функцијата е дефинирана на целата реална права, односно $D_f=\mathbf{R}$.

2. Функцијата е непарна, па нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

3. За $x=0$ имаме дека $y=0$. Според тоа, графикот на функцијата минува низ координатниот почеток.

4. За однесувањето на функцијата на краиштата на дефиниционата област имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0 \text{ и } \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

Правата $y=0$ е хоризонтална асимптота. Функцијата нема вертикална асимптота и нема коса асимптота.

5. Првиот извод на функцијата

$$y'(x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

се анулира во точките $x=-1$ и $x=1$.

6. $y'(x)>0$, за секое $x\in(-1,1)$, функцијата монотоно расте во интервалот $(-1,1)$;

$y'(x)<0$, за секое $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, функцијата монотоно опаѓа во интервалите $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$.

7. Вториот извод на функцијата е $y''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. Бидејќи

$y''(-1)>0,$ во точката $x=-1$ функцијата има локален минимум;

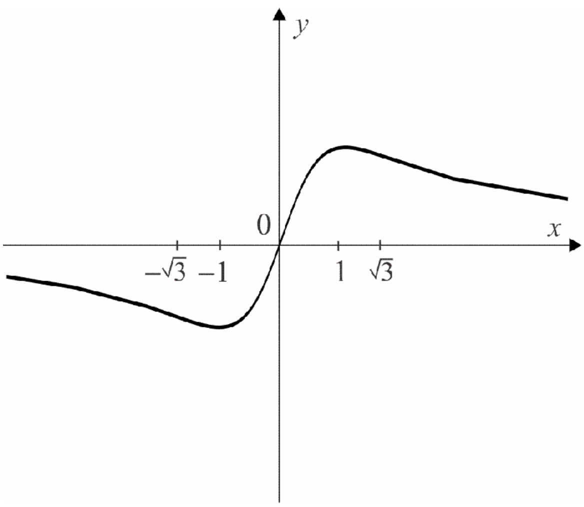
$y''(1)<0,$ во точката $x=1$ функцијата има локален максимум.

8. Бидејќи вториот извод на функцијата се анулира во точките $x=0,$ $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3},$ и важи $y'''(0)\neq 0,$ $y'''\left(-\sqrt{3}\right)\neq 0$ и $y'''\left(-\sqrt{3}\right)\neq 0,$ функцијата има превој во точките $x=0,$ $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}.$ За интервалите на конвексност имаме дека

$y''(x)<0,$ за секое $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right),$ функцијата е конкавна во интервалите $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ и $\left(0,\sqrt{3}\right);$

$y''(x)>0,$ за секое $x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},\infty\right),$ функцијата е конвексна во интервалите $\left(-\sqrt{3},0\right)$ и $\left(\sqrt{3},\infty\right).$

9. Графикот е прикажан на слика 24.



Слика 24.

6.263. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$

Решение. 1. Функцијата е определена за сите вредности на $x,$ освен за $x=-1$ и $x=1.$ Според тоа, имаме дека $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty).$

2. Функцијата е парна, па нејзиниот график е симетричен во однос на $y-$оската. Функцијата не е периодична.

3. За $x=0$ имаме $y=1.$ Имаме дека $y(x)\neq 0,$ за секое $x\in D_f.$ Според тоа, графикот на функцијата ја сече $y-$оската во точката $(0,1),$ и не ја сече $x-$оската.

4. За однесувањето на функцијата на краиштата на дефиниционата област имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0 \text{ и } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$$

Правата $y=0$ е хоризонтална асимптота.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{1-x^2}=-\infty \text{ и } \lim_{x\to-1^+}\frac{1}{1-x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x^2}=\infty \text{ и } \lim_{x\to1^+}\frac{1}{1-x^2}=-\infty$$

Правите $x=-1$ и $x=1$ се вертикални асимптоти. Функцијата нема коса асимптота.

5. Првиот извод на функцијата

$$y'=\frac{2x}{(1-x^2)^2},$$

за анулира за $x=0.$

6. $y'(x)>0,$ за секое $x\in(0,1)\cup(1,\infty),$ функцијата монотоно расте во интервалите $(0,1)$ и $(1,\infty);$

$y'(x) < 0,$ за секое $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0),$ функцијата монотоно опаѓа во интервалите $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$.

7. Вториот извод на функцијата е $y'' = \dfrac{6x^2 + 2}{\left(1 - x^2\right)^3}.$ Бидејќи

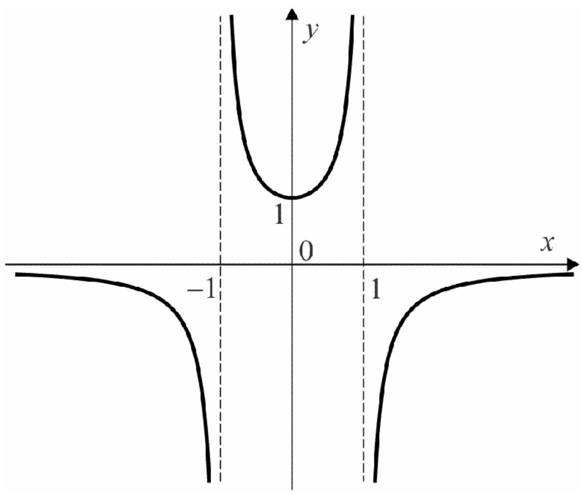
$y''(0) = 2 > 0,$ во точката $x = 0$ функцијата има локален минимум.

8. Функцијата нема превој, бидејќи $y''(x) \neq 0,$ за секое x од дефиниционата област. За интервалите на конвексност имаме дека

$y''(x) < 0,$ за секое $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty),$ функцијата е конкавна во интервалите $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$;

$y''(x) > 0,$ за секое $x \in (-1, 1),$ функцијата е конвексна во интервалот $(-1, 1)$.

9. Графикот е прикажан на слика 25. ●



Слика 25.

6.264. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$

Решение. 1. Функцијата е определена за сите вредности на $x,$ освен за $x=-1$ и $x=1.$ Според тоа, имаме дека $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty).$

2. Функцијата е непарна, па нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

3. Имаме дека $x=0$ ако и само ако $y=0,$ па графикот на функцијата минува низ координатниот почеток $(0,0),$ кој што е единствена пресечна точка на графикот со координатните оски.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-x^2}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1-x^2}=0$

Правата $y=0$ е хоризонтална асимптота.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{1-x^2}=\infty \text{ и } \lim_{x\to-1^+}\frac{x}{1-x^2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x}{1-x^2}=\infty \text{ и } \lim_{x\to1^+}\frac{x}{1-x^2}=-\infty$$

Правите $x=-1$ и $x=1$ се вертикални асимптоти. Функцијата нема коса асимптота.

5. Првиот извод на функцијата

$$y'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

не се анулира за ниту едно x од дефиниционата област. Значи, функцијата нема екстреми.

6. $y'(x) > 0,$ за секое $x \in D_f,$ па функцијата монотоно расте во интервалите $(-\infty,-1),$ $(-1,1)$ и $(1,+\infty).$

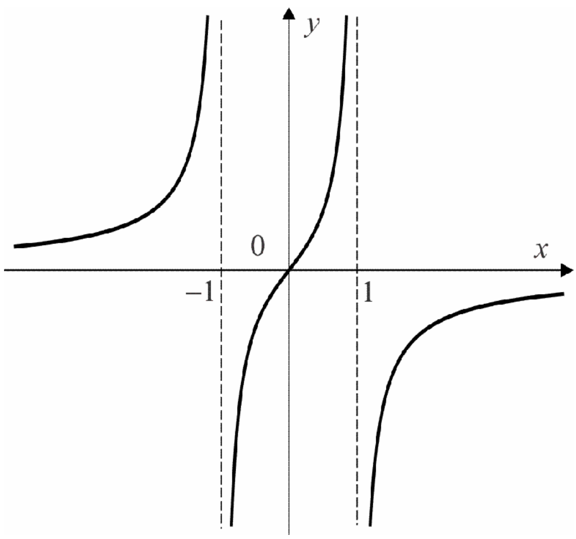
7. Вториот извод на функцијата е $y''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$ Веќе споменавме дека функцијата нема екстреми.

8. Вториот извод се анулира во точката $x = 0,$ па заради $y'''(0) \neq 0,$ функцијата има превој во точката со апсциса $x = 0.$ За интервалите на конвексност имаме дека

$y''(x) < 0,$ за секое $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty),$ функцијата е конкавна во интервалите $(-1,0)$ и $(1,+\infty);$

$y''(x) > 0,$ за секое $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1),$ функцијата е конвексна во интервалите $(-\infty,-1)$ и $(0,1).$

9. Графикот е прикажан на слика 26. ●



Слика 26.

6.265. $y=\frac{x^2-1}{x^3}$

Решение. 1. Функцијата е дефинирана за сите вредности на $x,$ освен за $x=0,$ односно $D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty).$

2. Функцијата е непарна, па нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

3. За $y=0$ имаме дека $x=-1$ и $x=1.$ Според тоа, графикот на функцијата ја сече $x-$оската во точките $(-1,0)$ и $(1,0).$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^3}=0$

Правата $y=0$ е хоризонтална асимптота.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-1}{x^3}=\infty \text{ и } \lim_{x\to0^+}\frac{x}{1-x^2}=-\infty$$

Правата $x=0$ е вертикална асимптота. Функцијата нема коса асимптота.

5. Првиот извод на функцијата

$$y'(x)=\frac{3-x^2}{x^4}$$

се анулира за $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}.$

6. $y'(x)>0,$ за секое $x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right),$ функцијата монотоно расте во интервалите $\left(-\sqrt{3},0\right)$ и $\left(0,\sqrt{3}\right).$

$y'(x)<0,$ за секое $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup(\sqrt{3},\infty),$ функцијата монотоно опаѓа во интервалите $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3},\infty\right).$

7. Вториот извод на функцијата е $y''(x)=\dfrac{2x^2-12}{x^5}$. Бидејќи

$y''(\sqrt{3})>0,$ во точката $x=\sqrt{3}$ функцијата има локален минимум;

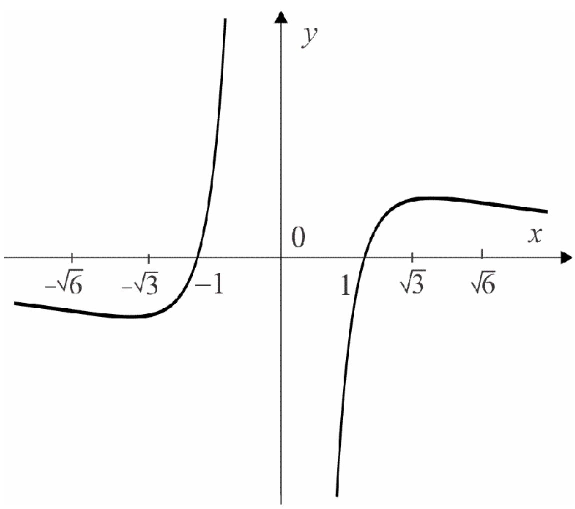
$y''(-\sqrt{3})<0,$ во точката $x=-\sqrt{3}$ функцијата има локален максимум.

8. Вториот извод се анулира во точките $x=-\sqrt{6}$ и $x=\sqrt{6},$ па заради $y'''(-\sqrt{6})\neq 0$ и $y'''(\sqrt{6})\neq 0,$ функцијата има превои во точките $x=-\sqrt{6}$ и $x=\sqrt{6}.$ За интервалите на конвексност имаме дека

$y''(x)<0,$ за секое $x\in(-\infty,-\sqrt{6})\cup(0,\sqrt{6}),$ функцијата е конкавна во интервалите $(-\infty,-\sqrt{6})$ и $(0,\sqrt{6});$

$y''(x)>0,$ за секое $x\in(-\sqrt{6},0)\cup(\sqrt{6},\infty),$ функцијата е конвексна во интервалите $(-\sqrt{6},0)$ и $(\sqrt{6},\infty).$

9. Графикот е прикажан на слика 27. ●



Слика 27.

6.266. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Решение. 1. Функцијата е дефинирана на целата реална права, односно $D_f = \mathbf{R}$.

2. Функцијата е парна, па нејзиниот график е симетричен во однос на $y-$оската.

3. За $x = 0$ имаме дека $y = -1$. За $y = 0$ имаме дека $x = -1$ и $x = 1$. Според тоа, графикот ја сече $y-$оската во точката $(0,-1)$, и ја сече $x-$оската во точките $(-1,0)$ и $(1,0)$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1$

Правата $y = 1$ е хоризонтална асимптота. Функцијата нема вертикална асимптота и нема коса асимптота.

5. Првиот изод на функцијата

$$y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

се анулира за $x = 0$.

6. $y'(x) > 0,$ за секое $x \in (0,\infty),$ функцијата монотоно расте во $(0,\infty);$

$y'(x) < 0,$ за секое $x \in (-\infty,0),$ функцијата монотоно опаѓа во $(-\infty,0).$

7. Вториот извод на функцијата е $y''(x) = \dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$ Бидејќи

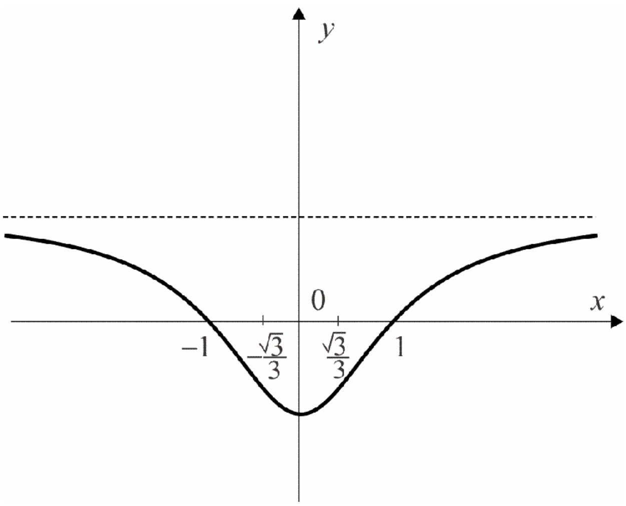
$y''(0) > 0,$ имаме дека во точката $x = 0$ функцијата има минимум.

8. Вториот извод се анулира во точките $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, па заради $y'''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\neq 0$ и $y'''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\neq 0$, функцијата има превои во $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$. За интервалите на конвексност имаме дека

$y''(x)<0$, за секое $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$, па функцијата е конкавна во интервалите $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$;

$y''(x)>0$, за секое $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, па функцијата е конвексна во интервалот $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. Графикот е прикажан на слика 28. ●



Слика 28.

6.267. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

Решение. 1. Функцијата е определена за сите вредности на $x,$ освен за $x = \pm\sqrt{3},$ односно $D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}.$

2. Функцијата е непарна, па нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

3. Имаме дека $x = 0$ ако и само ако $y = 0,$ па графикот на функцијата минува низ координатниот почеток $(0,0).$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{3-x^2} = +\infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{3-x^2} = -\infty$

Функцијата нема хоризонтална асимптота.

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty \quad \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty \quad \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty$$

Правите $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$ се вертикални асимптоти.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{3x - x^3} = -1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{3-x^2} + x \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{3-x^2} = 0$

Правата $y = -x$ е коса асимптота.

5. Првиот извод на функцијата

$$y'(x) = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$$

се анулира за $x = 0,$ $x = -3$ и $x = 3.$

6. $y'(x) > 0,$ за секое $x \in \left(-3, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 3\right),$ функцијата монотоно расте во интервалите $\left(-3, -\sqrt{3}\right),$ $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3}, 3\right);$

$y'(x) < 0,$ за секое $x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty),$ функцијата монотоно опаѓа во интервалите $(-\infty,-3)$ и $(3,\infty).$

7. Вториот извод на функцијата е $y''(x) = \dfrac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}.$ Бидејќи

$y''(-3) > 0,$ во точката $x = -3$ функцијата има минимум;

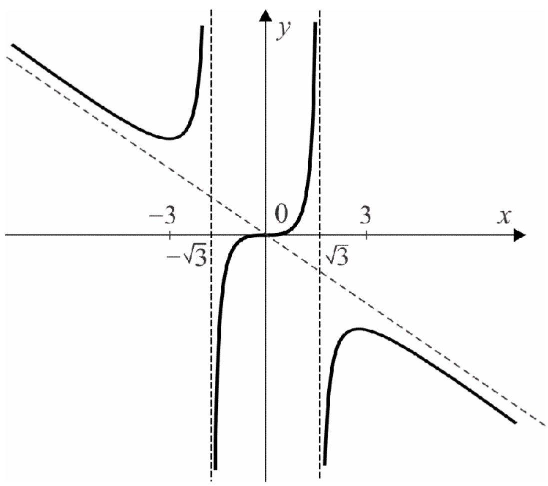
$y''(3) < 0,$, во точката $x = 3$ функцијата има максимум

8. Вториот извод се анулира во точката $x = 0,$ па заради $y'''(0) \neq 0,$ функцијата има превој во $x = 0.$ За интервалите на конвексност имаме

$y''(x) < 0,$ за секое $x \in \left(-\sqrt{3},0\right) \cup (3,\infty),$ па функцијата е конкавна во интервалите $\left(-\sqrt{3},0\right)$ и $(3,\infty);$

$y''(x) > 0,$ за секое $x \in \left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\sqrt{3}\right),$ па функцијата е конвексна во интервалите $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ и $\left(0,\sqrt{3}\right).$

9. Графикот е прикажан на слика 29. ●



Слика 29.

6.13. Задачи за самостојна работа

1. За функцијата $f(x)=x^2+5x-7,$ најди $\Delta x,$ Δy и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x},$ за промена на аргументот од $x_1=1$ до $x_2=1{,}1.$

2. Ако променливата x добива нараснување $\Delta x,$ најди го нараснувањето на функцијата $y=2x+1.$

3. Најди извод по дефиниција на следните функции:

1) $f(x)=x^2+2x+3$ 2) $f(x)=3-x$

3) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}$ 4) $f(x)=\sqrt{x+2}$

5) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 6) $f(x)=e^{x+1}$

4. Најди извод по дефиниција на следните функции:

1) $f(x)=2|x-2|,$ во точката $x=2$

2. $f(x)=\dfrac{1}{x},$ во точката $x=1$

5. Најди извод на следните функции:

1) $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{2x}$

3) $f(x)=\dfrac{1+e^2}{x}$ 4) $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x}}$

5) $f(x)=x^2\cos x$ 6) $f(x)=e^x(2\sin x-3\cos x)$

6. Најди ја вредноста на изводот на функциите во соодветните точки:

1) $f(x)=x+\sqrt{x},$ во точките $x=1$ и $x=4$

2) $f(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$, во точките $x=0$ и $x=1$

3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, во точката $x=1$

7. Најди извод на следните функции:

1) $f(x)=(2x+3)^8$ 2) $f(x)=\left(\dfrac{2+x^n}{2-x^n}\right)^3$

3) $f(x)=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 4) $f(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)^8$

5) $f(x)=x\sqrt{9+x^2}$ 6) $f(x)=\cos(\sin x)$

7) $f(x)=\ln^3 x$ 8) $f(x)=\ln(\ln x)$

8. Со примена на логаритмирање, најди извод на следните функции:

1) $f(x)=(\cos x)^x$ 2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

9. Најди извод на инверзните функции на дадените функции:

1) $f(x)=x+2$ 2) $f(x)=2x+\ln x$

10. Најди извод на имплицитно зададените функции:

1) $x-4y-12=0$ 2) $x^2-y^2=r^2$

3) $y+xe^y=0$ 4) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$

11. Најди втор извод на функциите:

1) $f(x)=x^2-3x+2$ 2) $f(x)=\mathrm{ctg}x$

3) $f(x)=e^{\sin x}$ 4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

12. Најди ги нараснувањето и диференцијалот на функцијата:

1) $f(x)=5x^2+x,$ за $x=1,\ \Delta x=0,01$

2) $f(x)=5x^3-x+4,$ ако x се менува од $x=1$ до $x=1,02$

13. Да се определи диференцијалот на функцијата

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ 2) $f(x)=e^{-x^2+1}$

14. Најди ја приближна вредност на функцијата:

1) $\sqrt[3]{27,1}$ 2) $\sin 59^0$

15. Провери дали функцијата $f(x)=x^3+1$ ги исполнува условите од теоремата на Ферма на интервалот $[-1,1]$.

16. Покажи дека меѓу корените на функцијата $f(x)=x^2+4x-5$ се наоѓа корен на нејзиниот извод.

17. Со примена на теоремата на Лагранж, докажи дека

$\cos(x+h)-\cos x=-h\sin x_0,$ каде што $x<x_0<x+h.$

18. Провери дали се исполнети условите на теоремата на Коши за функциите $f(x)=\cos x$ и $g(x)=\sin x$ на интервалот $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right].$

19. Пресметај ги границите:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-5}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{3}}{e^{x^{2}}+1}$

20. Најди ги интервалите на монотоност на функциите:

1) $y=\dfrac{x^{4}}{4}-\dfrac{4x^{3}}{3}+3x^{2}$ 2) $y=\dfrac{1}{x^{3}}$

3) $y=x+\dfrac{1}{x}$ 4) $y=\sqrt{x-2}$

21. Испитај ја конвексноста и конкавноста на функциите:

1) $y=\dfrac{x^{3}}{3}-\dfrac{3x^{2}}{2}+2x-4$ 2) $y=\dfrac{e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{3}}$

3) $y=x^{2}+2x-2$ 4) $y=x+\dfrac{1}{x}$

22. Најди ги екстремните вредности на функциите:

1) $y=\dfrac{e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}$ 2) $y=\dfrac{1}{x^{2}}$

3) $y=x^{2}+2x+1$ 4) $y=\dfrac{1+x^{2}}{3+x^{2}}$

23. Испитај го текот и скицирај го графикот на функциите:

1) $y=x^{3}-6x^{2}+11x-6$ 2) $y=x^{3}-9x$

3) $y=\dfrac{1}{x^{2}+4}$ 4) $y=\dfrac{x}{x^{2}+4}$

7. Неопределен интеграл

7.1. Примитивна функција и неопределен интеграл

❖ Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана на интервалот (a,b). Велиме дека функцијата $\varphi(x)$ дефинирана на истиот интервал (a,b) е *примитивна функција на функцијата* $f(x)$ ако е диференцијабилна во интервалот (a,b) и ако важи $\varphi'(x)=f(x)$, за секое $x\in(a,b)$.

❖ Ако $\varphi(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$, тогаш и функцијата $\varphi(x)+C$ е исто така примитивна функција на функцијата $f(x)$. Множеството на сите примитивни функции на функција $f(x)$ се нарекува *неопределен интеграл* на функцијата и се означува со

$$\int f(x)dx=\varphi(x)+C\ .$$

❖ Кривите дефинирани со равенката $y=\varphi(x)+C$ се викаат *интегрални криви* за кривата дефинирана со равенката $y=f(x)$. За да ја најдеме интегралната крива која што минува низ точката $M(x_0,y_0)$, од равенството $y_0 = \varphi(x_0) + C$ ја наоѓаме интеграционата константа $C = y_0 - \varphi(x_0)$. Тогаш, кривата $y = \varphi(x) + y_0 - \varphi(x_0)$ е интегралната крива која што минува низ точката $M(x_0, y_0)$.

❖ Ако $\varphi(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$ на интервалот (a,b), тогаш важат следните тврдења:

1. $\int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C$

2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

3. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

7.1. Најди барем една примитивна функција φ на функцијата f, ако

1) $f(x) = a^x, \quad a > 0$

2) $f(x) = \sin x$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$

Решение. Треба да најдеме барем една функција чијшто извод е дадената функција.

1) Од $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$ заклучуваме дека $\varphi(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$ е една примитивна функција на дадената функција.

2) Бидејќи $(\cos x)' = -\sin x$ следува дека $\varphi(x) = -\cos x.$

3) Заради $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ имаме дека $\varphi(x) = tgx.$

4) Бидејќи $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ следува дека $\varphi(x) = -ctgx.$

5) Од $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имаме дека $\varphi(x) = \arcsin x$.

6) Заради $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ следува дека $\varphi(x) = arctgx.$

7) Бидејќи $\left(\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ следува дека $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|.$

8) Од $\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm 1}\right|\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$ имаме дека $\varphi(x) = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm 1}\right|.$ ●

7.2. Најди функција f, за која важи $f'(x) = 1 + e^x.$

Решение. Од $(x+e^x)' = 1 + e^x,$ следува дека $f(x) = x + e^x.$ ●

7.3. Покажи дека функцијата $\varphi(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ е примитивна функција на функцијата $f(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x},\ \ x \neq 0.$

Решение. Имаме дека

$$\varphi'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = (x^2)'\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}. \ ●$$

7.4. Определи ја равенката на кривата $y = f(x)$ која минува низ точката $M(1,0)$, ако нејзиниот извод е $y' = 3x^2 - 1$.

Решение. Бидејќи $\int (3x^2 - 1)dx = 3\int x^2 dx - \int dx = x^3 - x + C$, добиваме

$$f(x) = x^3 - x + C.$$

Од условите $f(1) = 0$ и $f(1) = C$, добиваме $C = 0$. Равенката на бараната крива гласи

$$f(x) = x^3 - x. \bullet$$

7.5. Најди ја примитивната функција на функцијата $f(x) = 3x^2$ чијшто график минува низ точката $M_0(1,9)$.

Решение. Знаеме дека функцијата

$$y = x^3 + C$$

е примитивна функција на дадената функција $f(x)$. Од равенството $y_0 = {x_0}^3 + C$, за $x_0 = 1$ и $y_0 = 9$ ја наоѓаме интеграционата константа $C = 9 - 1^3 = 8$. Така, кривата

$$y = x^3 + 8$$

е интегралната крива која што минува низ точката $M_0(1,9)$. ●

7.6. Најди ја функцијата $f(x)$ чија тангента има коефициент на правец $8x^7 + 1$ за секоја вредност на x, и чијшто график минува низ точката (1,8).

Решение. Коефициентот на правец на тангентата во секоја точка $(x, f(x))$ е изводот $f'(x)$. Така, имаме дека $f'(x) = 8x^7 + 1$. Заради $\left(x^8 + x + C\right)' = 8x^7 + 1$, добиваме дека

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (8x^7 + 1)\,dx = x^8 + x + C.$$

За да ја најдеме интеграционата константа C, го користиме условот дека графикот на функцијата $f(x)$ минува низ точката (1,8). Затоа, заменуваме $x_0 = 1$ и $y_0 = f(x_0) = 8$ во равенката за $f(x)$. Добиваме дека $1^8 + 1 + C = 8$, односно $C = 6$. Бараната функција е

$$f(x) = x^8 + x + 6. \bullet$$

7.7. Најди функција $y = f(x)$ така што коефициентот на правецот на тангентата е $3x - 2$ за секоја вредност на x, и нејзиниот график минува низ точката $(3,3)$.

Решение. Знаеме дека коефициентот на правецот на тангентата во секоја точка $(x, f(x))$ е изводот $f'(x)$. Од $f'(x) = 3x - 2$, добиваме

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x - 2)\,dx = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C.$$

За да ја најдеме интеграционата константа C, го користиме фактот дека графикот на функцијата минува низ точката $(3,3)$. Така, имаме дека $3 = \frac{3}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + C$, односно $C = -\frac{9}{2}$. Бараната функција е

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{9}{2}. \bullet$$

7.2. Таблица на некои основни интеграли

Таблицата на неопределени интеграли на некои елементарни функции е поместена на крајот од збирката.

7.8. Со примена на таблицата на основните интеграли пресметај ги следните интеграли:

1) $\int 5x^5 dx$ 2) $\int \frac{dx}{x^2}$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ 4) $\int \left(\frac{1}{x}-3\right)dx$

5) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$ 6) $\int 5^x 3^{-x} dx$

7) $\int tg^2 x dx$ 8) $\int ctg^2 x dx$

9) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$ 10) $\int (2x-3\sin x+\cos x)dx$

Решение. Со примена на својствата на неопределениот интеграл и таблицата на основните интеграли, непосредно добиваме

1) $\int 5x^5 dx = 5\int x^5 dx = 5\frac{x^{5+1}}{5+1}+C = \frac{5}{6}x^6 + C$

2) $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C = -\frac{1}{x}+C$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C = -\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

4) $\int \left(\frac{1}{x}-3\right)dx = \int \frac{dx}{x} - 3\int dx = \ln|x| - 3x + C$

5) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx = \int (e^x-1)dx = \int e^x dx - \int dx = e^x - x + C$

6) $\int 5^x 3^{-x} dx = \int \left(\frac{5}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\frac{5}{3}} + C = \frac{5^x}{(\ln 5 - \ln 3)3^x} + C$

7) $\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C$

8) $\int ctg^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C$

9) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - arctgx + C$

10) $\int (2x - 3\sin x + \cos x)dx = 2\int xdx - 3\int \sin xdx + \int \cos xdx =$

$$= x^2 + 3\cos x + \sin x + C. \bullet$$

7.9. Пресметај ги следните неопределени интеграли:

1) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$ 2) $\int \left(\frac{1}{x(1-\sqrt{x})} - \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)}\right)dx$

3) $\int \frac{x-2}{x^3}dx$ 4) $\int \frac{\left(a^x - b^x\right)^2}{a^x b^x}dx$

5) $\int 3^x e^x dx$ 6) $\int \frac{x-2}{x^3}dx$

7) $\int 2\sin^2 \frac{x}{2}\, dx$ 8) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x}\, dx$

Решение. Со примена на својствата на неопределениот интеграл и таблицата на основните интеграли, непосредно добиваме

1) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=$

$$=3\arcsin x-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$$

2) $\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}{x(1-x)}dx=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x}-x}{x(1-x)}dx=\int\frac{1-x}{x(1-x)}dx=\ln|x|+C$

3) $\int\frac{x-2}{x^3}dx=\int\frac{x}{x^3}dx-2\int\frac{1}{x^3}dx=\int x^{-2}dx-2\int x^{-3}dx=$

$$=\frac{x^{-1}}{-1}-2\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+C$$

4) $\int\frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx=\int\frac{a^{2x}-a^xb^x+2b^{2x}}{a^xb^x}dx=$

$$=\int\left(\frac{a}{b}\right)^x dx-2\int dx+\int\left(\frac{b}{a}\right)^x dx=$$

$$=\int\left(\frac{a}{b}\right)^x dx-2\int dx+\int\left(\frac{b}{a}\right)^x dx=$$

$$=\frac{1}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\left(\frac{a}{b}\right)^x-2x+\frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\left(\frac{b}{a}\right)^x+C$$

5) $\int 3^x e^x dx=\int(3e)^x dx=\frac{(3e)^x}{\ln 3e}+C$

6) $\int \frac{x-2}{x^3}dx = \int \frac{x}{x^3}dx - 2\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-2}dx - 2\int x^{-3}dx = \frac{x^{-1}}{-1} - 2\frac{x^{-2}}{-2} + C =$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + C.$$

7) $\int 2\sin^2 \frac{x}{2}\, dx = \int (1-\cos x)dx = \int dx + \int \cos x\, dx = x + \sin x + C.$

8) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x}\, dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x}\, dx = 2\int dx = 2x + C.$ ●

7.3. Интегрирање со метод на замена

❖ Нека функцијата $\varphi(x)$ дефинирана во интервалот (a,b) е примитивна на функцијата $f(t),\ t \in (a,b)$ и нека $g(x) = \varphi(x),\ x \in (c,d)$ е диференцијабилна во интервалот (c,d). Тогаш постои примитивна функција на функцијата $f\big(g(x)\big)g'(x),\ x \in (c,d),$ и притоа важи

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \varphi\big(g(x)\big) + C$$

7.10. Со методот на замена најди ги следните интеграли:

1) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx$ 2) $\int \frac{2xdx}{1+x^2}$

3) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ 4) $\int a^{x^4} x^3 dx$

5) $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin x}$ 6) $\int \cos^3 x dx$

Решение. 1) Забележуваме дека подинтегралната функција е количник на две функции, од кои функцијата во броителот $2x-5$ е извод од функцијата во именителот x^2-5x+7. Ова ни ја сугерира смената $u(x)=x^2-5x+7$. Тогаш $du=(2x-5)dx$, па добиваме

$$\int\frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx=\int\frac{du}{u}=\ln\left|x^2-5x+7\right|+C.$$

2) Воведуваме смена $1+x^2=t$. Тогаш имаме дека $2xdx=dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме дека

$$\int\frac{2xdx}{1+x^2}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln(1+x^2)+C.$$

3) Воведуваме смена $e^x=t$. Тогаш имаме дека $e^xdx=dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме дека

$$\int\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}=\int\frac{dt}{1+t^2}=arctgt+C=arctg(e^x)+C.$$

4) Воведуваме смена $x^4=t$. Тогаш $4x^3dx=dt$, односно $x^3dx=\frac{1}{4}dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме дека

$$\int a^{x^4}x^3dx=\frac{1}{4}\int a^tdt=\frac{1}{4\ln a}a^t+C=\frac{1}{4\ln a}a^{x^4}+C.$$

5) Воведуваме смена $4+\sin x=t$. Тогаш $\cos xdx=dt$. Со замена во интегралот и добиваме дека

$$\int\frac{\cos x}{4+\sin x}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left(4+\sin x\right)+C.$$

6) Со презапишување на подинтегралната функција добиваме

$$\int\cos^3xdx=\int\cos^2x\cos xdx=\int(1-\sin^2x)\cos xdx.$$

Воведуваме смена $\sin x=t$. Тогаш имаме дека $\cos xdx=dt$. Заменувајќи во последниот интеграл добиваме дека

$$\int (1-\sin^2 x)\cos x dx = \int (1-t^2)dt =$$

$$= \int dt - \int t^2 dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C. \bullet$$

7.11. Со метод на замена најди ги следниве интеграли:

1) $\int (x+2)^5 dx$ 2) $\int \frac{dx}{2x+7}$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+3x}}$ 4) $\int \sqrt[3]{5-6x}dx$

Решение. 1) Воведуваме смена $x+2=t.$ Тогаш имаме дека $x=t-2$ и $dx=dt.$ Заменувајќи во интегралот добиваме дека

$$\int (x+2)^5 dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(x+2)^6}{6} + C.$$

2) Воведуваме смена $2x+7=t.$ Тогаш имаме дека $x=\frac{t-7}{2}$ и $dx=\frac{1}{2}dt.$

Заменуваме во интегралот добиваме дека

$$\int \frac{dx}{2x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x+7| + C.$$

3) Воведуваме смена $\sqrt{1+3x}=t.$ Тогаш $x=\frac{t^2-1}{3}$ и $dx=\frac{2}{3}tdt.$ Заменувајќи во интегралот добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} = \int \frac{\frac{2}{3}tdt}{t} = \frac{2}{3}\int dt = \frac{2}{3}t + C = \frac{2}{3}\sqrt{1+3x} + C.$$

4) Во овој случај ја избираме смената $5-6x=t^3.$ Тогаш $-6dx=3t^2dt,$ односно $dx=-\frac{t^2}{2}dt.$ Со замена во интегралот добиваме

$$\int\sqrt[3]{5-6x}dx=\int\sqrt[3]{t^3}\cdot\frac{-t^2}{2}dt=-\frac{1}{2}\int t^3dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=-\frac{t^4}{8}+C=$$

$$=-\frac{\left(\sqrt[3]{5-6x}\right)^4}{8}+C. \bullet$$

7.12. Пресметај го следните интеграли:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ 2) $\int\frac{dx}{1+25x^2}$ 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

Решение. 1) Со презапишување на подинтегралната функција имаме

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}.$$

Воведуваме смена $2x=t.$ Тогаш имаме дека $dx=\frac{1}{2}dt.$ Заменувајќи во интегралот добиваме дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}\arcsin t+C=\frac{1}{2}\arcsin(2x)+C.$$

2) Со презапишување на подинтегралната функција добиваме дека

$$\int\frac{dx}{1+25x^2}=\int\frac{dx}{1+(5x)^2}.$$

Воведуваме смена $5x=t.$ Тогаш имаме дека $dx=\frac{1}{5}dt.$ Заменувајќи во последниот интеграл добиваме дека

$$\int\frac{dx}{1+(5x)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{5}arctgt+C=\frac{1}{5}arctg(5x)+C.$$

3) Ја презапишуваме подинтегралната функција

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}.$$

Воведуваме смена $\frac{x}{2}=t.$ Тогаш имаме дека $\frac{1}{2}dx=dt.$ Заменувајќи во интегралот добиваме дека

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x}{2}+1}\right| + C. \bullet$$

7.13. Најди го интегралот $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}.$

Решение. Прво ја воведуваме смената $\ln x = t,\ \frac{dx}{x}=dt.$ Добиваме дека

$$\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{dt}{t\ln t}.$$

Сега, за вториот интеграл со смената $\ln t = s,\ \frac{dt}{t}=ds,$ имаме дека

$$\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{dt}{t\ln t} = \int \frac{ds}{s} = \ln s + C =$$

$$= \ln(\ln t) + C = \ln(\ln(\ln x)) + C. \bullet$$

7.14. Пресметај го интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3+4x)^3}}.$

Решение. Воведуваме смена $\sqrt[4]{(3+4x)^3}=t.$ Тогаш имаме $x=\dfrac{t^{\frac{4}{3}}-3}{4}$ и $dx=\dfrac{1}{3}t^{\frac{1}{3}}dt.$ Заменувајќи во интегралот добиваме дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(3+4x)^3}}=\int\frac{\frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}}dt}{t}=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}dt=t^{\frac{1}{3}}+C=\sqrt[4]{3+4x}+C. \quad \bullet$$

7.4. Интегрирање со метод на парцијална интеграција

❖ Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ се диференцијабилни во некој интервал. Ако во тој интервал постои примитивна функција за функцијата $u'(x)v(x)$, тогаш постои примитивна функција за $u(x)v'(x)$, и важи

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx\,.$$

Со методот на парцијална интеграција пресметај ги следните интеграли (задачи 7.15 – 7.30).

7.15. $\int\arcsin x dx$

Решение. Со цел да ја примениме формулата за парцијална интеграција ставаме

$$u(x)=\arcsin x \text{ и } dv=dx.$$

Тогаш имаме дека

$$du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и } v(x)=\int dx=x.$$

Овде нема да ја запишеме константата на интеграција, затоа што е доволна само една примитивна функција. Со примена на методот на парцијална интеграција добиваме дека

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \int \frac{tdt}{t} =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Притоа, за вториот интеграл ја воведовме смената $1-x^2 = t^2$. ●

7.16. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

Решение. Ставаме $u(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ и $dv = dx.$ Тогаш имаме дека

$du = \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ и $v(x) = x,$ од каде што со примена на формулата за парцијална интеграција добиваме дека

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

(за вториот интеграл ја воведуваме смената $1+x^2 = t,\ \ xdx = \dfrac{dt}{2}$)

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C. \text{ ●}$$

7.17. $\int arcctgxdx$

Решение. Избираме $u(x) = arcctgx$ и $dv = dx.$ Тогаш имаме $du = -\dfrac{dx}{1+x^2}$ и $v(x) = x,$ од каде што според формулата за парцијална интеграција добиваме дека

$$\int arcctgx dx = xarcctgx + \int \frac{xdx}{1+x^2} = xarcctgx + \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C. \bullet$$

7.18. $\int x \ln x dx$

Решение. Ставаме $u = \ln x$ и $dv = xdx$. Тогаш $du = \frac{dx}{x}$ и $v = \frac{x^2}{2}$, од каде добиваме дека

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C. \bullet$$

7.19. $\int \ln^2 x dx$

Решение. Ставаме $u = \ln x$ и $dv = \ln x dx$. Тогаш имаме дека $du = \frac{dx}{x}$ и $v = \int \ln x dx = x(\ln x - 1)$, од каде што според формулата за парцијална интеграција добиваме дека

$$\int \ln^2 x dx = x \ln x \cdot (\ln x - 1) - \int \frac{x(\ln x - 1)}{x} dx =$$

$$= x \ln x \cdot (\ln x - 1) - x(\ln x - 1) + x + C =$$

$$= x \ln^2 x - 2\ln x + 2x + C. \bullet$$

7.20. $\int xarctgx dx$

Решение. Ставаме $u = arctgx$ и $dv = xdx$. Тогаш $du = \frac{dx}{1+x^2}$ и $v = \frac{x^2}{2}$, од каде што според формулата за парцијална интеграција добиваме дека

$$\int x\,arctgx\,dx = \frac{x^2 arctgx}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2 arctgx}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2 arctgx}{2} - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{x^2 arctgx}{2} - \frac{1}{2}(x - arctgx) + C = \frac{x^2+1}{2}arctgx - \frac{x}{2} + C. \quad \bullet$$

7.21. $\int xe^x dx$

Решение. Ставаме $u = x$ и $dv = e^x dx.$ Тогаш $du = dx$ и $v = e^x,$ од каде што според формулата за парцијална интеграција добиваме дека

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C. \quad \bullet$$

7.22. $\int x \sin x dx$

Решение. Ставаме $u = x$ и $dv = \sin x dx.$ Тогаш $du = dx$ и $v = -\cos x,$ од каде што според формулата за парцијална интеграција добиваме дека

$$\int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C. \quad \bullet$$

7.23. $\int x^2 \cos x dx$

Решение. Ставаме $u = x^2$ и $dv = \cos x dx.$ Тогаш $du = 2xdx$ и $v = \sin x,$ од каде што според формулата за парцијална интеграција добиваме дека

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx.$$

За интегралот од десната страна на равенството применуваме парцијална интеграција и заради задачата 7.22. добиваме дека

$$\int x \sin x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Според тоа, наоѓаме дека

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C =$$

$$= (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + C. \bullet$$

7.24. $\int x \sin 3x dx$

Решение. Ставаме $u = x$ и $dv = \sin 3x dx.$ Тогаш $du = dx$ и $v = -\frac{\cos 3x}{3},$ од каде што според формулата за парцијална интеграција добиваме

$$\int x\sin 3x dx = -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C. \bullet$$

7.25. $\int x^2 e^{3x} dx$

Решение. Ставаме $u = x^2,\ dv = e^{3x}dx.$ Тогаш имаме дека $du = 2xdx$ и $v = \frac{1}{3}e^{3x}$. Според формулата за парцијална интеграција добиваме

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) =$$

$$= \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + C. \bullet$$

7.26. $\int (x^2 + 2x + 3)e^{5x} dx$

Решение. Дадениот интеграл ќе го запишеме во облик

$$\int (x^2 + 2x + 3)e^{5x}dx = \int x^2 e^{5x}dx + 2\int xe^x dx + 3\int e^x dx.$$

Ставаме $I_1 = \int x^2 e^{5x}dx,\ I_2 = \int xe^{5x}dx$ и $I_3 = \int e^{5x}dx.$ Ако на секој од интегралите I_1 и I_2 поодделно го примениме методот на парцијална интеграција добиваме дека

$$I_1 = \int x^2 e^{5x} dx = \frac{25x^2 - 10x + 2}{125} e^{5x} + C,$$

$$I_2 = \int x e^{5x} dx = \frac{5x - 1}{25} e^{5x} + C \text{ и}$$

$$I_3 = \int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{5} + C.$$

Сега, за дадениот интеграл добиваме дека

$$\int (x^2 + 2x + 3) e^{5x} dx = I_1 + 2I_2 + 3I_3 = \frac{25x^2 + 40x + 67}{125} e^{5x} + C. \;\bullet$$

7.27. $\int e^x \sin x dx$

Решение. Ставаме $u = e^x$ и $dv = \sin x dx.$ Тогаш $du = e^x dx$ и $v = -\cos x,$ од каде што според формулата за парцијална интеграција добиваме дека

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

За интегралот од десната страна на равенството со примена на парцијална интеграција добиваме дека

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x + C.$$

Според тоа, имаме дека

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

од каде што следува дека

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C. \;\bullet$$

7.28. $\int x^2 \sin 2x dx$

Решение. Ставаме $u = x^2$ и $dv = \sin 2x dx.$ Тогаш имаме дека $du = 2x dx$ и $v = -\frac{\cos 2x}{2},$ од каде што со примена на методот на парцијална интеграција наоѓаме дека

$$\int x^2 \sin 2x dx = -x^2 \frac{\cos 2x}{2} + \int x \cos 2x dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\right)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C. \; \bullet$$

7.29. $\int \sin \ln x dx$

Решение. Ставаме $u = \sin \ln x$ и $dv = dx.$ Тогаш имаме $du = \frac{\cos \ln x}{x} dx$ и $v = x,$ од каде што со примена методот на парцијална интеграција добиваме дека

$$\int \sin \ln x dx = x \sin \ln x - \int \cos \ln x dx = x \sin \ln x - x \cos \ln x - \int \sin \ln x dx,$$

од каде што пресметуваме дека

$$\int \sin \ln x dx = \frac{x(\sin \ln x - \cos \ln x)}{2} + C. \; \bullet$$

7.30. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Решение. Дадениот интеграл ќе го запишеме во облик

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ставаме $u=x$ и $dv=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ Тогаш имаме $du=dx$ и $v=-\sqrt{1-x^2}$, од каде што со примена методот на парцијална интеграција добиваме

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-x\sqrt{1-x^2}+\int\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=-x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Според тоа, пресметуваме дека

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}+C. \ \bullet$$

7.5. Пресметување на некои важни типови интеграли

- $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}$
- $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}$
- $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$
- $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$
- $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k^2}}$ и $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}$
- $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

- $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$
- $\int \sqrt{x^2 \pm k^2}dx$ **и** $\int \sqrt{k^2 - x^2}dx$
- $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$
- $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми од променлива x.
- $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s/n_s} \right)dx$

$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s/n_s} \right)$ е дробно рационална функција од своите аргументи.

- $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm k^2})dx$ **и** $\int R(x, \sqrt{k^2 - x^2})dx$, $R(x, \sqrt{x^2 \pm k^2})$ е дробно рационална функција од своите аргументи
- $\int \cos mx \cos nx dx$ $\int \sin mx \cos nx dx$ $\int \sin mx \sin nx dx$
- $\sin^n x$ и $\cos^n x$ **(** $n \in \mathbf{N}$ **)**
- $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Пресметајте ги следните интеграли: (задачи 7.31. – 7.61)

7.31. $\int \frac{dx}{x^2-4}$

Решение. Интегралот ќе го пресметаме со примена на методот на неопределени коефициенти на подинтегралната функција. Го добиваме разложувањето

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}, \qquad |\cdot \ (x-2)(x+2)$$

$$0\cdot x+1=A(x+2)+B(x-2)=(A+B)x+(2A-2B),,$$

од каде што следува $A+B=0$ и $A-B=\frac{1}{2}$, односно $A=\frac{1}{4}$ и $B=-\frac{1}{4}$.

Со примена на методот на замена добиваме дека

$$\int\frac{dx}{x^2-4}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

при што ја воведовме смената $x-2=t,\ dx=dt,\ x+2=s,\ dx=ds.$ ●

7.32. $\int\frac{dx}{3-x^2}$

Решение. Дадениот интеграл ќе го пресметаме разложување на подинтегралната функција со примена на методот на неопределени коефициенти. Потоа со методот на замена наоѓаме дека

$$\int\frac{dx}{3-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\left(\frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x-\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x+\sqrt{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|t|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|s|=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}\right|+C.$$

(воведовме смената $x-\sqrt{3}=t,\ dx=dt,\ x+\sqrt{3}=s,\ dx=ds.$) ●

7.33. $\int\frac{dx}{x^2+16}$

Решение. За дадениот интеграл со трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена добиваме дека

$$\int \frac{dx}{x^2+16} = \int \frac{dx}{x^2+4^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{4}dx}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4} arctgt + C = \frac{1}{4} arctg\frac{x}{4} + C$$

(воведовме смена $\frac{x}{4} = t,\ \frac{1}{4}dx = dt.$). ●

7.34. $\int \frac{dx}{x^2+2}$

Решение. За дадениот интеграл со трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена добиваме дека

$$\int \frac{dx}{x^2+2} = \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctgt + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

(воведовме смена $\frac{x}{\sqrt{2}} = t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}dx = dt.$). ●

7.35. $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$

Решение. За дадениот интеграл имаме дека корените на квадратниот трином се реални, па со трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена добиваме дека

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3^2-4\cdot 2}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \int \left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}} \right) dt =$$

$$= \ln\left|t-\frac{1}{2}\right| - \ln\left|t+\frac{1}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

(воведовме смена $x+\frac{3}{2}=t,\ \ dx=dt.$). ●

7.36. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

Решение. За дадениот интеграл имаме дека корените на квадратниот трином се комплексни броеви, па со трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена добиваме дека

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 - \frac{2^2-4\cdot 2}{4}} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C = arctg(x+1) + C.$$

(воведовме смена $x+1=t,\ \ dx=dt.$). ●

7.37. $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$

Решение. За дадениот интеграл имаме дека квадратниот трином е полн квадрат, па со трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена добиваме дека

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 - \frac{2^2-4\cdot 1}{4}} = \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{dx}{t^2} =$$

$$= -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{(x+1)} + C.$$

(воведовме смена $x+1=t,\ \ dx=dt.$). ●

7.38. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$

Решение. Со трансформација на подинтегралната функција дадениот интеграл е претставен како збир од два интеграли

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{\frac{3}{2}\cdot(2x-4)+4}{x^2-4x+5}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)}{x^2-4x+5}dx + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \frac{3}{2}\ln|t| + 4arctg(x-2) + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right| + 4arctg(x-2) + C.$$

За наоѓање на првиот интеграл ја воведовме смената

$t = x^2-4x+5,\ \ dt = (2x-4)dx.$ ●

7.39. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+6}dx$

Решение. Со трансформација на подинтегралната функција дадениот интеграл е претставен како збир од два интеграли

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+6}dx = \int \frac{(2x+2)-1}{x^2+2x+6}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+6}dx - \int \frac{dx}{x^2+2x+6} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dx}{(x+1)^2+5} = \ln|t| - \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{5}} =$$

$$= \ln|x^2+2x+6| - \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

(смената за првиот интеграл е $t = x^2+2x+6,\ dt = (2x+2)dx.$). ●

7.40. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Решение. Со воведување на смена дадениот интеграл се сведува на табличен интеграл, односно добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t = \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

(воведовме смена $\frac{x}{2} = t,\ \frac{1}{2}dx = dt.$). ●

7.41. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$

Решение. Со воведување на смена дадениот интеграл се сведува на табличен интеграл, односно добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

(воведовме смена $\frac{x}{\sqrt{3}} = t,\ \frac{1}{\sqrt{3}}dx = dt.$). ●

7.42. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$

Решение. Со воведување на смена дадениот интеграл се сведува на табличен интеграл, односно добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} = \ln|t| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+25}\right| + C.$$

(воведовме смена $\frac{x}{5} = t,\ \frac{1}{5}dx = dt.$). ●

7.43. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$

Решение. Со воведување на смена дадениот интеграл се сведува на табличен интеграл, односно добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| + C.$$

(воведовме смена $\frac{x}{\sqrt{3}} = t,\ \frac{1}{\sqrt{3}}dx = dt.$). ●

7.44. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x+2}}$

Решение. Со трансформација на подинтегралната функција и воведување на смена дадениот интеграл се сведува на табличен интеграл, односно добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3^2+4\cdot 2}{4} - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{17}{4} - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{17}{4} - t^2}} = \arcsin \frac{t}{\frac{\sqrt{17}}{3}} + C =$$

$$= \arcsin \frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} + C = \arcsin \frac{2x-3}{\sqrt{17}} + C.$$

(воведовме смена $x-\frac{3}{2}=t, \quad dx = dt.$). ●

7.45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

Решение. Со трансформација на подинтегралната функција и воведување на смена дадениот интеграл се сведува на табличен интеграл, односно добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3^2-4\cdot 2}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2}\right| + C.$$

(воведовме смена $x+\frac{3}{2}=t,\ \ dx=dt.$). ●

7.45. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1}}$

Решение. Со трансформација на подинтегралната функција дадениот интеграл се сведува на табличен интеграл, односно добиваме дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+1\right)^2-\frac{2^2-4\cdot 1}{4}}}=\int\frac{dx}{x+1}=\ln\left|x+1\right|+C.$$ ●

7.46. $\int\frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x-1}}dx$

Решение. Во овој случај $a=1>0,$ и корените на квадратниот трином во подинтегралната функција се реални броеви. Со претставување на подинтегралната функција како збир од две функции, добиваме дека

$$\int\frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x-1}}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-4)-2}{\sqrt{x^2-4x-1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-4)\ dx}{\sqrt{x^2-4x-1}}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}-2\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-2\right)^2-2}}=\sqrt{t}-2\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-2\right)^2-2}}=$$

$$=\sqrt{x^2-4x-1}-2\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-1}\right|+C.$$

(воведовме смена $x^2-4x-1=t,\ \ (2x-4)dx=dt.$)

7.47. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+4}}dx$

Решение. Имаме $a=1>0,$ и корените на квадратниот трином во подинтегралната функција се комплексни броеви. Со претставување на подинтегралната функција како збир од две функции, добиваме дека

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+4}}dx = \int \frac{(2x+1)+2}{\sqrt{x^2+x+4}}dx =$$

$$= \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+4}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}} = 2\sqrt{t} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}} =$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+4} + 2\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+4}\right| + C.$$

(воведовме смена $x^2+x+4=t,\ (2x+1)dx=dt.$)

7.48. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{9-2x-x^2}}dx$

Решение. Имаме дека $a=-1<0,$ па со претставување на подинтегралната функција како збир од две функции, добиваме дека

$$\int \frac{2x-7}{\sqrt{9-2x-x^2}}dx = -\int \frac{-(2x+2)+9}{\sqrt{9-2x-x^2}}dx = -\int \frac{-(2x+2)}{\sqrt{9-2x-x^2}}dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x-x^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t}}dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{10-(x+1)^2}} = -2\sqrt{t} - 9\int \frac{dx}{\sqrt{10-(x+1)^2}} =$$

$$= -2\sqrt{9-2x-x^2} - 9\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{10}} + C,$$

(воведовме смена $9-2x-x^2=t,\ -(2x+2)dx=dt.$). ●

7.49. $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$

Решение. Имаме дека

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\int\frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx=9\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

За првиот од двата интеграли добиваме дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\arcsin\frac{x}{3}+C.$$

На вториот интеграл се применува методот на интегрирање по делови. Ако избереме

$$u=x,\ \ dv=\frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}},$$

добиваме дека

$$du=dx,\ \ v=\int\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx=-\sqrt{9-x^2}+C,$$

од каде што следува дека

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx=-x\sqrt{9-x^2}+\int\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Конечно, за бараниот интеграл имаме дека

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=9\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=$$

$$=9\arcsin\frac{x}{3}+x\sqrt{9-x^2}-\int\sqrt{9-x^2}\,dx,$$

од каде што следува дека

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}.$$

(за $u=x,\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$, имаме $du=dx,\ v=\int\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx=-\sqrt{9-x^2}+C$). ●

7.50. $\int\sqrt{3-x^2}\,dx$

Решение. Со аналогна постапка добиваме дека

$$\int\sqrt{3-x^2}\,dx=\int\frac{3-x^2}{\sqrt{3-x^2}}dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{3-x^2}}=$$

$$=3\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+x\sqrt{3-x^2}-\int\sqrt{3-x^2}\,dx,$$

од каде што следува дека

$$\int\sqrt{3-x^2}\,dx=\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x\sqrt{3-x^2}}{2}+C.$$

(за $u=x,\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{3-x^2}}$, имаме $du=dx,\ v=\int\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}dx=-\sqrt{3-x^2}+C$). ●

7.51. $\int\sqrt{x^2+16}\,dx$

Решение. Со аналогна постапка добиваме дека

$$\int\sqrt{x^2+16}\,dx=\int\frac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}dx=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+16}}+16\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+16}-\int\sqrt{x^2+16}\,dx+16\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16}},$$

откаде следува дека

$$\int \sqrt{x^2+16}dx = \frac{x\sqrt{x^2+16}}{2} + 8\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right| + C.$$

(за $u = x,\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+16}}$, имаме $du = dx,\ v = \int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx = \sqrt{x^2+16} + C$). ●

7.52. $\int \sqrt{x^2-3}dx$

Решение. Со аналогна постапка добиваме дека

$$\int \sqrt{x^2-3}dx = \int \frac{x^2-3}{\sqrt{x^2-3}}dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-3}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} =$$

$$= x\sqrt{x^2-3} - \int \sqrt{x^2-3}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}},$$

од каде што следува дека

$$\int \sqrt{x^2-3}dx = \frac{x\sqrt{x^2-3}}{2} + \frac{3\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|}{2} + C.$$

(за $u = x,\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-3}}$, имаме $du = dx,\ v = \int \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}dx = \sqrt{x^2-3} + C$). ●

7.53. $\int \sqrt{-x^2-5x+3}dx$

Решение. За дадениот интеграл со трансформација на подинтеграл-ната функција и примена на методот на замена добиваме дека

$$\int \sqrt{-x^2-5x+3}dx = \int \sqrt{\frac{(-5)^2+4\cdot 3}{4} - \left(x - \frac{(-5)}{2}\right)^2}dx =$$

$$= \int \sqrt{\frac{37}{4} - \left(x + \frac{5}{2}\right)^2}dx =$$

$$=\frac{37}{8}\arcsin\left(\frac{x+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{37}}{2}}\right)+\frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)\sqrt{\frac{37}{4}-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}}{2}+C=$$

$$=\frac{13}{8}\arcsin\frac{2x+5}{\sqrt{37}}+\frac{(2x+5)\sqrt{-x^2-5x+3}}{8}+C,$$

(воведовме смена $x+\frac{5}{2}=t,\ \ dx=dt.$). ●

7.54. $\int\sqrt{x^2+4x+3}dx$

Решение. За дадениот интеграл со трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена добиваме дека

$$\int\sqrt{x^2+4x+3}dx=\int\sqrt{(x+2)^2-1}\,dx=$$

$$=\frac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-1}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}\right|+C=$$

$$=\frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C,$$

(воведовме смена $x+2=t,\ \ dx=dt.$). ●

7.55. $\int\sqrt{x^2+2x+1}\,dx$

Решение. За дадениот интеграл со трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена добиваме дека

$$\int\sqrt{x^2+2x+1}dx=\int\sqrt{\left(x+\frac{2}{2}\right)^2-\frac{2^2-4\cdot 1}{2}}\,dx=\int(x+1)dx=\frac{(x+1)^2}{2}+C,$$

(воведовме смена $x+1=t,\ \ dx=dt.$). ●

7.56. $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}dx$

Решение. Со примена на методот на неопределени коефициенти, подинтегралната функција ќе ја запишеме како збир од прости дробно рационални функции. Од равенството

$$\frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}=\frac{(3x^2+1)(x^2+x-2)+1}{x^2+x-2}$$

$$=3x^2+1+\frac{1}{x^2+x-2}$$

имаме дека

$$\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}dx=\int (3x^2+1)dx+\int \frac{dx}{x^2+x-2}=$$

$$=\int (3x^2+1)dx+\int \frac{dx}{x^2+x-2}=$$

$$=\int (3x^2+1)dx+\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}=$$

$$=\int (3x^2+1)dx+\int \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}\right]dx=$$

$$=x^3+x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C=$$

$$=x^3+x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C. \bullet$$

7.57. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}$

Решение. Најмалиот заеднички содржател за именителите на дропките $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ е бројот $6,$ односно НЗС $(2,3)=6.$ Со смената

$$x+2=t^6, \quad x=t^6-2,\ dx=6t^5dt,$$

добиваме дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}=6\int\frac{t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=$$

$$=6(t^2-t+1)dt-6\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=$$

$$=2\sqrt{x+2}-3\sqrt[3]{x+2}+6\sqrt[6]{x+2}-6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}+1\right|+C. \bullet$$

7.58. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$

Решение. Воведуваме смена

$$\sqrt{x^2+3}=t-x.$$

Со квадрирање на двете страни добиваме $x^2+3=t^2-2tx+x^2,$ од каде што следува дека $x=\frac{t^2-3}{2t}.$ Тогаш, заради

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{t^2+3}{2t},\quad dx=\frac{t^2+3}{2t^2}dt,$$

добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\frac{t^2+3}{2t^2}}{\frac{t^2+3}{2t}} dt = \int \frac{dt}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+3}| + C. \quad \bullet$$

7.59. $\int \cos 3x \cos 5x \, dx$

Решение. Со примена на тригонометриските формули за трансформација на производ од функции во збир од функции добиваме дека

$$\int \cos 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int [\cos 2x + \cos 8x] dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 8x}{16} + C. \quad \bullet$$

7.60. $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

Решение. Со примена на тригонометриските формули за трансформација на производ од функции во збир од функции добиваме дека

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int [\sin(-x) + \sin 5x] dx =$$

$$= \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + C. \quad \bullet$$

7.61. $\int \sin 4x \sin 7x dx$

Решение. Со примена на тригонометриските формули за трансформација на производ од функции во збир од функции добиваме дека

$$\int \sin 4x \sin 7x dx = \frac{1}{2} \int [\cos 3x - \cos 11x] dx = \frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 11x}{22} + C. \quad \bullet$$

7.62. $\int \sin^2 3x \, dx$

Решение. Со помош на идентитетот $\sin\ x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ и го намалуваме степенот на $\sin x$ за единица, односно добиваме

$$\int \sin^2 3xdx = \frac{1}{2}\int [1-\cos 6x]dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 6xdx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{6} + C. \ \bullet$$

7.63. $\int \cos^2 4xdx$

Решение. Со помош на идентитетот $\cos x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ го намалуваме степенот на $\cos x$ за единица, односно добиваме

$$\int \cos^2 4xdx = \frac{1}{2}\int [1+\cos 8x]dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 8xdx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 8x}{8} + C. \ \bullet$$

7.64. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

Решение. Ја воведуваме смената

$$x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Од равенството $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ добиваме дека

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int dt = t + C = tg\frac{x}{2} + C. \ \bullet$$

7.65. $\int \frac{\cos xdx}{1+\cos x}$

Решение. Ја воведуваме смената

$$x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Од равенството $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ добиваме дека

$$\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} =$$

$$= 2arctgt - t + C = x - tg\frac{x}{2} + C. \bullet$$

7.66. $\int \sin^6 xdx$

Решение. Според рекурентната формула

$$\int \sin^n xdx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} xdx + C,$$

наоѓаме дека

$$\int \sin^6 xdx = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6}\int \sin^4 xdx =$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6}\left(-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2 xdx\right) =$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6}\left(-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx\right)\right) =$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6}\left(-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}(x+C)\right)\right) =$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} - \frac{5\sin^3 x \cos x}{24} - \frac{5\sin x \cos x}{16} + \frac{5x}{16} + C. \bullet$$

7.67. $\int \cos^5 xdx$

Решение. Според рекурентната формула

$$\int \cos^n xdx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} xdx + C,$$

наоѓаме дека

$$\int \cos^5 x dx = \frac{\cos^4 x \sin x}{5} + \frac{4}{5}\int \cos^3 x dx =$$

$$= \frac{\cos^4 x \sin x}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x dx \right) =$$

$$= \frac{\cos^4 x \sin x}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{\cos^3 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}(\sin x + C) \right) =$$

$$= \frac{\cos^4 x \sin x}{5} + \frac{4\cos^2 x \sin x}{15} + \frac{8\sin x}{15} + C. \bullet$$

7.6. Задачи за самостојна работа

1. Најди барем една примитивна функција $\varphi(x)$ на функцијата $f(x)$, ако:

а) $f(x) = 0$ б) $f(x) = 1$ в) $f(x) = e^x$

2. Најди функција $f(x)$, за која што важи

а) $f'(x) = 3 + \cos x$ б) $f'(x) = \frac{1}{x}$ в) $f'(x) = x + \frac{1}{2}$

3. Покажи дека функцијата $\varphi(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$, ако:

а) $\varphi(x) = \ln(e^x - 1)$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$, $x \neq 0$

б) $\varphi(x) = -\ln|\cos x|$, $f(x) = tgx$, $\cos x \neq 0$

в) $\varphi(x) = arctg\frac{1}{x}$, $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \neq 0$

Со примена на таблицата на основните интеграли пресметај ги следните интеграли: (задачи 8.4. – 8.46.)

4. $\int 4x^3 dx$

5. $\int dx$

6. $\int \frac{3}{2}x^2 dx$

7. $\int x^{-3} dx$

8. $\int \frac{3dx}{5x^4}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$

10. $\int x^{\frac{1}{2}} dx$

11. $\int 4\sqrt[3]{x} dx$

12. $\int 11x\sqrt[4]{x^3} dx$

13. $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}} dx$

14. $\int \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$

15. $\int (x-2)^2 dx$

16. $\int (3x-2) dx$

17. $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$

18. $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$

19. $\int \left(x^4 - \sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

20. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x} dx$

21. $\int \frac{6x^4 + 8x^2 - 5x + 2}{x} dx$

22. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$

23. $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx$

24. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$

25. $\int \frac{x^4 + \sqrt{x^3} + \sqrt{x} + 3}{x\sqrt{x}} dx$

26. $\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$

27. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$

28. $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$

29. $\int (3^x-4^x)dx$

30. $\int \frac{1-\cos x}{2}dx$

31. $\int \frac{1+2\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

32. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

33. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx$

34. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

35. $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

36. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

37. $\int \frac{2dx}{3x^2+3}$

38. $\int \frac{4dx}{\sqrt{4+4x^2}}dx$

39. $\int \frac{x^4dx}{1+x^2}$

40. $\int \frac{5dx}{\sqrt{9-9x^2}}$

41. $\int \left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4}{x}\right)dx$

42. $\int \left(\frac{a}{x}-\frac{b}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

43. $\int \left(3e^x-\frac{4}{\sqrt{16-16x^2}}\right)dx$

44. $\int \left(\frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}\right)dx$

45. $\int \frac{18x^2-2}{3x-1}dx$

46. $\int \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}dx$

47. Определи ја равенката на кривата $y = f(x)$ ако се познати нејзиниот извод и една точка од нејзиниот график:

а) $y' = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right), \quad M(1,2)$

б) $y' = e^x + 2x, \quad M(0,-1)$

в) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}, \quad M\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$

Со примена на методот на замена најди ги следните интеграли:
(задачи 8.48. – 8.85.)

48. $\int (3x+5)^{17} dx$

49. $\int (1-7x)^{10} dx$

50. $\int \frac{3dx}{(1-5x)^{11}}$

51. $\int x(x^2-18)^{23} dx$

52. $\int \frac{2xdx}{x^4+1}$

53. $\int \frac{dx}{3x+5}$

54. $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+4} dx$

55. $\int \sqrt{x-5} dx$

56. $\int \sqrt[3]{3x-2} dx$

57. $\int \sqrt[5]{1+2x} dx$

58. $\int x^2 \sqrt{x^3-9} dx$

59. $\int x^5 \sqrt[3]{x^6-7} dx$

60. $\int x\sqrt{a^2+b^2x^2} dx$

61. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

62. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^2}}$

63. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

64. $\int (e^{-2x} + e^{-x}) dx$

65. $\int (2x+1)e^{x^2+x-3} dx$

66. $\int xe^{-x^2}dx$

67. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$

68. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+2}}$

69. $\int e^{\sin x}\cos x dx$

70. $\int \frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$

71. $\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$

72. $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$

73. $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}$

74. $\int 3\sin 2x dx$

75. $\int \cos(2x+3)dx$

76. $\int x\sin(x^2+1)dx$

77. $\int x\cos(x^2-1)dx$

78. $\int tgx dx$

79. $\int ctgx dx$

80. $\int \sin^5 x\cos x dx$

81. $\int \cos^4 x\sin x dx$

82. $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$

83. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

84. $\int a^{\sin x}\cos x dx$

85. $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$

Со примена на методот на парцијална интеграција пресметај ги следниве интеграли: (задачи 8.86 – 8.97.)

86. $\int x\cos x\, dx$

87. $\int x^3 \ln x\, dx$

88. $\int x^2\cos x\, dx$

89. $\int x^2 \sin x\, dx$

90. $\int (x-1)\sin x\, dx$

91. $\int (2x+1)\cos x\, dx$

92. $\int x\cos 2x\, dx$

93. $\int x\sin 3x\, dx$

94. $\int x^2 \cos 4x\, dx$

95. $\int arctgx\, dx$

96. $\int x2^{-x}\, dx$

97. $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

Пресметај ги следниве неопределени интеграли: (задачи 98. – 121.)

98. $\int \frac{dx}{x^2-36}$

99. $\int \frac{dx}{x^2-7}$

100. $\int \frac{dx}{x^2+49}$

101. $\int \frac{dx}{x^2+11}$

102. $\int \frac{dx}{x^2-8x+5}$

103. $\int \frac{dx}{x^2-10x+25}$

104. $\int \frac{dx}{x^2+5x+1}$

105. $\int \frac{9x-1}{x^2+3x+2}$

106. $\int \frac{2x-1}{x^2+3x+8}\, dx$

107. $\int \frac{2x-7}{x^2-10x+25}\, dx$

108. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+64}}$

109. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-81}}$

110. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

111. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-12x+36}}$

112. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-6}}$

113. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+8}}$

114. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-x^2}}$

115. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-16}}\, dx$

116. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}\, dx$

117. $\int \sqrt{x^2+25}\, dx$

118. $\int \sqrt{x^2+7}\, dx$

119. $\int \sqrt{x^2-64}\, dx$

120. $\int\sqrt{11-x^2}\,dx$ **121.** $\int\sqrt{x^2+2x+8}\,dx$

Пресметај ги следниве неопределени интеграли: (задачи 122. – 127.)

122. $\int\frac{x^3-3x+4}{x-2}dx$ **123.** $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$

124. $\int\frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}dx$ **125.** $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$

126. $\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$ **127.** $\int\frac{dx}{x^2(x^2+4)}$

Пресметај ги следниве неопределени интеграли: (задачи 128. - 131)

128. $\int\frac{1+\sqrt[6]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ **129.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-1}-\sqrt[4]{3x-1}}$

130. $\int\frac{x+\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+25}}dx$ **131.** $\int\frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-4})\sqrt{x^2-4}}$

Пресметај ги следниве неопределени интеграли: (задачи 132. - 137)

132. $\int\cos 9x\cos 3x\,dx$ **133.** $\int\sin 4x\sin 6x\,dx$

134. $\int\sin^3 xdx$ **135.** $\int\cos^3 xdx$

136. $\int\frac{1}{6-2\cos+4\sin x}dx$ **137.** $\int\frac{1}{9+5\sin x}dx$

8. Определен интеграл

8.1. Дефиниција и основни својства на определениот интеграл

❖ Нараснувањето на било која примитивна функција на функцијата $f(x)$ кога аргументот се менува од $x=a$ до $x=b$ се вика *определен интеграл на функцијата*. Запишуваме

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Определен интеграл на функција $f(x)$ ако е позната една примитивна функција $\varphi(x)$ се пресметува по формулата

$$\int_a^b f(x)dx=\varphi(b)-\varphi(a),$$

каде што a и b се викаат *граници на определениот интеграл* и тоа a е *долна граница*, додека b е *горна граница*. Функцијата $f(x)$ се вика *подинтегрална функција* или *интегранд.*

За бројот $\varphi(b)-\varphi(a)$ ќе ја користиме ознаката $\varphi(x)\Big|_a^b$.

❖ Нека е даден интервалот $[a,b]$, $a,b\in\mathbf{R}$. Множеството точки

$$\pi=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\},\ \text{такви што } a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

се нарекува *поделба* на интервалот $[a,b]$.

Броевите x_i, $i=0,1,...,n$, ги викаме *делбени точки за поделбата* π , интервалите $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,...,n$ ги викаме *подинтервали на поделбата* π, а нивните должини ги означуваме со $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,...,n.$

Најголемиот од позитивните броеви Δx_i, $i=1,...,n,$ го нарекуваме *дијаметар* на поделбата π и го означуваме со $d(\pi)$. Накусо, запишуваме

$$d(\pi)=\max_{i=1,\dots,n}\Delta x_i.$$

Ако $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е ограничена функција, тогаш збирот $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

го нарекуваме *Риманов интегрален збир,* каде што $\pi=\{x_0,x_1,\cdots x_n\}$ е некоја поделба на сегментот $[a,b]$ и $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\cdots,n.$

Ако постои границата

$$\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

за секоја поделба $\pi = \{x_0, x_1, \cdots x_n\}$ на интервалот $[a,b]$ и за секој избор на точките $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n,$ тогаш таа гранична вредност се вика *определен интеграл* на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$.

За функција која има определен интеграл на интервалот $[a,b]$, велиме дека е *интеграбилна* на тој интервал.

❖ Ако функцијата f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, тогаш и функцијата λf е интеграбилна на истиот интервал, и притоа важи равенството

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx .$$

❖ Ако функциите f и g се интеграбилни на интервалот $[a,b]$, тогаш и функцијата $f+g$ е интеграбилна на истиот интервал и притоа важи равенството

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

❖ Ако функцијата f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и $c \in (a,b)$, тогаш важи

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

❖ Ако f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и ако $f(x) \geq 0,$ за секое $x \in [a,b]$, тогаш важи дека

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

❖ Ако f и g се интеграбилни на интервалот $[a,b]$ и $f(x) \geq g(x)$, за секое $x \in [a,b]$, тогаш важи дека

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx .$$

❖ Ако функциите f и $|f|$ се интеграбилни на интервалот $[a,b]$, тогаш важи неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

❖ Ако f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и ако $m \leq f(x) \leq M$, за секое $x \in [a,b]$, тогаш важи дека

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Пресметај ги следниве определени интеграли (8.1.- 8.5.)

8.1. $\int_1^3 x\,dx$

Решение. Најнапред да определиме една примитивна функција на подинтегралната функција $f(x) = x.$ Со пресметување на неопределениот интеграл наоѓаме дека

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

од каде што следува дека $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2}$ е една примитивна функција на подинтегралната функција. Тогаш за определениот интеграл имаме

$$\int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4. \bullet$$

8.2. $\int_1^2 5x^3 dx$

Решение. Со пресметување на неопределениот интеграл наоѓаме

$$\int 5x^3 dx = 5\int x^3 = \frac{5}{4}x^4 + C.$$

За вредноста на определениот интеграл добиваме

$$\int_1^2 5x^3 dx = \frac{5}{4}x^4\Big|_1^2 = \frac{5}{4}\left(2^4 - 1^4\right) = \frac{75}{4}. \bullet$$

8.3. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$

Решение. Со пресметување на неопределениот интеграл наоѓаме

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

За вредноста на определениот интеграл добиваме

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Bigg|_1^4 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{\sqrt{4}}\right) - \left(-\frac{1}{1} - \frac{2}{\sqrt{1}}\right) = \frac{7}{4}. \bullet$$

8.4. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

Решение. Со пресметување на неопределениот интеграл наоѓаме

$$\int \frac{\sin\left(\ln x\right)}{x} dx = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos\left(\ln x\right) + C,$$

каде што воведовме смена $\ln x = t,\ \ \dfrac{dx}{x} = dt.$

За вредноста на определениот интеграл добиваме

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = -\cos(\ln x)\Big|_1^e = 1-\cos 1. \ \bullet$$

8.5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x dx$

Решение. Со примена на методот на парцијална интеграција за неопределениот интеграл добиваме

$\int x\sin xdx = -x\cos x + \sin x + C,$ (избравме $u = x,\ dv = \sin xdx$).

Тогаш, вредноста на определениот интеграл изнесува

$$\int_0^{\pi/2} x\sin xdx = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi/2} = 1. \ \bullet$$

8.6. Докажи дека $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx = 2-\frac{\pi}{2}.$

Решение. Со пресметување на неопределениот интеграл наоѓаме

$$\int\sqrt{e^x-1}dx = \int\frac{2t^2dt}{t^2+1} = 2\int\frac{t^2+1}{t^2+1}dt - 2\int\frac{1}{t^2+1}dt = 2t - 2arctgt =$$

$$= 2\sqrt{e^x-1} - 2arctg\sqrt{e^x-1} + C,$$

каде што заменивме $\sqrt{e^x-1} = t,$ односно $x = \ln(t^2+1),\ \ dx = \dfrac{2tdt}{t^2+1}.$

За вредноста на определениот интеграл добиваме

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx = \left(2\sqrt{e^x-1} - 2arctg\sqrt{e^x-1}\right)\Big|_0^{\ln 2} = 2-\frac{\pi}{2}. \ \bullet$$

8.7. Нека функцијата $f(x)$ е интеграбилна функција на интервалот $[0,5]$ таква што важи

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 6,\quad \int_0^2 f(x)\,dx = 4 \text{ и } \int_2^5 f(x)\,dx = 6.$$

Пресметај го определениот интеграл $\int_1^5 f(x)\,dx.$

Решение. Според својствата на определениот интеграл и условите во задачата, добиваме дека

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx =$$

$$= \left[\int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right] + \int_2^5 f(x)\,dx = (4-6)+6 = 4. \quad \bullet$$

8.8. Покажи дека $\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}.$

Решение. Ако $m \neq n,$ за неопределенеиот интеграл имаме дека

$$\int \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x\,dx =$$

$$= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$$

каде што воведовме смени $t = (m-n)x,\;\; dt = (m-n)dx$ за првиот интеграл, и $u = (m+n)x,\;\; du = (m+n)dx$ за вториот интеграл.

За вредноста определениот интеграл добиваме дека

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \left(\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Ако $m = n,$ за неопределенеиот интеграл имаме дека

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \sin^2 mx dx = \frac{1}{2}\int \left[1 + \cos 2mx\right] dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2mx}{4m} + C,$$

каде што воведовме смена $t = 2mx, \;\; dt = 2m\, dx.$

За вредноста определениот интеграл добиваме дека

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin mx}{4m} \right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi. \;\; \bullet$$

8.9. Со помош на Риманови збирови пресметај ги следниве определени интеграли:

1) $\int_0^1 x^3 dx$ 2) $\int_a^b dx, \;\; a, b \in \mathbf{R}, \; a < b$

Решение. 1) Подинтегралната функција е непрекината, па според тоа е интеграбилна. За да го пресметаме интегралот доволно е да избереме произволна поделба π на сегментот $\left[a, b\right]$ за која што должината на подинтервалите со најголема должина $d(\pi) \to 0,$ кога $n \to \infty,$ и да ја најдеме граничната вредност на соодветните интегрални збирови, за кој било избор на точките $\xi_i \in \left[x_{i-1,} x_i \right], \;\; i = 1, \ldots, n.$ Дефинираме поделба

$$\pi = \left\{ x_i = \frac{i}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

Тогаш $d(\pi) \to 0,$ кога $n \to \infty.$ Во секој од подинтервалите за точка ξ_i го избираме десниот крај на подинтервалот, $\xi_i = x_i = \frac{i}{n},$ за $i = 1, 2, ..., n.$ За соодветниот интегрален збир добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

За границата на инегралниот збир, односно за определениот интеграл наоѓаме дека

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}.$$

2) Подинтегралната функција е непрекината, па според тоа е интеграбилна. Дефинираме поделба

$$\pi = \left\{ x_i = a + i\frac{b-a}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

Имаме дека $d(\pi) \to 0,$ кога $n \to \infty.$ Во секој од подинтервалите за точка ξ_i го избираме десниот крај на подинтервалот, $\xi_i = x_i = a + i\frac{b-a}{n},$ за $i = 1, 2, ..., n.$ За соодветниот интегрален збир добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} = \frac{n(b-a)}{n} = b - a.$$

За границата на инегралниот збир, односно за определениот интеграл наоѓаме дека

$$\int_a^b dx = \lim_{n\to\infty} b - a = b - a. \; \bullet$$

8.10. Со примена на Римановата дефиницијата на определен интеграл докажи ги следниве равенства:

1) $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx = 3$ 2) $\int\limits_{0}^{5} 2^x dx = \frac{2^5 - 1}{\ln 2}$

Решение. 1) Подинтегралната функција е непрекината, па според тоа е интеграбилна. Дефинираме поделба

$$\pi = \left\{ x_i = -1 + \frac{3i}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

Имаме дека $d(\pi) \to 0,$ кога $n \to \infty.$ Во секој од подинтервалите за точ-ка ξ_i го избираме десниот крај на подинтервалот, $\xi_i = x_i = -1 + \frac{3i}{n},$ за $i = 1, 2, ..., n.$ За соодветниот интегрален збир добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(-1 + \frac{3i}{n} \right)^2 \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2} \right) \frac{3}{n} =$$

$$= 3 - \frac{18}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

За границата на инегралниот збир, односно за определениот интеграл наоѓаме дека

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx = \lim_{n \to \infty} 3 - \frac{18}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 3.$$

2) Подинтегралната функција е непрекината, па според тоа е интеграбилна. Дефинираме поделба

$$\pi = \left\{ x_i = \frac{5i}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

Имаме дека $d(\pi)\to 0,$ кога $n\to\infty.$ Во секој од подинтервалите за точка ξ_i го избираме десниот крај на подинтервалот, $\xi_i = x_i = \frac{5i}{n},$ за $i=1, 2,...,n.$ За соодветниот интегрален збир добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{5i}{n}} \frac{5}{n}.$$

За границата на инегралниот збир, односно за определениот интеграл наоѓаме дека

$$\int_0^5 2^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{5i}{n}}\frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{5}{n}}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1}\cdot\frac{5}{n} = \frac{2^5 - 1}{\ln 2}.$$

8.11. Пресметај го интегралот $\int_a^b \frac{dx}{x^2},\ a,b\in\mathbf{R},\ 0<a<b,$ делејќи го интеравалот на интеграција на произволен начин и избирајќи ги за точки ξ_i геометриските средини на апсцисите на краиштата на подинтервалите, односно $\xi_i = \sqrt{x_i\,x_{i+1}}.$

Решение. 1) Подинтегралната функција е непрекината, па според тоа е интеграбилна. Дефинираме поделба

$$\pi = \left\{ x_i = a + i\frac{b-a}{n}\ |\ i = 0,1,\ldots,n \right\}.$$

Имаме дека $d(\pi)\to 0,$ кога $n\to\infty.$ Во секој од подинтервалите за точка ξ_i таква што $\xi_i = \sqrt{x_i\,x_{i+1}},$ за $i=1, 2,...,n.$ За соодветниот интегрален збир добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1}x_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

За границата на инегралниот збир, односно за определениот интеграл наоѓаме дека

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

8.12. Со помош на Риманов збир, покажи дека се точни равенствата:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right] = \frac{7}{3}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$

Решение. Ја разгледуваме функција $f(x) = x^2,\ x \in [1,2].$ Таа е непрекината, па според тоа е интеграбилна. Дефинираме поделба

Дефинираме поделба

$$\pi = \left\{ x_i = 1 + \frac{i}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

Имаме дека $d(\pi) \to 0,$ кога $n \to \infty.$ Во секој од подинтервалите за точка ξ_i го избираме десниот крај на подинтервалот, $\xi_i = x_i = 1 + \frac{i}{n},$ за $i = 1, 2, \ldots, n.$ За соодветниот интегрален збир добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right].$$

Забележуваме дека општиот член на низата чијашто граница треба да ја определиме е еднаква на интегралната сума на разгледуваната функција.

Од друга страна, знаеме дека граничната вредност на интегралниот збир на фунцијата е еднаква на определениот интеграл на функцијата на разгледуваниот интервал. Според тоа, имаме дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=$$

$$=\int_1^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{7}{3}.$$

8.13. Утврди кој од интегралите

1) $\int_0^1 xdx$ или $\int_0^1 x^2dx$ 2) $\int_0^1 xdx$ или $\int_0^1 e^xdx$

3) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin xdx$ или $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos xdx$ 4) $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$ или $\int_0^1 xdx$

има поголема вредност, без да ги пресметаш нивните вредности.

Решение. 1) За доказ на тврдењето поаѓаме од неравенство

$x^2\le x,$ за секое $x\in[0,1].$

Тогаш заради својствата на определениот интеграл имаме дека

$$\int_0^1 x^2dx\le\int_0^1 xdx.$$

2) За доказ на тврдењето поаѓаме од неравенство

$x\le e^x,$ за секое $x\in[0,1].$

Тогаш заради својствата на определениот интеграл имаме дека

$$\int_0^1 xdx\le\int_0^1 e^xdx.$$

3) За доказ на тврдењето поаѓаме од неравенство

$$\cos x \le \sin x, \text{ за секое } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогаш заради својствата на определениот интеграл имаме дека

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx.$$

4) За доказ на тврдењето поаѓаме од очигледното неравенство

$$1 + x^2 \ge x^2, \text{ за секое } x \in [0,1], \text{ односно}$$

$$\sqrt{1+x^2} \ge \sqrt{x^2}, \text{ за секое } x \in [0,1],$$

од каде што следува дека

$$\sqrt{1+x^2} \ge x, \text{ за секое } x \in [0,1].$$

Тогаш заради својствата на определениот интеграл имаме дека

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \ge \int_0^1 x dx. \; \bullet$$

8.14. Докажи дека $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}.$

Решение. За доказ на тврдењето поаѓаме од неравенството

$$1 + \sin x \ge \sin x, \text{ за секое } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

кое што е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{1+\sin x} \le \frac{1}{\sin x}, \text{ за секое } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

од каде што заради својствата на определениот интеграл имаме дека

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}. \ \bullet$$

8.15. Докажи дека $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \le 1.$

Решение. Ако $0 \le x \le 1$ тогаш имаме $1 \le x^2+1 \le 2,$ од каде што добиваме $\frac{1}{2} \le \frac{1}{x^2+1} \le 1.$ Заради својствата на определениот интеграл имаме дека

$$\int_0^1 \frac{1}{2} dx \le \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \le \int_0^1 dx,$$

од каде што добиваме дека

$$\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \le 1.$$

8.16. Оцени ја вредноста на определениот интеграл $\int_0^2 \frac{1}{x+10} dx.$

Решение. Ако $0 \le x \le 2$ тогаш имаме $10 \le x+10 \le 12,$ од каде што добиваме $\frac{1}{12} \le \frac{1}{x+10} \le \frac{1}{10}.$ Заради својствата на определениот интеграл

$$\int_0^2 \frac{1}{12} dx \le \int_0^2 \frac{1}{x+10} dx \le \int_0^2 \frac{1}{10} dx,$$

од каде што ја добиваме оценката за определениот интеграл

$$\frac{1}{6} \le \int_0^2 \frac{dx}{x+10} \le \frac{1}{5}. \ \bullet$$

8.2. Примена на определениот интеграл

8.2.1. Пресметување на плоштини

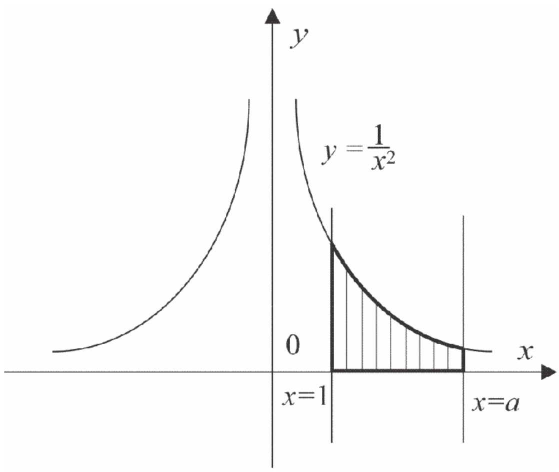
❖ Нека $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се непрекинати функции на интервалот $[a,b]$ и нека $y_1(x) \leq y_2(x)$, за секое $x \in [a,b]$. Плоштината на фигурата ограничена со графиците на функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$, и правите $x=a$ и $x=b$, се пресметува по формулата

$$P = \int_a^b \left[y_2(x) - y_1(x) \right] dx.$$

8.17. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со кривата $y = \frac{1}{x^2}$, правите $x=1$, $x=a$ и $y=0$, каде што $a>1$.

Решение. Од условот на задачата имаме дека $y_1(x)=0$ и $y_2(x)=\frac{1}{x^2}$, и границите на интеграција се 1 и a. Плоштината изнесува (слика 30.)

$$P = \int_1^a \left[\frac{1}{x^2} - 0 \right] dx = \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^a = 1 - \frac{1}{a}. \ \bullet$$

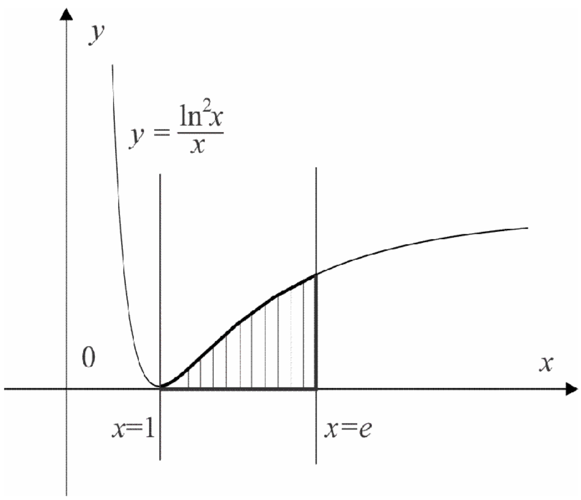


Слика 30.

8.18. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со дел од кривата $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ и правите $x=1,\ \ x=e$ и $y=0.$

Решение. Од условот во задачата имаме $y_1(x)=0$ и $y_2(x)=\frac{\ln^2 x}{x}.$ Границите на интеграција се 1 и $e,$ па бараната плоштина изнесува (слика 31.)

$$P=\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx=\frac{\ln^3 x}{3}\Big|_1^e=\frac{1}{3}.$$

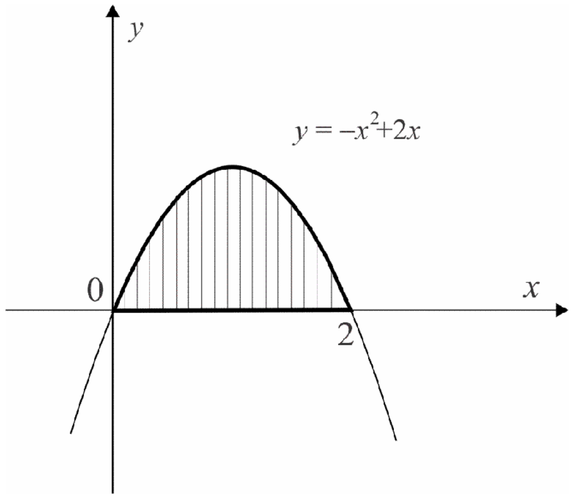


Слика 31.

Да забележиме дека за пресметување на определениот интегралот, најнапред го најдовме неопределениот интегарал со воведување на смената $t=\ln x.$ Тогаш $dt=\frac{dx}{x},$ па добивме дека

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\ln^3 x}{3}+C. \ \bullet$$

8.19. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со лакот на параболата $y(x) = -x^2 + 2x$ и правата $y = 0$.



Слика 32.

Решение. Од условот на задачата имаме $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = -x^2 + 2x.$ Со решавање на равенката $-x^2 + 2x = 0,$ ги добиваме апсцисите на пресечните точки на дадените криви, $x_1 = 0$ и $x_2 = 2,$ кои се всушност границите на интеграција. Бараната плоштина изнесува (слика 32.)

$$P = \int_0^2 \left[(-x^2 + 2x) - 0 \right] dx = \int_0^2 \left[-x^2 + 2x \right] dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}. \bullet$$

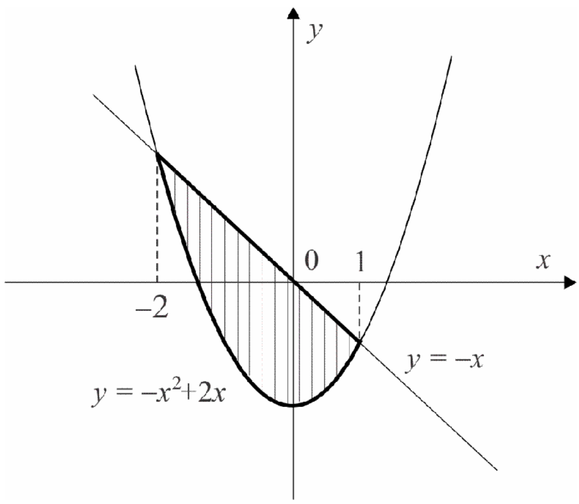
8.20. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со параболата $y = x^2 - 2$ и правата $y = -x$.

Решение. Со решавање на системот равенки

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases}$$

ги добиваме апсцисите на пресечните точки од параболата и правата, а со тоа и границите на интеграција. Имаме дека $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Бараната плоштина изнесува (слика 33.)

$$P = \int_{-2}^{1} \left[-x - (x^2 - 2) \right] dx = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}. \bullet$$



Слика 33.

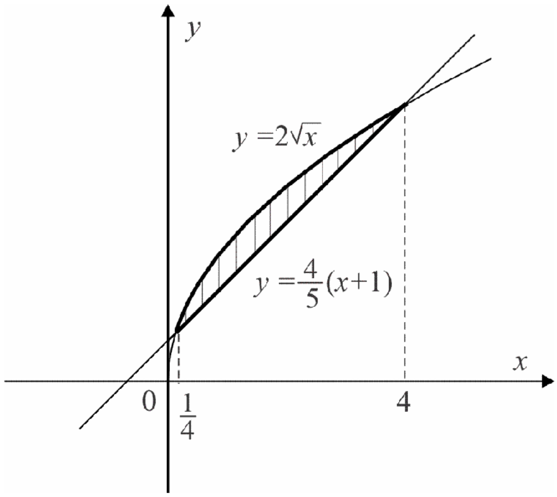
8.21. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со лакот на параболата $y = 2\sqrt{x}$ и правата $y = \frac{4}{5}(x+1)$.

Решение. Со решавање на системот равенки

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ y = \frac{4}{5}(x+1) \end{cases}$$

ги добиваме апсцисите на пресечните точки од параболата и правата, а со тоа и границите на интеграција. Имаме дека $x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = 4$. Бараната плоштина изнесува (слика 34.)

$$P = \int_{1/4}^{4} \left[2\sqrt{x} - \frac{4}{5}(x+1) \right] dx = \left(\frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x \right) \Bigg|_{1/4}^{4} = \frac{9}{8}. \bullet$$



Слика 34.

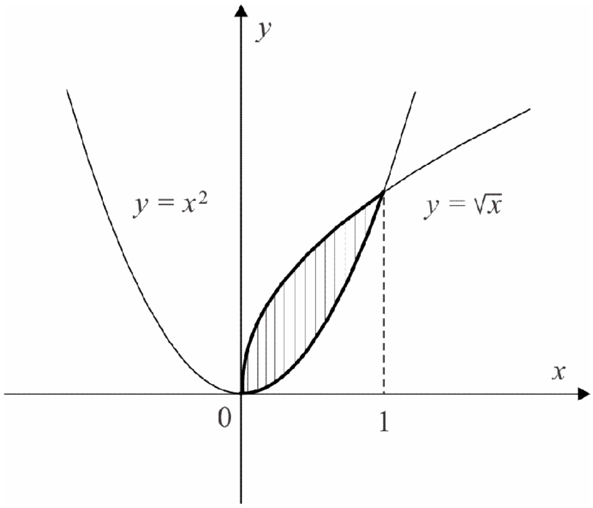
8.22. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со кривите $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение. Ако го решиме системот равенки

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

за апсцисите на пресечните точки, односно за границите на интеграција добиваме дека $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Тогаш, бараната плоштина изнесува (слика 35.)

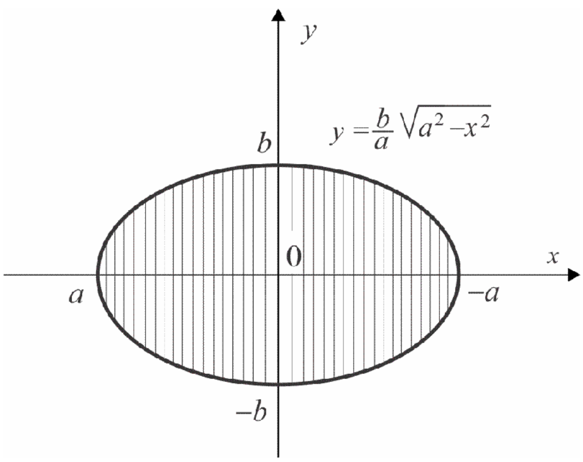
$$P=\int_0^1\left[\sqrt{x}-x^2\right]dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}. \;\bullet$$



Слика 35.

8.23. Пресметај ја плоштината на елипса со полуоски a и $b.$

Решение. Во рамнината на елипсата воведуваме координатен систем, така што $x-$оската и $y-$оската да бидат оски на симетрија на



Слика 36.

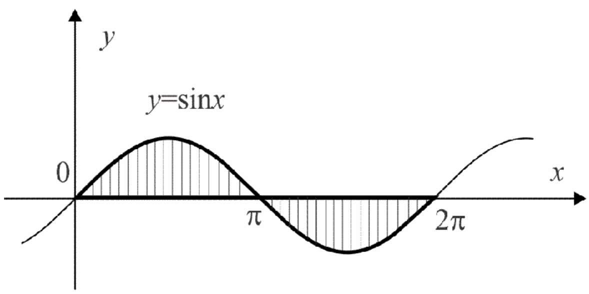
елипсата (слика 36.). Тогаш равенката на елипсата гласи $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Со решавање на равенката по y се добива $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, при што знакот „$+$“ важи за точките над, а знакот „–“ за точките под $x-$оската. Елипсата е симетрична во однос на $x-$оската и $y-$оската, па плоштината на нејзиниот дел којшто лежи во првиот квадрант е еднаква на четвртина од нејзината плоштина. Освен тоа, за апсцисите на точките од елипсата над интервалот $[0,a]$, важи $0\le x\le a,$ така што

$$P=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\bigg|_0^a+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\bigg|_0^a\right)=ab\pi.$$

Од резултатот за плоштина на елипса со полуоски a и $b,$ за $a=b=r,$ се добива дека плоштината на круг со радиус r изнесува $r^2\pi.$ ●

8.24. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со еден бран на синусоидата $y=\sin x$ и апсцисната оска.



Слика 37.

Решение. Бараната плоштина $P=P_1+P_2$ каде што P_1 е плоштината на фигурата ограничена со графиците на функциите $y_1(x)=0$ и

$y_2(x) = \sin x$ определени од $x = 0$ до $x = \pi$, односно (слика 37.).

$$P_1 = \int_0^{\pi} [\sin x - 0]\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2,$$

додека P_2 е плоштината на фигурата ограничена со графиците на функциите $y_1(x) = \sin x$ и $y_2(x) = 0$ од $x = \pi$ до $x = 2\pi$, односно

$$P_2 = \int_{\pi}^{2\pi} [0 - \sin x]\, dx = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 2.$$

Тогаш $P = P_1 + P_2 = 2 + 2 = 4.$ ●

8.25. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со лакот на параболата $y^2 = 2x + 1$ и правата $y = x - 1.$

Решение. Во овој случај за поедноставно пресметување на плоштината на дадената фигура може да ги замениме улогите на променливите x и y, односно да ја користиме формулата

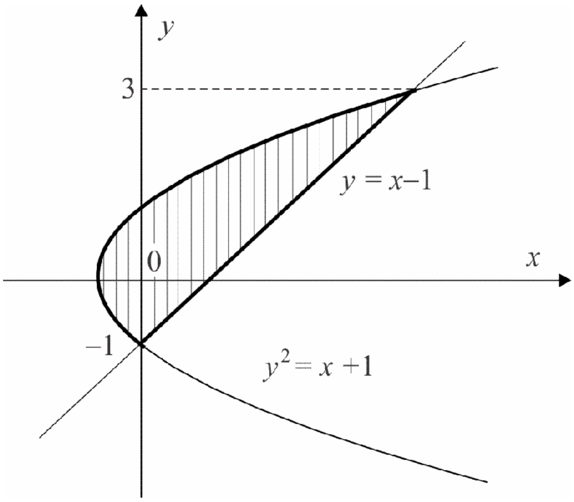
$$P = \int_c^d [h_1(y) - h_2(y)] dy,$$

каде што $h_1(y)$ и $h_2(y)$ се непрекинати и ненегативни на интервалот $[c, d]$, и важи $h_1(y) \geq h_2(y)$, за секое $x \in [c, d]$.

Со решавање на системот равенки

$$\begin{cases} x = \dfrac{(y^2 - 1)}{2} \\ x = y + 1 \end{cases}$$

ги добиваме ординатите на пресечните точки од параболата и правата, а со тоа и границите на интеграција. Имаме дека $y_1 = -1$ и $y_2 = 3.$



Слика 38.

Бараната плоштина изнесува (слика 38.)

$$P=\int_{-1}^{3}\left[\left(y+1\right)-\frac{y^2-1}{2}\right]dy=\int_{0}^{4}\left[-\frac{y^2}{2}+y+\frac{3}{2}\right]dy=\left(-\frac{y^3}{6}+\frac{y^2}{2}+\frac{3}{2}x\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{16}{3}.$$ ●

8.26. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y=x^2-2x+2$ и $y=x^2+4x+5,$ и правата $y=1.$

Решение. Со решавање на системот

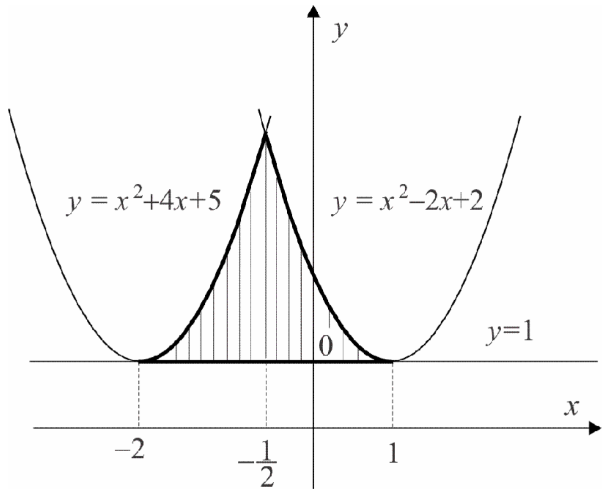
$$\begin{cases} y=x^2-2x+2 \\ y=x^2+4x+5 \end{cases}$$

ја наоѓаме апсцисата на пресечната точка на двете криви, $x=-\frac{1}{2}.$

Понатаму, со решавање на системите

$$\begin{cases} y=x^2-2x+2 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=x^2+4x+5 \\ y=1 \end{cases}$$

ги наоѓаме аспцисата на пресечните точки на секоја од дадените параболите со дадената права, $x=-2$ и $x=1$.



Слика 39.

За плоштината на заградената фигура добиваме (слика 39.).

$$P=\int_{-2}^{-1/2}\left[(x^2-2x+2)-1\right]dx+\int_{-1/2}^{1}\left[(x^2+4x+5)-1\right]dx=$$

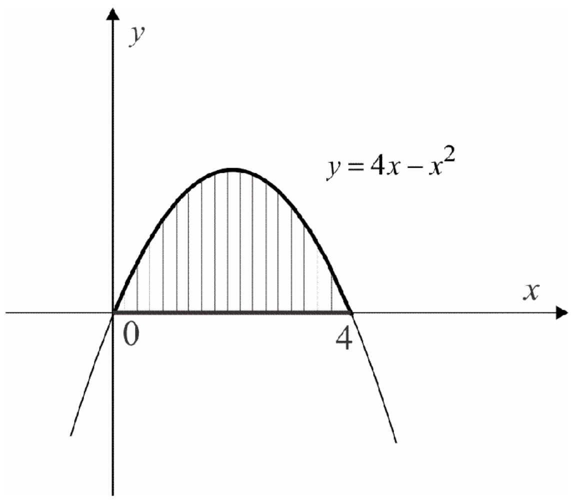
$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\Bigg|_{-2}^{-1/2}+\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right)\Bigg|_{-1/2}^{1}=\frac{21}{4}. \bullet$$

8.2.2. Пресметување на волумен на вртливи тела

Нека $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се непрекинати функции на интервалот $[a,b]$ и нека $y_1(x)\le y_2(x)$, за секое $x\in[a,b]$. Волуменот на вртливото тело добиено со ротација околу $x-$оската на рамнинската фигура ограничена со графиците на функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$, правите $x=a$, $x=b$ и апцисната оска се пресметува по формулата

$$P=\pi\int_a^b\left[y_2^2(x)-y_1^2(x)\right]dx.$$

8.27. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со параболата $y=4x-x^2$ и апсцисната оска околу $x-$ оската.



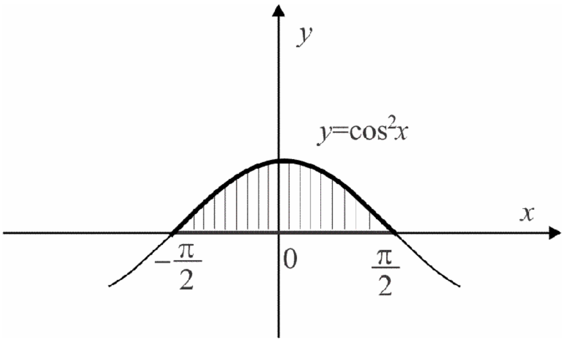
Слика 40.

Решение. Од условот на задачата имаме $y_1(x)=0$ и $y_2(x)=4x-x^2.$ Со решавање на равенката $4x-x^2=0,$ ги добиваме апсцисите на пресечните точки на кривите кои што ја заградуваат фигурата која што ротира, $x_1=0$ и $x_2=4,$ кои се всушност границите на интеграција. За волуменот на вртливото тело добиваме (слика 40.).

$$V=\pi\int_0^4\left[(4x-x^2)^2-0\right]dx=\pi\int_0^4\left[16x^2-8x^3+x^4\right]dx=$$

$$=\pi\left(16\frac{x^3}{3}-8\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^4=\frac{512}{15}\pi. \bullet$$

8.28. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со кривата $y=\cos^2 x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, околу $y-$ оската.

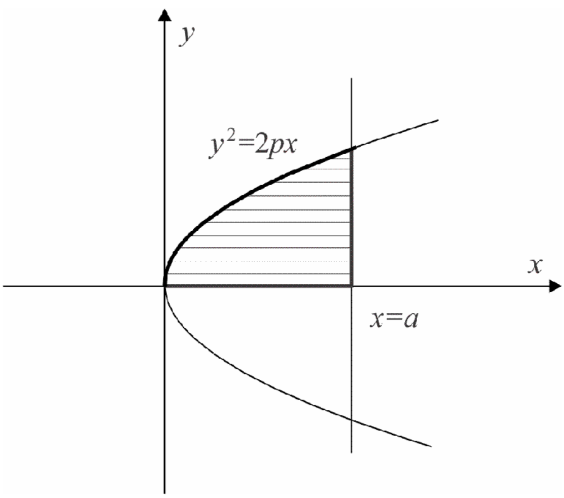


Слика 41.

Решение. За волуменот на вртливото тело добиваме (слика 41.).

$$V=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 x\,dx=\frac{\pi}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2x)^2\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2x)^2\,dx=\frac{\pi}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)^2\,dx=\frac{3\pi^2}{8}.\ \bullet$$



Слика 42.

8.29. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со дел од параболата $y^2 = 2px$ и правите $x = a$ и $y = 0$, околу $x-$оската.

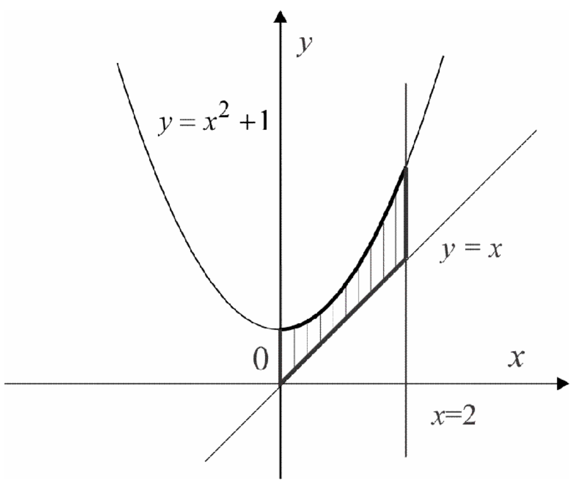
Решение. Телото добиено со ротација на фигурата ограничена со дел од параболата $y^2 = 2px$ околу својата оска на симетрија, се вика ротационен параболоид (слика 42.).

Неговиот волумен изнесува $V = \pi \int_0^a 2pxdx = \pi pa^2$. ●

8.30. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со кривата $y = x^2 + 1$ и првите $x = 0$, $x = 2$ и $y = x$, околу $x-$оската.

Решение. Волуменот на телото кое се добива со ротација на дадената фигура околу $x-$оската изнесува (слика 43.).

$$V = \pi \int_0^2 \left[(x^2+1)^2 - x^2 \right] dx = \pi \int_0^2 (x^4 + x^2 + 1)\, dx = \pi \left(x^4 + x^2 + 1 \right) \Big|_0^2 = \frac{166\pi}{15}. \bullet$$



Слика 43.

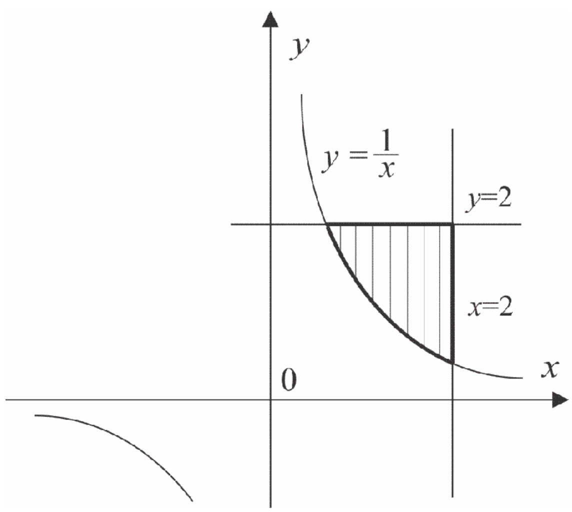
8.31. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со кривата $y=\frac{1}{x}$ и првите $x=2$ и $y=2$, околу $x-$оската.

Решение. Со решавање на системот

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=2 \end{cases}$$

ја добиваме апсцисата на една од пресечните точка на кривите кои што ја заградуваат фигурата која што ротира, $x=\frac{1}{2}$, што всушност е долната граница на интеграција. За волуменот на вртливото тело добиваме (слика 44.).

$$V=\pi\int_{1/2}^{2}\left[2^2-\frac{1}{x^2}\right]dx=\pi\left(4x+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1/2}^{2}=\frac{9\pi}{2}.$$



Слика 44.

8.32. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со кривата $y = \ln x$ и првите $x = 4$ и $y = 1,$ околу $y-$оската.

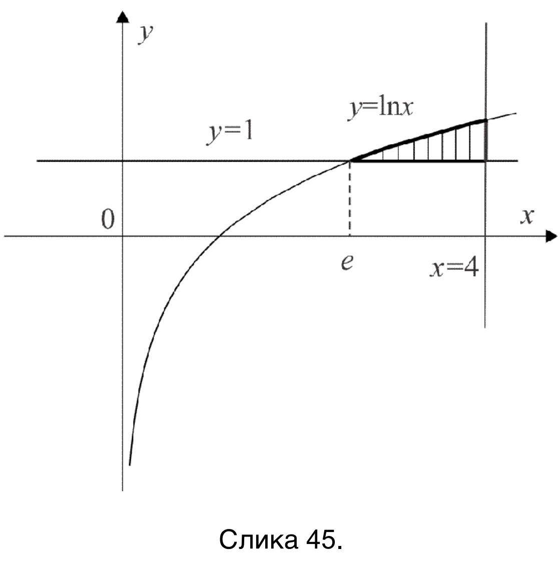
Решение. Со решавање на системот

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = 1 \end{cases}$$

ја добиваме апсцисите на една од пресечните точка на кривите кои што ја заградуваат фигурата која што ротира, $x = e,$ што всушност е долната граница на интеграција. За волуменот на вртливото тело добиваме (слика 45.).

$$V = \pi \int_e^4 \left[\ln^2 x - 1^2 \right] dx = \pi \int_e^4 \ln^2 x dx - \int_e^4 dx =$$

$$= \pi \left(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \right) \Big|_e^4 - x \Big|_e^4 = 4\pi \left(\ln^2 4 - 2 \ln 4 + 1 \right).$$



Слика 45.

Да забележиме дека за наоѓање на $\int \ln^2 x\,dx$ користиме парцијална интеграција, ($u=\ln^2 x,\ dv=dx;\ du=\frac{2\ln x}{x}dx,\ v=x$)

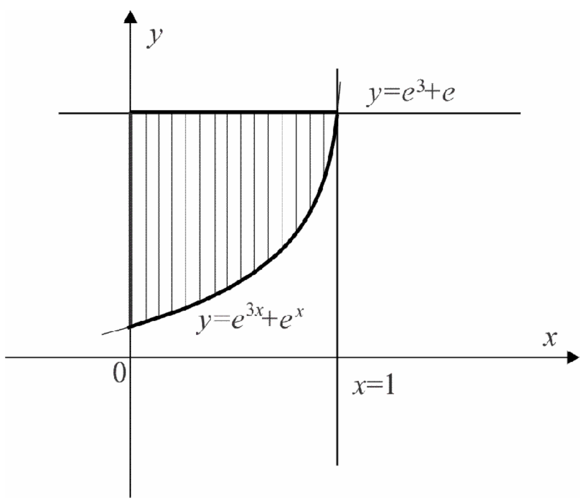
$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - x\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x.$$

каде што за наоѓање на $\int \ln x\,dx$ повторно користиме парцијална интеграција, ($u=\ln x,\ dv=dx;\ du=\frac{1}{x}dx,\ v=x$)

8.33. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со кривата $y=e^{3x}+e^{x}$, и правите $x=0$ и $y=e^3+e$, околу $x-$ оската.

Решение. За волуменот на вртливото тело добиваме (слика 46.).

$$V=\pi\int_0^1\left[(e^3+e)^2-(e^{3x}+e^x)^2\right]dx=\frac{1}{6}\left(7+3e^2+9e^4+5e^6\right)\pi. \bullet$$



Слика 46.

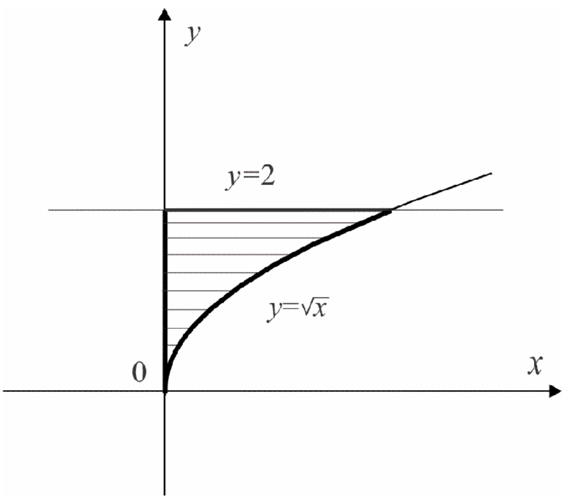
8.34. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со кривата $y=\sqrt{x}$, и правите $x=0$ и $y=2$, околу $x-$ оската.

Решение. Со решавање на системот

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=2 \end{cases}$$

ја добиваме апсцисата на една од пресечните точка на кривите кои што ја заградуваат фигурата која што ротира, $x=4$, што всушност е долната граница на интеграција. За волуменот на вртливото тело добиваме (слика 47.).

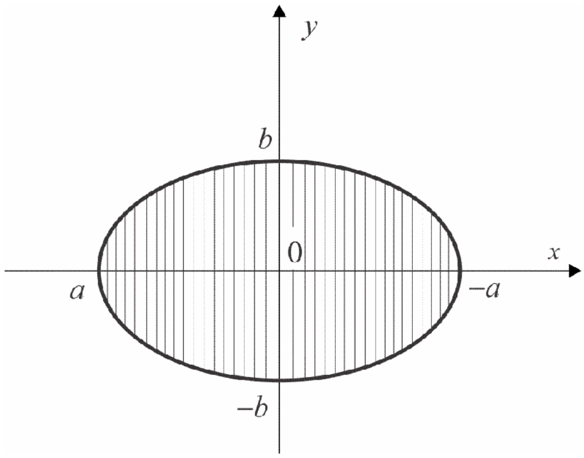
$$V=\pi\int_0^4\left[2^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right]dx=\pi\int_0^4\left[4-x\right]dx=\pi\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=8\pi. \bullet$$



Слика 47.

8.35. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ околу:

1) $x-$оската 2) $y-$оската



Слика 48.

Решение. Телото што се добива со ротација на елипса околу својата голема или мала оска се вика ротационен елипсоид (слика 48.).

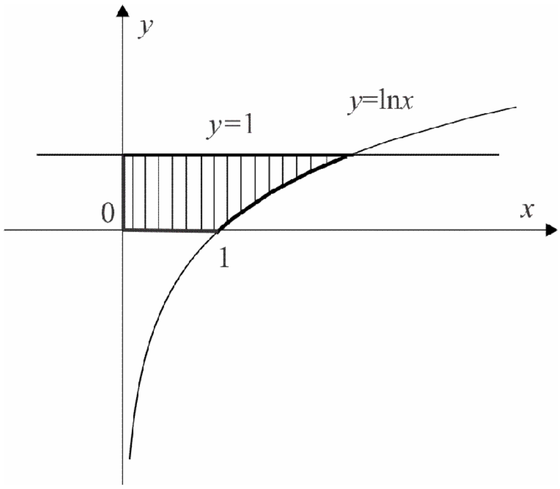
1) Од $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ имаме $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right).$ Волуменот на телото добиено со ротација на елипсата околу $x-$оската е:

$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2dx=\frac{b^2}{a^2}\pi\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}ab^2\pi\ .$$

2) Слично како под 1), волуменот на телото добиено со ротација на елипсата околу $y-$оската изнесува

$$V=\pi\int_{-b}^{b} x^2dy=\frac{4}{3}a^2b\pi\ .\ \bullet$$

8.36. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со кривата $y=\ln x$ и првите $x=0,\ \ y=0$ и $y=1,$ околу $y-$ оската.

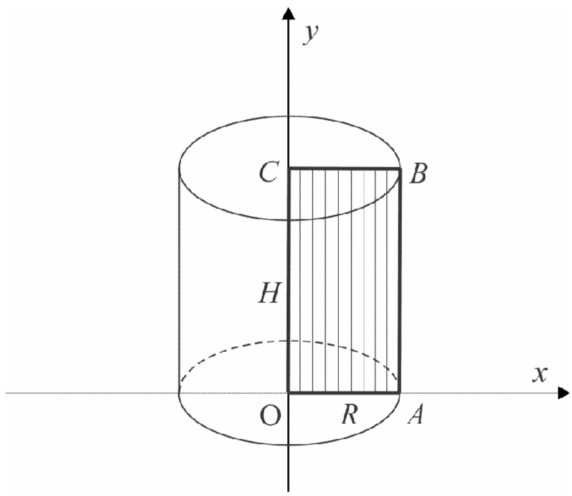


Слика 49.

Решение. Волуменот на телото кое се добива со ротација на дадената фигура околу y – оската изнесува (слика 49.)

$$V=\pi\int_0^1\left[e^{2y}-0\right]dy=\pi\int_0^1 e^{2y}dy=\frac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1).$$ ●

8.37. Пресметај го волуменот на цилиндар со радиус R и висина H.



Слика 50.

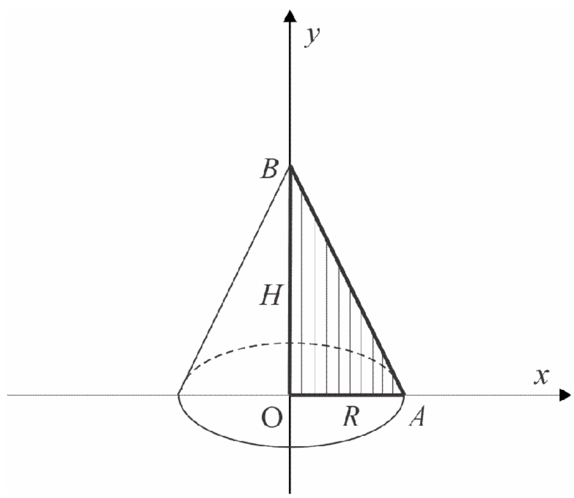
Решение. Цилиндарот на слика 48, со радиус R и висина H, се добива со ротација на правоаголникот $OABC$ околу $y-$оската. Равенката на правата AB е $x=R$, па бараниот волумен е (слика 50.)

$$V=\pi\int_0^H x^2dy=\pi\int_0^H R^2dy=R^2\pi H. \bullet$$

8.38. Најди ја формулата за пресметување на волумен на конус.

Решение. Конусот се добива со ротација на правоаголниот триаголник OAB околу $y-$оската. Равенката на правата AB е $\frac{x}{R}+\frac{y}{H}=1$, па волуменот на конусот изнесува (слика 51.).

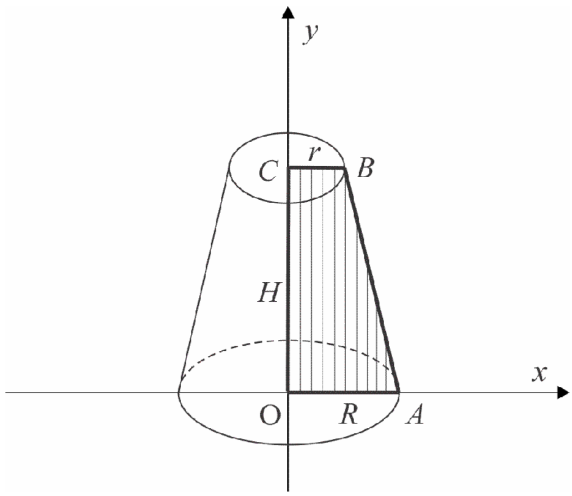
$$V=\pi\int_0^H x^2dy=\pi\int_0^H R^2\left(1-\frac{y}{H}\right)^2dy=\frac{R^2\pi H}{3}. \bullet$$



Слика 51.

8.39. Најди ја формулата за пресметување на волумен на пресечен конус.

Решение. Пресечен конус е ротационо тело кое што се добива со ротација на правоаголниот трапез $OABC$ со основи R и r и висина H, околу y – оската (слика 52.).



Слика 52.

Бидејќи точките A и B имаат координати $A(R,0)$ и $B(r,H)$, равенката на правата AB е $x=\frac{r-R}{H}y+R.$ Бараниот волумен изнесува

$$V=\pi\int_0^H x^2dy=\pi\int_0^H\left(\frac{r-R}{H}y+R\right)^2dy.$$

Воведуваме смена $\frac{r-R}{H}y+R=z.$ Тогаш $dy=\frac{H}{r-R}dz,$ а границите на интегрирање се $z_1=R$ и $z_2=r.$ Така, имаме дека

$$V=\pi\frac{H}{r-R}\int_R^r z^2dz=\pi\frac{H}{R-r}\int_r^R z^2dz=\frac{\pi H}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right).\ \bullet$$

8.2.3. Пресметување на должина на лак на крива

❖ Нека $y(x)$ е непрекината функција со непрекинат извод на интервалот $[a,b]$. Должината на лакот на дадената крива од точката со апсциса $x=a$ до точка со апсциса $x=b$ се пресметува по формулата

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

8.40. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y=\dfrac{x^6+8}{16x^2}$, над интервалот $[2,3]$.

Решение. Имаме дека $y'(x)=\dfrac{x^6-4}{4x^3}$. Должината на лакот на кривата изнесува

$$L=\int_2^3\sqrt{1+\left(\frac{x^6-4}{4x^3}\right)^2}\,dx=\int_2^3\sqrt{\left(\frac{x^6+4}{4x^3}\right)^2}\,dx=\int_2^3\frac{x^6+4}{4x^3}dx=$$

$$=\int_2^3\frac{x^6}{4x^3}dx+\int_2^3\frac{4}{4x^3}dx=\frac{1}{4}\int_2^3x^3\,dx+\int_2^3\frac{1}{x^3}dx=\frac{x^4}{16}\bigg|_2^3-\frac{1}{2x^2}\bigg|_2^3=\frac{595}{144}.\ \bullet$$

8.41. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y=\ln\left(1-x^2\right)$, од точката со апсциса $x=0$ до точката со апсциса $x=\dfrac{1}{2}$.

Решение. Имаме дека $y'(x)=-\dfrac{2x}{1-x^2}$. Должината на лакот на дадената крива изнесува

$$L=\int_0^{1/2}\sqrt{1+\left(-\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int_0^{1/2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx=\int_0^{1/2}\frac{x^2+1}{1-x^2}dx=$$

$$=-\int_0^{1/2}dx+2\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x^2}dx=\ln 3-\frac{1}{2}. \bullet$$

8.42. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$, над интервалот $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

Решение. Имаме дека $y'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$. Должината на лакот на дадената крива изнесува

$$L=\int_{1/2}^{2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2}\,dx=\int_{1/2}^{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x^4-2+\frac{1}{x^4}\right)}dx=$$

$$=\int_{1/2}^{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)}dx=\int_{1/2}^{2}\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x}\right)\Bigg|_{1/2}^{2}=\frac{33}{16}. \bullet$$

8.43. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y=x^2-\frac{\ln x}{8}$, над интервалот $[1,2]$.

Решение. Имаме дека $y'(x)=2x-\frac{1}{8x}$. Должината на лакот на дадената крива изнесува

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left(2x+\frac{1}{8x}\right)dx=\left(x^2+\frac{\ln x}{8}\right)\Bigg|_1^2=\frac{\ln 2}{8}+3. \bullet$$

8.44. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y=\cos x,$ над интервалот $[0,\pi].$

Решение. Имаме дека $y'(x)=-\sin x.$ Должината на лакот на дадената крива изнесува

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{1+(-\sin x)^2}\ dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=2. \ \bullet$$

8.45. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$ која што лежи меѓу точките со апсциси $x=0$ и $x=2.$

Решение. Имаме дека $y'(x)=2x\sqrt{x^2+1}.$ Должината на лакот на дадената крива изнесува

$$L=\int_0^{2}\sqrt{1+\left(2x\sqrt{x^2+1}\right)^2}\ dx=\int_0^{2}\sqrt{1+4x^2\left(x^2+1\right)}\ dx=$$

$$=\int_0^{2}\sqrt{(2x+1)^2}\ dx=\int_0^{2}(2x+1)\ dx=\left(x^2+x\right)\Big|_0^2=6. \ \bullet$$

8.3. Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги определените интеграли со помош на Риманов збир:

1) $\int_0^1 e^x dx$ 2) $\int_1^3 x^4 dx$ 3) $\int_0^1 dx$

Пресметај ги определените интеграли: (задачи 2. - 43.)

2. $\int_{2}^{10} 4x dx$ **3.** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$ **4.** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

5. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$ **6.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2dx}{1+x^2}$ **7.** $\int_{1}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

8. $\int_{1}^{4} \sqrt{x}dx$ **9.** $\int_{-1}^{3} \sqrt[3]{x}$ **10.** $\int_{2}^{3} \left(3x^2 - \frac{4}{x} + 5\right)dx$

11. $\int_{1}^{4} (x-1)dx$ **12.** $\int_{-2}^{-1} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$ **13.** $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

14. $\int_{0}^{8} \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$ **15.** $\int_{0}^{2} 2^x dx$ **16.** $\int_{0}^{1} 2^x 3^{-x} dx$

17. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$ **18.** $\int_{0}^{\pi/2} \sin x dx$ **19.** $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

20. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} dx$ **21.** $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2} dx$ **22.** $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

23. $\int_{1}^{3} \frac{x^2dx}{1+x^3}$ **24.** $\int_{0}^{7} \frac{dx}{x^2-4}$ **25.** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+9}$

26. $\int_{1}^{2} \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+7}$ **27.** $\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2+4x+4}$ **28.** $\int_{0}^{1} x\sqrt{x^2+1}dx$

29. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ **30.** $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$ **31.** $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

32. $\int_{2}^{4} \sqrt{x^2-3}dx$ **33.** $\int_{0}^{2} \sqrt{x^2+4x+3}$ **34.** $\int_{0}^{\pi/2} \sin 2x dx$

35. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(1-x)dx$ **36.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ **37.** $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \cos 3x dx$

38. $\int\limits_0^{2} e^{-2x} dx$ **39.** $\int\limits_0^{1} \frac{e^{2x}+2e^{x}}{e^{2x}+1} dx$ **40.** $\int\limits_0^{1} \frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}$

41. $\int\limits_0^{e} x^2 \ln x dx$ **42.** $\int\limits_1^{e} (1+\ln x)^2 dx$ **43.** $\int\limits_1^{2} (3x+2)\ln x dx$

44. Докажи дека $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

45. Нека функцијата f е интеграбилна на $[0,5]$ и нека $\int\limits_0^{1} f(x)dx = 6,$ $\int\limits_0^{2} f(x)dx = 4$ и $\int\limits_2^{5} f(x)dx = 6.$ Пресметај:

1) $\int\limits_0^{5} f(x)dx$ 2) $\int\limits_1^{2} f(x)dx$

46. Покажи дека $\int\limits_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}.$

47. Покажи дека $\int\limits_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0.$

Докажи ги неравенствата: (задачи 48. - 56.)

48. $\int\limits_0^{1} x^2 dx \leq \int\limits_0^{1} x dx$ **49.** $\int\limits_0^{1} x^3 dx \leq \int\limits_0^{1} \sqrt{x} dx$

50. $\int_1^2 \frac{dx}{x} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,dx$

51. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,dx$

52. $\int_0^1 e^x dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx$

54. $\int_0^1 2^x dx \leq \int_0^1 2^{x^2} dx$

55. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin x dx$

56. $\int_1^2 \ln x dx \leq \int_0^1 (\ln x)^2 dx$

Утврди кој од наведените интеграли има поголема вредност, без тие да се пресметуваат: (задачи 57. - 62.)

57. $\int_1^3 x^2 dx$ или $\int_1^3 x^3 dx$

58. $\int_1^2 x dx$ или $\int_1^2 \sqrt{x} dx$

59. $\int_0^2 e^x dx$ или $\int_0^2 e^{3x} dx$

60. $\int_0^1 2^{x^2} dx$ или $\int_0^1 2^x dx$

61. $\int_0^1 3^{x^2} dx$ или $\int_0^1 3^x dx$

62. $\int_1^e x \ln x dx$ или $\int_1^e x \ln^2 x dx$

63. Оцени ја вредноста на следните определени интеграли:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+8}$ 2) $\int_0^{10} \frac{dx}{1+x^6}$ 3) $\int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1}$

64. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со параболата $y = x^2 - x + 6$, правите $x = 1$ и $x = 5$ и апцисната оска.

65. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со хиперболата $y = \frac{1}{x}$, правите $x = 1$ и $x = 4$ и апсцисната оска.

66. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со кривата $y = tgx,$ правата $x = \frac{\pi}{3}$ и апцисната оска.

67. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со еден полубран на синосоидата $y = \sin x$ и апцисната оска.

68. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со кривата $y = e^x,$ координатните оски и правата $x = \ln 5.$

69. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со кривата $y = \ln x,$ правите $y = 0$ и $x = e.$

70. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со параболата $y = x^2$ и правата $y = 2 - x.$

71. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со параболата $y = 4 - x^2$ и правата $y - x = 2.$

72. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со кривата $y = x^3$ правата $y = 8$ и ординатната оска.

73. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со параболите $y = -3 + 8x - 2x^2$ и $y = 6 - 4x + x^2.$

74. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со параболите $y = \frac{x^3}{3}$ и $y = 4 - \frac{2}{3}x^2.$

75. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со параболите $y = x^2$ и $y = \frac{x^2}{2}$ и правата $y = 2x.$

76. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со кривата $y=(x-1)^5+1$ и нејзината тангента паралелна со правата $10x-2y-5=0.$

77. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со параболата $y=x^2+4x+9$ и нејзината тангента во точките со апсциси $x_1=-3$ и $x_2=0.$

78. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со параболата $y=x^2-2x+3$ нејзината тангента во точката $M(2,-5)$ и ординатната оска.

79. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на рамнинската фигура ограничена со хиперболата $y=\dfrac{1}{x}$, правите $y=x,\quad x=1$ и апсцисната оска околу $x-$оската.

80. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на рамнинската фигура ограничена со параболата $y=x^2$, правите $x=1,\quad x=2$ и апсцисната оска околу $x-$оската.

81. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на рамнинската фигура ограничена со кривата $y=\sin x,\quad 0\le x\le \pi,$ и апсцисната оска околу $x-$оската.

82. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на рамнинската фигура ограничена со хиперболата $y=\dfrac{1}{x}$, правите $x=1,\quad x=4$ и апсцисната оска околу $x-$оската.

83. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на рамнинската фигура ограничена со кривите $y = \sin x$ и $y = \cos x$, и правата $x = \frac{\pi}{2}$ околу $x-$оската.

84. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на рамнинската фигура ограничена со кривата $y = \sin 2x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и апцисната оска околу $x-$оската.

85. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на рамнинската фигура ограничена со кривата $y = \sin x$ и правата $y = \frac{2}{\pi}x$ околу $x-$оската.

86. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на кривата $y = e^x$ околу $x-$оската ако $x \in [0,1]$.

ТАБЛИЦА НА ИЗВОДИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

Функција	Извод на функцијата
$y = C = \text{const.}$	$y' = 0$
$y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbf{R}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
$y = \sqrt{x},\ x > 0$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$
$y = a^x,\ a \neq 1, a > 0$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x,\ a \neq 1, a > 0,\ x > 0$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x, x > 0$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x,\ x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x,\ -1 < x < 1$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x,\ -1 < x < 1$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

ТАБЛИЦА НА ИНТЕГРАЛИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1,\ x > 0$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C,\quad x \neq 0$$

$$\int a^{x}\, dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C,\quad a \neq 1,\ a > 0$$

$$\int e^{x}\, dx = e^{x} + C$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C,\quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + C,\quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \begin{cases} \arcsin x + C, & -1 < x < 1 \\ -\arccos x + C, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$$

ТАБЛИЦА НА ИНТЕГРАЛИ ДОБИЕНА СО МЕТОДИТЕ НА ЗАМЕНА И ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C,$$

$$\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C,$$

$$\int \frac{x^2}{ax+b}dx = \frac{(ax+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3}\ln|ax+b| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(ax-2b)\sqrt{ax+b}}{3a^2} + C,$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2\left(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2\right)\sqrt{ax+b}}{15a^3} + C,$$

$$\int \frac{A}{a-x}dx = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{B}{(a-x)^{\alpha}}dx = \frac{B}{1-\alpha}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}} + C, \quad \alpha > 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C,$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+a^2}dx = x - a \cdot arctg\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+a^2}dx = \frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C,$$

$$\int \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{-1}{2\left(x^2+a^2\right)} + C,$$

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{-x}{2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a} arctg\,\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{x^3}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{a^2}{2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2} + C,$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C,$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C,$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C,$$

$$\int \frac{1}{x\cdot\left(x^n+a^n\right)}dx = \frac{1}{na^n}\ln\left(\frac{x^n}{x^n+a^n}\right) + C,$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n+a^n}dx = \frac{1}{n}\ln\left(x^n+a^n\right) + C,$$

$$\int \frac{x^m}{\left(x^n + a^n\right)^r} dx = \int \frac{x^{m=n}}{\left(x^n + a^n\right)^{r-1}} dx - a^n \int \frac{x^{m-n}}{\left(x^n + a^n\right)^r} dx + C,$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^\alpha} dx = \frac{M}{2(1-\alpha)} \frac{1}{(t^2+a^2)^{\alpha-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) K_\alpha, \quad \alpha > 1$$

каде што $K_\alpha = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^\alpha}, \quad t = x + \frac{p}{2}, a^2 = q - \frac{p^2}{4}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

$$\int (a^2 - x^2) dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{k} + C.$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C, \quad a \neq 0$$

$$\int x^2 e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx = \frac{e^{-ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}\left(a\cos bx - b\sin bx\right)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\int e^{ax}\ln x dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx + C$$

$$\int \cos\alpha x \cos\beta x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} + \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\right] + C$$

$$\int \sin\alpha x \sin\beta x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}\right] + C$$

$$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} + \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\right] + C.$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx + C$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx + C$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Adnađević D., Kadelburg Z., *Matematička analiza I*, Nauka, Krug, Beograd, 1998

[2] Aigner M., Ziegler M., *Proofs from THE BOOK*, Springer - Verlag, 2009

[3] Aljančić S., *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1979

[4] Apostol T. M., *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, Springer - Verlag, 1990

[5] Bogoslavov V., *Zbirka rešenih zadataka iz matematike*, Zavod za uđbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1980

[6] Зорич А., *Математический анализ*, Наука, Москва, 1984

[7] Ивановски Н., *Математичка анализа I*, Универзитет „Кирил и Методиј", Скопје, 1981

[8] Јанев И., *Збирка задачи за IV год*ина, Просветно дело, Скопје, 1988

[9] Kadelburg Z., Miličić M., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 3*, Krug, Beograd, 2003

[10] Kadelburg Z., Miličić M., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 4*, Krug, Beograd, 2003

[11] Кудрявцев Д., *Курс математического анализа*, Высшяа школа, Москва, 1981

475 Kurepa S., *Matematička analiza*, *Diferenciranje i integriranje*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971

[13] Kurepa S., *Matematička analiza*, *Funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971

[14] Ljaško I., Boljarčuk K., Gaj, G., Golovač P., *Zbirka zadataka iz matematičke analize 1*, Naša knjiga, Beograd, 2007

[15] Малчески Ристо, *Калкулус,* Европски универзитет, Скопје, 2007

[16] Малчески Ристо, *Алгебарски структури,* Европски универзитет, Скопје, 2007

[17] Mamuzić Z., Gerasimović G., *Osnovi matematičke analize, Naučna knjiga*, Beograd, 1970

[18] Marjanović M., *Matematička analiza I,* Naučna knjiga, Beograd, 1979

[19] Miličić M., Kadelburg Z., Dukić, D., *Uvod u teoriju brojeva*, Društvo matematičara Srbije, 1990, Beograd

[20] Miličević P., *Matematička analiza za srednjoškolce*, Zavod za uđbenike i nastavna sredstva Beograd, 1996

[21] Митевска Ј., Грибовска – Поповиќ Л., Манова Ераковиќ В., Митрушева Ф., *Математика за IV година на реформираното гимназиско образование*, Просветно дело, Скопје, 2004

[22] Митевска Ј., Грибовска – Поповиќ Л., Младеновска Д., *Математика за матуранти,* Просветно дело, Скопје, 2006

[23] Никольский М., *Курс математического анализа*, Наука, Москва, 1975

[24] Попов Б., *Математичка анализа за IV година на математичко – информатичка струка*, Просветно дело, Скопје, 1987

[25] Rudin W.,, *Principle of mathematical analysis*, Me Graw – Hill Co., New York, 1964

[26] Takači Đ., Takači A., *Zbirka zadataka iz analize I*, *prvi deo*, Prirodno - matematički fakultet, Novi Sad, 1997

[27] Тренчевски К., *Елементарна алгебра*, Просветно дело, Скопје, 2001

[28] Тренчевски К., Тренчевски Г., Крстеска Б., Здравеска С., *Математичка анализа за IV година на реформираното гимназиско образование*, Просветно дело, Скопје, 2009

[29] Тренчевски К., Тренчевски Г., Крстеска Б., Здравеска С., *Алгебра за III година на реформираното гимназиско образование*, Просветно дело, Скопје, 2009

[30] Тренчевски К., Димовски Д., Тренчевски Г., Крстеска Б., Кондинска Л., *Математика за I година на реформираното гимназиско образование*, Просветно дело, Скопје, 2002

[31] Ćirić D., *Uvod u matematičku analizu*, Prirodno – matematički fakultet, Niš, 2008

[32] Uščumlić M., Miličić M., *Zbirka zadataka iz više matematike*, Nauka, Beograd, 1994

[33] Фихтенгольц М., *Курс дифференциального и интегрального исљисленињ*, Наука, Москва, 1966

[34] Hardy H., Wright M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, 1960

[35] Шилов Р., *Математиљеский анализ. Функции одного переменного,* Наука, Москва, 1969

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41